G. FONTENÉ

Expression de la quantité $\wp(u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n})$ au moyen d'un pfaffien

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 469-487

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__469_0>

EXPRESSION DE LA QUANTITÉ

$p(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n})$

AU MOYEN D'UN PFAFFIEN,

PAR M. G. FONTENÉ,

PROFESSEUR AU COLLÈGE ROLLIN.

I.

1. Considérons la fonction pu définie par l'équation différentielle

$$p' = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3} = \sqrt{G(p)};$$

les racines de l'équation $G(p) = 0$ étant a, b, c, on a les trois fonctions uniformes

$$Xu = \sqrt{pu - a}, \qquad Yu = \sqrt{pu - b}, \qquad Zu = \sqrt{pu - c},$$

avec

$$p' = -2XYZ.$$

Avant de donner la formule générale d'addition relative à pu, je me propose d'obtenir *explicitement* la valeur de la quantité

$$X(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n})$$

en fonction des quantités

$$X_1 \text{ et } Y_1 Z_1, \quad X_2 \text{ et } Y_2 Z_2, \quad \ldots;$$

je me fonderai sur ce fait que la somme des zéros distincts d'une fonction elliptique est égale à la somme des pôles distincts, à des multiples des périodes près; la méthode suivie est analogue à celle que l'on trouve dans la Note de M. Hermite ajoutée au *Cours de Calcul différentiel et intégral* de J.-A. Serret, relativement au « théorème découvert par Abel pour l'addition d'un nombre quelconque d'arguments » dans les fonctions sn, cn, dn, avec cette différence que les arguments à ajouter sont ici en nombre pair au lieu d'être en nombre impair : on arrive ainsi à un covariant.

Soient $2n+1$ arguments dont la somme est nulle :

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n+1} = 0;$$

on peut regarder ces arguments comme les racines d'une équation de la forme

$$(2) \qquad p'(Ap^{n-1} + Bp^{n-2} + \ldots + E) + (A'X^2p^{n-1} + B'X^2p^{n-2} + \ldots + E'X^2 + F') = 0;$$

le premier membre est, en effet, une fonction elliptique d'ordre $2n+1$ de l'argument u, admettant un pôle d'ordre $2n+1$ qui est zéro, de sorte que les zéros de cette fonction ont une somme nulle; l'équation dépend d'ailleurs de $2n$ paramètres. Si l'on élève au carré après avoir isolé les termes qui contiennent p', on obtient

$$X^2Y^2Z^2(Ap^{n-1} + \ldots + E)^2 - (A'X^2p^{n-1} + \ldots + E'X^2 + F')^2 = 0;$$

si l'on imagine que p est remplacé par $X^2 + a$, que Y^2 et Z^2 sont remplacés par $X^2 + (a-b)$ et $X^2 + (a-c)$, on a une équation en X^2, qui est du degré $2n+1$, et le produit des valeurs de X^2 est $\frac{F'^2}{4A^2}$; on a donc

$$(3) \qquad X_1X_2 \ldots X_{2n}X_{2n+1} = \frac{F'}{2A},$$

le signe étant déterminé par l'hypothèse d'arguments infiniment petits, au moyen de l'équation (2), avec $X\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$.

Supposons maintenant que l'on donne $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$; les rapports des $2n+1$ coefficients A, ..., F' sont déterminés par $2n$ relations telles que

$$p'_1(Ap_1^{n-1} + \ldots + E) + (A'X_1^2p_1^{n-1} + \ldots + E'X_1^2 + F') = 0$$

ou

$$-2X_1Y_1Z_1(Ap_1^{n-1} + \ldots + E) + (A'X_1^2p_1^{n-1} + \ldots + E'X_1^2 + F') = 0;$$

en désignant par sa première ligne horizontale, placée dans un crochet, un déterminant d'ordre $2n$ dont les lignes se rapportent aux indices 1, 2, ..., $2n$, on a

$$\frac{F'}{A}=\frac{[-2X_1Y_1Z_1p_1^{n-1},\ldots,-2X_1Y_1Z_1p_1,-X_1Y_1Z_1;X_1^2p_1^{n-1},\ldots,X_1^2p_1,X_1^2]}{[\quad p'_1p_1^{n-2},\quad\ldots,\quad p'_1;\quad X_1^2p_1^{n-1},\ X_1^2p_1^{n-2},\ldots,X_1^2,\quad 1]}$$

ou

$$\frac{F'}{A}=\frac{X_1X_2\ldots X_{2n}[-2Y_1Z_1p_1^{n-1},\ldots,-2Y_1Z_1p_1,-2Y_1Z_1;X_1p_1^{n-1},\ldots,X_1p_1,X_1]}{[\quad p'_1p_1^{n-2},\quad\ldots,\quad p'_1;\quad p''_1,\quad p_1^{n-1},\quad\ldots,\quad p_1,\quad 1\,]};$$

au dénominateur, on a ajouté aux éléments de l'avant-dernière colonne les éléments de la dernière colonne multipliés par a, etc. Dès lors, la formule (3) donne la formule d'addition cherchée

$$(\alpha)\qquad X(u_1+u_2+\ldots+u_{2n})=-\frac{1}{2}\,\frac{[-2Y_1Z_1p_1^{n-1},\ldots,-2Y_1Z_1p_1,-2Y_1Z_1;X_1p_1^{n-1},\ldots,X_1p_1,X_1]}{[\quad p'_1p_1^{n-2},\quad\ldots,\quad p'_1;\quad p''_1,\quad p_1^{n-1},\quad\ldots,\quad p_1,\quad 1\,]}.$$

(Si les u sont des infiniment petits, que l'on prend sous la forme $\frac{1}{A}$, on a une identité intéressante.)

