Annales scientifiques de l'É.N.S.

V. Jamet

Sur une équation aux dérivées partielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 95-106
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__95_0>

SUR UNE

ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES,

PAR M. V. JAMET.

1. Dans un important Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (4[e] série, t. VI), M. Picard a établi que toute équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y\ z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

admet une intégrale assujettie à devenir égale à une fonction donnée de x, quand y prend une valeur déterminée y_0, et à une fonction donnée de y, quand x prend une autre valeur déterminée x_0. Mais la méthode suivie par l'éminent professeur ne se prête guère au calcul pratique de cette intégrale, et c'est pourquoi nous pensons qu'il n'est pas sans intérêt de signaler tel cas particulier où l'intégrale dont il s'agit ici prend une forme simple. Le cas particulier que je signale se rapporte à l'équation d'Euler et de Poisson

$$(1)\qquad (u - v)\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} + a\frac{\partial \theta}{\partial u} - b\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

dans laquelle u, v sont les variables indépendantes, a, b deux constantes réelles.

M. Darboux, dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces,* a consacré un Chapitre important à l'étude de cette question (Livre IV, Chap. III), puis, appliquant, dans les Chapitres ultérieurs, une idée de Riemann, a effectué l'intégration de cette même équation, en se plaçant à un point de vue bien plus général que celui auquel nous voulons nous restreindre. Nous prions donc le lecteur de ne voir, dans notre travail, que la recherche d'une forme simple de l'intégrale de M. Picard. D'ailleurs, l'idée fondamentale qui nous a guidé dans cette recherche est due à M. Appell, et M. Darboux l'a également mentionnée à l'endroit cité de son Ouvrage. Elle consiste en ce que l'équation proposée admet l'intégrale

$$\theta = \int (u-\alpha)^b (v-\alpha)^a f(\alpha)\, d\alpha,$$

dont l'expression renferme une fonction arbitraire $f(\alpha)$, pourvu toutefois que les limites de l'intégration indiquée ci-dessus soient convenablement choisies ou que l'on ait eu soin de choisir convenablement le contour d'intégration, s'il est fermé. La méthode que nous proposons réussira chaque fois que les deux constantes u_0, v_0, qui vont tenir lieu des constantes x_0, y_0 dont nous avons parlé ci-dessus, seront différentes l'une de l'autre, et donnera lieu à une intéressante application géométrique. En effet, nous connaîtrons par là une catégorie étendue de surfaces algébriques, dont les lignes asymptotiques nous seront connues sans autre intégration.

2. Soit donc à former une intégrale de l'équation (1) assujettie à devenir, pour $u = u_0$, égale à une fonction donnée V de v, celle-ci étant développable par la formule de Taylor dans le voisinage de $v = v_0$; supposons aussi que l'intégrale cherchée doive devenir égale à une fonction donnée U de u, pour $v = v_0$, et supposons encore que U soit développable par la formule de Taylor, dans le voisinage de $u = u_0$. Nous supposons, bien entendu, $V(v_0) = U(u_0)$ et nous désignerons par A la valeur commune à ces deux constantes. Soient encore C et C′ les points qui représentent les deux constantes u_0, v_0, supposées réelles. De C comme centre traçons un cercle (C) dont le rayon, moindre que la distance CC′, soit assez petit pour que, à l'intérieur de ce cercle, la fonction U soit développable en une série de la forme

$$A + B_1(u-u_0) + B_2(u-u_0)^2 + \ldots.$$

Du point C′ comme centre traçons un deuxième cercle (C′) dont le rayon, moindre que CC′, remplisse la même condition à l'égard de la fonction V, et soit

$$A + A_1(v-v_0) + A_2(v-v_0)^2 + \ldots$$

le développement correspondant de V. Considérons ensuite la fonction θ, définie comme il suit

$$(a)\quad \theta = \mathrm{A} + \int_{c'} \frac{(u-\alpha)^b (v-\alpha)^a}{(u_0-\alpha)^b (v_0-\alpha)^a} \varphi(\alpha)\, d\alpha + \int_{c} \frac{(u-\alpha)^b (v-\alpha)^a}{(u_0-\alpha)^b (v_0-\alpha)^a} \psi(\alpha)\, d\alpha.$$

