ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. ZANTSCHEWSKY

Le problème de Pfaff

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 267-294

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__267_0>

LE PROBLÈME DE PFAFF,

PAR M. J. ZANTSCHEWSKY,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ D'ODESSA.

Notions et formules préliminaires.

1. Soit Δ un déterminant quelconque d'ordre n et $\Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu}}_{m_1 q_1 \ldots m_\nu q_\nu}$ un mineur pris avec son signe. Formons une expression

$$a_{m_1 q_1} a_{m_2 q_2} \ldots a_{m_\nu q_\nu} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu}}_{m_1 q_1 \ldots m_\nu q_\nu} = (a_{mq})_1^\nu \, \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu}}_{(mq)_1^\nu},$$

où les quantités a_{mq} sont définies par les relations

$$\begin{aligned} a_{mq} &= -a_{qm}, \\ a_{mm} &= a_{qq} = 0. \end{aligned}$$

Si l'on fait avec les indices $m_1 q_1 \ldots m_\nu q_\nu$ tous les arrangements possibles, on aura $2\nu!$ termes, parmi lesquels il y aura :

1° $N_m = 1 . 3 \ldots (2\nu - 1)$ termes à seconds facteurs (mineurs) égaux, la somme des premiers étant une fonction de Pfaff d'ordre ν, définie par l'équation symbolique

$$\begin{aligned} (m_1 q_1 \ldots m_\nu q_\nu) = a_{m_1 q_1}(m_2 q_2 \ldots m_\nu q_\nu) &+ a_{m_1 m_2}(q_2 m_3 q_3 \ldots m_\nu q_\nu q_1) \\ &+ a_{m_1 q_2}(m_3 q_3 \ldots m_\nu q_\nu q_1 m_2) + \ldots; \end{aligned}$$

2° Des termes qu'on obtient en permutant dans les précédents quelques paires $m_i q_i$ en $q_i m_i$. Le mineur changeant son signe en même temps que l'une quelconque des quantités a_{mq}, on obtient ainsi $2^\nu - 1$ sommes, qui sont égales à la première ;

3° Des termes qui se distinguent des précédents parce que quelques-unes des paires $m_1 q_1, \ldots, m_\nu q_\nu$ ont changé leur place. Chacune des 2^ν sommes précédentes donne encore $\nu!$ sommes, qui leur sont égales.

En tout, nous avons $2\nu!$ termes, dont la somme est égale à

$$2^\nu . \nu! (m_1 q_1 \ldots m_\nu q_\nu) \Delta_{(mq)_1^\nu}^{p_1 \ldots p_{2\nu}}.$$

Une semblable expression correspond à chaque combinaison $m_1 q_1 \ldots m_\nu q_\nu$ qu'on peut faire avec les indices $1, 2, \ldots, n$. La somme de toutes ces expressions sera représentée par

$$\sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu}^{p_1 \ldots p_{2\nu}}.$$

Par exemple, si Δ est un déterminant du cinquième ordre, on aura

$$\frac{1}{8} \sum (a_{mq})_1^2 \Delta_{(mq)_1^2}^{p_1 \ldots p_4} = (1234) \Delta_{1234}^{p_1 \ldots p_4} + (1235) \Delta_{1235}^{p_1 \ldots p_4} + \ldots + (2345) \Delta_{2345}^{p_1 \ldots p_4}.$$

2. Dans un Mémoire, inséré au XVII^e Volume du *Recueil mathématique de Moscou*, j'ai indiqué une méthode de transformation d'un produit de deux mineurs. Sans m'arrêter aux démonstrations, j'indiquerai succinctement quelques résultats auxquels je suis parvenu. Prenons, comme premier cas, le produit de deux mineurs, dont les indices supérieurs sont égaux; par exemple

$$\Delta_{m_1 m_2 m_3}^{n_1 n_2 n_3} . \Delta_{p_1 p_2 p_3}^{n_1 n_2 n_3}.$$

Une transformation *par index* m_1 est donnée par l'égalité

$$\Delta_{m_1 m_2 m_3}^{n_1 n_2 n_3} . \Delta_{p_1 p_2 p_3}^{n_1 n_2 n_3} = \Delta_{p_1 m_2 m_3}^{n_1 n_2 n_3} . \Delta_{m_1 p_2 p_3}^{n_1 n_2 n_3} + \Delta_{p_2 m_2 m_3}^{n_1 n_2 n_3} . \Delta_{p_1 m_1 p_3}^{n_1 n_2 n_3} + \Delta_{p_3 m_2 m_3}^{n_1 n_2 n_3} . \Delta_{p_1 p_2 m_1}^{n_1 n_2 n_3};$$

et, de la même manière, on peut transformer par index $m_2, m_3, p_1, \ldots$.

Prenons maintenant le cas où les indices supérieurs du premier mineur sont en nombre moindre que les indices du second, mais compris parmi ceux-ci; par exemple

$$\Delta_{m_1 m_2}^{n_1 n_2} . \Delta_{p_1 p_2 p_3 p_4}^{n_1 n_2 n_3 n_4}.$$

Une transformation par index m_1 ou m_2 se fait comme dans le cas précédent, mais quand on veut transformer par l'un quelconque des indices p, il faut introduire des indices fictifs x_3, x_4 correspondant aux indices supérieurs n_3, n_4 et opérer comme avec des indices réels; une transformation par l'index p_2 nous donne, par exemple,

$$\begin{aligned}\Delta^{n_1 n_2 n_3 n_4}_{m_1 m_2 x_3 x_4} . \Delta^{n_1 n_2 n_3 n_4}_{p_1 p_2 p_3 p_4} = \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{p_2 m_2 x_3 x_4} . \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{p_1 m_1 p_3 p_4} + \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{m_1 p_2 x_3 x_4} . \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{p_1 m_2 p_3 p_4} \\ + \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{m_1 m_2 p_2 x_4} . \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{p_1 x_3 p_3 p_4} + \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{m_1 m_2 x_3 p_2} . \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{p_1 x_4 p_3 p_4}.\end{aligned}$$

Pour revenir à notre cas, il faut permuter l'ordre des indices inférieurs de telle manière que les indices x_3, x_4 soient placés sous les indices n_3, n_4, et puis il faut les effacer. Nous aurons ainsi

$$\begin{aligned}\Delta^{n_1 n_2}_{m_1 m_2} . \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{p_1 \ldots p_4} = \Delta^{n_1 n_2}_{p_2 m_2} . \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{p_1 m_1 p_3 p_4} + \Delta^{n_1 n_2}_{m_1 p_2} . \Delta^{n_1 \ldots n_4}_{p_1 m_2 p_3 p_4} - \Delta^{n_1 n_2 n_3}_{m_1 m_2 p_2} . \Delta^{n_1 n_2 n_4}_{p_1 p_3 p_4} \\ - \Delta^{n_1 n_2 n_4}_{m_1 m_2 p_2} . \Delta^{n_1 n_2 n_3}_{p_1 p_3 p_4}.\end{aligned}$$

Mais on peut transformer aussi notre produit par l'index fictif x_3 (ou x_4), dans quel cas il n'est pas nécessaire d'introduire tous les autres indices fictifs; l'opération reste la même, comme dans le cas précédent. On introduit aussi des indices fictifs dans le cas où les indices supérieurs de deux mineurs sont différents, ou quand l'un des deux facteurs est le déterminant lui-même. Ainsi les produits

$$\Delta^{n_1 n_2 n_3}_{m_1 m_2 m_3} . \Delta^{n_1 n_2 n_4}_{p_1 p_2 p_4}, \qquad \Delta . \Delta^{n_1 n_2}_{p_1 p_2}$$

se transforment, en introduisant des indices fictifs, comme il suit :

$$\Delta^{n_1 n_2 n_3 n_4}_{m_1 m_2 m_3 x_4} . \Delta^{n_1 n_2 n_3 n_4}_{p_1 p_2 x_3 p_4}, \qquad \Delta^{n_1 n_2}_{x_1 x_2} . \Delta^{n_1 n_2}_{p_1 p_2}.$$

Après une des transformations exposées, on se débarrasse des indices fictifs, comme dans le cas traité plus haut.