2. On peut remplacer le second membre de la formule (α) par un covariant relatif à une fonction elliptique du second ordre, admettant les mêmes périodes que la fonction pu dont se déduit la fonction Xu qui figure au premier membre. On est mis sur la voie de cette transformation par la remarque suivante : l'intégrale de l'équation d'Euler

$$\frac{dx_1}{\sqrt{F_1}}+\frac{dx_2}{\sqrt{F_2}}=0$$

a été donnée par Laguerre sous la forme

$$\frac{\sqrt{P_1}\sqrt{Q_2}-\sqrt{P_2}\sqrt{Q_1}}{x_1-x_2}=\text{const.},$$

P et Q étant deux polynomes de second degré en x dont le produit donne le polynome F; et, si l'on considère un argument u défini par la relation

$$du=\frac{dx}{\sqrt{F}}=\frac{dx}{\sqrt{P}\sqrt{Q}},$$

on a facilement

$$X(u_1+u_2-s) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{P_1}\sqrt{Q_2}-\sqrt{P_2}\sqrt{Q_1}}{x_1-x_2}, \tag{4}$$

s étant la somme des pôles de la fonction elliptique $x(u)$; la fonction pu dont se déduit X a les mêmes périodes que la fonction $x(u)$, de sorte que g_2 et g_3 sont égaux aux invariants S et T du polynome F, et les trois fonctions X, Y, Z correspondent aux trois modes de décomposition du polynome F en un produit de deux facteurs du second degré. C'est cette formule que nous allons généraliser, en raison de ce fait que les $2n$ colonnes du déterminant numérateur dans la formule (α) se partagent en deux systèmes de n colonnes, les premières contenant $-2YZ$, les dernières contenant X, avec $-2YZ.X=\sqrt{G}$; ce fait est d'ailleurs lié à la forme de l'équation (2).

Considérons une fonction elliptique du second ordre à pôles distincts, soit x, définie (à la somme des pôles près) par l'équation différentielle

$$\left\{\begin{aligned} x' = \sqrt{F(x)} &= \sqrt{A_0x^4+4A_1x^3+6A_2x^2+4A_3x+A_4} \\ &= \sqrt{A_0}\sqrt{x-A}\sqrt{x-B}\sqrt{x-C}\sqrt{x-D}; \end{aligned}\right. \tag{5}$$

nous écrirons

$$x' = \sqrt{P}\sqrt{Q} = UV, \tag{6}$$

P et Q étant deux polynomes du second degré dont le premier a pour racines B et C, le second a pour racines D et A, et l'on sait que les deux fonctions $U=\sqrt{P}$, $V=\sqrt{Q}$ sont des fonctions uniformes de l'argument. La somme des pôles étant s, ou $s+2\omega_1$, $s+2\omega_2$, $s+2\omega_3$, avec $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$, la demi-somme des pôles est $\frac{s}{2}$, ou $\frac{s}{2}+\omega_1, \ldots$; les valeurs de x qui correspondent aux valeurs $\frac{s}{2}$, $\frac{s}{2}+\omega_1, \ldots$, de l'argument sont D, A, B, C, de sorte que, pour $u=\frac{s}{2}$, et pour $u=\frac{s}{2}+\omega_1$, on a $V=0$. Nous poserons $u=\frac{s}{2}+v$, et nous aurons $x\left(\frac{s}{2}+v\right)$, fonction paire de v.

Si l'on considère une autre fonction elliptique du second ordre y, aux mêmes périodes que la première, de sorte que le nouveau polynome F aura mêmes invariants S et T que le premier, la somme des pôles étant s', on aura de même $y\left(\frac{s'}{2}+v\right)$; et l'on sait que les deux quantités x et y, pour une même valeur de v, sont liées par une relation doublement linéaire, qui donne

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta};$$

on en conclut

$$x' = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)y'}{(\gamma y + \delta)^2},$$

$$\mathrm{U} = \frac{\lambda \mathrm{R}}{\gamma y + \delta}, \qquad \mathrm{V} = \frac{\mu \mathrm{S}}{\gamma y + \delta},$$

R et S étant deux fonctions uniformes analogues à U et V, λ et μ deux facteurs constants dont le produit est $\alpha\delta - \beta\gamma$, de manière à avoir $y' = \mathrm{RS}$.