Pour $u = u_0$, la deuxième intégrale se réduit à zéro, si le cercle (C) ne contient ni pôle ni point critique de la fonction $\psi(\alpha)$; et la première se réduit à

$$(2)\qquad \int_{c'} \frac{(v-\alpha)^a \varphi(\alpha)}{(v_0-\alpha)^a}\, d\alpha.$$

La fonction θ ainsi définie sera donc l'intégrale cherchée, si nous pouvons choisir la fonction $\varphi(\alpha)$ de telle sorte que l'intégrale (2) soit égale à

$$\mathrm{A}_1(v-v_0) + \mathrm{A}_2(v-v_0)^2 + \mathrm{A}_3(v-v_0)^3 + \ldots$$

pour toute valeur de v comprise à l'intérieur du cercle C', et si nous pouvons déterminer la fonction $\psi(\alpha)$ par des conditions analogues concernant la fonction U. Or, pour de telles valeurs de v, la fonction (2) se développe comme il suit

$$\begin{aligned}\int_{c'} \left(1 + \frac{v-v_0}{v_0-\alpha}\right)^a \varphi(\alpha)\, d\alpha &= \int_{c'} \varphi(\alpha)\, d\alpha + \frac{a}{1}(v-v_0) \int_{c'} \frac{\varphi(\alpha)}{v_0-\alpha}\, d\alpha \\ &\quad + \frac{a(a-1)}{1.2}(v-v_0)^2 \int_{c'} \frac{\varphi(\alpha)}{(v_0-\alpha)^2}\, d\alpha + \ldots,\end{aligned}$$

et si la fonction $\varphi(\alpha)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle C', on peut appliquer à chaque terme du second membre la formule de Cauchy :

$$\int_{c'} \frac{\varphi(\alpha)\, d\alpha}{(v_0-\alpha)^p} = 2\pi\sqrt{-1}\, \frac{\varphi^{(p-1)}(v_0)}{1.2.3\ldots\overline{p-1}} \times (-1)^p.$$

Le problème sera donc résolu si nous pouvons déterminer la fonction $\varphi(v)$ de telle sorte qu'on ait, quel que soit p,

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-p+1)}{1.2.3\ldots\overline{p-1}} \times 2\pi\sqrt{-1} \times \frac{\varphi^{(p-1)}(v_0)}{1.2.3\ldots\overline{p-1}} = \mathrm{A}_p \times (-1)^p.$$

Il suffit pour cela que l'on ait

$$(3) \qquad 2\pi\sqrt{-1}\,\varphi(v) = -\frac{A_1}{a} + \frac{1.2}{a(a-1)}A_2(v-v_0) - \frac{1.2.3}{a(a-1)(a-2)}A_3(v-v_0)^2 + \ldots.$$

Mais il reste à rechercher si la série formée de la sorte est convergente pour toute valeur de v comprise à l'intérieur du cercle (C'), et je dis qu'il en est ainsi chaque fois que a n'est pas un entier positif. En effet, le terme général de la série que nous voulons étudier est de la forme

$$\frac{1}{a}\,\frac{1.2.3\ldots(p-1)}{(a-1)(a-2)\ldots(a-p+1)}\,p\,A_p(v-v_0)^{p-1}.$$

Soit $pA_p = C_{p-1}$; pour les valeurs de v dont il s'agit, on démontre la convergence de la série

$$\Sigma\, C_p(v-v_0)^p,$$

et si, dans cette dernière série, nous remplaçons v par une imaginaire v', dont le point représentatif soit intérieur au cercle (C'), mais telle que le module de $v'-v_0$ soit supérieur au module de $v-v_0$, la série

$$(4) \qquad \Sigma\, C_p(v'-v_0)^p$$

sera convergente. Mais les termes de la série (3) s'obtiennent en multipliant, par les termes correspondants de la série (4), ceux de la série

$$\sum \frac{1}{a}\,\frac{1.2.3\ldots p}{1.2.3\ldots(a-p)}\left(\frac{v-v_0}{v'-v_0}\right)^p,$$

laquelle est *absolument* convergente, puisque, dans cette dernière, le rapport d'un terme au précédent a une limite

$$\frac{v-v_0}{v'-v_0},$$

dont le module est inférieur à 1. — Même procédé pour déterminer $\psi(\alpha)$.