3. Proposons-nous de transformer, à l'aide des indications précédentes, le produit

$$A = \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu rs} . \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu tuv} .$$

On a

$$A = \sum (a_{mq})_1^\nu (a_{m'q'})_1^\nu \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu rs} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(m'q')_1^\nu tuv} .$$

En introduisant, sous le signe de la sommation, dans le premier facteur du produit des deux mineurs, l'index fictif $x_{2\nu+3}$, correspondant à l'index supérieur $p_{2\nu+3}$, transformons ce produit par l'index $x_{2\nu+3}$

$$A = \sum (a_{mq})_1^\nu (a_{m'q'})_1^\nu \Big(\Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu rst} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(m'q')_1^\nu uv} - \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu rsu} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(m'q')_1^\nu tv}$$
$$+ \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu rsv} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(m'q')_1^\nu tu} + \sum_i B'_i \Big),$$

où l'on a posé

$$B'_i = \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu rsm'_i} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(m'q')_1^{i-1} q'_i (m'q')_{i+1}^\nu tuv} - \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu rsq'_i} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(m'q')_1^{i-1} m'_i (m'q')_{i+1}^\nu tuv}.$$

Mais comme tous les indices $m'q'$ parcourent les mêmes valeurs, on peut, pour chaque valeur de i, changer $m'_i q'_i$ en $m'_\nu q'_\nu$ et *vice versa;* donc

$$\sum (a_{mq})_1^\nu (a_{m'q'})_1^\nu B'_i = \sum (a_{mq})_1^\nu (a_{m'q'})_1^\nu B'_\nu,$$

et l'on aura, en écrivant $m_{\nu+1} q_{\nu+1}$ à la place de $m'_\nu q'_\nu$,

$$\sum_i \sum (a_{mq})_1^\nu (a_{m'q'})_1^\nu B'_i = \nu B,$$

en posant

$$B = \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} (a_{m'q'})_1^{\nu-1} \Big(\Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu rsm_{\nu+1}} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(m'q')_1^{\nu-1} q_{\nu+1} tuv}$$
$$- \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu rsq_{\nu+1}} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(m'q')_1^{\nu-1} m_{\nu+1} tuv} \Big).$$

Mais on retrouve l'expression B, quand on transforme par l'index s le produit

$$C = \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^{\nu+1} r} \cdot \sum (a_{mq})_1^{\nu-1} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^{\nu-1} tuvs}.$$

En effet,

$$C = \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} (a_{m'q'})_1^{\nu-1} \Big(\Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^{\nu+1} s} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(m'q')_1^{\nu-1} tuvr} + \sum D_i \Big),$$

où

$$D_i = \sum \Big(\Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^{i-1} sq_i (mq)_{i+1}^{\nu+1} r} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(m'q')_1^{\nu-1} tuvm_i} + \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^{i-1} m_i s (mq)_{i+1}^{\nu+1} r} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+2}}_{(m'q')_1^{\nu-1} tuvq_i} \Big),$$

d'où l'on voit que, en permutant les indices $m_i q_i$ et $m_{\nu+1} q_{\nu+1}$, on aura

$$\sum_i \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} (a_{m'q'})_1^{\nu-1} \mathrm{D}_i = (\nu + 1)\mathrm{B}.$$

On peut donc écrire

$$(1)\quad \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu tuv} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu rs} - \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu rst} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu uv}$$

$$+ \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu rsu} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu tv} - \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu rsv} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu tu}$$

$$= \frac{\nu}{\nu + 1} \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^{\nu+1} r} \sum (a_{mq})_1^{\nu-1} \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^{\nu-1} tuvs}$$

$$- \frac{\nu}{\nu + 1} \sum (a_{mq})_1^{\nu+} \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+3}}_{(mq)_1^\nu s} \sum (a_{mq})_1^{\nu-1} \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^{\nu-1} tuvr}.$$

4. Soit $b_{s,2\nu+3}$ l'élément de notre déterminant Δ placé à l'intersection de la $s^{\text{ième}}$ ligne et de la $(p_{2\nu+3})^{\text{ième}}$ colonne. Multiplions l'égalité (1) par $b_{s,2\nu+3}$, donnons à s les valeurs $1, 2, \dots, n$ et sommons toutes les égalités obtenues de cette manière. Puisque

$$\sum_s \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+3}}_{\alpha s \beta} b_{s,2\nu+3} = \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu \beta\alpha}$$

et

$$\sum_s \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu \alpha s} b_{s,2\nu+3} = 0,$$

on aura l'égalité

$$(2)\quad \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu tr} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu vu} + \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu ur} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu tv}$$

$$+ \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu vr} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^\nu ut}$$

$$= \frac{\nu}{\nu + 1} \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^{\nu+1}} \sum (a_{mq})_1^{\nu-1} \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu+2}}_{(mq)_1^{\nu-1} trvu}.$$

De même, soit $b_{r,2\nu+2}$ l'élément de Δ placé à l'intersection de la $r^{\text{ième}}$ ligne et de la $(p_{2\nu+2})^{\text{ième}}$ colonne. En multipliant l'égalité précédente par $b_{r,2\nu+2}$ et sommant pour toutes les valeurs de r égales à $1, 2, \ldots, n$, nous obtiendrons

$$(3)\quad \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu t}^{p_1\ldots p_{2\nu+1}} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu vu}^{p_1\ldots p_{2\nu+2}} + \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu u}^{p_1\ldots p_{2\nu+1}} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu tv}^{p_1\ldots p_{2\nu+2}}$$
$$+ \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu v}^{p_1\ldots p_{2\nu+1}} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu ut}^{p_1\ldots p_{2\nu+2}}$$
$$= \frac{\nu}{\nu+1} \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta_{(mq)_1^{\nu+1}}^{p_1\ldots p_{2\nu+2}} \sum (a_{mq})_1^{\nu-1} \Delta_{(mq)_1^{\nu-1} tuv}^{p_1\ldots p_{2\nu+1}}.$$

On conclut de cette identité ce théorème, que *si l'on a*

$$(a)\qquad \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu p}^{p_1\ldots p_{2\nu+1}} = 0$$

pour trois valeurs t, u, v de p, l'une quelconque des deux égalités

$$(b)\qquad \begin{cases} \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta_{(mq)_1^{\nu+1}}^{p_1\ldots p_{2\nu+2}} = 0, \\ \sum (a_{mq})_1^{\nu-1} \Delta_{(mq)_1^{\nu-1} tuv}^{p_1\ldots p_{2\nu+1}} = 0, \end{cases}$$

aura lieu nécessairement, l'index $p_{2\nu+2}$ étant tout à fait arbitraire.

D'un autre côté : *si l'égalité (a) a lieu pour deux valeurs quelconques t, u de p et si, en même temps, on a l'une quelconque des deux égalités (b), l'une quelconque des égalités aura lieu*

$$\sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu tu}^{p_1\ldots p_{2\nu+2}} = 0,$$

$$\sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu v}^{p_1\ldots p_{2\nu+1}} = 0,$$

l'index v étant tout à fait arbitraire.