Cela posé, l'expression

$$-\frac{1}{2}\frac{[x_1^{n-1}\mathrm{U}_1, \ldots, x_1\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_1; x_1^{n-1}\mathrm{V}_1, \ldots, x_1\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_1]}{[x_1^{n-2}x'_1, \ldots, x'_1;\ x_1^n, x_1^{n-1}, \ldots, x_1, 1]},$$

analogue au second membre de la formule (α), est un covariant absolu pour les fonctions x qui ont les mêmes périodes, x représentant $x\left(\frac{s}{2}+v\right)$, avec la variable v.

Pour le vérifier, considérons d'abord le déterminant numérateur : si on l'ordonne en produits de mineurs d'ordre n par des mineurs d'ordre n, on a par exemple le terme

$$\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2\ldots\mathrm{U}_n(x_1-x_2)\ldots(x_{n-1}-x_n).\mathrm{V}_{n+1}\mathrm{V}_{n+2}\ldots\mathrm{V}_{2n}(x_{n+1}-x_{n+2})\ldots(x_{2n-1}-x_{2n});$$

la substitution

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}$$

donne

$$x_1 - x_2 = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(y_1 - y_2)}{(\gamma y_1 + \delta)(\gamma y_2 + \delta)}.$$

et le terme considéré donne le produit d'un terme analogue, avec R et S au lieu de U et V, y au lieu de x, par les facteurs

$$\frac{(\lambda\mu)^n}{(\gamma y_1+\delta)\dots(\gamma y_{2n}+\delta)}$$

amené par U et V,

$$\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(\gamma y_1+\delta)^{n-1}\dots(\gamma y_n+\delta)^{n-1}}$$

amené par les binomes $(x_1-x_2)\dots(x_{n-1}-x_n)$,

$$\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(\gamma y_{n+1}+\delta)^{n-1}\dots(\gamma y_{2n}+\delta)^{n-1}}$$

amené par les derniers binomes; le facteur complet est donc

$$\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{n^2}}{(\gamma y_1+\delta)^n\dots(\gamma y_{2n}+\delta)^n},$$

et ce facteur est le même pour tous les termes.

Pour le déterminant dénominateur, si on l'ordonne en produits de mineurs d'ordre $n-1$ par des mineurs d'ordre $n+1$, on a par exemple le terme

$$x'_1 x'_2\dots x'_{n-1}(x_1-x_2)\dots(x_{n-2}-x_{n-1})\times(x_n-x_{n+1})\dots(x_{2n-1}-x_{2n});$$

par la substitution $x=\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}$, ce terme donne le produit d'un terme analogue, avec y' au lieu de x', y au lieu de x, par les facteurs

$$\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{n-1}}{(\gamma y_1+\delta)^2\dots(\gamma y_{n-1}+\delta)^2}$$

amené par les dérivées,

$$\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}}{(\gamma y_1+\delta)^{n-2}\dots(\gamma y_{n-1}+\delta)^{n-2}}$$

amené par les premiers binomes,

$$\frac{\alpha\delta-\beta\gamma^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(\gamma y_n+\delta)^n\dots(\gamma y_{2n}+\delta)^n}$$

amené par les derniers binomes; le facteur complet est donc le même que pour le numérateur, et l'expression considérée est un covariant dans les conditions indiquées.

Or, si la fonction x est la fonction pu qui admet les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, et qui est définie par l'équation différentielle

$$p' = \sqrt{4p^3 - Sp - T} = -2YZ.X,$$

X étant nul pour $u = \omega_1$, l'expression ci-dessus, dans laquelle on fait $U = -2YZ$, $V = X$, se réduit au second membre de la formule (α). On peut donc écrire

$$X(v_1 + v_2 + \ldots + v_{2n}) = -\frac{1}{2}\frac{\Delta}{\Delta'},$$

ou, en remplaçant $\frac{s}{2} + v$ par u,

$$(\beta)\quad X(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} - ns) = -\frac{1}{2}\left[\frac{x_1^{n-1}U_1, \ldots\ldots, \quad U_1;\, x_1^{n-1}V_1, \ldots, V_1}{x_1^{n-2}x'_1, \ldots, x'_1;\, x''_1, \quad \ldots\ldots, \quad 1}\right].$$

On vient de préciser la fonction X en disant qu'elle est nulle pour $u = \omega_1$; nous écrirons ici les formules qui rattachent la fonction pv à la fonction $x(\frac{s}{2} + v)$: on a

$$p(v) = \frac{1}{24}F''(D) + \frac{\frac{1}{4}F'(D)}{x(\frac{s}{2} + v) - D},$$

$$p' = -\frac{1}{4}F'(D)\frac{x'}{(x - D)^2},$$

$$\frac{X\sqrt{D - A}}{\sqrt{x - A}} = \frac{Y\sqrt{D - B}}{\sqrt{x - B}} = \frac{Z\sqrt{D - C}}{\sqrt{x - C}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{F'(D)}}{\sqrt{x - D}},$$

