ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ETIENNE DELASSUS

Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 421-467

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__421_0>

EXTENSION DU THÉORÈME DE CAUCHY

AUX SYSTÈMES LES PLUS GÉNÉRAUX

D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

INTRODUCTION.

Depuis Cauchy (1) (1842 et 1843), et surtout dans ces dernières années, le problème de l'existence des intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles a donné lieu à un assez grand nombre de travaux intéressants.

Je ne ferai que citer les Mémoires de MM. Briot et Bouquet (2) (1856), de MM. Méray (3), Bouquet (4), Mayer (5) (1872), de M. Darboux (6), de Mme Kowalevski (7) (1875), de M. König (8) (1884) et de M. Bourlet (9) (1891).

Je m'occuperai surtout d'une suite ininterrompue de recherches

---

(1) CAUCHY, *Comptes rendus*, t. XIV, XV, XVI.

(2) BRIOT et BOUQUET, *Mémoire sur les fonctions définies par des équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIe Cahier).

(3) MÉRAY, *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale*, p. 143.

(4) BOUQUET, *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. III, p. 265.

(5) MAYER, *Mathematische Annalen*, t. V, p. 448.

(6) DARBOUX, *Comptes rendus*, t. LXXX, p. 101 et 317.

(7) Mme KOWALEVSKY, *Journal de Crelle*, t. 80, p. 1.

(8) KÖNIG, *Ueber die Integration simultaner Systeme partielle Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. XXIII).

(9) BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (*Annales de l'École Normale*, Suppl.; 1891).

entreprises par M. Méray [1], poursuivies par M. Méray en collaboration avec M. Riquier [2], reprises par M. Riquier seul [3] et aboutissant à un Mémoire remarquable [4] présenté en 1894 à l'Institut par ce dernier auteur. Ce Mémoire a pour but d'établir, d'une façon rigoureuse, dans les circonstances générales et à l'exclusion de tout cas exceptionnel, l'existence des intégrales d'un système différentiel quelconque.

La solution du problème dépend de la recherche d'une forme canonique générale. M. Riquier, en faisant correspondre aux variables et aux inconnues des nombres entiers qu'il appelle *cotes premières*, *cotes secondes*, etc., est conduit à définir des *systèmes orthonomes* qu'il prend pour base de tous ses raisonnements. Il montre que tout système d'équations aux dérivées partielles peut se ramener à un système orthonome passif linéaire et du premier ordre. Dans de tels systèmes, la formation par différentiation de toutes les équations, jusqu'à l'ordre infini, permet de séparer les dérivées des fonctions inconnues en deux classes, les unes étant principales et les autres paramétriques, et M. Riquier montre qu'en se donnant arbitrairement les valeurs initiales des dérivées paramétriques, on peut reconstruire les développements en séries des intégrales cherchées et que ces développements sont convergents.

Ces résultats sont établis en toute rigueur par M. Riquier, mais la démonstration qu'il en donne, non seulement est très compliquée, mais est bien artificielle à cause de l'introduction de ces *cotes* qui in-

---

(1) MÉRAY, *Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles* (*Journal de Mathématiques*; 1880).

(2) MÉRAY et RIQUIER, *Sur la convergence des développements des intégrales d'un système d'équations différentielles totales* (*Annales de l'École Normale*; 1889).

Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles (*Annales de l'École Normale*; 1890).

(3) RIQUIER, *De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque* (*Annales de l'École Normale*; 1893).

Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à un système linéaire et complètement intégrable du premier ordre (*Annales de l'École Normale*; 1893).

(4) RIQUIER, *Mémoire sur l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque et sur la réduction d'un semblable système à une forme linéaire et complètement intégrable du premier ordre* (*Mémoire des Savants étrangers*, t. XXXII).

terviennent d'une façon bien bizarre dans la question. Ceci justifierait déjà la publication de ce Travail où les résultats de M. Riquier sont retrouvés d'une façon beaucoup plus naturelle et plus simple en suivant une voie tout à fait différente; mais il y a plus, c'est que le Mémoire de M. Riquier n'a pas résolu la question aussi complètement qu'il est possible de le faire.

Ce qui fait l'intérêt du théorème de Cauchy, sous la forme classique que lui a donnée M[me] Kowalevski, c'est que, non seulement ce théorème démontre l'existence des intégrales, mais indique en même temps des fonctions arbitraires, *en nombre fini*, ayant des relations simples avec les intégrales, les déterminant complètement, et susceptibles d'être interprétées géométriquement.

Les intégrales de M. Riquier sont des séries dont une infinité de coefficients sont arbitraires. Ces coefficients arbitraires sont les valeurs initiales des dérivées paramétriques, et les systèmes orthonomes, auxquels cet auteur ramène tout, sont d'une forme tellement générale qu'il est impossible d'apercevoir la loi de succession de ces dérivées et, par suite, d'avoir une idée de la façon dont on pourrait les grouper pour former des fonctions arbitraires ayant des relations simples avec les intégrales cherchées. Ce résultat n'a pu être atteint que dans des cas très particuliers, par M. Bourlet, dans sa Thèse déjà citée.

Dans un Mémoire récent (1), l'étude de la nature des singularités des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles m'avait conduit à mettre les systèmes linéaires à une seule inconnue sous une certaine forme qui permettait d'apercevoir facilement un grand nombre de propriétés des intégrales. Ayant reconnu plus tard que cette forme conduisait très simplement à un théorème analogue à celui de Cauchy, je me suis proposé de la généraliser ainsi que les résultats qu'elle fournissait.

C'est l'exposé détaillé des résultats auxquels je suis parvenu en suivant cette voie, qui constitue le Mémoire actuel.

Jusqu'à présent, on s'est bien peu occupé du changement de variables dans les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Partant

---

(1) Delassus, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale*; 1896).

a priori de certaines formes auxquelles on peut généralement ramener des équations en nombre limité, on s'est borné à chercher si le changement de variables ne pourrait pas toujours y conduire; comme c'était probable, le résultat a été négatif. On en a tout naturellement conclu que ces formes étaient trop particulières, mais on n'a jamais cherché s'il existait des formes réduites, un peu plus générales, auxquelles le changement de variables pourrait conduire sans avoir à craindre des cas exceptionnels. Comme je le montre dans le Chap. II de la première Partie, et c'est là le point capital de ce Travail, *de telles formes existent* et leur emploi dans la formation des équations successives d'un système conduit forcément à retrouver, avec une démonstration beaucoup plus simple, ce théorème extrêmement remarquable dû à M. Tresse (1) :

Un système d'équations aux dérivées partielles étant défini d'une façon quelconque, ce système est forcément limité, c'est-à-dire qu'il existe un ordre fini s tel que toutes les équations d'ordre supérieur à s que comprend le système se déduisent par de simples différentiations des équations d'ordre égal ou inférieur à s.

Ce théorème, en montrant que l'étude des équations en nombre infini appartenant à un système différentiel se ramène à l'étude d'un nombre fini de telles équations, a constitué certainement l'un des progrès les plus considérables réalisés jusqu'à ce jour dans la théorie générale de ces systèmes.

Le changement de variable permet, par une suite régulière d'opérations, d'arriver à mettre en évidence l'incompatibilité des équations qui définissent le système ou d'obtenir *une forme canonique complètement intégrable et limitée* d'après le théorème de M. Tresse. Cette forme est infiniment plus simple que celle employée par M. Riquier, et elle est absolument générale. C'est elle qui sert de base à tous les raisonnements développés dans la deuxième Partie et relatifs à l'existence des intégrales.

Dans cette seconde Partie, je ne cherche pas à démontrer directe-

(1) Tresse, *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations* (*Acta Mathematica*, 1894).

ment la convergence des séries; on pourrait certainement le faire, mais, de cette façon, on ne serait probablement conduit au résultat complet qu'après des calculs très pénibles. Je me sers d'une propriété remarquable de ma forme canonique :

L'intégration d'un système à m variables et sous forme canonique se ramène à l'intégration successive de m systèmes de Mme Kowalevski, contenant successivement $1, 2, \ldots, m-1, m$ *variables.*

C'est en partant de cette propriété et par l'application successive du théorème de Cauchy que j'arrive à trouver un *théorème analogue à celui de Cauchy, s'appliquant à tous les systèmes complètement intégrables, c'est-à-dire ayant des solutions, démontrant l'existence des intégrales analytiques et déterminant les fonctions et constantes initiales, en nombre fini, dont dépendent ces intégrales.*

Les fonctions initiales données par ce théorème, dont l'énoncé est trop long pour être rapporté ici, ne dépendent pas toutes du même nombre de variables, résultat qui avait déjà été trouvé, dans un cas particulier, par M. Bourlet.

PREMIÈRE PARTIE.

FORME CANONIQUE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

I.

1. Proposons-nous de ranger, d'après une loi uniforme, les dérivées partielles d'un même ordre d'une fonction z de $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Dans ce but, nous allons reprendre le procédé déjà employé par M. Tresse.

Considérons les dérivées d'ordre n

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}} \qquad (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m=n).$$

Nous commencerons par les ranger d'après les valeurs décroissantes de α_1, ce qui nous donnera un certain nombre de groupes de dérivées, que j'appellerai *les groupes* G_1 et qui seront définis chacun par une valeur de l'indice α_1.

Dans chaque groupe G_1, rangeons toutes les dérivées qui y figurent d'après les valeurs décroissantes de α_2; de cette façon, chaque groupe G_1 sera décomposé en un certain nombre de groupes G_2, et chaque groupe G_2 sera défini par une valeur de α_1 et une valeur de α_2. On pourra continuer ainsi et arriver, en dernier lieu, à des groupes G_{m-1} formés chacun par une seule dérivée.

Par raison de symétrie, j'appellerai G_0 le groupe formé par toutes les dérivées d'ordre n.

En outre, nous remarquerons que le premier groupe G_1, figurant dans G_0, contient une seule dérivée, et qu'elle est prise uniquement par rapport à x_1; de même, le premier groupe G_2, figurant dans un quelconque des groupes G_1 autre que le premier, est constitué par une seule dérivée, et cette dérivée est uniquement prise par rapport à x_1 et x_2.

En général, le premier groupe G_μ, figurant dans un groupe $G_{\mu-1}$, est constitué par une seule dérivée qui est uniquement prise par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$.

A partir de ce moment, je supposerai toujours que les dérivées d'un même ordre de z sont rangées de cette façon, de telle sorte que l'expression *la $p^{\text{ième}}$ dérivée d'ordre n de z* ait un sens précis.

2. Considérons un ensemble de dérivées d'ordre n de z, il sera constitué par p de ces dérivées. *Si ces p dérivées sont les p premières, nous dirons que l'ensemble est canonique.* Nous réserverons la lettre E pour désigner de tels ensembles de dérivées.

Un ensemble canonique sera dit *nul* si le nombre des dérivées qui le constituent est o, et *complet* s'il est constitué par toutes les dérivées de l'ordre considéré.

Un ensemble canonique est complètement défini par l'ordre n et le nombre p des dérivées qui le composent, mais il est du plus grand intérêt, pour la suite, d'introduire de nouveaux nombres de la façon suivante :

Soit e l'ensemble des dérivées d'ordre n qui ne figurent pas dans l'ensemble canonique E que nous considérons; en parcourant, en sens inverse, les dérivées qui forment e, nous rencontrerons d'abord, en entier, un certain nombre g_1 de groupes G_1. Les groupes G_1, ainsi obtenus, sont ceux qui correspondent aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, g_1 - 1$ de l'indice α_1, et le groupe G_1 pour lequel on a $\alpha_1 = g_1$ ne figure pas en entier dans e.

Soit e_1 ce qui reste de e après la suppression de ces g_1 groupes G_1; e_1 n'est plus qu'une fraction d'un groupe G_1 et l'on y trouvera, en entier, les g_2 groupes G_2 qui correspondent à la valeur commune g_1 de l'indice α_1 et aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, g_2 - 1$ de l'indice α_2.

Soit e_2 ce qui reste de e_1 quand on en a retranché ces g_2 groupes G_2; e_2 n'est plus qu'une fraction du groupe G_2 pour lequel on a $\alpha_1 = g_1$, $\alpha_2 = g_2$; on pourra en extraire g_3 groupes G_3, etc.