5. Proposons-nous encore de transformer la différence

$$D = \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_2}^{p_1\ldots p_{2\nu+1}} \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta_{(mq)_1^{\nu+1} \rho_1}^{p_1\ldots p_{2\nu+1} rs} - \sum (a_{mq})^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_1}^{p_1\ldots p_{2\nu+1}} \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta_{(mq)_1^{\nu+1} \rho_2}^{p_1\ldots p_{2\nu+1} rs}.$$

En effectuant la transformation du premier produit par index ρ_2

nous aurons

$$\mathrm{D} = \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} (a_{m'q'})_1^{\nu} \sum_i \left(\Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1}}_{(m'q')_1^{\nu} m_i} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} rs}_{(mq)_1^{i-1} \rho_2 q_i (mq)_{i+1}^{\nu+1} \rho_1} + \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1}}_{(m'q')_1^{\nu} q_i} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} rs}_{(mq)_1^{i-1} m_i \rho_2 (mq)_{i+1}^{\nu+1} \rho_1} \right).$$

Dans la sommation par rapport à i on peut permuter les indices m_i, q_i et $m_{\nu+1}$, $q_{\nu+1}$

$$\mathrm{D} = (\nu + 1) \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} (a_{m'q'})_1^{\nu} \left(\Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1}}_{(m'q')_1^{\nu} m_{\nu+1}} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} rs}_{(mq)_1^{\nu} \rho_1 \rho_2 q_{\nu+1}} - \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1}}_{(m'q')_1^{\nu} q_{\nu+1}} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} rs}_{(mq)_1^{\nu} \rho_1 \rho_2 m_{\nu+1}} \right).$$

D'un autre côté, soit

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_1 = {} & \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} r}_{(mq)_1^{\nu+1}} \sum (a_{mq})_1^{\nu} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} s}_{(mp)_1^{\nu} \rho_1 \rho_2} \\ & - \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} s}_{(mq)_1^{\nu+1}} \sum (a_{mq})_1^{\nu} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} r}_{(mq)_1^{\nu} \rho_1 \rho_2}. \end{aligned}$$

En transformant le premier produit par l'index fictif x_r, correspondant à l'index supérieur r (¹), nous aurons

$$\mathrm{D}_1 = \sum (a_{m'q'})_1^{\nu} (a_{mq})_1^{\nu+1} \left(\sum_i \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} rs}_{(m'q')_1^{\nu} \rho_1 q_i \rho_2} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1}}_{(mq)_1^{i-1} m_i (mq)_{i+1}^{\nu+1}} - \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} rs}_{(m'q')_1^{\nu} \rho_1 m_i \rho_2} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1}}_{(mq)_1^{i-1} q_i (mq)_{i+1}^{\nu+1}} \right).$$

Pour obtenir l'expression D il ne reste qu'à permuter les indices $m_i q_i$ et $m_{\nu+1} q_{\nu+1}$ et de changer le signe de la somme résultante. On aura donc l'identité

$$\begin{aligned} (3) \qquad & \sum (a_{mq})_1^{\nu} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1}}_{(mq)_1^{\nu} \rho_2} \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} rs}_{(mq)_1^{\nu+1} \rho_1} \\ & \quad - \sum (a_{mq})_1^{\nu} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1}}_{(mq)_1^{\nu} \rho_1} \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} rs}_{(mq)_1^{\nu+1} \rho_2} \\ & = \sum (a_{mq})_1^{\nu} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} r}_{(mq)_1^{\nu} \rho_1 \rho_2} \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} s}_{(mq)_1^{\nu+1}} \\ & \quad - \sum (a_{mq})_1^{\nu} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} s}_{(mq)_1^{\nu} \rho_1 \rho_2} \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu+1} r}_{(mq)_1^{\nu+1}}. \end{aligned}$$

Remarquons que les identités (1), (2) et (3) que nous avons obte-

(¹) Suivant les indications du n° 2, il faut introduire dans le second facteur l'index fictif y_s, correspondant à l'index supérieur s.

nues sont vraies aussi pour $n = 1$ et $n = 0$, mais dans ces cas il faut poser

$$(a_{mq})_1^0 = 1,$$
$$(a_{mq})^{-1} = 0,$$

respectivement.

6. Dans ce qui va suivre on rencontre le déterminant de la forme

$$(4) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} X_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{n+1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix}.$$

Considérons les équations

$$(5) \qquad \Delta_{p_1}^s = 0, \qquad \Delta_{p_2}^s = 0.$$

Multiplions ces équations par $\Delta_{p_2,m}^{s,k}$, $\Delta_{p_1,m}^{s,k}$ respectivement et retranchons le second produit du premier

$$\Delta_{p_2m}^{sk}\Delta_{p_1}^s - \Delta_{p_1m}^{sk}\Delta_{p_2}^s = \Delta_{p_2p_1}^{sk}\Delta_m^s = 0 \quad (^1),$$

d'où l'on voit que, si pour l'un quelconque des indices k

$$(6) \qquad \Delta_{p_2p_1}^{sk} \gtrless 0,$$

on aura pour chaque indice m

$$(7) \qquad \Delta_m^s = 0.$$

On peut regarder les équations (5) comme équations différentielles par rapport à une des fonctions f, par exemple f_{k-1}. Pour que ces deux équations constituent un système complet il faut qu'on ait

$$\sum_{m=1}^{n+1}\left[\Delta_{p_2m}^{sk}\frac{\partial}{\partial x_m}(\Delta_{p_1}^s) - \Delta_{p_1m}^{sk}\frac{\partial}{\partial x_m}(\Delta_{p_2}^s)\right] = 0,$$

---

(1) On obtient cette identité en transformant le premier produit par l'index p_1.

ou, en ayant égard aux équations données (5),

$$\sum_{m=1}^{n+1} \frac{d}{dx_m}(\Delta^{sk}_{p_2 m}\Delta^{s}_{p_1} - \Delta^{sk}_{p_1 m}\Delta^{s}_{p_2}) = 0$$

ou

$$\sum_{m=1}^{n+1} \frac{d}{dx_m}(\Delta^{sk}_{p_2 p_1}\Delta^{s}_{m}) = \sum_{m=1}^{n+1} \Delta^{s}_{m}\frac{d}{dx_m}(\Delta^{sk}_{p_2 p_1}) + \Delta^{sk}_{p_2 p_1}\sum_{m=1}^{n+1}\frac{d}{dx_m}(\Delta^{s}_{m}) = 0.$$

Mais quand l'inégalité (6) est satisfaite, l'équation (7) sera une conséquence des équations (5) et l'on aura simplement

$$\sum_{m=1}^{n+1} \frac{d}{dx_m}(\Delta^{s}_{m}) = 0,$$

ce que l'on peut encore écrire comme il suit

$$\sum_{q=1}^{n+1}\sum_{m=1}^{n+1} \frac{d}{dx_m}(X_q \Delta^{s1}_{mq}) = \sum_{m,\, q} \frac{\partial X_q}{\partial x_m}\Delta^{s1}_{mq} = 0,$$

ou en posant

$$a_{mq} = \frac{\partial X_m}{\partial x_q} - \frac{\partial X_q}{\partial x_m},$$

nous aurons

$$\sum a_{mq}\Delta^{s1}_{mq} = 0. \tag{8}$$

Cette équation exprime la condition pour que les équations (5) constituent un système complet; elle contient la fonction f_{k-1}. Mais il est aisé de voir que, quand l'inégalité (6) est satisfaite et, par conséquent, l'équation (7) a lieu pour chaque indice m, la condition (8) se transforme en une autre ne contenant pas la fonction f_{k-1}, en excluant le cas quand elle se réduit à une suite des équations

$$\Delta^{s1}_{mq} = 0 \qquad (m,\, q = 1, 2, \ldots, n+1).$$

En effet, en posant dans la formule (3) $\nu = 0$, $p_1 = s$, $r = k$, $s = 1$, nous aurons

$$\Delta^{s}_{\rho_2}\sum a_{mq}\Delta^{sk1}_{mq\rho_1} - \Delta^{s}_{\rho_1}\sum a_{mq}\Delta^{sk1}_{mq\rho_2} = \Delta^{sk}_{\rho_1\rho_2}\sum a_{mq}\Delta^{k1}_{mq} - \Delta^{s1}_{\rho_1\rho_2}\sum a_{mq}\Delta^{sk}_{mq}.$$

De cette identité on voit que si, pour une paire quelconque des indices ρ_1, ρ_2,

$$\Delta^{s1}_{\rho_1\rho_2} \gtrless 0,$$

l'équation (8) équivaut à l'équation

$$(9) \qquad \sum a_{mq}\Delta^{sk}_{mq} = 0,$$

qui ne contient pas la fonction f_{k-1}.