avec

$$\sqrt{F'(D)} = \sqrt{A_0}\sqrt{D - A}\sqrt{D - B}\sqrt{D - C};$$

et, en prenant

$$U = \sqrt{P} = \sqrt{A_0}\sqrt{x - B}\sqrt{x - C},$$

$$V = \sqrt{Q} = \qquad \sqrt{x - A}\sqrt{x - D},$$

$$\left\{\begin{aligned} -2YZ &= -\frac{1}{2}\sqrt{F'(D)}\sqrt{D - A}\frac{U}{x - D}, \\ X &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{F'(D)}}{\sqrt{D - A}}\frac{V}{x - D}; \end{aligned}\right.$$

si la fonction x tend vers la fonction p, A_0 est un infiniment petit, D est un infiniment grand, et le produit $\sqrt{A_0}\sqrt{-D}$ tend vers -2.

II.

3. Relativement à l'expression de la quantité $p(u_1+\ldots+u_{2n})$ au moyen des quantités p_1 et p'_1, ..., j'indiquerai d'abord comment je suis arrivé par induction à une formule que j'ai vérifiée ensuite. Soient cinq arguments dont la somme est nulle

$$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=0;$$

on peut les regarder comme les racines d'une équation de la forme

$$p'(Ap-B)+A'p^2-B'p+C'=0,$$

les coefficients étant déterminés par les racines u_1, u_2, u_3, u_4, et les valeurs correspondantes de pu sont les racines de l'équation

$$(4p^3-g_2p-g_3)(Ap-B)^2-(A'p^2-B'p+C')^2=0.$$

Les coefficients de cette équation développée contiennent A^2, B^2, ..., AB, A′B′, A′C′, B′C′, et comme A, B, A′, B′, C′ sont les déterminants du quatrième ordre fournis par la matrice

$$\left\|\begin{matrix} p_1p'_1 & p'_1 & p_1^2 & p_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ p_4p'_4 & p'_4 & p_4^2 & p_4 & 1 \end{matrix}\right\|,$$

on voit apparaître les quantités $p'_1p'_2$, $p'_1p'_3$, ...; comme on a

$$p(u_1+u_2)=\frac{2G_{1,2}-2p'_1p'_2}{4(p_1-p_2)^2}, \tag{7}$$

avec

$$G_{1,2}=2p_1p_2(p_1+p_2)-\frac{g_2}{2}(p_1+p_2)-g_3, \tag{8}$$

on est porté à croire que les quantités $p(u_1+u_2)$, $p(u_1+u_3)$, ... joueront un rôle dans cette équation. En considérant le produit des racines, soit $\frac{g_3 B^2 + C'^2}{4A^2}$, comme on a fait pour X, en vue d'obtenir l'expression de la quantité p_5 ou $p(u_1 + \ldots + u_4)$, en m'aidant aussi de la somme des racines pour le même but, j'ai été conduit à supposer une formule qui s'est trouvée exacte.

Posons

$$(1, 2) = 4p(u_1 + u_2)(p_1 - p_2),$$

et désignons par Δ le déterminant de Vandermonde qui est le produit des quantités $p_1 - p_2, \ldots$; la formule que je me propose d'établir est

$$(\gamma)\quad p(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) = \frac{1}{4}\,\frac{\Delta \times \begin{vmatrix} 0 & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,2n) \\ (2,1) & 0 & (2,3) & \ldots & (2,2n) \\ (3,1) & (3,2) & 0 & \ldots & (3,2n) \\ \ldots & \ldots & . & \ldots & \ldots \\ (2n,1) & (2n,2) & (2n,3) & \ldots & 0 \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{[p_1^{n-2}p'_1, \ldots, p'_1; p_1^n, \ldots, 1]^2};$$

le déterminant dont la racine carrée figure au numérateur de cette formule est un déterminant symétrique gauche d'ordre pair, et, par suite, un carré parfait; sa racine carrée est un pfaffien, et l'on peut écrire, en précisant le signe,

$$(\gamma')\quad p(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) = \frac{1}{4}\,\frac{\Delta \times \Sigma(1,2)(3,4)\ldots(2n-1,2n)}{[p_1^{n-2}p'_1, \ldots, p'_1; p_1^n, \ldots, 1]^2}.$$

Pour vérifier cette dernière formule, remplaçons u_{2n} par u, que nous regarderons comme une variable : le premier membre est la fonction elliptique

$$p(u_1 + u_2 + \ldots + u) \quad \text{ou} \quad p(U + u),$$

en posant

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n-1} = U,$$

et le second membre doit se réduire à cette fonction. Or, d'une part, en conservant la notation $(i, 2n)$ malgré la suppression de l'indice $2n$, le numérateur est une fonction de la forme