Nous obtiendrons ainsi $m - 1$ nombres $g_1, g_2, \ldots, g_{m-1}$. Dans un but de généralisation, nous y ajouterons le nombre g_0 de groupes G_0 figurant dans e.

Les m nombres $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ s'appelleront les *indices de l'ensemble* E.

Un ensemble canonique complet sera caractérisé par

$$g_0 = g_1 = g_2 = \ldots = g_{m-1} = 0.$$

Dans tout ensemble canonique non nul on aura

$$g_0 = 0,$$

et l'ensemble canonique nul sera caractérisé par

$$g_0 = 1, \qquad g_1 = g_2 = \ldots = g_{m-1} = 0.$$

Lorsque deux ensembles canoniques E et E_1 du même ordre n sont respectivement formés de p et p_1 dérivées, si l'on a $p < p_1$, on dira que l'ensemble E_1 est plus grand que l'ensemble E et on l'indiquera symboliquement par

$$E < E_1.$$

En outre, si l'on désigne par $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}$ les indices de l'ensemble E, et par $\gamma_0^1, \gamma_1^1, \gamma_2^1, \ldots, \gamma_{m-1}^1$ ceux de E_1, il y aura un des nombres $1, 2, \ldots, m-1$, μ par exemple, pour lequel on aura

$$\gamma_0 = \gamma_0^1, \qquad \gamma_1 = \gamma_1^1, \qquad \ldots, \qquad \gamma_{\mu-1} = \gamma_{\mu-1}^1, \qquad \gamma_\mu > \gamma_\mu^1.$$

Et, réciproquement, si une telle condition est satisfaite, on a forcément

$$E < E_1.$$

3. Soit E^n un ensemble d'ordre n. Prenons, par rapport à toutes les variables, les dérivées de tous ses termes; nous arriverons à un nouvel ensemble d'ordre $n+1$ que nous appellerons l'*ensemble dérivé de* E^n et que nous représenterons par $(E^n)'$. Je vais démontrer, à propos de ces ensembles dérivés, la propriété suivante, extrêmement importante pour la suite :

Tout ensemble canonique E^n *a pour dérivé un ensemble canonique d'ordre* $n+1$ *et ayant les mêmes indices.*

Soit E^{n+1} l'ensemble canonique d'ordre $n+1$ ayant les mêmes indices que E^n, et désignons par $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$ les valeurs de ces nombres.

Prenons une dérivée quelconque appartenant à E^n

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

Il y aura forcément un nombre μ tel que

$$\alpha_1 = \gamma_1, \qquad \alpha_2 = \gamma_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{\mu-1} = \gamma_{\mu-1}, \qquad \alpha_\mu > \gamma_\mu.$$

Une dérivée de ce terme sera de la forme

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x_1^{\alpha'_1} \partial x_2^{\alpha'_2} \ldots \partial x_m^{\alpha'_m}}.$$

Si la dérivée a été prise par rapport à une des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, par exemple par rapport à x_ν, on aura

$$\alpha'_1 = \alpha_1, \qquad \alpha'_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha'_{\nu-1} = \alpha_{\nu-1}, \qquad \alpha'_\nu = \alpha_\nu + 1$$

et, par conséquent,

$$\alpha'_1 = \gamma_1, \qquad \alpha'_2 = \gamma_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha'_{\nu-1} = \gamma_{\nu-1}, \qquad \alpha'_\nu > \gamma_\nu;$$

de sorte que la dérivée d'ordre $n+1$ appartient certainement à E^{n+1}.

Si l'on avait dérivé par rapport à l'une des lettres $x_{\mu+1}, \ldots, x_m$, on aurait eu

$$\alpha'_1 = \alpha_1, \quad \alpha'_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha'_{\mu-1} = \alpha_{\mu-1}, \quad \alpha'_\mu = \alpha_\mu,$$

et, par conséquent,

$$\alpha'_1 = \gamma_1, \quad \alpha'_2 = \gamma_2, \quad \ldots, \quad \alpha'_{\mu-1} = \gamma_{\mu-1}, \quad \alpha'_\mu > \gamma_\mu,$$

et la conclusion aurait été la même.

Nous avons ainsi démontré que toutes les dérivées des termes de E^n se retrouvent dans E^{n+1}; il reste à démontrer l'inverse.

Soit

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x_1^{\alpha'_1}\, \partial x_2^{\alpha'_2} \ldots \partial x_m^{\alpha'_m}}$$

une dérivée quelconque appartenant à E^{n+1}; il y a un nombre μ pour lequel on a

$$\alpha'_1 = \gamma_1, \quad \alpha'_2 = \gamma_2, \quad \ldots, \quad \alpha'_{\mu-1} = \gamma_{\mu-1}, \quad \alpha'_\mu > \gamma_\mu.$$

Supposons d'abord $\alpha'_\mu > \gamma_\mu + 1$; prenons

$$\alpha_1 = \alpha'_1, \quad \alpha_2 = \alpha'_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{\mu-1} = \alpha'_{\mu-1}, \quad \alpha_\mu = \alpha'_\mu - 1,$$
$$\alpha_{\mu+1} = \alpha'_{\mu+1}, \quad \ldots, \quad \alpha_m = \alpha'_m.$$

On aura

$$\alpha_1 = \gamma_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{\mu-1} = \gamma_{\mu-1}, \quad \alpha_\mu > \gamma_\mu;$$

de sorte que

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

appartiendra à E^n et que le terme considéré de E^{n+1} en sera la dérivée par rapport à x_μ.

Supposons maintenant $\alpha'_\mu = \gamma_\mu + 1$.

Remarquons que la dernière dérivée qui figure dans E^n est

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1^{\gamma_1}\, \partial x_2^{\gamma_2} \ldots \partial x_{n-1}^{\gamma_{m-1}}\, \partial x_m^{n-(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_{m-1})}},$$

de sorte que

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu \leqq n.$$

Si l'on a

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu = n \qquad \text{et} \qquad \gamma_{\mu+1} = \ldots = \gamma_{m-1} = 0,$$

on a

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu + 1 = n + 1;$$

la dérivée d'ordre $n+1$ considérée est forcément

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2} \ldots \partial x_\mu^{\gamma_\mu+1}},$$

et c'est la dérivée par rapport à x_μ du dernier terme de E^n.

Si l'on suppose, en dernier lieu,

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu < n,$$

on aura

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\mu + 1 < n + 1;$$

de sorte que l'un des indices $\alpha'_{\mu+1}, \ldots, \alpha'_m$ ne sera pas nul; supposons, par exemple, que ce soit $\alpha'_\nu (\nu > \mu)$.

Nous prendrons

$$\alpha_1 = \alpha'_1, \quad \alpha_2 = \alpha'_2, \quad \ldots, \quad \alpha_\mu = \alpha'_\mu, \quad \ldots, \quad \alpha_\nu = \alpha'_\nu - 1, \quad \ldots, \quad \alpha_m = \alpha'_m.$$

On aura

$$\alpha_1 = \gamma_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{\mu-1} = \gamma_{\mu-1}, \quad \alpha'_\mu > \gamma_\mu;$$

de sorte que la dérivée

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

appartiendra à E^n et que la dérivée d'ordre $n+1$, que nous considérons, en sera la dérivée par rapport à x_ν.

Nous avons, de cette façon, démontré que tout terme de E^{n+1} est la dérivée d'un terme de E^n, ce qui achève la démonstration de notre théorème.

4. De cette remarquable propriété d'invariance des indices relativement à la dérivation, nous allons déduire une proposition dont l'importance apparaîtra plus tard.

Considérons une suite infinie d'ensembles canoniques d'ordres croissants

$$E^n, \quad E^{n+1}, \quad \ldots, \quad E^{\mu}\ldots,$$

tels que l'on ait, quel que soit μ,

$$(E^{\mu})' \leqq E^{\mu+1}.$$

Je vais démontrer que *le nombre des termes de la suite, pour lesquels il y a inégalité, est forcément limité*.

Soient $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}$ les indices de l'ensemble canonique initial E^{μ}. La dérivation ne changera pas ces nombres, de sorte que, tant que nous n'arriverons pas à un terme pour lequel il y a inégalité, nous trouverons toujours les mêmes valeurs des indices.

Quand nous arriverons à un terme pour lequel il y a inégalité, c'est que ce terme contiendra plus de dérivées que l'ensemble dérivé du terme précédent, ce que nous exprimerons en disant qu'on a ajouté des dérivées nouvelles.

Chaque fois qu'on ajoute une dérivée nouvelle, g_{m-1} diminue d'une unité sans changement des autres g; il en résulte qu'au bout d'un nombre limité d'opérations, on arrivera à avoir $g_{m-1}=0$. A ce moment, l'addition d'une dérivée nouvelle fera diminuer g_{m-2} d'une unité et fera reprendre à g_{m-1} une valeur finie, qui dépendra de l'ordre auquel on sera arrivé par la dérivation. L'addition d'un nouveau nombre limité de dérivées nouvelles fera diminuer à nouveau g_{m-2} d'une nouvelle unité; de sorte que, en continuant, on arrivera, par un nombre limité d'additions de dérivées nouvelles, à

$$g_{m-2}=0, \qquad g_{m-1}=0;$$

à ce moment, une nouvelle dérivée diminuera g_{m-3} d'une unité et fera reprendre à g_{m-2} et g_{m-1} des valeurs finies dépendant de l'ordre auquel on est arrivé.

On voit aisément, par la continuation du même raisonnement, qu'au bout d'un nombre limité d'additions de dérivées nouvelles on arrivera à

$$g_0=g_1=g_2=\ldots=g_{m-1}=0,$$

c'est-à-dire à un ensemble complet; à partir de ce moment, les ensembles qu'on obtiendra successivement par la dérivation seront tous complets et, par suite, on ne pourra plus jamais ajouter de dérivées nouvelles.

Le nombre de fois qu'on peut ajouter des dérivées nouvelles étant forcément limité, il en résulte nécessairement que le nombre des termes de notre suite, pour lesquels a lieu l'inégalité

$$(E^{\nu})' < E^{\nu+1},$$

est forcément limité.

L'intérêt de ce théorème réside dans ce fait qu'il est, comme nous le ferons bientôt voir, identique au fond à celui de M. Tresse.

Nous avons ainsi, par la considération des indices, donné une démonstration très élémentaire de cette importante proposition.

Cela suffirait pour justifier l'introduction de ces nombres, mais la seconde Partie de ce travail montrera encore plus leur importance, en donnant à certains d'entre eux une signification extrêmement remarquable.

II.

Le théorème de Mme Kowalevski suppose que les équations qu'il considère sont résolues par rapport à certaines dérivées bien déterminées. On a alors été conduit à chercher si l'on ne pourrait pas toujours arriver à ce résultat au moyen d'un changement de variables. M. Bourlet, à propos des systèmes de M. König, s'est occupé de cette question et a démontré, par un exemple simple, que le changement de variables ne permettait pas toujours d'éviter des cas exceptionnels.

Les auteurs se sont bornés, jusqu'à présent, à chercher, dans ces sortes de questions, ce que le changement de variables ne pouvait pas donner, mais n'ont jamais cherché ce qu'il pouvait donner sûrement.

1. C'est de cette recherche que je vais m'occuper ici, et je commencerai par démontrer le théorème suivant, qui est absolument fondamental dans le développement de notre théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Si p équations aux dérivées partielles, d'ordre n en z, sont algébriquement distinctes, relativement aux dérivées d'ordre n de z; il y a une infinité de changements de variables qui les rendent résolubles par rapport aux p premières dérivées d'ordre n de z.

Cette propriété est bien connue dans le cas d'une seule équation; pour démontrer qu'elle est générale, je vais prouver que, si elle est vraie pour $p-1$ équations, elle est forcément vraie pour p équations.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ les p équations données, d'ordre n en z et algébriquement distinctes, relativement aux dérivées d'ordre n de z.

Faisons un changement de variables, elles resteront algébriquement distinctes et, comme nous admettons la propriété pour $p-1$ équations, nous pouvons supposer que ce changement ait été choisi de façon que les équations $F_1, F_2, \ldots, F_{p-1}$ soient résolubles par rapport aux $p-1$ premières dérivées d'ordre n de z. Faisons cette résolution et portons les valeurs trouvées dans l'équation F_p; elle contiendra encore des dérivées d'ordre n de z, puisque les p équations sont distinctes relativement à ces dérivées; les dérivées d'ordre n qui y figurent encore sont toutes de rang supérieur à $p-1$, et l'on peut supposer que la dérivée de rang p n'y figure pas; sans quoi le théorème serait démontré.