On a donc le théorème suivant :

Soit Δ *un déterminant de la forme* (4). *Si pour l'un quelconque des indices* s *on a deux équations*

$$(5) \qquad \Delta^{s}_{p_1} = 0, \qquad \Delta^{s}_{p_2} = 0,$$

et si, en même temps, pour l'un quelconque des indices k,

$$\Delta^{sk}_{p_1p_2} \gtrless 0,$$

on aura aussi, quel que soit l'index m,

$$\Delta^{s}_{m} = 0.$$

En supposant que les indices s *et* k *sont différents de l'unité et que pour une paire quelconque des indices* ρ_1, ρ_2 *on a l'inégalité*

$$\Delta^{s1}_{\rho_1\rho_2} \gtrless 0,$$

on aura, comme condition que les équations (5) *forment un système complet par rapport à la fonction* f_{k-1},

$$(10) \qquad \sum a_{mq}\Delta^{sk}_{mq} = 0$$

7. Considérons maintenant deux équations de la forme

$$(11) \qquad \sum (a_{mq})^{\gamma}_{1}\Delta^{p_1\ldots p_{2\nu}k}_{(mq)^{\gamma}_{1}\,\rho_1} = 0, \qquad \sum (a_{mq})^{\gamma}_{1}\Delta^{p_1\ldots p_{2\nu}k}_{(mq)^{\gamma}_{1}\,\rho_2} = 0.$$

En regardant ces équations comme équations différentielles par rapport à une des fonctions, par exemple, f_{l-1}, dans quel cas les indices $p_1\ldots p_{2\nu}, k$ doivent être différents de l, nous aurons la condition, pour que ces deux équations forment un système complet,

$$\sum_\rho \left\{ \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_1 \rho}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k l} \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left[\sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_2}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k} \right] \right.$$
$$\left. - \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_2 \rho}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k l} \frac{\partial}{\partial x_\rho} \left[\sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_1}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k} \right] \right\} = 0,$$

ou, en ayant égard aux équations données,

$$(12) \qquad \sum_\rho \frac{d}{dx_\rho} \left[(a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_1 \rho}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k l} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_2}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k} \right.$$
$$\left. - \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_2 \rho}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k l} \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_1}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k l} \right] = 0.$$

On peut transformer l'expression sous le signe de différentiation par la formule (3), où il faut poser $p_{2\nu+1} = k$, $p_{2\nu+2} = l$, $t = \rho_1$, $u = \rho_2$, $v = \rho$. En posant donc, pour abréger,

$$\sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta_{(mq)_1^{\nu+1}}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k r} = \alpha_r,$$
$$\sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho_1 \rho_2}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k r} = \beta_r,$$
$$\sum (a_{mq})_1^{\nu-1} \Delta_{(mq)_1^{\nu-1} \rho_1 \rho_2 \rho}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k} = \gamma_\rho,$$
$$\sum (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k} = \delta_\rho,$$

nous aurons

$$(13) \qquad \sum_\rho \frac{d}{dx_\rho} \left(\frac{\nu}{\nu+1} \alpha_l \gamma_\rho + \beta_l \delta_\rho \right) = 0.$$

Mais on a en général

$$\sum_\rho \frac{d}{dx_\rho} \delta_\rho = -\frac{1}{2} \alpha_1.$$

En effet,

$$(14) \quad \sum_\rho \frac{d}{dx_\rho} (a_{mq})_1^\nu \Delta_{(mq)_1^\nu \rho}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k}$$
$$= \sum (a_{mq})_1^\nu \sum_{\rho, r} \frac{\partial X_r}{\partial x_\rho} \Delta_{(mq)_1^\nu \rho r}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k 1}$$
$$+ \sum (a_{mq})_1^\nu \sum_r X_r \sum_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho} \Delta_{(mq)_1^\nu \rho r}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k 1} + \sum_\rho \sum \Delta_{(mq)_1^\nu \rho}^{p_1 \ldots p_{2\nu} k} \frac{\partial (a_{mq})_1^\nu}{\partial x_\rho};$$

mais

$$\sum_\rho \frac{\partial}{\partial x_\rho} \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu} k 1}_{(mq)_1^\gamma \rho r} = 0;$$

d'un autre côté, à cause de l'identité

$$\frac{\partial a_{mq}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial a_{q\rho}}{\partial x_m} + \frac{\partial a_{\rho m}}{\partial x_q} = 0,$$

on aura aussi

$$\sum_\rho \sum \Delta^{p_1 \ldots p_{2\nu} k}_{(mq)_1^\gamma \rho} \frac{\partial (a_{mq})_1^\gamma}{\partial x_\rho} = 0.$$

Il ne reste donc, dans la seconde partie de l'identité (14), que le premier terme, qui est précisément égal à $-\frac{1}{2}\alpha_1$. On aura de même

$$\sum_\rho \frac{d}{dx_\rho} \gamma_\rho = -\frac{1}{2}\beta_1,$$

donc l'équation (13) se transforme en celle-ci

$$(15) \qquad \frac{\nu}{\nu+1}\alpha_l \beta_1 + \beta_l \alpha_1 - 2\sum_\rho \left(\frac{\nu}{\nu+1} \gamma_\rho \frac{\partial \alpha_l}{\partial x_\rho} + \delta_\rho \frac{\partial \beta_l}{\partial x_\rho} \right) = 0,$$

Mais l'identité (3), appliquée à notre cas, nous donne (en y posant $p_{2\nu+1} = k$)

$$\alpha_s \beta_r - \alpha_r \beta_s = 0,$$

donc

$$\beta_l \alpha_1 = \alpha_l \beta_1,$$

et l'équation (15) devient

$$(16) \qquad \alpha_l \beta_1 - 2\sum_\rho \left(\frac{\nu}{\nu+1} \gamma_\rho \frac{\partial \alpha_l}{\partial x_\rho} + \delta_\rho \frac{\partial \beta_l}{\partial x_\rho} \right) = 0.$$

D'un autre côté, comme nous l'avons vu plus haut, il résulte de nos équations (11)

$$\frac{\nu}{\nu+1}\alpha_l \gamma_\rho + \beta_l \delta_\rho = 0,$$

d'où l'on voit que, si toutes les fonctions qui entrent dans les mineurs

$\Delta^{p_1 \dots p_{2\nu} kl}_{\dots\dots\dots}$ satisfont aux conditions

$$\alpha_l = 0,$$
$$\beta_l \gtrless 0,$$

on aura aussi

$$\delta_\rho = 0$$

et l'équation (16) devient identique. Nous avons donc le théorème suivant :

Soient

$$(11) \qquad \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu} k}_{(mq)_1^\nu \rho_1} = 0, \qquad \sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu} k}_{(mq)_1^\nu \rho_2} = 0$$

deux équations différentielles par rapport à la fonction f_{l-1} ; si toutes les autres fonctions contenues dans ces équations satisfont aux conditions

$$\sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu} kl}_{(mq)_1^{\nu+1}} = 0,$$

$$\sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu} kl}_{(mq)_1^\nu \rho_1 \rho_2} \gtrless 0,$$

ces deux équations (11) *forment un système complet et l'on aura comme leur conséquence algébrique pour chaque indice* ρ

$$\sum (a_{mq})_1^\nu \Delta^{p_1 \dots p_{2\nu} k}_{(mq)_1^\nu \rho} = 0.$$

Le problème de Pfaff.