$$(p - p_1)\ldots(p - p_{2n-1}) \times \Sigma A_i (2n, i)$$

ou

$$4(p - p_1)\ldots(p - p_{2n-1}) \times \Sigma A_i p(u + u_i)(p - p_i),$$

les A étant des constantes. Cette fonction n'admet pas le pôle $u = -u_i$, attendu que la quantité $p(u + u_i)$ est multipliée par $(p - p_i)^2$; elle admet seulement le pôle $u = 0$ qui est d'ordre $4n$. A ceux du premier facteur, elle admet d'abord les zéros $u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1}$; comme, de plus, un pfaffien est nul quand deux indices sont identiques, elle admet une seconde fois ces mêmes zéros; elle a donc deux autres zéros, qui sont de la forme

$$-U + u_0 \quad \text{et} \quad -U - u_0.$$

D'autre part, le déterminant dont le carré figure au dénominateur de la formule (γ') est une fonction elliptique d'ordre $2n$ quand on remplace u_{2n} par u; elle admet le pôle $u = 0$ qui est d'ordre $2n$, puisque la ligne variable du déterminant est

$$p^{n-2}p', \quad \ldots, \quad p'; \quad p^n, \quad \ldots, \quad 1,$$

et ses zéros sont $u_1, \ldots, u_{2n-1}$, et $-U$; son carré admet le pôle $u = 0$ d'ordre $4n$, les zéros doubles $u_1, \ldots, u_{2n-1}$, et le zéro double $-U$. Le second membre de la formule (γ'), avec u au lieu de u_{2n}, est donc de la forme

$$C\,\frac{\sigma(u + U - u_0)\sigma(u + U + u_0)}{\sigma^2(u + U)}$$

ou

$$C'[p(u + U) - pu_0];$$

et il est identique au premier nombre si l'on a

$$pu_0 = 0, \qquad C' = 1.$$

Au lieu de démontrer ces deux relations, il suffira de prouver que les deux membres de la formule (γ'), avec u au lieu de u_{2n}, sont égaux pour deux valeurs de u; la formule étant d'ailleurs une identité évidente pour $2n = 2$, on peut supposer $2n \geqq 4$, et il suffira de vérifier qu'elle est exacte pour $u = -u_1$, $u = -u_2$, ... Nous allons faire $u = -u_{2n-1}$: le premier membre devient

$$p(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n-2});$$

nous trouverons que le second membre prend une forme analogue à celle qu'il a actuellement, avec les indices $1, 2, \ldots, 2n-2$; la formule est alors exacte pour $2n$ arguments si elle l'est pour $2n-2$ arguments, et, comme elle est vraie pour 2 arguments, elle est générale.

Faisons donc

$$u = -u_{2n-1},$$

et vérifions que l'expression

$$\frac{\Delta \times \Sigma(1, 2)(3, 4)\ldots(2n-1, 2n)}{[p_1^{n-2}p'_1, \ldots, p'_1; p_1^n, \ldots, 1]^2}$$

prend une forme analogue avec les indices $1, 2, \ldots, 2n-2$.

Considérons d'abord le numérateur, dans lequel nous ferons

$$u = -u_{2n-1} + \varepsilon;$$

les termes non infiniment petits sont fournis par les termes du pfaffien où figure $(2n-1, 2n)$, et ces termes sont

$$(2n-1, 2n)\Sigma',$$

en désignant par Σ' le pfaffien relatif aux indices $1, \ldots, 2n-2$; en désignant par Δ' le produit

$$(p_1 - p_2)\ldots(p_{2n-3} - p_{2n-2}),$$

et par Π le produit

$$(p_1 - p_{2n-1})\ldots(p_{2n-2} - p_{2n-1}),$$

ce numérateur est donc la limite de l'expression

$$\Delta'\Pi^2[p(u_{2n-1}) - pu] \times 4p\varepsilon[p(u_{2n-1}) - pu]\Sigma',$$

u tendant vers u_{2n-1}, ε tendant vers zéro, et cette limite est

$$\Delta'\Sigma' \times 4p'^2_{2n-1}\Pi^2.$$

Il faut alors montrer que le déterminant δ dont le carré forme le dénominateur de la fraction étudiée, lorsqu'on y fait $u = -u_{2n-1}$, se transforme, au signe près, en un déterminant analogue δ' multiplié par le facteur $2p'_{2n-1}\Pi$; nous rencontrerons successivement les facteurs 2, p'_{2n-1}, Π, et nous les supprimerons à mesure. Ce déterminant δ est, en supprimant l'indice $2n-1$ pour simplifier,

$$\begin{vmatrix} p_1^{n-2}p_1' & \dots & p_1p_1' & p_1' & p_1^n & \dots & p_1 & 1 \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ p^{n-2}p' & \dots & pp' & p' & p^n & \dots & p & 1 \\ -p^{n-2}p' & \dots & -pp' & -p' & p^n & \dots & p & 1 \end{vmatrix};$$

on peut remplacer la dernière ligne par

$$-p^{n-2}p' \quad \dots \quad -pp' \quad -p' \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0,$$

en laissant de côté le facteur 2 dont on n'aura plus à s'occuper ; en ajoutant cette ligne à la précédente, les deux dernières lignes sont