Nous avons donc toujours le droit de partir d'un système de la forme

$$\begin{aligned}
\xi_1 \quad &+ \varphi_1 \quad (\eta\ldots) = 0,\\
\xi_2 \quad &+ \varphi_2 \quad (\eta\ldots) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\xi_{p-1} &+ \varphi_{p-1}(\eta\ldots) = 0,\\
&\quad \varphi_p \quad (\zeta\ldots) = 0,
\end{aligned}$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$ représentent les $p-1$ premières dérivées d'ordre n de z; où les η représentent les dérivées d'ordre n de z, dont le rang est supérieur à $p-1$, et les ζ, celles dont le rang est supérieur à p. Les fonctions φ, en outre des η et des ζ, contiennent les dérivées des ordres inférieurs.

Pour ne pas compliquer inutilement les notations, nous ne supposerons que trois variables x_1, x_2, x_3; le raisonnement n'en sera pas moins tout à fait général.

Soit un changement de variables

$$\begin{aligned} x'_1 &= a\ x_1 + b\ x_2 + c\ x_3, \\ x'_2 &= a'\ x_1 + b'\ x_2 + c'\ x_3, \\ x'_3 &= a''\ x_1 + b''\ x_2 + c''\ x_3, \end{aligned}$$

dans lequel les coefficients sont des constantes que nous laisserons arbitraires.

Soient $\xi'_1, \xi'_2, \ldots$ les dérivées successives d'ordre n de z par rapport aux nouvelles variables.

Une quelconque des dérivées ξ est une fonction linéaire des dérivées ξ' qu'on obtient facilement de la façon suivante :

Représentons symboliquement une quelconque des dérivées ξ, par exemple

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}},$$

par $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3}$ et faisons le changement

$$\begin{aligned} X_1 &= a X'_1 + a' X'_2 + a'' X'_3, \\ X_2 &= b X'_1 + b' X'_2 + b'' X'_3, \\ X_3 &= c X'_1 + c' X'_2 + c'' X'_3, \end{aligned}$$

nous aurons l'identité

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3} = (a X'_1 + a' X'_2 + a'' X'_3)^{\alpha_1} (b X'_1 + b' X'_2 + b'' X'_3)^{\alpha_2} (c X'_1 + c' X'_2 + c'' X'_3)^{\alpha_3}.$$

Le second membre, développé et ordonné, est une fonction linéaire et homogène de termes d'ordre n et de la forme $X_1'^{\alpha'_1} X_2'^{\alpha'_2} X_3'^{\alpha'_3}$; c'est-à-dire une fonction linéaire et homogène des ξ'. Nous obtenons ainsi l'expression de ξ au moyen des ξ'.

Considérons maintenant le déterminant fonctionnel de nos p équations par rapport à $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_p$

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \xi'_1} + \sum \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \dfrac{\partial \eta}{\partial \xi'_1} & \cdots & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \xi'_p} + \sum \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} \dfrac{\partial \eta}{\partial \xi'_p} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \xi_{p-1}}{\partial \xi'_1} + \sum \dfrac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial \eta} \dfrac{\partial \eta}{\partial \xi'_1} & \cdots & \dfrac{\partial \xi_{p-1}}{\partial \xi'_p} + \sum \dfrac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial \eta} \dfrac{\partial \eta}{\partial \xi'_p} \\ \sum \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial \zeta} \dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi'_1} & \cdots & \sum \dfrac{\partial \varphi_p}{\partial \zeta} \dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi'_p} \end{vmatrix};$$

C'est une fonction des variables x'_1, x'_2, x'_3, et des constantes arbitraires $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$; elle contient en outre la fonction arbitraire z.

Si D est identiquement nul, quels que soient $x'_1, x'_2, x'_3, z, a, a', \ldots,$ D sera encore identiquement nul quand on l'exprimera au moyen de variables quelconques et, en particulier, au moyen des variables primitives. Alors les $\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$ et les $\frac{\partial\varphi_p}{\partial\xi}$ ne contiendront plus les arbitraires $a, a', \ldots,$ et D ne dépendra de ces constantes arbitraires que par l'intermédiaire des $\frac{\partial\xi}{\partial\xi'}$.

Par hypothèse, il y a dans φ_p au moins une dérivée d'ordre n de z. Soit ζ_1 la première qui y figure effectivement, on aura

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial\zeta_1} \neq 0.$$

Je vais alors montrer que D n'est pas une fonction de $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ identiquement nulle.

D, considéré comme fonction de ces lettres, est un polynome entier de degré np, puisque chacun de ses termes est un polynome homogène de degré n.

Parmi les termes qui composent ce polynome, choisissons-en un certain nombre de la façon suivante : Prenons tous les termes qui sont du degré le plus élevé par rapport à l'ensemble des trois lettres a, a', a'', et, parmi eux, ceux qui sont du degré le plus élevé par rapport à l'ensemble des trois lettres b, b', b''. Il est clair que, si le polynome D est identiquement nul, le polynome D', formé par l'ensemble des termes ainsi séparés, sera aussi identiquement nul. Cherchons à le former.

Il faudra évidemment prendre, dans chaque terme de D, les termes du degré le plus élevé relativement à a, a', a'', et, parmi eux, ceux du degré le plus élevé relativement à b, b', b''. Si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les indices de dérivation d'un ξ, tous les $\frac{\partial}{\partial\xi'}$ de ce ξ seront du degré α_1 en a, a', a'' et du degré α_2 en b, b', b'', de sorte que nous devrons, dans chaque élément de D, prendre la portion qui correspond au ξ de moindre indice.

Les termes que nous cherchons ne pourront donc se trouver que dans

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\xi'_1} & \cdots & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\xi'_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\xi_{p-1}}{\partial\xi'_1} & \cdots & \dfrac{\partial\xi_{p-1}}{\partial\xi'_p} \\ \dfrac{\partial\varphi_p}{\partial\zeta_1}\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\xi'_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_p}{\partial\zeta_1}\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\xi'_p} \end{vmatrix}.$$

Dans la première ligne, tous les termes sont du même degré en a, a', a'' et du même degré en b, b', b'', et il en est ainsi pour toutes les autres lignes. Il en résulte que le déterminant que nous venons de former a tous ses termes du même degré en a, a', a'' et du même degré en b, b', b'' et par conséquent n'est autre que le polynome D'.

Si l'on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\xi'_1} & \cdots & \dfrac{\partial\xi_1}{\partial\xi'_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\xi_{p-1}}{\partial\xi'_1} & \cdots & \dfrac{\partial\xi_{p-1}}{\partial\xi'_p} \\ \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\xi'_1} & \cdots & \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial\xi'_p} \end{vmatrix},$$

on aura

$$D' = \Delta\frac{\partial\varphi_p}{\partial\zeta_1}.$$

Comme, par hypothèse, $\dfrac{\partial\varphi_p}{\partial\zeta_1}$ n'est pas identiquement nul, il nous suffit de prouver que Δ n'est pas identiquement nul. Dans ce but, nous allons appliquer à Δ un procédé analogue à celui que nous avons employé à propos de D.

Nous considérerons les termes de Δ relativement aux trois lettres a, b', c''.

Dans le polynome Δ, prenons les termes du plus fort degré par rapport à l'ensemble des deux lettres b', c'', et, parmi eux, ceux qui sont du plus fort degré relativement à a. Parmi les termes ainsi obtenus, choisissons ceux qui sont du plus fort degré en c'', et, parmi eux, ceux qui sont du plus fort degré en b'.

Si Δ était identiquement nul, l'ensemble des termes ainsi isolés le serait aussi.

Dans une quelconque des $p-1$ premières lignes, correspondant à un ξ dont les indices de dérivation sont $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, on voit facilement que la règle précédente conduit au terme

$$a^{\alpha_1} b'^{\alpha_2} c''^{\alpha_3},$$

qu'il est seul de son espèce, a pour coefficient 1 et ne se trouve que dans la dérivée du ξ considéré par rapport au ξ' dont les indices de dérivation sont les mêmes, c'est-à-dire par rapport au ξ' de même rang. Il provient donc de l'élément qui appartient à la diagonale principale.

Dans la dernière ligne, les termes que nous définissons ne peuvent se trouver que dans la dérivée de ζ_1 par rapport au ξ' de rang le plus élevé, c'est-à-dire par rapport à ξ'_p. Ils proviennent donc encore de l'élément qui se trouve dans la diagonale principale.

Il résulte de là que les termes que nous cherchons à isoler ne peuvent provenir que de

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial\xi'_1}\,\frac{\partial\xi_2}{\partial\xi'_2}\cdots\frac{\partial\xi_{p-1}}{\partial\xi'_{p-1}}\,\frac{\partial\zeta_1}{\partial\xi'_p},$$

et cela suffit pour démontrer que leur ensemble n'est pas identiquement nul, ce qui achève complètement la démonstration de notre théorème.

2. Occupons-nous maintenant des équations à plusieurs inconnues.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$, p équations aux dérivées partielles d'ordre n contenant les inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_q$, et qui sont supposées algébriquement distinctes relativement aux dérivées d'ordre n de $z_1, z_2, \ldots, z_q$.

Je commence par mettre les inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_q$ dans un ordre, $z_1, z_2, \ldots, z_q$ par exemple, que je choisirai arbitrairement, mais qui, une fois choisi, sera conservé indéfiniment.

Parmi les équations F, il y en a au moins une qui contient z_1 à l'ordre n, j'en tirerai une dérivée d'ordre n de z_1, et je la porterai dans les autres. Si parmi elles il y en a une qui contient encore z_1 à l'ordre n, j'en tirerai une nouvelle dérivée d'ordre n de z_1, et ainsi de suite.

J'arriverai ainsi à résoudre les équations par rapport à p_1 dérivées d'ordre n de z_1 et les $p-p_1$ équations restantes ne contiendront plus les dérivées d'ordre n de z_1.

Sur ces $p-p_1$ nouvelles équations, je refais le même calcul à propos de l'inconnue z_2; j'arrive à les résoudre par rapport à un certain nombre p_2 de dérivées d'ordre n de z_2 et les $p-p_1-p_2$ équations restantes ne contiendront plus ni z_1 ni z_2 à l'ordre n.

Je pourrai ainsi continuer jusqu'à épuisement complet des inconnues.

J'arriverai à avoir résolu mes p équations par rapport à p_1 dérivées d'ordre n de z_1, p_2 dérivées d'ordre n de z_2, ..., p_q dérivées d'ordre n de z_q. Le nombre p_1 ne sera jamais nul, les nombres p_2, p_3, ..., p_q pourront l'être, mais on aura toujours

$$p_1+p_2+\ldots+p_q=p;$$

je dirai alors que j'ai fait *la résolution régulière des p équations*.

Cette résolution régulière met le système F_1, F_2, ..., F_p sous la forme

$$\begin{array}{llll}
\Phi_1^1=0, & \Phi_1^2=0, & \ldots, & \Phi_1^q=0,\\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots,\\
\Phi_{p_1}^1=0, & \Phi_{p_2}^2=0, & \ldots, & \Phi_{p_q}^q=0,
\end{array}$$

où les équations Φ^i ne contiennent, à l'ordre n, aucune des inconnues z_1, z_2, ..., z_{i-1}, et sont algébriquement distinctes relativement aux dérivées d'ordre n de z_i.

Réciproquement, si un système d'équations est sous cette forme, on voit immédiatement qne sa résolution régulière conduira précisément aux nombres p_1, p_2, ..., p_q.

En outre, il est évident que la forme que nous venons de donner au système se conserve par un changement quelconque de variables, d'où résulte :

Les nombres p_1, p_2, ..., p_q, auxquels conduit la résolution régulière d'un système d'équations distinctes d'ordre n, sont indépendants des variables choisies.

On aperçoit maintenant, avec la plus grande facilité, le parti qu'on va pouvoir tirer du changement de variables.

Supposons qu'on ait préalablement fait la résolution régulière du système, avec les variables actuelles, de façon à mettre ce système sous la forme précédente.