3. Mais la démonstration précédente tomberait en défaut, si le terme général de la série que nous avons étudiée devenait infini pour une certaine valeur de p, c'est-à-dire si a était un nombre entier positif. Il y a donc lieu d'étudier séparément le cas où un seul des nombres a, b remplit cette condition, et le cas où ils sont entiers et positifs l'un et l'autre. Nous supposerons donc, en premier lieu, que b seul soit un entier positif, et nous observerons que le problème sera résolu, si, dans l'expression de la fonction θ, nous parvenons à remplacer la deuxième intégrale par une intégrale de l'équation (1), assujettie à s'annuler pour $u = u_0$ et à devenir égale à une fonction donnée $\Phi(u)$ pour $v = v_0$. A cet effet, nous observerons que l'intégrale de M. Appell vérifie encore l'équation (1), si, dans le cas actuel, on prend, pour limites inférieure et supérieure de l'intégration, u_0 et u; de telle sorte que la fonction

$$\frac{1}{1.2.3\ldots b}\int_{u_0}^{u}\frac{(u-\alpha)^b(v-\alpha)^a}{(v_0-\alpha)^a}\Phi^{(b+1)}(\alpha)\,d\alpha$$

est encore une intégrale de l'équation proposée. Pour $u = u_0$, elle est nulle; pour $v = v_0$, elle se réduit à l'une des formes classiques du terme complémentaire du développement de $\Phi(u)$ par rapport aux puissances, positives et croissantes de $u - u_0$. Il suffira donc, pour résoudre notre problème, de substituer au dernier terme de la formule (a) la fonction ci-dessus, augmentée d'une intégrale de l'équation (1) qui s'annule pour $u = u_0$, et qui, pour $v = v_0$, devienne égale au polynome

$$(5)\qquad \frac{\Phi'(u_0)}{1}(u-u_0)+\frac{\Phi''(u_0)}{1.2}(u-u_0)^2+\ldots+\frac{\Phi^{(b)}(u_0)}{1.2.3\ldots b}(u-u_0)^b.$$

Or l'équation (1) admet les intégrales suivantes

$$(u-\alpha)^b(v-\alpha)^a,$$
$$D_\alpha(u-\alpha)^b(v-\alpha)^a,\quad D_\alpha^2(u-\alpha)^b(v-\alpha)^a,\quad\ldots,\quad D_\alpha^{b-1}(u-\alpha)^b(v-\alpha)^a,$$

qui sont des fonctions entières de u et s'annulent pour $u = u_0$ si l'on y fait $\alpha = u_0$. Donc la fonction

$$(6)\quad (-1)^{b-a}\left[\begin{array}{l} A_1 D_{u_0}^{b-1}[(u-u_0)^b(v-u_0)^a] \\ +A_2 D_{u_0}^{b-2}[(u-u_0)^b(v-u_0)^a]+\ldots+A_b(u-u_0)^b(v-u_0)^a\end{array}\right]$$

est une intégrale de l'équation (1), nulle pour $u = u_0$, et nous nous proposons de déterminer $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_b$, de telle sorte que, pour $v = v_0$, cette fonction soit identique au polynome (5). Or l'identification de ce dernier polynome avec celui qu'on obtient en faisant $v = v_0$ donne

$$1.2.3\ldots(b-1) \quad A_1(v_0 - u_0)^a = \frac{\Phi'(u_0)}{1},$$

$$1.2.3\ldots(b-1)\, A_1 D_{u_0}(v_0 - u_0)^a + 1.2.3\ldots(b-2) \quad A_2(v_0 - u_0)^a = \frac{\Phi''(u_0)}{1.2},$$

$$\frac{1.2.3\ldots(b-1)}{1.2} A_1 D_{u_0}^2(v_0 - u_0)^a + 1.2.3\ldots(b-2)\, A_2 D_{u_0}(v_0 - u_0)^a$$
$$+ 1.2.3\ldots(b-3) \quad A_3(v_0 - u_0)^a = \frac{\Phi'''(u_0)}{1.2.3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en tout b équations linéaires, permettant toujours de déterminer les b constantes $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_b$; et la discussion de ce système d'équations n'offre aucune difficulté, attendu qu'elles font connaître chacune de ces inconnues, comme une fonction linéaire de celles qui la précèdent. Nous rencontrerons un pareil système d'équations dans l'examen du cas où a et b sont des nombres entiers positifs.