$$\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 0 & p^n & \dots & p & 1 \\ -p^{n-2}p' & \dots & -pp' & -p' & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}$$

ou, en laissant de côté le facteur p' dont on n'aura plus à s'occuper,

$$\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 0 & p^n & \dots & p & 1 \\ -p^{n-2} & \dots & -p & -1 & 0 & \dots & 0 & 0; \end{matrix}$$

en ajoutant à la ligne de rang i, $i \leqq 2n-2$, la dernière des deux lignes précédentes multipliée par p_i' et l'autre multipliée par -1, cette ligne de rang i devient

$$(p_i^{n-2}-p^{n-2})p_i' \quad \dots \quad (p_i-p)p_i' \quad 0 \quad (p_i^n-p^n) \quad \dots \quad (p_i-p) \quad 0;$$

en laissant de côté le facteur $(p_1-p)(p_2-p)\dots(p_{2n-2}-p)$, ou Π, dont on n'aura plus à s'occuper, il reste, au signe près, le déterminant

$$\begin{vmatrix} (p_1^{n-3}+p_1^{n-4}p+\dots)p_1' & \dots & p_1' & 0 & (p_1^{n-1}+p_1^{n-2}p+\dots) & \dots & 1 & 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & . & \dots\dots\dots\dots & \dots & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & p^n & \dots & p & 1 \\ p^{n-2} & \dots & p & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

qui doit se réduire au déterminant δ'. Or, en considérant les deux colonnes qui ont un seul élément non nul, on voit qu'on peut supprimer ces deux colonnes en supprimant les deux dernières lignes horizontales, et l'on achève facilement par des combinaisons de colonnes.

4. Dans la formule (γ) ou (γ'), on peut remplacer la quantité $(1, 2)$ par son expression en fonction de p_1 et p'_1, p_2 et p'_2, savoir

$$(1, 2) = \frac{2\,G_{1,2} - 2p'_1 p'_2}{p_1 - p_2};$$

et cela conduit à remplacer le second membre de la formule (γ) ou (γ') par un covariant. Si l'on reprend la fonction elliptique du second ordre à pôles distincts considérée au n° 2, et qui a les mêmes périodes que la fonction pu, avec s pour somme de ses pôles, en mettant p pour pv, et x pour $x(\frac{s}{2} + v)$, on a

$$p = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \qquad p' = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)x'}{(\gamma x + \delta)^2},$$

et la formule (7) donne la formule

$$(9) \qquad p(v_1 + v_2) = \frac{2\,F_{1,2} - 2x'_1 x'_2}{4(x_1 - x_2)^2},$$

en posant

$$(10) \qquad \begin{cases} F_{1,2} = A_0 x_1^2 x_2^2 + 2A_1 x_1 x_2 (x_1 + x_2) + A_2(x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 x_2) \\ \qquad + 2A_3(x_1 + x_2) + A_4; \end{cases}$$

cette formule, dont le cas singulier $v_1 = v_2$ avait d'abord été donné par M. Hermite dans le *Journal de Crelle*, est attribuée à M. Weierstrass (Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, II^e Partie, note de la page 359). On en conclut

$$(1, 2) = \frac{2\,F_{1,2} - 2x'_1 x'_2}{x_1 - x_2}\,\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x_1 + \delta)(\gamma x_2 + \delta)},$$

et, si l'on pose

$$(11) \qquad [1, 2] = \frac{2\,F_{1,2} - 2x'_1 x'_2}{x_1 - x_2},$$

on a

$$(1, 2) = [1, 2]\,\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x_1 + \delta)(\gamma x_2 + \delta)},$$

avec pv et $x(\frac{s}{2} + v)$. Dès lors, dans la formule (γ') écrite avec v au lieu de u, le facteur Σ du numérateur devient

$$\Sigma[1,2][3,4]\ldots[2n-1,2n]\times\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^n}{(\gamma x_1+\delta)\ldots(\gamma x_{2n}+\delta)};$$

comme, d'autre part, le facteur Δ devient

$$(x_1-x_2)\ldots\times\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{n(2n-1)}}{(\gamma x_1+\delta)^{2n-1}\ldots(\gamma x_{2n}+\delta)^{2n-1}},$$

on a comme numérateur l'expression

$$\Sigma[1,2][3,4]\ldots[2n-1,2n]\times\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{2n^2}}{(\gamma x_1+\delta)^{2n}\ldots(\gamma x_{2n}+\delta)^{2n}}.$$

Quant au déterminant dont le carré forme le dénominateur de la formule (γ'), on a déjà vu qu'il donne le produit d'un déterminant analogue, avec x au lieu de p, par le facteur

$$\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{n^2}}{(\gamma x_1+\delta)^n\ldots(\gamma x_{2n}+\delta)^n}.$$