On pourra résoudre les équations Φ^i, indépendamment de toutes les autres, en les considérant comme des équations aux dérivées partielles d'ordre n, contenant la seule inconnue z_i et l'on aura encore le droit d'opérer ainsi après un changement quelconque de variables, puisque, après un tel changement, les équations Φ^i restent encore les équations Φ^i.

Nous pouvons alors appliquer le théorème que nous venons de démontrer au début de ce Chapitre.

Les équations Φ^1 pourront, après le changement de variables, être résolues par rapport aux p_1 premières dérivées d'ordre n de z_1, pourvu que les coefficients de ce changement de variables ne satisfassent pas à certaines conditions se traduisant par des égalités.

De même les équations Φ^2 pourront être résolues par rapport aux p_2 premières dérivées d'ordre n de z_2, pourvu que les coefficients du changement de variables ne satisfassent pas à certaines égalités.

Et ainsi de suite. Nous arrivons ainsi au théorème extrêmement important :

Si la résolution régulière d'un système d'équations distinctes, d'ordre n, conduit aux nombres $p_1, p_2, \ldots, p_q$, il est toujours possible, et d'une infinité de façons, de trouver un changement de variables tel que le système puisse être résolu régulièrement par rapport aux p_1 premières dérivées d'ordre n de z_1, aux p_2 premières dérivées d'ordre n de $z_2, \ldots,$ aux p_q premières dérivées d'ordre n de z_q.

Les dérivées de $z_1, z_2, \ldots, z_q$, par rapport auxquelles sont alors résolues les équations, constituent des ensembles canoniques d'ordre n,

$$E_1^n, \quad E_2^n, \quad \ldots, \quad E_q^n;$$

c'est pour cela que nous appellerons une telle résolution une *résolution régulière canonique du système* et nous dirons en général, pour abréger, que les équations sont résolues par rapport aux ensembles

$$E_1^n, \quad E_2^n, \quad \ldots, \quad E_q^n.$$

3. On peut facilement généraliser ces notions pour des systèmes comprenant des équations d'ordres quelconques.

Soient F_1, F_2, ..., F_p des équations supposées algébriquement distinctes relativement à z_1, z_2, ..., z_q et à leurs dérivées, c'est-à-dire telles qu'elles puissent être résolues par rapport à un certain nombre de dérivées.

Soit n l'ordre le plus élevé de ces équations. Si z_1 y figure à l'ordre n, nous commencerons par en tirer le plus grand nombre possible de dérivées d'ordre n de cette inconnue, comme il a été expliqué précédemment.

Des équations restantes, je tirerai le plus grand nombre possible de dérivées d'ordre n de z_2 et ainsi de suite; j'arriverai de cette façon à avoir tiré du système un certain nombre de dérivées d'ordre n, et les équations restantes seront d'ordre $n-1$ au plus. Je recommencerai sur elles le même calcul et je continuerai de la même façon jusqu'au moment où j'aurai épuisé toutes les équations du système.

J'appellerai encore une telle résolution une *résolution régulière du système*. Elle conduira à résoudre les équations par rapport à des dérivées des divers ordres des différentes inconnues. Soit p_i^j le nombre de ces dérivées d'ordre j de la fonction z_i. On aura ainsi des nombres

$$\begin{matrix} p_1^n, & p_2^n, & \ldots, & p_q^n, \\ p_1^{n-1}, & p_2^{n-1}, & \ldots, & p_q^{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ p_1^0, & p_2^0, & \ldots, & p_q^0, \end{matrix}$$

qui vérifieront certainement la relation

$$\Sigma p_i^j = p.$$

Cette résolution mettra le système sous la forme

$$\begin{matrix} S_1^n, & S_2^n, & \ldots, & S_q^n, \\ S_1^{n-1}, & S_2^{n-1}, & \ldots, & S_q^{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ , \\ S_1^0, & S_2^0, & \ldots, & S_q^0, \end{matrix}$$

où S_i^j représente un système de p_i^j équations ne contenant les inconnues z_1, z_2, ..., z_{i-1} qu'à l'ordre $j-1$ au plus, contenant z_i à l'ordre j et les inconnues suivantes z_{i+1}, ..., z_m au plus à l'ordre j, et qui sont algébriquement distinctes relativement aux dérivées d'ordre j de z_i.

Et, réciproquement, si un système de p équations peut se mettre sous cette forme, sa résolution régulière conduira forcément aux nombres p_i^j. En remarquant, en outre, que cette forme réduite du système se conserve par un changement quelconque de variables, nous arriverons à dire que :

Les nombres p_i^j, auxquels conduit la résolution régulière d'un système, sont indépendants des variables choisies.

En remarquant, en outre, que chacun des systèmes partiels S_i^j peut, même après un changement quelconque de variables, être résolu indépendamment de tous les autres, on verra, comme dans le cas précédent, que :

Si la résolution régulière d'un système conduit aux nombres $p_1^n, \ldots, p_q^n, \ldots, p_1^\nu, \ldots, p_q^\nu$, il est toujours possible, et d'une infinité de façons, de trouver un changement de variables tel que le système puisse être résolu par rapport aux p_1^n premières dérivées d'ordre n de $z_1 \ldots$, aux p_q^n premières dérivées d'ordre n de $z_q, \ldots$, aux p_1^ν premières dérivées d'ordre ν de $z_1, \ldots$, aux p_q^ν premières dérivées d'ordre ν de z_q.

Ces dérivées formeront des ensembles canoniques

$$\begin{array}{c} E_1^n, \quad E_2^n, \quad \ldots, \quad E_q^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ E_1^\nu, \quad E_2^\nu, \quad \ldots, \quad E_q^\nu. \end{array}$$

Nous dirons encore que nous avons fait une *résolution régulière canonique*.

Nous avons fait, sur nos équations, l'hypothèse qu'elles étaient algébriquement distinctes relativement aux dérivées des inconnues. Cette hypothèse même n'est pas nécessaire.

Étant donné un système absolument quelconque, commençons la résolution comme précédemment; il pourra arriver, à un certain moment, que la substitution des dérivées déjà trouvées donne un résultat identiquement nul dans certaines des équations, cela n'empêche pas de continuer le calcul au moyen des autres, et le seul changement qui pourra se présenter sera que, à la fin, on pourra quelquefois trouver des équations ne contenant plus que des variables; on laissera, telles qu'on les a trouvées, ces dernières équations.

Cette résolution régulière conduira à des nombres p_i^j, mais on n'aura plus forcément que

$$\Sigma p_i^j \leqq p.$$

Elle conduira aussi à une forme réduite qui possédera encore les mêmes propriétés que dans le cas précédent, et l'on pourra de même en conclure la possibilité d'un changement de variables permettant *la résolution régulière canonique* avec, à la fin, un résidu d'équations ne contenant plus que les variables. Ce résidu, s'il existe, indiquera l'incompatibilité des équations du système, mais on voit que cette incompatibilité n'empêche, en aucune façon, notre résolution régulière canonique.

III.

1. A partir de ce moment, et contrairement à ce que nous avons fait jusqu'ici, nous désignerons par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ les anciennes variables et par $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les nouvelles. En outre, jusqu'au moment où nous les fixerons d'une façon définitive, nous considérerons comme des *constantes absolument arbitraires* les coefficients de notre changement linéaire de variables et, pour abréger, nous les désignerons d'une façon générale par λ.

Étant donné un système de p équations aux dérivées partielles avec les variables x', le changement de variables le transformera en p équations nouvelles aux variables x et contenant les constantes arbitraires λ.

Le théorème qui précède montre qu'on pourra certainement en faire la résolution régulière canonique et que l'on sera conduit à trouver, comme expressions des dérivées par rapport auxquelles le système est alors résolu, des fonctions bien déterminées des λ, des x et des autres dérivées.

Soit

$$F = 0$$

une équation avec les variables x'; exprimons-la au moyen des variables x et prenons ses dérivées par rapport à toutes ces variables. On aura

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x'_1}\frac{\partial x'_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x'_m}\frac{\partial x'_m}{\partial x_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_m} = \frac{\partial F}{\partial x'_1}\frac{\partial x'_1}{\partial x_m} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x'_m}\frac{\partial x'_m}{\partial x_m},$$

en supposant que, dans

$$\frac{\partial F}{\partial x'_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x'_m},$$

on ait fait le changement de variables.

On voit immédiatement que les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x'_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x'_m} = 0$$

entraînent

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_m} = 0,$$

et la réciproque est vraie, pourvu que le déterminant des $\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}$, c'est-à-dire le déterminant des λ, ne soit pas nul, condition certainement réalisée puisque les λ sont arbitraires.

Il en résulte qu'on obtient deux systèmes équivalents en prenant les dérivées de l'équation $F = 0$ et y faisant ensuite le changement de variables, ou en faisant tout de suite ce changement dans F, puis prenant les dérivées par rapport aux nouvelles variables.

On sait que, si deux systèmes d'équations sont algébriquement équivalents, le système formé par les dérivées du premier ordre des équations du premier est équivalent au système formé par les dérivées du premier ordre des équations du second.

Considérons les équations

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_m} = 0,$$

elles sont équivalentes aux équations

$$\frac{\partial F}{\partial x'_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x'_m} = 0;$$

le système

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_m^2} = 0$$

est donc équivalent au système obtenu en prenant les dérivées par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des équations $\frac{\partial F}{\partial x'_j}$ dans lesquelles on aurait fait le changement de variables et, d'après la propriété initiale, le système ainsi obtenu est lui-même équivalent au système obtenu en prenant les dérivées par rapport à $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ des équations $\frac{\partial F}{\partial x'_j}$, puis y faisant le changement de variables.

De sorte que, finalement, le système

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_m} = 0$$

est équivalent au système

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1'^2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_m'^2} = 0,$$

dans lequel on aurait fait le changement de variables.

On voit aussi que le raisonnement peut se continuer de proche en proche jusqu'à des dérivées d'ordre quelconque.

2. Soient

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_p = 0$$

des équations quelconques. Supposons qu'on y fasse le changement de variables, elles deviendront des équations

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_p = 0$$

contenant les variables x et les arbitraires λ.

Prenons des dérivées de Φ_1, puis les dérivées secondes, et ainsi de suite jusqu'à un ordre quelconque; faisons de même pour Φ_2 jusqu'à un ordre quelconque, et ainsi de suite jusqu'à Φ_p.

Nous obtiendrons ainsi un système σ qu'on pourra représenter par

$$\begin{array}{llll} \sigma_1^0, & \sigma_1^1, & \sigma_1^2, & \ldots, \\ \sigma_2^0, & \sigma_2^1, & \sigma_2^2, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ \sigma_p^0, & \sigma_p^1, & \sigma_p^2, & \ldots, \end{array}$$

les équations σ_i^j étant toutes les dérivées d'ordre j de l'équation $\Phi_i = 0$.

Au moyen des équations $F_1 = 0, \ldots, F_p = 0$, aux variables x', nous pouvons former un système parallèle s représenté par

$$\begin{array}{llll} s_1^0, & s_1^1, & s_1^2, & \ldots, \\ s_2^0, & s_2^1, & s_2^2, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ s_p^0, & s_p^1, & s_p^2, & \ldots. \end{array}$$

Dans ce système, faisons le changement de variables; d'après ce que nous venons de voir, chaque système partiel s_i^j deviendra alors équivalent au système partiel correspondant σ_i^j; de sorte que le système s deviendra équivalent au système σ.

Mais nous savons que, après la transformation, le système s peut être résolu d'une façon régulière et canonique; étant alors équivalent à σ, il en résulte la proposition importante qui suit :

$\Phi_1 = 0, \ldots, \Phi_p = 0$ *étant ce que deviennent les équations* $F_1 = 0, \ldots, F_p = 0$ *après la transformation, le système formé par les équations* Φ *et leurs dérivées jusqu'à des ordres quelconques peut toujours, par suite de la présence des constantes arbitraires* λ, *être résolu d'une façon régulière et canonique.*

3. Supposons que les équations Φ aient été résolues d'une façon régulière et canonique. Soit alors μ un ordre entier quelconque; prenons les dérivées des équations Φ jusqu'au moment où elles arrivent à être de l'ordre μ. Les équations Φ et ces dérivées constituent un nouveau système Σ_1^μ, qu'on peut certainement résoudre d'une façon régulière et canonique; nous supposerons, en outre, que cette résolution ne conduise pas à un résidu d'équations ne contenant plus les fonctions inconnues.