8. Considérons $2n$ fonctions $X_1, \dots, X_{2n}$ de $2n$ variables $x_1, \dots, x_{2n}$. A ces fonctions nous imposerons la seule condition qu'elles ne soient pas nulles toutes à la fois. Au reste, elles sont tout à fait arbitraires ; il peut y avoir parmi elles des fonctions nulles ou des fonctions d'un nombre moindre de variables indépendantes. Soient encore $f_1, f_2, \dots$ fonctions des mêmes variables indépendantes, en nombre indéterminé, assujetties aux conditions qui seront données

plus bas. Formons une matrice

$$\left\| \begin{matrix} X_1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{2n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} & \cdots \end{matrix} \right\|$$

et désignons par $\overset{(k+1)}{\Delta}\rho_1 \ldots \rho_k$ un déterminant formé avec les $\rho_1^{\text{ième}}, \ldots, \rho_k^{\text{ième}}$ lignes et avec *k premières* colonnes de cette matrice. Pour abréger l'écriture et pour plus de clarté, nous écrirons

$$\sum (a_{mq})_1^\nu \underset{(mq)_1^\nu}{\overset{(k+1-2\nu)}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_k,$$

au lieu d'écrire

$$\sum (a_{mq})_1^\nu \underset{(mq)_1^\nu}{\overset{k+1,\, k,\, \ldots,\, k+2-2\nu,\, k+1-2\nu}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_k \quad ;$$

et puis nous écrirons

$$\sum (a_{mq})_1^\nu \underset{(mq)_1^\nu \rho_r, \rho_s, \ldots}{\overset{(k+1-2\nu)\, \alpha,\, \beta,\, \ldots}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_k \quad ,$$

au lieu d'écrire

$$\sum (a_{mq})_1^\nu \underset{(mq)_1^\nu r,\, s,\, \ldots}{\overset{(k+1-2\nu)\, \alpha,\, \beta,\, \ldots}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_k \quad ,$$

en indiquant ainsi non les numéros $r, s, \ldots$ des lignes du déterminant $\overset{(k+1)}{\Delta}\rho_1 \ldots \rho_k$, qui doivent être chassées, mais les indices correspondant à ces lignes liés aux variables X et x.

Examinons les expressions

$$\sum (a_{mq})_1^{n-1} \underset{(mq)_1^{n-1}}{\overset{(2)}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_{2n-1}.$$

Il peut arriver que toutes ces expressions, formées avec les divers indices $\rho_1 \ldots \rho_{2n-1}$, pris parmi les nombres $1, 2, \ldots, 2n$, seront nulles. On examine alors les expressions

$$\sum (a_{mq})_1^{n-2} \underset{(mq)_1^{n-2}}{\overset{(2)}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_{2n-3},$$

pour chaque groupe de $2n-3$ indices; elles peuvent être encore nulles. En continuant ainsi, on arrivera nécessairement à une fonction de la forme

$$\sum (a_{mq})_1^{k-1} \overset{(2)}{\underset{(mq)_1^{k-1}}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_{2k-1},$$

qui, pour un groupe quelconque $\rho_1 \ldots \rho_{2k-1}$ des indices sera différente de zéro (¹). Rien n'empêche de supposer que la somme différente de zéro soit

$$\sum (a_{mq})_1^{k-1} \overset{(2)}{\underset{(mq)_1^{k-1}}{\Delta}} 1, 2, \ldots, 2k-1 \gtrless 0.$$

De cette inégalité il suit qu'on peut toujours arranger les indices $1, 2, \ldots, 2k-1$ de telle manière que l'on ait

$$\sum (a_{mq})_1^{k-r} \overset{(2)}{\underset{(mq)_1^{k-r}}{\Delta}} 1, 2, \ldots, (2k-2r+1) \gtrless 0 \tag{17}$$

pour r égal à $1, 2, \ldots, k$. Dans le cas $r=k$, cette inégalité se réduit à

$$X_1 \gtrless 0.$$

9. Examinons le cas de deux équations

$$\overset{(3)}{\underset{2}{\Delta}} 1\,2\,3 = 0, \qquad \overset{(3)}{\underset{3}{\Delta}} 1\,2\,3 = 0.$$

Puisque $\overset{(3)\,2}{\underset{32}{\Delta}} = X_1$ est différent de zéro, on aurait aussi

$$\overset{(3)}{\underset{1}{\Delta}} 1\,2\,3 = 0.$$

Mais, *en supposant que la fonction f_1 dépend de x_1*, nous aurons

$$\overset{(3)\,1}{\underset{32}{\Delta}} 1\,2\,3 \gtrless 0,$$

et suivant le théorème du n° 6,

$$\sum a_{mq} \overset{(3)\,2}{\underset{mq}{\Delta}} 1\,2\,3 = 0,$$

égalité qui, d'après (17), ne peut avoir lieu. En supposant donc que

(¹) Nous n'excluons pas le cas de $k=1$; l'expression dont il s'agit dans le texte se réduit alors à une quelconque des fonctions $X_1, \ldots, X_{2n}$, qui ne sont pas toutes nulles.

la fonction f_1 dépend de x_1, on aura nécessairement

$$\Delta^{(3)}_{y_1} 1\,2\,3 \gtrless 0$$

pour l'un quelconque des indices y_1 égal à 2 ou à 3.

De même l'égalité

$$\sum a_{mq} \Delta^{(3)}_{mqy} 1\,2\ldots 5 = 0$$

ne peut avoir lieu pour trois valeurs de y égales à y_1, 4, 5. En effet, comme on a

$$\Delta^{(3)}_{y_1,4,5} 1\ldots 5 \gtrless 0,$$

on aurait aussi, suivant le théorème du nº 4,

$$\sum (a_{mq})_1^2 \Delta^{(2)}_{(mq)_1^2} 1\ldots 5 = 0,$$

ce qui est contraire à l'inégalité (17). Donc, soit

$$\sum a_{mq} \Delta^{(3)}_{mqy_2} 1\ldots 5 \gtrless 0$$

pour y_2 égal à l'un quelconque des indices y_1, 4, 5. On démontrera de la même manière l'inégalité

$$\sum (a_{mq})_1^2 \Delta^{(3)}_{(mq)_1^2 y_3} 1\ldots 7 \gtrless 0$$

pour y_3 égal à l'un quelconque des indices y_2, 5, 7. En continuant ainsi, on parviendra à l'inégalité

22 $$\sum (a_{mq})_1^{k-2} \Delta^{(3)}_{(mq)_1^{k-2} y_{k-1}} 1\ldots(2k-1) \gtrless 0,$$

où y_{k-1} est un quelconque des nombres y_{k-2}, $2k-2$, $2k-1$. Puisque y_{k-1} est différent de l'unité, on peut dire que, parmi les nombres 2, 3, ..., $2k-1$, on trouvera toujours $2k-3$, par exemple, $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_{2k-2}$, tels qu'on a

$$\sum (a_{mq})_1^{k-2} \Delta^{(3)}_{(mq)_1^{k-2}} 1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_{2k-2} \gtrless 0,$$

et, en arrangeant ces indices d'une manière convenable, on aura les inégalités

(18) $$\sum (a_{mq})_1^{k-r} \overset{(3)}{\Delta}_{\substack{1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_{2k-2} \\ (mq)_1^{k-r}}} \gtrless 0,$$

pour r égal à 2, 3, ..., k.