4. Dans ce cas, nous tracerons un contour fermé simple S, contenant une fois chacun des deux points u_0, v_0, et nous considérerons la fonction θ définie comme il suit. En désignant par V un polynome entier en u et v, nous poserons

$$\begin{aligned} \theta = A &+ \int_S \frac{(u-\alpha)^b (v-\alpha)^a}{(u_0-\alpha)^b (v_0-\alpha)^a} V(\alpha)\, d\alpha \\ &+ \frac{1}{1.2.3\ldots b} \int_{u_0}^{u} \frac{(u-\alpha)^b (v-\alpha)^a}{(v_0-\alpha)^a} \Phi^{(b+1)}(\alpha)\, d\alpha \\ &+ \frac{1}{1.2.3\ldots a} \int_{v_0}^{v} \frac{(u-\alpha)^b (v-\alpha)^a}{(u_0-\alpha)^b} \Psi^{(a+1)}(\alpha)\, d\alpha, \end{aligned}$$

$\Phi(\alpha)$ et $\Psi(\alpha)$ désignant deux fonctions données, développables en séries entières : la première dans le voisinage de $\alpha = v_0$, la deuxième dans le voisinage de $\alpha = u_0$.

Pour $u = u_0$, la deuxième de ces intégrales est nulle; la troisième se réduit à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots a}\int_{v_0}^{v}(u-\alpha)^b\,\Psi^{((a+1)}(\alpha)\,d\alpha,$$

terme complémentaire de la série de Taylor dans le développement de $\Psi(v)$ par rapport aux puissances entières et positives de $v - v_0$. Nous avons donc à déterminer $V(\alpha)$, de telle sorte que, pour $v = v_0$, la première de nos trois intégrales devienne égale à

$$\Psi'(v_0)(v-v_0)+\frac{\Psi''(v_0)}{1.2}(v-v_0)^2+\ldots+\frac{\Psi^{(a)}(v_0)}{1.2..3\ldots a}(v-v_0)^a,$$

et, pour $u = u_0$, à

$$\Phi'(u_0)(u-u_0)+\frac{\Phi''(u_0)}{1.2}(u-u_0)^2+\ldots+\frac{\Phi^{(b)}(u_0)}{1.2.3\ldots b}(u-u_0)^b.$$

Or, pour $u = u_0$, cette intégrale devient

$$\int_S \frac{(v-\alpha)^a}{(v_0-\alpha)^a}V(\alpha)\,d\alpha = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{1.2.3\ldots(a-1)}D_{v_0}^{(a-1)}[(v_0-v)^a\,V(v_0)]$$

ou bien

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{1.2.3\ldots(a-1)}\Big[a(a-1)\ldots2(v_0-v)\,V(v_0)$$
$$+\frac{a(a-1)\ldots3}{1.2}(v_0-v)^2\,V'(v_0)+\ldots+\frac{(v_0-v)^a}{1.2.3\ldots(a-1)}V^{(a-1)}(v_0)\Big].$$

De là une première série de conditions

$$(6)\qquad\left\{\begin{aligned}
&2\pi\sqrt{-1}\,a\,V(v_0) = -\Psi'(v_0),\\
&\frac{2\pi\sqrt{-1}\,a}{1.2}V'(v_0) = +\Psi''(v_0),\\
&\frac{2\pi\sqrt{-1}\,a}{1.2.3}V''(v_0) = -\Psi'''(v_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

qui font connaître les valeurs que prennent la fonction V et ses $a-1$ premières dérivées pour $v = v_0$; on trouverait de même

$$(7)\quad \begin{cases} 2\pi\sqrt{-1}\,b & \mathrm{V}\,(u_0) \quad = -\Phi'(u_0), \\ \dfrac{2\pi\sqrt{-1}\,b}{1.2} & \mathrm{V}'(u_0) \quad = +\Phi''(u_0), \\ \dfrac{2\pi\sqrt{-1}\,b}{1.2.3} & \mathrm{V}''(u_0) \quad = -\Phi'''(u_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{2\pi\sqrt{-1}\,b}{1.2.3\dots(b-1)} & \mathrm{V}^{(b-1)}(u_0) = \pm\Phi^{(b)}(u_0), \end{cases}$$