Opérons sur le système Σ_1^μ comme nous avons opéré sur le système des équations Φ, nous serons conduits à un nouveau système Σ_2^μ sur lequel on opérera encore de la même façon.

Nous obtiendrons de cette façon une suite de systèmes

$$\Sigma_1^\mu, \quad \Sigma_2^\mu, \quad \ldots.$$

Il est clair que, chaque fois qu'on passe d'un système au suivant, aucun des nombres p_i^j ne peut diminuer, puisque les équations résolues d'un système se retrouvent dans le suivant; d'autre part, ces nombres ne peuvent pas dépasser des limites déterminées qui dépendent de μ.

Il en résulte qu'au bout d'un nombre limité d'opérations, on arrivera à un système Σ^μ qui contiendra un résidu d'équations ne contenant plus les inconnues, ou à un système Σ^μ qui se reproduira par l'opération précédemment décrite.

Dans le premier cas, on sera assuré que les équations Φ et, par suite, les équations F sont incompatibles, et il n'y aura plus à s'en occuper.

Si l'on est dans le second cas, c'est que toute dérivée de n'importe quelle équation d'ordre moindre que μ et appartenant au système Σ^μ est une conséquence algébrique des équations de ce système. Il en résulte immédiatement que les ensembles Σ_i^j, par rapport auxquels Σ^μ a été résolu d'une façon régulière et canonique, vérifient certainement les conditions

$$(E_i^j)' \leqq E_i^{j+1}.$$

4. Ces propriétés vont nous permettre d'arriver à une forme canonique remarquable des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Un tel système sera défini par des équations

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots,$$

qui, après notre changement de variables, deviendront

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \ldots,$$

Au moyen des équations Φ d'ordre inférieur ou égal à un nombre choisi au hasard, ν par exemple, formons le système Σ^ν. Nous supposons que la formation de ce système est possible, sans quoi, comme nous l'avons vu, les équations données seraient incompatibles. Désignons par

$$e_1^\nu, \quad e_2^\nu, \quad \ldots, \quad e_q^\nu$$

les ensembles d'ordre ν auxquels conduit la résolution régulière et canonique de Σ^ν.

Au moyen des équations du système Σ^ν et des équations Φ d'ordre

$\nu + 1$, s'il y en a, formons un nouveau système $\Sigma^{\nu+1}$ et désignons encore par

$$e_1^{\nu+1}, \quad e_2^{\nu+2}, \quad \ldots, \quad e_q^{\nu+1}$$

les ensembles d'ordre $\nu + 1$ fournis par la résolution régulière et canonique de $\Sigma^{\nu+1}$.

Il résulte des raisonnements précédents que l'on aura

$$(e_i^\nu)' \leqq e_i^{\nu+1}.$$

Continuons ainsi; nous obtiendrons des systèmes

$$\Sigma^\nu, \quad \Sigma^{\nu+1}, \quad \ldots,$$

et chacune des suites

$$e_i^\nu, \quad e_i^{\nu+1}, \quad \ldots$$

sera telle que chaque ensemble qui en fait partie soit égal ou supérieur à l'ensemble dérivé du précédent.

Nous avons vu, dans le premier Chapitre, que, dans une telle suite, le nombre des termes pour lesquels il y a inégalité est forcément limité. Il en résulte qu'il y aura un ordre μ à partir duquel on aura

$$(e_i^j)' = e_i^{j+1} \qquad (j = \mu, \mu + 1, \ldots; \; i = 1, 2, \ldots, q).$$

Considérons le système $\Sigma^{\mu+1}$; ses ensembles d'ordre $\mu + 1$ seront

$$(e_1^\mu)', \quad (^\mu_2)', \quad \ldots, \quad (e_q^\mu)';$$

ses ensembles d'ordre μ devront être au moins égaux aux ensembles e^μ et leurs ensembles dérivés devront être au plus égaux aux ensembles $e^{\mu+1}$, c'est-à-dire aux dérivés des ensembles e^μ, de sorte que les ensembles d'ordre μ de $\Sigma^{\mu+1}$ seront précisément les ensembles e^μ.

De même, on montrera que le système $\Sigma^{\mu+2}$ a pour ensembles d'ordre μ

$$e_1^\mu, \quad e_2^\mu, \quad \ldots, \quad e_q^\mu;$$

pour ensembles d'ordre $\mu + 1$

$$(e_1^\mu)', \quad (e_2^\mu)', \quad \ldots, \quad (e_q^\mu)',$$

et pour ensembles d'ordre $\mu + 2$

$$(e_1^\mu)'', \quad (e_2^\mu)'', \quad \ldots, \quad (e_q^\mu)'';$$

et ainsi de suite pour les systèmes successifs Σ.

Voyons comment on passe d'un de ces Σ au suivant, par exemple de $\Sigma^{\mu+2}$ à $\Sigma^{\mu+3}$.

Il faudra ajouter au système $\Sigma^{\mu+1}$ les dérivées des équations d'ordre $\mu+2$ de ce système et les équations Φ d'ordre $\mu+3$ s'il en existe. Or on peut prendre un certain nombre de ces dérivées des équations d'ordre $\mu+2$, de manière qu'elles soient résolues immédiatement et d'une façon régulière canonique par rapport aux ensembles $(e_i^{\mu})'''$. Les autres dérivées et les équations nouvelles Φ ne pourront pas, d'après les hypothèses, fournir aucune nouvelle dérivée des ordres μ, $\mu+1$, $\mu+2$, $\mu+3$, de sorte qu'en vertu des équations d'ordre μ, $\mu+1$, $\mu+2$ du système $\Sigma^{\mu+2}$ et des équations d'ordre $\mu+3$, que nous venons de former, elles se réduiront à des équations d'ordre $\mu-1$ au plus. Elles ne pourront donc avoir pour effet que d'augmenter les ensembles $E_i^j (j<\mu)$ ou fournir des équations indépendantes des inconnues.

Mais les ensembles $E_i^j (j<\mu)$ sont en nombre limité, puisqu'il y en a au maximum $n(\mu+1)$, et, en outre, chacun d'eux ne peut avoir au maximum qu'un nombre limité de termes, déterminé par le nombre fixe μ. Il en résulte forcément qu'après avoir formé un nombre limité de systèmes Σ à partir de Σ^{μ}, on arrivera ou à un système contenant un résidu d'équations où ne figurent pas les inconnues, ou à des systèmes successifs où les ensembles $E_i^j (j<\mu)$ resteront invariables.

Dans le premier cas, on sera assuré que le système est incompatible et il n'y aura plus à s'en occuper.

Étudions le second cas. Soit Σ^{n} le système à partir duquel les ensembles $E_i^j (j<\mu)$ ne varient plus, il sera résolu d'une façon régulière et canonique par rapport aux ensembles

$$\begin{array}{llll}
E_1^n, & E_2^n, & \ldots, & E_q^n, \\
E_1^{n-1}, & E_2^{n-1}, & \ldots, & E_q^{n-1}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
E_1^j, & E_2^j, & \ldots, & E_q^j. \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
E_1^0, & E_2^0, & \ldots, & E_q^0,
\end{array}$$

dont un certain nombre seront nuls.

Formons Σ^{n+1}. Il faudra ajouter à Σ^{n} les dérivées des équations d'ordre n de ce système et les équations Φ d'ordre $n+1$. Parmi les dérivées des équations d'ordre n, prenons celles qui permettent de calculer les dérivées qui figurent dans

$$(E_1^n)', \quad (E_2^n)', \quad \ldots, \quad (E_q^n)',$$

et portons ces expressions dans les autres dérivées et dans les équations Φ. Les nouvelles équations ainsi obtenues devront être des conséquences algébriques des équations du système Σ^n, puisque, ajoutées à ces équations, elles ne permettent d'en rien tirer de plus.

Il en sera encore de même quand on passera de Σ^{n+1} à Σ^{n+2}, et ainsi de suite indéfiniment.

Les équations Φ d'ordres $n+1$, $n+2$, ... sont donc des conséquences algébriques des équations Φ d'ordre inférieur ou égal à n et des équations qui en proviennent par dérivation. C'est ce qu'on peut exprimer en disant qu'elles sont des conséquences analytiques des équations Φ d'ordre inférieur ou égal à n, de sorte que

Les équations analytiquement distinctes qui définissent un système compatible sont forcément en nombre limité.

En outre, et d'après ce qui précède,

Dans tout système compatible, il existe un ordre fini à partir duquel les conditions d'intégrabilité ne donnent plus d'équations nouvelles.

Nous avons ainsi retrouvé le théorème fondamental de M. Tresse, en même temps que nous parvenons à la forme canonique du système.

5. Il nous reste à traiter une question qui se présente forcément dans l'application.

Comment, dans la formation des systèmes successifs Σ^μ, reconnaître le moment à partir duquel il n'y aura plus jamais d'équations nouvelles fournies par les conditions d'intégrabilité? La réponse est donnée par la propriété suivante, qu'on admet généralement, mais qu'il n'est pas inutile de démontrer rigoureusement.

Si, en passant du système Σ^n au système Σ^{n+1}, il ne s'introduit pas de nouvelles équations d'intégrabilité, les systèmes suivants ne pourront plus jamais en introduire.

Les équations d'ordre n du système Σ^n seront de la forme

$$\frac{\partial^n z_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}=f^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}.$$

En passant de Σ^n à Σ^{n+1}, on n'introduit, par hypothèse, aucune condition d'intégrabilité. C'est dire qu'après avoir dérivé d'une façon déterminée les équations d'ordre n de Σ^n, de manière à obtenir une fois et une seule toutes les dérivées faisant partie des ensembles $(E_i^n)'$, les équations obtenues en prenant autrement les dérivées sont des conséquences algébriques des premières et des équations du système Σ^n ou, plus simplement, sont des conséquences algébriques des équations du système Σ^{n+1} tel que nous venons de le former. Soit

$$\frac{\partial^{n+2} z_i}{\partial x_1^{\beta_1}\,\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_p^{\beta_p}}\qquad(\beta_p\neq 0)$$

une dérivée d'ordre $n+2$ faisant partie de $(E_i^n)''$ et qu'on supposera pouvoir être obtenue plusieurs fois en dérivant les termes de $(E_i^n)'$.

Si on peut l'obtenir plusieurs fois, il nous suffit de considérer les équations d'intégrabilité obtenues en égalant ses diverses expressions à l'une d'elles.

Il résulte des calculs développés dans le Chapitre I que cette dérivée pourra certainement s'obtenir sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial^{n+1} z_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_p^{\beta_p-1}}\right),$$

la dérivée entre parenthèses appartenant forcément à $(E_i^n)'$. Supposons qu'on puisse l'obtenir sous une autre forme

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^{n+1} z_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_k^{\beta_k-1}\ldots\partial x_p^{\beta_p}}\right),$$

la dérivée entre parenthèses appartenant encore à $(E_i^n)'$.

Mais, dans cette dernière dérivée d'ordre $n+1$, l'exposant de ∂x_p est β_p, qui n'est pas nul ; il en résulte que

$$\frac{\partial^n z_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_k^{\beta_k-1}\ldots\partial x_p^{\beta_p-}}$$

appartient certainement à E_i^n et l'on aura, d'après le système Σ^μ,

$$\frac{\partial^n z_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_k^{\beta_k-1}\ldots\partial x_p^{\beta_p-1}}=f^i_{\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_p-1}.$$

Le système $\Sigma^{\mu+1}$ donne une expression de $\frac{\partial^{n+1} z_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_k^{\beta_k}\partial x_p^{\beta_p-1}}$; mais, puisque les conditions d'intégrabilité sont supposées vérifiées, cette expression pourra, en vertu des équations de ce système, s'écrire

$$\frac{\partial^{n+1} z_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_k^{\beta_k}\ldots\partial x_p^{\beta_p-1}}=\frac{\partial}{\partial x_k}f^i_{\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_p-1}.$$

De même, et toujours en vertu des équations du système Σ^{n+1}, on pourra écrire

$$\frac{\partial^{n+1} z_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_k^{\beta_k-1}\ldots\partial x_p^{\beta_p}}=\frac{\partial}{\partial x_p}f^i_{\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_p-1}.$$

Nos deux expressions de $\frac{\partial^{n+2} z_i}{\partial x_1^{\beta_1}\ldots\partial x_k^{\beta_k}\ldots\partial x_p^{\beta_p}}$ seront donc

$$\frac{\partial^2}{\partial x_p\,\partial x_k}f^i_{\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_p-1}\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_p}f^i_{\beta_1,\ldots,\beta_k-1,\ldots,\beta_p-1}.$$

Elles seront donc bien identiques, de sorte que, en passant de Σ^{n+1} à Σ^{n+2}, on n'introduira pas d'équations nouvelles par les conditions d'intégrabilité.