Il suit de là que l'on peut écrire, en reprenant la variable u,

$$(\delta')\qquad p(u_1+u_2+\ldots+u_{2n}-ns)=\frac{1}{4}\,\frac{\Delta\times\Sigma[1,2][3,4]\ldots[2n-1,2n]}{[x_1'^{n-2}x_1',\ldots,x_1';x_1'',\ldots,1]^2},$$

avec $\Delta=(x_1-x_2)\ldots$, et

$$[1,2]=\frac{2F_{1,2}-2x_1'x_2'}{x_1-x_2};$$

on a encore

$$(\delta)\qquad p(u_1+u_2+\ldots+u_{2n})=\frac{1}{4}\,\frac{\Delta\times\begin{vmatrix}0&[1,2]&[1,3]&\ldots&[1,2n]\\ [2,1]&0&[2,3]&\ldots&[2,2n]\\ [3,1]&[3,2]&0&\ldots&[3,2n]\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots&.&\ldots&\ldots\ldots\\ [2n,1]&[2n,2]&[2n,3]&\ldots&0\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{[x_1'^{n-2}x_1',\ldots,x_1';x_1'',\ldots,1]^2}$$

C'est cette formule que je me proposais principalement d'établir dans ce travail.

III.

La formule (9), que l'on a déduite de la formule (7), peut s'établir directement par un calcul dont le point de départ est une équation analogue à l'équation (2); j'ai rencontré ce calcul en m'occupant de l'intégrale de l'équation d'Euler, intégrale équivalente à la formule (9). Le premier membre de l'équation

$$-x' + Px^2 + 2Qx + R = 0,$$

où P, Q, R sont des constantes et x est la fonction elliptique du second ordre définie par l'équation différentielle $x' = \sqrt{F(x)}$, est une fonction elliptique du quatrième ordre dont les pôles ont pour somme $2s$: les zéros u_1, u_2, u_3, u_4 vérifient donc la relation

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2s,$$

et l'équation renferme d'ailleurs trois paramètres P, Q, R. On a donc, pour quatre arguments dont la somme est $2s$,

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x'_2 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x'_3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x'_4 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on suppose u_3 et u_4 constants, cette relation, où l'on suppose x_3 et x_4 constants, a lieu pour deux arguments u_1 et u_2 dont la somme est constante; nous écrirons alors

$$\begin{aligned} &(x_3 - x_4)[x'_1(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) - x'_2(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)] \\ &+ (x_1 - x_2)[x'_3(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) - x'_4(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)] = 0; \end{aligned}$$

si l'on multiplie par la différence des deux termes dont on a la somme, le terme en $x'_1 x'_2$ contient le facteur

$$(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4),$$

et les autres termes, où l'on remplace x'^2 par $F(x)$, forment un polynome doublement biquadratique en x_1 et x_2, symétrique, s'annulant pour $x_1 = x_3$ ou x_4, pour $x_2 = x_3$ ou x_4; la suppression du facteur $(x_1 - x_3)\ldots$ donne donc

$$2\Psi_{1,2} - 2x'_1 x'_2 = 0,$$

$\Psi_{1,2}$ étant un polynome doublement quadratique en x_1 et x_2, symétrique, et qui se réduit à F_1 pour $x_2 = x_1$. Or on sait que, si l'on désigne par $F_{1,2}$ un tel polynome, facile à construire, le polynome le plus général qui ait la même propriété est

$$F_{1,2} - 2(k + M)(x_1 - x_2)^2,$$

$k + M$ étant une constante que nous prenons sous cette forme afin de pouvoir écrire

$$\Psi_{1,2} = \Phi_{1,2} - 2M(x_1 - x_2)^2,$$

avec le polynome général $\Phi_{1,2}$ au lieu du polynome particulier $F_{1,2}$; on a alors, pour $u_1 + u_2 = \text{const.}$,

$$\frac{2\Phi_{1,2} - 2x'_1 x'_2}{4(x_1 - x_2)^2} = \text{const.} = M, \tag{12}$$

le choix du polynome $\Phi_{1,2}$ déterminant la constante; nous prendrons d'abord pour $\Phi_{1,2}$ le polynome particulier

$$\begin{aligned} F_{1,2} &= x_2^2(A_0 x_1^2 + 2A_1 x_1 + A_2) + 2x_2(A_1 x_1^2 + 2A_2 x_1 + A_3) + (A_2 x_1^2 + 2A_3 x_1 + A_4) \\ &= A_0 x_1^2 x_2^2 + 2A_1 A_2 (x_1 + x_2) + A_2(x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2) + 2A_3(x_1 + x_2) + A_4, \end{aligned}$$

dont la première forme est liée aux dérivées secondes du polynome F rendu homogène, et que l'on obtient immédiatement sous la seconde forme en faisant $x_3 = x_1$, $x_4 = x_2$ dans le polynome

$$A_0 x_1 x_2 x_3 x_4 + A_1 \Sigma x_1 x_2 x_3 + A_2 \Sigma x_1 x_2 + A_3 \Sigma x_1 + A_4.$$