et l'on trouve, en résumé, pour $i = 1, 2, 3, \dots, (b-1)$,

$$(8)\qquad \mathrm{V}^{(i)}(u_0) = \Phi^{(i+1)}(u_0)\,\frac{1.2.3\dots(b-1)}{2\pi\sqrt{-1}\,b}\,(-1)^{i-1},$$

et, pour $i = 1, 2, 3, \dots, (a-1)$,

$$(9)\qquad \mathrm{V}^{(i)}(v_0) = \Psi^{(i+1)}(v_0)\,\frac{1.2.3\dots(b-1)}{2\pi\sqrt{-1}\,b}\,(-1)^{i-1}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(\alpha) = {} & (\alpha - u_0)^b\,[a_0 + a_1(\alpha - v_0) + \dots + a_{a-1}(\alpha - v_0)^{a-1}] \\ & + (\alpha - v_0)^a\,[b_0 + b_1(\alpha - u_0) + \dots + b_{b-1}(\alpha - u_0)^{b-1}], \end{aligned}$$

et observons que

$$\begin{aligned} &\mathrm{V}\,(v_0) = (v_0 - u_0)^b a_0, \\ &\mathrm{V}'(v_0) = b(v_0 - u_0)^{b-1} a_0 + (v_0 - u_0)^b a_1, \\ &\mathrm{V}''(v_0) = b(b-1)(v_0 - u_0)^{b-2} a_0 + 2\,\frac{b}{1}(v_0 - u_0)^{b-1} a_1 + (v_0 - u_0)^b a_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Pour éviter toute confusion, rappelons que $\mathrm{V}(v_0)$, $\mathrm{V}'(v_0)$, $\mathrm{V}''(v_0)$, ... désignent les valeurs que prennent le polynome V et ses dérivées par rapport à α, pour $\alpha = v_0$.

En égalant les seconds membres de ces équations aux seconds membres des formules (9), nous trouverons a équations permettant de calculer chacune des a constantes $a_0, a_1, \dots, a_{a-1}$; et, comme chacune d'elles se présente comme une fonction linéaire de celles qui la précèdent, la discussion de ce système d'équations n'offre aucune difficulté. Bien entendu, la même méthode permettra de déterminer les b constantes $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{b-1}$.

5. La fin de notre travail sera consacrée à une application géométrique. Soient ξ, η, ζ trois fonctions des deux variables indépendantes u, v, assujetties à remplir les conditions suivantes

$$\frac{1}{\xi}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\eta}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\,\partial v}.$$

On observera que les deux fonctions

$$\eta\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \zeta\frac{\partial\eta}{\partial u}, \quad \zeta\frac{\partial\eta}{\partial v} - \eta\frac{\partial\zeta}{\partial v}$$

sont alors, par rapport à u et v, les dérivées partielles d'une même fonction x, et l'on aura

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \eta\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \zeta\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \zeta\frac{\partial\eta}{\partial v} - \eta\frac{\partial\zeta}{\partial v}.$$

De même, il existe deux autres fonctions, y et z, remplissant les conditions

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \zeta\frac{\partial\xi}{\partial u} - \xi\frac{\partial\zeta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \xi\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \zeta\frac{\partial\xi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \xi\frac{\partial\eta}{\partial u} - \eta\frac{\partial\xi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \eta\frac{\partial\xi}{\partial v} - \xi\frac{\partial\eta}{\partial v};$$

de plus, si, dans l'un ou l'autre des déterminants

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

on remplace les dérivées partielles de x, y, z par les expressions qui résultent des formules précédentes, on constate que ces deux déterminants deviennent nuls; et l'on en conclut que, si x, y, z sont les coordonnées d'un point mobile sur une surface, celle-ci admet les paramètres u, v comme paramètres de ses lignes asymptotiques. Si donc $F(u, v)$ est une fonction donnée, et si nous savons intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} = F(u, v),$$

nous connaîtrons ensuite, par des quadratures, une infinité de surfaces dont les lignes asymptotiques seront connues sans intégration nouvelle. Or l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} = \frac{m(m+1)}{(u-v)^2}$$

a été assez étudiée pour que nous essayions de mettre à profit ses propriétés pour déterminer de telles surfaces. D'abord, cette équation se ramène à l'équation d'Euler, par la transformation

$$\xi = \theta(u-v)^{-m};$$

elle prend la forme

$$(u-v)\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} + m\frac{\partial \theta}{\partial u} - m\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0. \tag{10}$$