10. Introduisons maintenant la fonction f_2 dans nos considérations et choisissons-la de manière que le déterminant fonctionnel satisfasse à la condition

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_{\rho_2}} \gtrless 0.$$

Il est facile de démontrer dans cette supposition qu'on doit avoir

$$\overset{(4)}{\Delta}_{\substack{1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4 \\ z_1}} = 0$$

pour l'une quelconque des valeurs z_1 égales à ρ_3 ou à ρ_4. En effet, dans le cas contraire, on aurait aussi

$$\overset{(4)}{\Delta}_{\substack{1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4 \\ z}} = 0$$

pour chaque indice z, puisqu'on a (18)

$$\overset{(3)}{\Delta}_{1,\ \rho_2} \gtrless 0;$$

et l'application du théorème du n° 6 nous donnerait

$$\sum a_{mq} \overset{(3)}{\Delta}_{\substack{1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4 \\ mq}} = 0,$$

ce qui est contraire aux inégalités (18). De même, il est aisé de démontrer que, parmi les indices z_1, ρ_5, ρ_6, on peut trouver un indice z_2 tel que

$$\sum a_{mq} \overset{(4)}{\Delta}_{\substack{1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_6 \\ mq\, z_2}} \gtrless 0.$$

On parvient ainsi de proche en proche à l'inégalité

$$\sum (a_{mq})_1^{k-3} \overset{(4)}{\Delta}_{\substack{1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_{2k-2} \\ (mq)_1^{k-3} z_{k-2}}} \gtrless 0.$$

Puisque z_{k-2} est différent de ρ_2, parmi les indices ρ_3, ..., ρ_{2k-2} on peut trouver $2k-4$, par exemple $\sigma_3, \ldots, \sigma_{2k-3}$, tels que

$$\sum (a_{mq})_1^{k-3} \underset{(mq)_1^{k-3}}{\overset{(4)}{\Delta}} 1, \rho_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{2k-3} \gtrless 0.$$

En continuant ainsi on parvient au théorème suivant :

Si les fonctions $X_1, \ldots, X_{2n}$ satisfont à l'inégalité

$$(19) \qquad \sum (a_{mq})_1^{k-1} \underset{(mq)_1^{k-1}}{\overset{(2)}{\Delta}} 1, \ldots, 2k-1 \gtrless 0,$$

on peut toujours arranger les indices de manière à avoir

$$(20) \qquad \sum (a_{mq})_1^{k-m-1} \underset{(mq)_1^{k-m-1}}{\overset{(m+2)}{\Delta}} 1, \ldots, 2k-1-m \gtrless 0 \qquad (m=1, 2, \ldots, k-1),$$

en supposant toutefois que tous les déterminants fonctionnels

$$(21) \qquad \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \gtrless 0 \qquad (m=1, \ldots, k-1)$$

sont différents de zéro; en particulier, on aura, pour $m=k-1$,

$$(22) \qquad \overset{(k+1)}{\Delta} 1, \ldots, k \gtrless 0.$$

11. Ajoutons aux conditions du théorème précédent, que nous supposons remplies, encore une, savoir

$$(23) \qquad \sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \gtrless 0.$$

On pourra alors satisfaire aux équations

$$X_m = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_m} + \ldots + F_k \frac{\partial f_k}{\partial x_m} \qquad (m=1, \ldots, k)$$

par des valeurs des $F_1, \ldots, F_k$ toutes finies et différentes de zéro. Pour que ce système de valeurs de $F_1, \ldots, F_k$ satisfasse aussi aux équations du même type, mais pour $m=k+1, \ldots, 2n$, on doit avoir

$$(24) \qquad \overset{(k+2)}{\Delta} 1, \ldots, k, r = 0,$$

pour r égal à $k+1, \ldots, 2n$, et l'on aura dans ce cas

$$(25) \qquad \sum_{m=1}^{2n} X_m dx_m = \sum_{n=1}^{k} F_n df_n.$$

On a déjà remarqué que les conditions imposées aux fonctions $X_1, \ldots, X_{2n}$, dans l'énoncé du théorème du n° 10, seront toujours remplies pour une quelconque des valeurs de k, à moins que toutes ces fonctions ne soient nulles à la fois. Il ne reste donc que de trouver les fonctions $f_1, \ldots, f_n$, satisfaisant aux équations (24) et aux inégalités (21) et (23).

12. On peut regarder les équations (24) comme un système d'équations différentielles linéaires qui définit la fonction f_k. En écrivant deux quelconques de ces équations sous la forme

$$\overset{(k+2)}{\underset{x}{\Delta}} 1, \ldots, k, r, s = 0 \qquad (x = r, s),$$

nous aurons la condition suivante pour qu'elles forment un système complet (10)

$$\sum a_{mq} \overset{(k+1)}{\underset{mq}{\Delta}} 1, \ldots, k, r, s = 0.$$

On aura une telle équation pour chaque paire d'indices r, s, pris parmi les nombres $k+1, \ldots, 2n$, et, comme ces équations ne contiennent pas la fonction f_k, on peut les regarder comme équations définissant la fonction f_{k-1}. Nous aurons ainsi

$$\sum a_{mq} \overset{(k+1)}{\underset{mq\,x}{\Delta}} 1, \ldots, k, r, s, t = 0 \qquad (x = r, s, t);$$

de ces équations, en ayant égard au théorème du n° 4 et aux inégalités (20), on tire

$$\sum (a_{mq})_1^2 \overset{(k)}{\underset{(mq)_1^2}{\Delta}} 1, \ldots, k, r, s, t = 0,$$

équations qui ne contiennent pas la fonction f_{k-1}. Trois de ces équations

$$\sum (a_{mq})_1^2 \overset{(k)}{\underset{(mq)_1^2\,x}{\Delta}} 1, \ldots, (k+1), r, s, t = 0 \qquad (x = r, s, t)$$

nous donnent de nouveau

$$\sum (a_{mq})_1^3 \overset{(k-1)}{\underset{(mq)_1^3}{\Delta}} 1, \ldots, (k+1), r, s, t = 0.$$

On parvient ainsi à une suite des systèmes d'équations de la forme

$$(26)\qquad \sum (a_{mq})_1^\nu \, \Delta_{(mq)_1^\nu}^{(k+2-\nu)} 1, \ldots, (k+\nu-2), r, s, t = 0.$$

où r, s, t sont pris entre les nombres $(k+\nu-1), \ldots, 2n$ et l'index ν est égal à $0, 1, 2, \ldots, k-1$.

13. Reprenons le groupe général représenté par les équations (26), définissant la fonction $f_{k-\nu}$. Parmi ces équations, combien y a-t-il d'indépendantes? Proposons-nous de tirer toutes les équations de ce groupe de celles-ci

$$(27)\qquad \sum (a_{mq})_1^\nu \, \Delta_{(mq)_1^\nu}^{(k+2-\nu)} 1, \ldots, (k+\nu), t = 0,$$

où t est égal à $k+\nu+1, \ldots, 2n$, comprises dans ce groupe. Supposons qu'on a choisi les fonctions $f_1, \ldots, f_{k-\nu-1}$, de manière à avoir pour chaque index x

$$(28)\qquad \sum (a_{mq})_1^{\nu+1} \, \Delta_{(mq)_1^{\nu+1} x}^{(k+1-\nu)} 1, \ldots, (k+\nu), r, s, t = 0,$$

$$(29)\qquad \sum (a_{mq})_1^\nu \, \Delta_{(mq)_1^\nu}^{(k+1-\nu)} 1, \ldots, (k+\nu) \gtrless 0,$$

comme cela a lieu identiquement pour $\nu = k-1$, et démontrons qu'on peut toujours choisir une intégrale du système (28) telle que ces mêmes relations seront remplies pour un indice moindre d'une unité.

En effet, en appliquant l'identité (1) au déterminant $\Delta 1, \ldots, (k+\nu), r, s, t$ en y posant

$$p_{2\nu+3} = k+1-\nu, \qquad p_{2\nu+2} = k+2-\nu, \qquad \ldots,$$
$$s = k+\nu, \qquad t = k+\nu+1, \qquad u = k+\nu+2, \qquad v = k+\nu+3, \qquad r = x$$

et en laissant x arbitraire, nous aurons précisément

$$\sum (a_{mq})_1^\nu \, \Delta_{(mq)_1^\nu x}^{(k-2+\nu)} 1 \ldots (k+\nu-1), r, s, t = 0.$$

Les équations (28), comme on le voit au théorème du n° 9, forment un système complet par rapport à la fonction $f_{k-\nu}$, et il est évident que, parmi ses $2n-k-\nu$ intégrales indépendantes, on trouvera toujours celles qui vérifient l'inégalité

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_{k-\nu}}{\partial x_{k-\nu}} \gtrless 0,$$

et cette condition est suffisante pour qu'on ait

$$\sum (a_{mq})_1^{\nu-1} \underset{(mq)_1^{\nu-1}}{\overset{(k+2-\nu)}{\Delta}} 1 \ldots (k+\nu-1) \gtrless 0.$$

14. De ce qui précède on voit que le nombre k des fonctions $f_1, \ldots, f_k$ est défini par cette circonstance que, parmi les expressions

$$(30) \qquad \sum (a_{mq})_1^{\nu-1} \underset{(mq)_1^{\nu-1}}{\overset{(2)}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_{2\nu-1},$$

la première, différente de zéro, correspond à $\nu = k$. Dans ce cas, on peut trouver les fonctions $f_1, \ldots, f_k$, $F_1, \ldots, F_k$, finies et différentes de zéro, satisfaisant à la relation

$$(31) \qquad X_1\, dx_1 + \ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = F_1\, df_1 + \ldots + F_k\, df_k.$$

Il est aisé de voir que ce nombre k est minimum, c'est-à-dire, qu'il ne peut y avoir un nombre moindre de fonctions satisfaisant à la relation (31), si pour $\nu = k$ on trouve l'expression de la forme (30) différente de zéro.