Or, le premier membre de la formule (12) est un covariant dans les conditions déjà indiquées, et, si l'on remplace la fonction $x(u)$ ou $x(\frac{s}{2} + v)$ par la fonction pv, le polynome $2F_{1,2}$ est remplacé par

$$2G_{1,2} = p_2^2 \times 4p_1 + p_2(4p_1^2 - S) - (Sp_1 + 2T),$$

où il faut remarquer que le coefficient de p_2^2 se réduit à $4p_1$, parce qu'on a ici $A_0 = o$, $A_2 = o$; d'autre part, $x'_1 x'_2$ est remplacé par $p'_1 p'_2$ ou $\sqrt{G_1}\sqrt{G_2}$, $\sqrt{G_2}$ étant du degré $\frac{3}{2}$ en p_2 ; comme on a $v_1 + v_2 = \text{const.} = V$, on peut faire $v_2 = o$, $v_1 = V$, et l'on obtient, p_2 étant infini, $p(v_1 + v_2)$ ou $p(u_1 + u_2 - s)$; on a ainsi la formule (9) que nous écrirons ici sous la forme

$$(13) \qquad p(u_1 + u_2 - s) = \frac{2F_{1,2} - 2x'_1 x'_2}{4(x_1 - x_2)^2}.$$

6. On obtient par le même moyen la formule (4), qui rentre d'ailleurs dans la formule générale (β). En effet, si l'on suppose le polynome F décomposé en deux facteurs quadratiques, $F = PQ$, on peut prendre $2\Phi_{1,2} = P_1 Q_2 + P_2 Q_1$, et l'extraction d'une racine carrée donne

$$\frac{\sqrt{P_1}\sqrt{Q_2} - \sqrt{P_2}\sqrt{Q_1}}{2(x_1 - x_2)} = \text{const.} = N ;$$

on interprète la constante N en remarquant que le premier membre est un covariant, et en considérant la fonction pu. On peut d'ailleurs déduire la formule (4) de la formule (13) : on retranche a aux deux membres, on applique l'identité

$$2F_{1,2} - 4a(x_1 - x_2)^2 = P_1 Q_2 + P_2 Q_1$$

sur laquelle nous allons revenir, on remplace x' par $\sqrt{P}\sqrt{Q}$, et le second membre est un carré parfait, le premier membre $p - a$ étant le carré d'une fonction uniforme X ; *a priori*, on a une identité de la forme indiquée, la constante a étant seulement à déterminer, et l'identification des deux membres montre que a est racine de l'équation $4k^3 - Sk - T = o$: on peut imiter, par exemple, le calcul connu pour la décomposition du polynome $F(x)$ en deux facteurs quadratiques (SALMON, *Algèbre*, deuxième édition française, p. 275).

Il serait intéressant de rattacher de même la formule (δ') à la formule (β), ou simplement la formule (γ') à la formule (α) ; c'est une recherche qui m'a paru difficile, et au sujet de laquelle je ferai seulement une remarque : si, d'après une méthode connue, on fait le carré du déterminant numérateur de la formule (β) en mutlipliant ce déterminant par le déterminant qu'on obtient en renversant l'ordre des colonnes et en multipliant par -1 chacune des n dernières colonnes obtenues, on a un déterminant symétrique gauche dont le second élément, par exemple, est

$$(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_2+\ldots+x_2^{n-1})(U_1V_2-U_2V_1),$$

ou, d'après la formule (4),

$$-2(x_1^n-x_2^n)X(v_1+v_2);$$

avec la formule (α) on aurait

$$-2(p_1^n-p_2^n)X(u_1+u_2).$$

On peut encore observer que, si l'on a $T=0$, c'est-à-dire si les racines du polynome F forment un système harmonique, l'une des quantités a, b, c est égale à zéro : avec $a=0$, on a $p=X^2$.

IV.

7. La fonction Xu peut être envisagée à deux points de vue différents. Quand on la déduit de la fonction pu, et qu'on l'exprime par la formule

$$Xu=\sqrt{pu-a}=e^{-\eta_1 u}\frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma u\,.\,\sigma\omega_1},$$

on la considère comme une fonction doublement périodique de deuxième espèce : elle admet la période $2\omega_1$ et se reproduit changée de signe lorsqu'on ajoute $2\omega_2$ (ou $2\omega_3$) à l'argument. Mais c'est aussi une fonction elliptique, admettant les périodes $2\omega_1$ et $4\omega_2$ (ou $4\omega_3$), et à ce point de vue correspond l'équation différentielle

$$X'=-YZ=-\sqrt{[X^2+(a-b)][X^2+(a-c)]}.$$

Si l'on se reporte à la formule (6), en prenant comme fonction x

une fonction X, on peut prendre $U = Y$, $V = -Z$; et alors, d'après la formule (β), l'expression

$$\frac{[X_1^{n-1}Y_1, \ldots\ldots\ldots, Y_1; X_1^{n-1}Z_1, \ldots, Z_1]}{[X_1^{n-2}Y_1Z_1, \ldots, Y_1Z_1; X_1^n, \ldots\ldots\ldots, 1]}$$

a une valeur constante lorsque la somme $u_1 + \ldots + u_{2n}$ est constante.