et se présente ainsi comme un cas particulier de l'équation (1), où l'on aurait $a = b = m$. On trouvera, dans ce qui précède, le moyen de former, en nombre illimité, des intégrales de cette équation, et nous nous bornerons à signaler un cas particulier où l'on trouve ainsi des surfaces algébriques. C'est celui où m est un nombre entier positif. En pareil cas, il suffit d'adopter pour ξ, η, ζ des expressions définies comme il suit :

$$(u-v)^m\xi = \Sigma A\,(u-\alpha)^m(v-\alpha)^m + \Sigma B\,D_\beta(u-\beta)^m(v-\beta)^m + \Sigma C.D_\gamma^2(u-\gamma)^m(v-\gamma)^m + \ldots,$$
$$(u-v)^m\eta = \Sigma A'(u-\alpha')^m(v-\alpha')^m + \Sigma B'\,D_{\beta'}(u-\beta')^m(v-\beta')^m + \Sigma C' D_{\gamma'}^2(u-\gamma')^m(v-\gamma')^m + \ldots,$$
$$(u-v)^m\zeta = \Sigma A''(u-\alpha'')^m(v-\alpha'')^m + \Sigma B''\,D_{\beta''}(u-\beta'')^m(v-\beta'')^m + \Sigma C'' D_{\gamma''}^2(u-\gamma'')^m(v-\gamma'')^m + \ldots,$$

où les lettres A, B, C, ..., A', B', C', ..., A'', B'', C'', ..., α, β, γ, ..., α', β', γ', ..., α'', β'', γ'', ... désignent des constantes quelconques. Les seconds membres de ces formules sont, par rapport à u, v, des polynomes entiers, dont le degré, par rapport à chacune de ces variables, ne dépasse pas m. Pour abréger, nous les désignerons par $f_1(u,v)$, $f_2(u,v)$, $f_3(u,v)$, et nous trouverons

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} = & \quad f_2(u,v)\frac{(u-v)f'_{3u}(u,v)-m f_3(u,v)}{(u-v)^{2m+1}}\\ & -f_3(u,v)\frac{(u-v)f'_{2u}(u,v)-m f_2(u,v)}{(u-v)^{2m+1}}\\ = & \frac{f_2(u,v)f'_{3u}-f_3(u,v)f'_{2u}(u,v)}{(u-v)^{2m}};\end{aligned}$$

de même,

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{f_3(u,v)f'_{2v}(u,v)-f_2(u,v)f'_{3v}(u,v)}{(u-v)^{2m}}.$$

Pour les dérivées partielles de y et de z, on trouverait encore des expressions analogues, et l'on en déduira, d'après une théorie bien connue,

$$\begin{aligned}x-x_0= & \int_{u_0}^{u}\frac{f_2(u,v)f'_{3u}(u,v)-f_3(u,v)f'_{2u}(u,v)}{(u-v)^{2m}}\,du\\ & +\int_{v_0}^{v}\frac{f_3(u_0,v)f'_{2v}(u_0,v)-f_2(u_0,v)f'_3(u_0,v)}{(u_0-v)^{2m}}\,dv,\end{aligned}$$

x_0, u_0, v_0 désignant des constantes arbitraires. Pour les expressions de y et de z, on trouverait des formules analogues, et si l'on veut démontrer que les surfaces dont il s'agit ici sont algébriques, il suffit de faire voir que les intégrales écrites ci-dessus sont des fonctions rationnelles de u et de v. Or, si l'on observe que le numérateur de la fonction écrite sous le premier signe d'intégration est, par rapport à u, un polynome de degré $2m-2$ au plus, on voit que cette fonction peut être mise sous la forme

$$\frac{V_0+V_1(u-v)+V_2(u-v)^2+\ldots+V_{2m-2}(u-v)^{2m-2}}{(u-v)^{2m}}$$

ou bien

$$\frac{V_0}{(u-v)^{2m}}+\frac{V_1}{(u-v)^{2m-1}}+\ldots+\frac{V_{2m-2}}{(u-v)^2},$$

V_0, V_1, V_2, ... désignant des polynomes entiers par rapport à v. Son intégrale est donc bien une fonction rationnelle de u et de v, et l'on répéterait un raisonnement analogue pour démontrer que la deuxième intégrale jouit de la même propriété.