Σ^{n+1} et Σ^{n+2} sont dans les mêmes conditions qu'étaient Σ^n et Σ^{n+1}; on peut leur appliquer le résultat que nous venons de trouver et en conclure que, en passant de Σ^{n+2} à Σ^{n+3}, il ne s'introduit pas encore de nouvelles équations par les conditions d'intégrabilité, et il en sera ainsi indéfiniment,

6. Nous pouvons maintenant exposer d'une façon générale notre formation d'un système complètement intégrable.

Un tel système sera défini par un *nombre limité d'équations* $F=0$, *analytiquement distinctes*.

Soient $\Phi_1=0$, $\Phi_2=0$, ... les équations F dans lesquelles on a fait le changement linéaire de variables en considérant comme des constantes arbitraires les coefficients λ de cette transformation.

Soit μ l'ordre le plus élevé des équations Φ, nous commencerons par former, au moyen de ces équations, le système Σ^μ en opérant toujours les résolutions régulières et canoniques, ce qui est toujours possible par suite de la présence des λ.

En ajoutant au système Σ^μ les dérivées de ses équations d'ordre μ, nous obtiendrons des conditions d'intégrabilité et nous formerons un nouveau système $\Sigma^{\mu+1}$ toujours résolu d'une façon régulière et canonique.

En formant les systèmes successifs Σ^μ, $\Sigma^{\mu+1}$, ..., on arrivera forcément à un système Σ^n tel que les dérivées de ses équations d'ordre n, ne donnent aucune condition d'intégrabilité qui ne soit une conséquence des équations de ce système.

C'est ce système Σ^n qui constitue notre forme canonique du système d'équations aux dérivées partielles. Il se décomposera en systèmes partiels

$$\begin{array}{cccc} \sigma_1^n, & \sigma_2^n, & \ldots, & \sigma_q^n, \\ \sigma_1^{n-1}, & \sigma_2^{n-1}, & \ldots, & \sigma_q^{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \sigma_1^v, & \sigma_2^v, & \ldots, & \sigma_q^v, \end{array}$$

qui sont résolus par rapport à des dérivées formant des ensembles canoniques

$$\begin{array}{cccc} E_1^n, & E_2^n, & \ldots, & E_q^n, \\ E_1^{n-1}, & E_2^{n-1}, & \ldots, & E_q^{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ E_1^v, & E_2^v, & \ldots, & E_q^v, \end{array}$$

tels que, dans chacune des suites

$$E_i^v, \quad E_i^{v+1}, \quad \ldots, \quad E_i^{n-1}, \quad E_i^n, \qquad (i=1, 2, \ldots, q),$$

chaque ensemble soit au moins égal à l'ensemble dérivé du précédent.

Nous supposerons toujours que la résolution complète a été achevée, c'est-à-dire que les seconds membres des équations de Σ^n ne contiennent aucune des dérivées faisant partie des ensembles E_i^j.

Les équations σ_i^j, qui sont d'ordre j relativement à z_i, sont d'ordre $j-1$, au plus, par rapport à $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}$ et d'ordre j, au plus, par rapport à $z_{i+1}, \ldots, z_q$.

Toute dérivée d'une équation d'ordre $\mu(\mu < n)$ de Σ^n sera une conséquence algébrique des équations d'ordre $\mu + 1$ et des équations d'ordre inférieur. Enfin la formation des équations d'ordre $\mu + 1$, $\mu + 2, \ldots$ du système ne donnera jamais que des conditions d'intégrabilité qui seront des conséquences algébriques des équations précédemment formées.

La forme canonique Σ^n, que nous venons de donner à notre système, contient les arbitraires λ provenant du changement de variables.

Les seconds membres des équations sont certainement, comme nous l'avons déjà fait remarquer, des fonctions bien déterminées des λ, des variables, des inconnues et de certaines de leurs dérivées. Ces fonctions ne sont identiquement ni indéterminées ni infinies.

On pourra donc, et d'une infinité de façons, fixer numériquement les λ de façon que leur déterminant ne soit pas nul et que les seconds membres des équations du système Σ^n ne deviennent ni identiquement indéterminés ni identiquement infinis, de sorte que

Étant données des équations compatibles $F_1 = 0, \ldots, F_p = 0$, *il y a une infinité de changements linéaires de variables permettant de ramener le système auquel elles donnent naissance à la forme canonique et complètement intégrable* Σ^n.

Dans Σ^n, nous appellerons les équations σ_i^n *équations principales* et les équations $\sigma_i^\mu(\mu = \nu_1, \ldots, n-1)$ *équations auxiliaires*. De même les ensembles E_i^n seront les *ensembles principaux* et les ensembles $E_i^\mu(\mu = \nu_1, \ldots, n-1)$ les *ensembles auxiliaires*.

Les ensembles principaux E_i^n auront pour indices les nombres

$$\gamma_0^i, \quad \gamma_1^i, \quad \gamma_2^i, \quad \ldots, \quad \gamma_{m-1}^i.$$

Dans leur ensemble, nous les appellerons les *nombres fondamentaux de* Σ^n.

DEUXIÈME PARTIE.

EXISTENCE DES INTÉGRALES.

1. Nous supposerons que le système complètement intégrable que nous voulons étudier a été, par un changement convenable de variables et d'après le procédé que nous venons d'indiquer, ramené à la forme canonique et complètement intégrable Σ^n.

Dans chaque ensemble principal E_i^n, nous rangerons les dérivées par groupes, comme il a été indiqué dans le Chapitre I, et, par cela même, les équations principales se trouveront partagées en groupes $G_1, G_2, \ldots$.

Nous nous proposons de chercher à déterminer un système z_1, $z_2, \ldots, z_q$, d'intégrales analytiques au voisinage de $x_1^0, \ldots, x_m^0$.

Nous remarquerons d'abord que si un ensemble E_i^n est nul, tous les ensembles E_i qui précèdent le sont également, de sorte que les équations du système Σ^n ne sont jamais résolues par rapport à des dérivées de z_i. Cette inconnue ne fait donc pas, en réalité, partie des véritables inconnues du système; on pourra la prendre arbitrairement.

Nous commencerons donc par prendre arbitrairement les fonctions z_i pour lesquelles on a $\gamma_0^i = 1$.

Supposons, par exemple, que ce fait se produise pour $z_{q'+1}, \ldots, z_q$. Dans chacun des systèmes $\sigma_1^n, \sigma_2^n, \ldots, \sigma_{q'}^n$, prenons le premier groupe G_1 d'équations. Chacun de ces groupes sera composé d'une seule équation et l'on obtiendra ainsi q' équations d'ordre n en $z_1, z_2, \ldots, z_{q'}$, résolues par rapport à

$$\frac{\partial^n z_1}{\partial x_1^n}, \quad \frac{\partial^n z_2}{\partial x_1^n}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n z_{q'}}{\partial x_1^n}.$$

C'est un système de M^me^ Kowalevski; désignons-le par K_1; il déterminera parfaitement $z_1, z_2, \ldots, z_{q'}$ quand on se donnera les fonctions auxquelles se réduisent

$$\begin{array}{cccc} z_1, & \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} z_1}{\partial x_1^{n-1}}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ z_{q'}, & \dfrac{\partial z_{q'}}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} z_{q'}}{\partial x_1^{n-1}}, \end{array}$$

pour $x_1 = x_1^0$, pourvu que les seconds membres soient analytiques au voisinage des valeurs initiales calculées au moyen de ces fonctions.

Nous représenterons ces fonctions initiales dépendant des $m-1$ variables $x_2, \ldots, x_m$ par

$$\begin{array}{cccc} z_1^0, & z_1^1, & \ldots, & z_1^{n-1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ z_{q'}^0, & z_{q'}^1, & \ldots, & z_{q'}^{n-1}, \end{array}$$

il s'agit maintenant de les déterminer de façon que les fonctions correspondantes $z_1, z_2, \ldots, z_{q'}$ vérifient toutes les autres équations du système Σ^n.

Remarquons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation F soit vérifiée par des fonctions analytiques $z_1, z_2, \ldots$ est que les expressions

$$F, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}, \quad \ldots$$

soient identiquement nulles pour $x_1 = x_1^0$. En outre, toute dérivée, par rapport à x_1, d'une équation du système Σ^n est une conséquence algébrique des équations de ce système Σ^n prolongé indéfiniment au moyen des systèmes successifs $\Sigma^{n+1}, \Sigma^{n+2}, \ldots$.

Il nous suffira par conséquent d'exprimer que toutes les équations du système Σ^n prolongé indéfiniment sont vérifiées pour $x_1 = x_1^0$.

Supposons qu'il en soit ainsi pour les équations du système Σ^n lui-même, je dis qu'il en sera de même pour les équations d'ordres supérieurs.

Les équations d'ordre n de Σ^n ont été partagées en deux systèmes K_1 et K'_1; on voit immédiatement qu'on obtiendra certainement les ensembles dérivés des E_i^n et d'un ordre quelconque en prenant les dérivées par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des équations K_1 et les dérivées par rapport à $x_2, \ldots, x_m$ seulement des équations K'_1.

Les équations dérivées du système K_1 sont vérifiées certainement quelles que soient les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, puisque les inconnues z sont définies par le système K_1; en particulier, elles seront vérifiées identiquement pour $x_1 = x_1^0$.

Les équations K'_1 sont, par hypothèse, vérifiées identiquement pour $x_1 = x_1^0$; il en sera donc de même pour leurs dérivées par rapport aux seules variables $x_2, \ldots, x_m$, puisqu'on a le droit de faire $x_1 = x_1^0$ avant de telles dérivations. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que les intégrales $z_1, z_2, \ldots, z_q$, déterminées par le système K_1 de Mme Kowalevski et les fonctions initiales z_i^μ, vérifient le système Σ^n est que ces fonctions initiales z_i^μ vérifient le système Σ_1^n obtenu en faisant $x_1 = x_1^0$ dans les équations auxiliaires et dans les équations K'_1.

2. Nous sommes ainsi ramené à étudier ce système Σ_1^n, dans lequel il y a plus d'inconnues, mais où il y a une variable en moins.

Ce système Σ_1^n n'est pas tout à fait sous forme canonique, mais on l'y ramènera immédiatement en faisant le changement d'inconnues

$$z_i^\mu = \frac{\partial^\mu}{\partial x_2^\mu} Z_i^\mu.$$

Les conditions d'intégrabilité seront vérifiées comme conséquence de ce fait que les conditions d'intégrabilité du système Σ^n, obtenues en dérivant les équations K'_1 par rapport à $x_2, \ldots, x_m$ seulement, ne donneront jamais d'équations contenant des dérivées prises n fois par rapport à x_1, tandis que les équations K_1 et les équations qu'on en tire par dérivation seront toujours résolues par rapport à des dérivées prises au moins n fois par rapport à x_1. De telles conditions d'intégrabilité seront donc des conséquences algébriques des équations autres que celles du système K_1 et, par suite, continueront à être vérifiées après la suppression de ces équations K_1 et aussi après avoir fait $x_1 = x_1^0$.

On pourra donc appliquer à ce nouveau système Σ_1^n, où les inconnues sont les Z_i^μ, le même raisonnement qu'au système Σ_1^n.

Les équations K'_1 seront les équations principales de Σ_1^n.

Chaque groupe G_1, contenu dans E_i^n et autre que le premier, donnait un groupe d'équations résolues par rapport à des dérivées de z_i ayant le même indice α_1; ces équations deviendront donc des équations résolues par rapport aux dérivées d'un même Z_i^μ.

Les groupes G_1, qui correspondent aux valeurs $n-1, \ldots, \gamma_1^i$ de cet indice α_1, donneront des équations résolues par rapport aux dérivées de $Z_i^{n-1}, \ldots, Z_i^{\gamma_1^i}$ et les inconnues $Z_i^{\gamma_1^i-1}, \ldots, Z_i^1, Z_i^0$ ne figureront jamais dans les premiers membres.