En effet, soit

$$(32) \qquad \sum (a_{mq})_1^{k-1} \underset{(mq)_1^{k-1}}{\overset{(2)}{\Delta}} 1 \ldots (2k-1) \gtrless 0,$$

et, en même temps,

$$(33) \qquad X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_{2n}\, dx_{2n} = F_1\, df_1 + \ldots + F_{k-s}\, df_{k-s}.$$

De cette dernière relation, on tire $2n$ équations

$$(34) \qquad X_m = F_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_m} + \ldots + F_{k-s} \frac{\partial f_{k-s}}{\partial x_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2n),$$

De l'inégalité (32) nous concluons que l'une quelconque des fonctions $X_1, \ldots, X_{2k-1}$ est différente de zéro et, puisque l'ordre des indices est arbitraire, on peut supposer que X_1 est une telle fonction. La première des équations (34) nous montre alors que l'une quelconque des fonctions $f_1, \ldots, f_{k-s}$ dépend de x_1; soit f_1 une telle fonction. Mais, dans ce cas, comme on l'a vu dans le nº 9, l'un quelconque des déterminants du second ordre de la forme

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_r} - X_r \frac{\partial f_1}{\partial x_1},$$

où r est compris parmi les nombres $2, 3, \ldots, 2k-1$, sera différent de zéro; supposons que cette inégalité a lieu pour $r = \rho$. Des équations (34), on tire

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\rho} - X_\rho \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = F_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_\rho} - \frac{\partial f_2}{\partial x_\rho} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) + \ldots,$$

d'où l'on voit que l'un quelconque des déterminants fonctionnels du second ordre, par exemple,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial x_\rho} - \frac{\partial f_2}{\partial x_\rho} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

ne doit pas être nul. Mais, dans ce cas, l'un quelconque des déterminants du troisième ordre de la forme

$$\sum \pm X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\rho} \frac{\partial f_2}{\partial x_m}$$

est différent de zéro. En continuant ainsi, on parviendra à un déterminant du $(k-s+1)^{\text{ième}}$ ordre, de la forme

$$\sum \pm X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_\rho} \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \cdots \frac{\partial f_{k-s}}{\partial x_l},$$

qui sera différent de zéro. On voit donc que le système (34) est impossible, et la relation (33) ne peut avoir lieu tant que s est différent de zéro.

15. Voici donc la marche à suivre pour résoudre le problème de Pfaff. On commence par calculer les fonctions de Pfaff composées avec des quantités

$$a_{mq} = \frac{\partial X_m}{\partial x_q} - \frac{\partial X_q}{\partial x_m} \qquad (m, q = 1, 2, \ldots, 2n),$$

d'ordre $1, 2, 3, \ldots$, jusqu'à ce qu'on parvienne à un tel ordre, $l+1$

par exemple, pour lequel toutes les fonctions de ce genre seront nulles. De l'identité

$$\sum_{i=1}^{2l} \sum (a_{mq})_1^{l-1} \overset{(2)}{\underset{(mq)_1^{l-1}\rho_i}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_{2l} a_{\rho_i \rho_m} = \mathrm{C}.(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{2l}).\mathrm{X}_{\rho_m},$$

où C est un facteur constant et m peut être égal à 1, 2, ..., $2l$, on voit que, si l'une quelconque des fonctions de Pfaff d'ordre l est différente de zéro, une des expressions

$$\sum (a_{mq})_1^{l-1} \overset{(2)}{\underset{(mq)_1^{l-1}\rho_i}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_{2l}$$

le sera aussi. On aura donc l fonctions $f_1, \ldots, f_l$ si l'expression

$$\sum (a_{mq})_1^{l} \overset{(2)}{\underset{(mq)_1^{l}}{\Delta}} \rho_1 \ldots \rho_{2l+1}$$

est différente de zéro pour l'une quelconque des combinaisons de $2l+1$ indices pris entre les nombres 1, 2, ..., $2n$ et $l-1$ fonctions dans le cas contraire. Après avoir trouvé ainsi le nombre k de fonction f, on choisit une expression telle que

$$\sum (a_{mq})_1^{k-1} \overset{(2)}{\underset{(mq)_1^{k-1}}{\Delta}} 1 \ldots 2k-1 \gtrless 0,$$

qui soit différente de zéro, et l'on cherche une intégrale f_1 commune du système jacobien d'équations

$$\sum (a_{mq})_1^{k-1} \overset{(3)}{\underset{(mq)_1^{k-1}}{\Delta}} 1 \ldots 2k-1,\ t = 0 \qquad (t = 2k, 2k+1, \ldots, 2n),$$

intégrale qui satisfasse à l'inégalité

$$\sum (a_{mq})_1^{k-2} \overset{(3)}{\underset{(mq)_1^{k-2}x}{\Delta}} 1 \ldots 2k-1 \gtrless 0,$$

pour l'un quelconque des indices x égaux à 1, 2, ..., $2k-1$. Soit

$$\sum (a_{mq})_1^{k-2} \overset{(3)}{\underset{(mq)_1^{k-2}}{\Delta}} 1 \ldots 2k-2 \gtrless 0;$$

la fonction f_2 sera alors l'intégrale commune des équations

$$\sum (a_{mq})_1^{k-2} \overset{(4)}{\underset{(mq)_1^{k-2}}{\Delta}} 1 \ldots 2k-2,\ t = 0 \qquad (t = 2k-1, \ldots, 2n)$$

satisfaisant à l'une quelconque des inégalités

$$\sum (a_{mq})_1^{k-3} \underset{(mq)_1^{k-3}y}{\overset{(4)}{\Delta}} 1 \ldots 2k-2 \gtrless 0 \qquad (y = 1, 2, \ldots, 2k-2).$$

En continuant ainsi, on déterminera de proche en proche toutes les fonctions $f_1, \ldots, f_k$, dont la dernière sera une intégrale du système jacobien

$$\overset{(k+2)}{\Delta} 1 \ldots k, t = 0 \qquad (t = k+1, \ldots, 2n),$$

satisfaisant à l'inégalité

$$\overset{(k+2)1}{\Delta} 1 \ldots k \gtrless 0.$$

16. Examinons le cas général d'une expression

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_{2n-1}\, dx_{2n-1},$$

où $X_1, \ldots, X_{2n-1}$ sont des fonctions de $2n-1$ variables $x_1, \ldots, x_{2n-1}$ et supposons qu'on a

$$\sum (a_{mq})_1^{n-1} \underset{(mq)_1^{n-1}}{\overset{(2)}{\Delta}} 1 \ldots 2n-1 \gtrless 0.$$

Le système d'équations différentielles qui définit la fonction f_1 se réduit alors à une seule équation

$$\sum (a_{mq})_1^{n-1} \underset{(mq)_1^{n-1}}{\overset{(3)}{\Delta}} 1 \ldots 2n-1, 2n = 0.$$

Mais, puisque $X_{2n} = 0$, on a

$$\sum (a_{mq})_1^{n-1} \underset{(mq)_1^{n-1}x}{\overset{(2)}{\Delta}} 1 \ldots 2n = 0,$$

pour $x = 1, 2, \ldots, 2n-1$, et notre équation s'écrit

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} \sum (a_{mq})_1^{n-1} \underset{(mq)_1^{n-1}}{\overset{(2)}{\Delta}} 1 \ldots 2n-1 = 0;$$

f_1 est donc une fonction arbitraire des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}$ satisfaisant à l'inégalité

$$\sum (a_{mq})_1^{n-2} \underset{(mq)_1^{n-2}x}{\overset{(3)}{\Delta}} 1 \ldots 2n-1 \gtrless 0$$

pour l'une quelconque des valeurs de x égales à $1, 2, \ldots, 2n-1$.

La fonction f_2 est définie comme intégrale commune d'un système de deux équations telles que

$$\sum (a_{mq})_1^{n-2} \overset{(4)}{\underset{(mq)_1^{n-2}}{\Delta}} 1 \ldots (2n-2), (2n-1) = 0,$$

$$\sum (a_{mq})_1^{n-2} \overset{(4)}{\underset{(mq)_1^{n-2}}{\Delta}} 1 \ldots (2n-2), 2n \qquad = 0.$$

Mais comme la seconde de ces équations peut s'écrire

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} \sum (a_{mq})_1^{n-2} \overset{(3)}{\underset{(mq)_1^{n-2}}{\Delta}} 1 \ldots 2n-2 = 0,$$

il ne reste qu'à chercher une intégrale de la première indépendante de x_{2n} et satisfaisant à l'inégalité

$$\sum (a_{mq})_1^{n-3} \overset{(4)}{\underset{(mq)_1^{n-3} x}{\Delta}} 1 \ldots 2n-2 \gtrless 0,$$

pour l'une quelconque des valeurs de x égales à 1, 2, ..., $2n-2$. En continuant ainsi, nous verrons que toutes les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ doivent être indépendantes de x_{2n} et que, par conséquent, dans la formation des systèmes des équations définissant ces fonctions, la variable x_{2n} doit être chassée.

17. *Exemples* (¹). — I. Proposons-nous de transformer l'expression

$$\Omega = x_2\, dx_1 + x_3\, dx_2 + x_4\, dx_3 + x_5\, dx_4 + x_1\, dx_5.$$

Puisque l'expression

$$\frac{1}{8} \sum (a_{mq})_1^2 \overset{(2)}{\underset{(mq)_1^2}{\Delta}} 1 \ldots 5 = X_5(1234) - X_4(1235) + X_3(1245) - X_2(1345) + X_1(2345)$$

est différente de zéro, le nombre k de fonctions est égal à 3. La fonction f_1 étant arbitraire (nº 16), prenons-la égale à x_1, et cette valeur satisfait à la condition

$$\sum a_{mq} \overset{(3)}{\underset{mq}{\Delta}} 1 \ldots 4 \gtrless 0.$$

(¹) *Theorie der Differentialgleichungen,* von Dr Forsyth. Deutsche Ausgabe von H. Maser.

La fonction f_2 sera déterminée comme intégrale d'une équation différentielle

$$\sum a_{mq} \overset{(4)}{\underset{mq}{\Delta}} 1 \ldots 5 = 0,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1 + x_4) - \frac{\partial f_2}{dx_3} x_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x_4} x_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_5}(x_5 + x_3) = 0.$$

A cette équation correspond une intégrale

$$f_2 = \varphi(x_1),$$

où φ est une fonction arbitraire, mais cette intégrale ne nous convient pas, puisque tous les déterminants de la forme

$$\sum \pm X_m \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \frac{\partial f_2}{\partial x_p}$$

seront nuls (n° 16) ou, comme on peut dire aussi (n° 10), puisque tous les déterminants fonctionnels du second ordre seront nuls. Prenons donc une autre intégrale, par exemple

$$f_2 = x_1 x_2 - x_1 x_4 - \frac{1}{2} x_4^2,$$

qui satisfait à la condition

$$\sum \pm X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \gtrless 0.$$

La fonction f_3 sera l'intégrale commune du système jacobien

$$\sum \pm X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial f_3}{\partial x_k} = 0$$

pour $k = 4, 5$. Nous aurons ainsi deux équations

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} x_4(x_1 + x_4) - \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(x_1 x_5 + x_3 x_1 + x_3 x_4) + \frac{\partial f_3}{\partial x_4} x_1 x_4 = 0,$$

$$x_1^2 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} - x_1 x_4 \frac{\partial f_3}{\partial x_5} = 0.$$

L'intégrale

$$f_3 = e^{\frac{x_4}{x_1}(x_3x_4+x_1x_5)},$$

satisfaisant à la condition

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial f_3}{\partial x_3} \gtrless 0,$$

sera la troisième fonction cherchée.

II. Soit

$$\begin{aligned}\Omega = {} & (x_1x_2 + x_2x_6)dx_1 + (x_1^2 + x_2x_5)dx_2 \\ & + x_1x_4dx_3 + x_1x_3dx_4 + (x_1x_6 + x_2^2)dx_5 + (x_1x_3 + x_1x_2)dx_6.\end{aligned}$$

La fonction de Pfaff $(1\,2\,3\,4\,5\,6) = 0$; puis, l'expression

$$\sum (a_{mq})_1^2 \overset{(2)}{\Delta}{}_{(mq)_1^2 x}^{1\ldots 6} \tag{35}$$

est nulle pour $x = 5, 6$; et puisque

$$\sum a_{mq} \overset{(2)}{\Delta}{}_{mq}^{1\,2\,3} \gtrless 0,$$

cette même expression (35) sera nulle (4) pour chaque index x. Nous aurons donc deux fonctions f_1 et f_2, dont la première sera une intégrale du système jacobien

$$\sum a_{mq} \overset{(3)}{\Delta}{}_{mq}^{1\,2\,3\,p} = 0,$$

pour $p = 4, 5, 6$, ou plus simplement

$$x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - x_4\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0,$$

$$x_1x_2x_4\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_2^2x_4\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - (2x_1x_2^2 - x_2x_5x_6 - x_1x_6^2)\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + (x_1x_4x_6 + x_2x_4x_5)\frac{\partial f_1}{\partial x_5} = 0,$$

$$x_1^2x_4\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_1x_2x_4\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - (2x_2x_1^2 - x_1x_5x_6 - x_2x_5^2)\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + (x_1x_4x_6 + x_2x_4x_5)\frac{\partial f_1}{\partial x_6} = 0.$$

Nous avons une intégrale dépendant de x_1

$$f_1 = \frac{x_1}{x_2},$$

qui nous donne l'inégalité

$$\sum \pm X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \gtrless 0;$$

la fonction f_2 sera l'intégrale du système jacobien

$$\sum \pm X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} = 0$$

pour $k = 3, 4, 5, 6$, ou plus simplement

$$x_1^2 x_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_1 x_2 x_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - (2x_1^2 + x_1 x_6 + x_2 x_5) x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = 0,$$

$$x_1^2 x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_1 x_2 x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - (2x_1^2 + x_1 x_6 + x_2 x_5) x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = 0,$$

$$x_1(x_1 x_6 + x_2^2) \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_2(x_1 x_6 + x_2^2) \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - (2x_1^2 + x_1 x_6 + x_2 x_5) x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_5} = 0,$$

$$x_1(x_1 x_5 + x_1 x_2) \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_2(x_1 x_5 + x_1 x_2) \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - (2x_1^2 + x_1 x_6 + x_2 x_5) x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_6} = 0.$$

L'intégrale de ce système

$$f_2 = x_1^2 + x_1 x_6 + x_2 x_5 + \frac{x_1 x_3 x_4}{x_2} + \frac{x_1 x_5 x_6}{x_2}$$

satisfait à la condition

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \gtrless 0;$$

elle peut donc être prise pour la seconde fonction f_2.

Odessa, mars 1895.