Il en résulte qu'on pourra se donner arbitrairement les fonctions

$$\begin{array}{llll} Z_1^0, & Z_1^1, & \ldots, & Z_1^{\gamma_1^1-1}. \\ Z_2^0, & Z_2^1, & \ldots, & Z_2^{\gamma_1^2-1}, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill,} \\ Z_{q'}^0, & Z_{q'}^1, & \ldots, & Z_{q'}^{\gamma_1^{q'}-1}. \end{array}$$

Mais, en réalité, ce ne sont pas les fonctions Z_i^μ elles-mêmes qui figurent dans les équations, ce sont les fonctions z_i^μ, de sorte que l'on pourra se donner arbitrairement

$$\begin{array}{llll} z_1^0, & z_1^1, & \ldots, & z_1^{\gamma_1^1-1}, \\ z_2^0, & z_2^1, & \ldots, & z_2^{\gamma_1^2-1}, \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill,} \\ z_{q'}^0, & z_{q'}^1, & \ldots, & z_{q'}^{\gamma_1^{q'}-1}. \end{array}$$

Ceci fait, nous chercherons à déterminer les Z_i^μ qui restent en prenant les premières équations de chaque groupe, c'est-à-dire au moyen des équations provenant les premiers groupes G_2 de nos anciens groupes G_1.

Ces équations formeront encore un système K_2 de M^me^ Kowalevski, et il suffira que les fonctions initiales des Z_i^μ pour $x_2 = x_2^0$ vérifient les équations restantes K_2' et les équations auxiliaires.

Si l'on remarque, comme nous venons déjà de le faire, que ce ne sont pas les Z_i^μ qui entrent véritablement dans nos équations, on verra que les équations que doivent vérifier les fonctions initiales des Z_i^μ ne contiennent, en réalité, que des fonctions initiales des z_i^μ. Ces fonctions initiales vérifiant le nouveau système Σ_2'' ainsi obtenu, comme nous n'avons pas besoin des Z_i^μ, mais seulement des z_i^μ, nous pourrons, dans les équations K_2, conserver les inconnues z_i^μ : elles n'en continueront pas moins à former un système de M^me Kowalevski, mais dons lequel les inconnues n'entreront pas toutes au même ordre. En outre, les fonctions initiales qui entreront dans le système Σ_2'' seront précisément les fonctions initiales relatives à ce système K_2 aux inconnues z_i^μ.

On est alors ramené à étudier Σ_2'', qui contient encore plus d'inconnues que Σ_1'', mais qui ne contient plus que les $m-2$ variables $x_3, \ldots, x_m$.

Nous désignerons par

$$z_i^{\alpha_1, 0}, \quad z_i^{\alpha_1, 1}, \quad \ldots, \quad z_i^{\alpha_1, \alpha_2}, \quad \ldots, \quad z_i^{\alpha_1, n-1-\alpha_1}$$

les fonctions initiales de $z_i^{\alpha_1}$, et nous ramènerons immédiatement Σ_2'' à la forme canonique en posant d'une façon générale

$$z_i^{\alpha_1, \alpha_2} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x_3^{\alpha_1+\alpha_2}} Z_i^{\alpha_1, \alpha_2}.$$

Les conditions d'intégrabilité résulteront de ce fait que les équations K_1 et K_2 de Σ'' sont résolues par rapport à des dérivées prises n fois relativement à x_1 et x_2, et qu'il en est de même pour les équations qu'on en déduit par dérivation, tandis que les équations K_2' ne seront jamais résolues que par rapport à des dérivées prises $n-1$ fois au plus relativement à x_1 et x_2, et qu'il en sera de même pour toutes les équations qu'on en tirera en les dérivant seulement par rapport à $x_3, \ldots, x_m$. Les conditions d'intégrabilité qu'on obtiendra ainsi seront donc vérifiées indépendamment de K_1 et K_2 et, en y faisant $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, on obtient précisément celles de Σ_2''.

Nous avons pris arbitrairement les z_i^μ pour lesquels on avait $\mu < \gamma_1'$, de sorte que dans Σ_2'' ne figureront comme inconnues que les fonctions initiales de

$$z_i^{n-1}, \quad \ldots, \quad z_i^{\gamma_1'}.$$

Considérons les fonctions initiales de z_i^μ $(\mu \geqq \gamma_1^i)$. Les équations K_2' se rangeront par groupes G_2, chacun d'eux étant résolu par rapport aux dérivées d'une certaine inconnue Z_i^{μ, α_2}. Or, on trouve en entier dans E_i'' tous les groupes G_1 pour lesquels on a $\alpha_1 > \gamma_1^i$ et, par suite, tous les groupes G_2 pour lesquels on a $\alpha_1 > \gamma_1^i$, de sorte que tous les $Z_i^{\alpha_1, \alpha_2}$ satisfaisant à cette condition se trouveront dans les premiers membres des équations K_2'.

Il n'en sera plus de même pour les $Z_i^{\alpha_1, \alpha_2}$ pour lesquels on aura $\alpha_1 = \gamma_1^i$; si l'on a $\alpha_2 < \gamma_2^i$, ils ne figureront certainement jamais dans les premiers membres et il en résulte, comme à propos de Σ_1'', que les fonctions

$$z_i^{\gamma_1^i, 0}, \quad z_i^{\gamma_1^i, 1}, \quad \ldots, \quad z_i^{\gamma_1^i, \gamma_2^i - 1}$$

pourront être prises arbitrairement.

On pourra continuer ainsi et arriver au système Σ_{m-1}'' ne contenant plus que la seule variable x_m. Les équations principales de ce système se rangeront en groupes ne contenant chacun qu'une équation et résolus par rapport à des inconnues différentes; ces groupes correspondront aux groupes G_{m-1} des ensembles E^n.

Les inconnues

$$z_i^{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{m-2}^i, 0}, \quad z_i^{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{m-2}^i, 1}, \quad \ldots, \quad z_i^{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{m-2}^i, \gamma_{m-1}^i - 1}$$

ne figureront pas dans les premiers membres, de sorte qu'on pourra se donner arbitrairement ces fonctions de x_m.

Le système K_{m-1} de M^me^ Kowalevski comprendra ici toutes les équations principales, il n'y aura pas d'équations K_{m-1}'. Les fonctions initiales de nos inconnues seront ici des constantes et elles seront assujetties à vérifier uniquement les équations auxiliaires. On pourra se donner arbitrairement toutes celles qui ne figureront pas dans les premiers membres des équations auxiliaires.

3. Faisons maintenant le raisonnement en sens inverse. Séparons les dérivées d'ordre égal ou inférieur à n de nos différentes inconnues en deux classes C et C′, la première étant formée par toutes les dérivées qui figurent dans les premiers membres des équations du système Σ^n.

Commençons par nous donner arbitrairement et sous forme de fonctions analytiques en $x_1^0, \ldots, x_m^0$, les inconnues z pour lesquelles on a $\gamma_0 = 1$.

Considérons ensuite les inconnues z_i pour lesquelles on a $\gamma_0 = 0$; nous nous donnerons, relativement à chacune d'elles, les γ_1^i fonctions

$$z_i, \quad z_i^1, \quad \ldots, \quad z_i^{\gamma_1^i-1},$$

auxquelles doivent se réduire

$$z_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\gamma_1^i-1} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i-1}}$$

pour $x_1 = x_1^0$. Ces fonctions étant supposées analytiques en $x_2^0, \ldots, x_m^0$.

Nous nous donnerons ensuite arbitrairement les fonctions

$$z_i^{\gamma_1^i, 0}, \quad z_i^{\gamma_1^i, 1}, \quad \ldots, \quad z_i^{\gamma_1^i, \gamma_2^i-1},$$

auxquelles doivent se réduire

$$\frac{\partial^{\gamma_1^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}}, \quad \frac{\partial^{\gamma_1^i+1} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}\, \partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\gamma_1^i+\gamma_2^i-1} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}\, \partial x_2^{\gamma_2^i-1}}$$

pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$. Ces fonctions sont au nombre de γ_2^i pour chaque z_i et elles seront supposées analytiques en $x_3^0, \ldots, x_m^0$.

Et ainsi de suite.

En dernier lieu, on se donnera, pour chaque z_i, les γ_{m-1}^i fonctions de x_m

$$z_i^{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{m-2}^i, 0}, \quad z_i^{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{m-2}^i, 1}, \quad \ldots, \quad z_i^{\gamma_1^i, \gamma_2^i, \ldots, \gamma_{m-2}^i, \gamma_{m-1}^i-1},$$

auxquelles doivent se réduire

$$\frac{\partial^{\gamma_1^i+\gamma_2^i+\ldots+\gamma_{m-2}^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}\, \partial x_2^{\gamma_2^i} \ldots \partial x_{m-2}^{\gamma_{m-2}^i}}, \quad \frac{\partial^{\gamma_1^i+\gamma_2^i+\ldots+\gamma_{m-2}^i+1} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}\, \partial x_2^{\gamma_2^i} \ldots \partial x_{m-2}^{\gamma_{m-2}^i}\, \partial x_{m-1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\gamma_1^i+\gamma_2^i+\ldots+\gamma_{m-2}^i+\gamma_{m-1}^i-1} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}\, \partial x_2^{\gamma_2^i} \ldots \partial x_{m-2}^{\gamma_{m-2}^i}\, \partial x_{m-1}^{\gamma_{m-1}^i-1}}$$

pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_{m-1} = x_{m-1}^0$. Ces fonctions seront toujours supposées analytiques en x_m^0.

Les fonctions, que nous venons de nous donner ainsi arbitrairement, fourniront immédiatement les valeurs en $x_1^0, \ldots, x_m^0$ d'un certain nombre de dérivées C′ et ne fourniront les valeurs initiales d'aucune dérivée C.

Finalement, nous nous donnerons les constantes auxquelles doivent se réduire en $x_1^0, \ldots, x_m^0$ les dérivées C′ dont les valeurs initiales ne sont pas fournies par les fonctions précédentes.

Nous supposerons que les valeurs initiales des dérivées C′ soient telles que les seconds membres des équations Σ_n, considérés comme des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, de $z_1, z_2, \ldots, z_q$ et de leurs dérivées C′, soient analytiques au voisinage des $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ et des valeurs initiales des z et des C′.

On voit immédiatement alors que, d'après le théorème de Mme Kowalevski, les systèmes successifs $K_{m-1}, K_{m-2}, \ldots, K_2, K_1$ donneront toujours, pour les inconnues qu'ils sont chargés de déterminer, des fonctions de x_m, de x_m et $x_{m-1}, \ldots$, de $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_2$, de $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_2, x_1$ qui seront certainement analytiques en $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ et d'après l'étude directe faite précédemment, les dernières inconnues, calculées par le système K_1, qui sont précisément les z_i, vérifieront le système Σ^n.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème général qui suit :

Soit Σ^n un système, complètement intégrable et sous forme canonique, d'équations aux dérivées partielles. Soient C′ les dérivées d'ordre inférieur ou égal à n, qui n'entrent pas dans les premiers membres, et

$$\gamma_0^i,\quad \gamma_1^i,\quad \ldots,\quad \gamma_{m-1}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

les nombres fondamentaux de Σ^n.

Donnons-nous arbitrairement les fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, analytiques en $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$, auxquelles se réduisent les z_i pour lesquels on a $\gamma_0^i = 1$;

Puis les fonctions de $x_2, x_3, \ldots, x_m$, analytiques en $x_2^0, \ldots, x_m^0$, auxquelles se réduisent

$$z_i,\quad \frac{\partial z_i}{\partial x_1},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{\gamma_1^i-1} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i-1}}$$

pour $x_1 = x_1^0$;

Puis les fonctions de $x_3, \ldots, x_m$, analytiques en $x_3^0, \ldots, x_m^0$, auxquelles se réduisent

$$\frac{\partial^{\gamma_1^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}},\quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^{\gamma_1^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}}\right),\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{\gamma_2^i-1}}{\partial x_2^{\gamma_2^i-1}}\left(\frac{\partial^{\gamma_1^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}}\right)$$

pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$;

. . . . ;

Puis les fonctions de x_m, analytiques en x_m^0, auxquelles se réduisent

$$\frac{\partial^{\gamma_1^i+\gamma_2^i+\ldots+\gamma_{m-2}^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}\,\partial x_2^{\gamma_2^i}\ldots\partial x_{m-2}^{\gamma_{m-2}^i}},\quad \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}\left(\frac{\partial^{\gamma_1^i+\gamma_2^i+\ldots+\gamma_{m-2}^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}\,\partial x_2^{\gamma_2^i}\ldots\partial x_{m-2}^{\gamma_{m-2}^i}}\right),\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{\gamma_{m-1}^i-1}}{\partial x_{m-1}^{\gamma_{m-1}^i-1}}\left(\frac{\partial^{\gamma_1^i+\gamma_2^i+\ldots+\gamma_{m-2}^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}\,\partial x_2^{\gamma_2^i}\ldots\partial x_{m-2}^{\gamma_{m-2}^i}}\right)$$

pour $x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0, \ldots, x_{m-1} = x_{m-1}^0$.

Ces fonctions initiales détermineront immédiatement les valeurs initiales (pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0 \ldots$, $x_m = x_m^0$) d'un certain nombre de dérivées C'. Nous nous donnerons arbitrairement, en dernier lieu, les constantes auxquelles se réduisent toutes les autres dérivées C' pour $x_1 = x_1^0 = \ldots = x_m = x_m^0$.

Si, au voisinage de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ et des valeurs initiales des C', les seconds membres des équations de Σ^n sont des fonctions analytiques de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et des C', il existe un et un seul système d'intégrales z_1, $z_2, \ldots, z_q$, analytiques en $x_1^0 \ldots x_m^0$, vérifiant toutes les équations du système Σ^n et satisfaisant à toutes les conditions initiales que nous venons d'indiquer.

4. Nous allons faire immédiatement, à propos de ce théorème général, une remarque importante.

En lisant la démonstration que nous venons d'en donner, on constate qu'elle ne tient pas compte de ce fait que les équations σ_i^j ne contiennent, à l'ordre j, aucune des inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}$, c'est-à-dire de ce que les équations ont été résolues d'une façon *régulière*.

Ceci nous conduit à généraliser un peu la définition de la forme canonique Σ^n.

Un système Σ^n sera dit canonique *s'il se partage en systèmes partiels $\sigma_i^j (j \leqq n)$ résolus par rapport à des ensembles canoniques E_i^j satisfaisant aux conditions*

$$(E_i^{j-1})' \leqq E_i^j \qquad (j \leqq n)$$

et si les conditions d'intégrabilité fournies par les dérivées des équations σ_i^n sont des conséquences algébriques des équations de Σ^n.

Le théorème général précédemment démontré s'applique à tout système canonique ainsi défini.

La marche que nous avons suivie pour arriver à la forme Σ^n exige que l'on ait rangé les variables et les inconnues dans un certain ordre. Laissons invariable l'ordre des variables. Les inconnues étant dans l'ordre $z_1, z_2, \ldots, z_q$, nous sommes arrivé à Σ^n dont les équations sont résolues d'une façon régulière et canonique. Si nous avions mis les inconnues dans un ordre différent, cette résolution régulière et canonique nous aurait conduit à une autre forme Σ_1^n différente de la première, de sorte que la forme Σ^n est régulière et canonique quand on considère les inconnues dans l'ordre $z_1, z_2, \ldots, z_q$, mais n'est plus que *canonique* lorsqu'on les considère dans un autre ordre.

Il n'y a donc pas de distinction essentielle à faire entre les formes régulières et canoniques et les formes simplement canoniques.

L'intérêt des résolutions régulières et canoniques réside uniquement dans ce fait que, avec le changement de variables, elles constituent un moyen *sûr et régulier* de constater l'incompatibilité ou d'arriver à une forme canonique.

5. Le théorème général que nous venons d'établir donne une signification très remarquable des nombres fondamentaux γ_μ^i.

Chaque inconnue z_i introduit dans l'intégrale générale du système, γ_μ^i fonctions arbitraires de $m - \mu$ variables.

Cette signification des indices des ensembles E_i^n montre que la considération des indices des ensembles canoniques de dérivées était indispensable pour arriver à une théorie générale.

On peut dire que :

L'intégrale générale d'un système canonique Σ^n contient

$\Sigma\gamma_0$	fonctions arbitraires de	m	variables,
$\Sigma\gamma_1$	»	$m - 1$	»
....	....	....	....
$\Sigma\gamma_{m-2}$	»	2	variables,
$\Sigma\gamma_{m-1}$	»	1	».

Elle contient en outre un nombre limité de constantes arbitraires. Ce nombre dépend du nombre des équations auxiliaires et des indices de tous les ensembles E_i^j.

On pourrait former son expression générale, mais elle est très compliquée et n'offre aucun intérêt.

6. La méthode même employée pour démontrer le théorème général montre, sans qu'il soit nécessaire de faire aucun nouveau raisonnement, la propriété très intéressante qui suit :

L'intégration d'un système quelconque, complètement intégrable, d'équations aux dérivées partielles à m variables peut toujours, d'une infinité de façons, au moyen d'un changement de variables et par de simples résolutions algébriques, être ramenée à l'intégration successive de m systèmes de K_m, K_{m-1}, ..., K_2, K_1 *de Mme Kowalevski, contenant successivement* 1, 2, ..., $m-1$, *m variables.*

Cette proposition est importante par ce fait qu'elle montre que l'étude des propriétés des intégrales des systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles se ramène, en dernière analyse, à l'étude des propriétés des intégrales des systèmes de Mme Kowalevski.

7. Pour plus de commodité, convenons de désigner par *arbitraires de genre* μ les fonctions arbitraires de μ variables; les constantes arbitraires seront alors des arbitraires de genre 0.

D'après le théorème général obtenu, on voit que l'intégrale générale d'un système d'équations à m variables contient des arbitraires qui ne sont pas toutes du même genre; ce genre peut varier de 0 à m.

C'est dans ce résultat, déjà trouvé par M. Bourlet pour des systèmes présentant une certaine généralité, qu'il faut chercher la véritable raison de ce fait que tout système de q équations à q inconnues ne peut pas toujours se ramener, par un changement de variables, à la forme de Mme Kowalevski. C'est absolument évident, d'après ce qui vient d'être dit, puisque tout système de Mme Kowalevski, à m variables, ne contient, dans son intégrale générale, que des arbitraires de genre $m-1$.

Cette simple remarque montre déjà combien ces systèmes sont particuliers. Pour en avoir une idée plus nette, cherchons tous les systèmes à m variables et ayant une intégrale générale ne contenant que des arbitraires de genre $m-1$.

Soit Σ^n un tel système, on devra avoir

$$\gamma'_0 = 0, \qquad \gamma'_2 = \gamma'_3 = \ldots = \gamma'_{m-1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

pour qu'il n'y ait pas d'arbitraires de genre m et des genres $m-2$, ..., 2, 1. Exprimons maintenant qu'il n'y a pas d'arbitraires de genre 0. L'ensemble E_i^n se composera de toutes les dérivées de z_i prises γ_1^i fois, au moins, par rapport à x_1, et l'on se donnera arbitrairement les fonctions de $x_2, \ldots, x_m$ auxquelles se réduiront

$$z_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\gamma_1^i - 1} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i - 1}}$$

pour $x_1 = x_1^0$. Ces fonctions initiales, qui sont d'ailleurs les seules, détermineront les valeurs initiales de toutes les dérivées prises moins de γ_1^i fois par rapport à x_1, et il faudra que les valeurs initiales de toutes les autres soient déterminées par les équations auxiliaires, c'est-à-dire que chaque ensemble E_i^j contienne toutes les dérivées d'ordre j de z_i prises γ_1^i fois, au moins, par rapport à x_1. Si l'on tient compte de la condition

$$(E_i^{j-1})' \leqq E_i^j \qquad (j \leqq n),$$

que doivent toujours vérifier les ensembles E_i^j, il en résultera immédiatement que j sera au moins égal à γ_1^i, que l'ensemble $E_i^{\gamma_1^i}$ se réduira à l'unique dérivée

$$\frac{\partial^{\gamma_1^i} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1^i}}$$

et que les ensembles $E_i^{\gamma_1^i+1}, \ldots, E_i^n$ seront les ensembles dérivés successifs de $E_i^{\gamma_1^i}$.

Chaque système $\sigma_i^{\gamma_1^i}$ se composera alors d'une seule équation; les systèmes successifs $\sigma_i^{\gamma_1^i+1}, \ldots, \sigma_i^n$ seront formés par les dérivées successives de l'équation $\sigma_i^{\gamma_1^i}$, et ces dérivations n'introduiront évidemment aucune condition d'intégrabilité.

Nous pouvons donc considérer le système Σ^n comme se réduisant au système K' formé par les équations $\sigma_i^{\gamma_1^i}$. Ce système K' est un système de q équations à q inconnues; ce n'est pas un système de M^me Kowalevski parce que toutes les inconnues figurent en général au même ordre dans une même équation et qu'une même inconnue figure à des ordres différents dans les différentes équations.

Comme cas particulier, considérons les systèmes K' dans lesquels tous les γ_1^i ont même valeur r; nous obtiendrons les systèmes les plus généraux de M^me Kowalevski où toutes les inconnues entrent au même ordre r.

Pour particulariser encore plus, supposons que ce système K′, dont toutes les équations sont d'ordre r, ne contienne aucune dérivée de z_1 prise moins de $r - r_1$ fois par rapport à $x_1, \ldots,$ et aucune dérivée de z_q prise moins de $r - r_q$ fois par rapport à x_1. Nous pourrons alors prendre comme nouvelles inconnues

$$u_1 = \frac{\partial^{r-r_1} z_1}{\partial x_1^{r-r_1}}, \qquad \ldots, \qquad u_q = \frac{\partial^{r-r_q} z_q}{\partial x_1^{r-r_q}},$$

et nous obtiendrons les systèmes de M^me Kowalevski dans lesquels les inconnues n'entrent pas toutes au même ordre.

Réciproquement, considérons un système de M^me Kowalevski où les inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_q$ entrent respectivement aux ordres $r_1, r_2, \ldots, r_q$. Il suffit d'y faire le changement

$$u_1 = \frac{\partial^{r-r_1} z_1}{\partial x_1^{r-r_1}}, \qquad \ldots, \qquad u_q = \frac{\partial^{r-r_q} z_q}{\partial x_1^{r-r_q}},$$

en prenant pour r un nombre entier quelconque égal ou supérieur au plus grand des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_q$, pour retomber sur un système K′ où toutes les inconnues entreront à l'ordre r. L'application du théorème général montrera qu'on peut se donner arbitrairement les fonctions de $x_2, \ldots, x_m$ auxquels se réduisent

$$z_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r-1} z_i}{\partial x_1^{r-1}}$$

pour $x_1 = x_1^0$, c'est-à-dire les valeurs de

$$z_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r-r_i-1} z_i}{\partial x_1^{r-r_i-1}}\, u_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{r_i-1} u_i}{\partial x_1^{r_i-1}},$$

pour $x_1 = x_1^0$, et les $r - r_i$ premières fonctions initiales disparaîtront dans les expressions de u_i et des autres inconnues u. C'est ainsi qu'on voit que le théorème de M^me Kowalevski, qui a servi à établir notre théorème général, y rentre comme cas très particulier.

8. Dans le même ordre d'idées, nous pouvons chercher à quelles conditions l'intégrale générale ne contiendra que des arbitraires du

genre o, c'est-à-dire dépendra d'un nombre limité de constantes arbitraires. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\gamma_0^i = \gamma_1^i = \ldots = \gamma_{m-1}^i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q);$$

ce qui signifie que tous les ensembles E_i'' doivent être complets. Cette condition ne diffère que par la forme de celle que l'on donne habituellement.

Cherchons le nombre des constantes arbitraires. Il n'y a pas ici de fonctions arbitraires déterminant les valeurs initiales de certaines dérivées, de sorte qu'on pourra se donner arbitrairement les valeurs initiales de toutes les dérivées qui n'entrent pas dans les premiers membres; comme les ensembles E_i'' sont complets, les dérivées que nous considérons seront au plus d'ordre $n - 1$.

Si l'on désigne par N le nombre des équations auxiliaires, le nombre des constantes arbitraires de l'intégrale générale sera

$$q\,C_{m+n-1}^{m} - N.$$