ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE BOREL

Sur les fonctions de deux variables réelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 79-94

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__79_0>

SUR LES

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES RÉELLES,

PAR M. ÉMILE BOREL.

Je me propose d'étendre aux fonctions de deux variables réelles un théorème que j'ai démontré dans ma Thèse, au sujet des fonctions d'une seule variable réelle; j'ai indiqué cette extension dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 2 décembre 1895. Dans des Mémoires ultérieurs, je développerai quelques applications de ce théorème, dont certaines ont été indiquées dans la Note précédente et dans une seconde Note, présentée le 16 décembre 1895.

Désignons par $f(x, y)$ une fonction des deux variables *réelles* x et y, admettant des dérivées partielles de tous les ordres à l'intérieur et sur le périmètre du carré défini par les inégalités

$$(1) \qquad -1 \leqq x \leqq 1, \qquad -1 \leqq y \leqq 1.$$

Nous nous proposons de trouver pour cette fonction un développement en série tel, que l'on obtienne toutes les dérivées partielles de la fonction par la dérivation terme à terme de la série. La méthode, qui nous conduira à ce résultat, ne diffère pas essentiellement de celle que j'ai employée, dans ma Thèse, pour résoudre le même problème, dans le cas des fonctions d'une seule variable; mais il sera nécessaire d'en reprendre complètement l'exposition, afin de préciser davantage l'ordre de grandeur des coefficients des séries et d'obtenir ainsi certaines inégalités, qui étaient inutiles dans le cas d'une seule variable, et qui deviennent, au contraire, indispensables pour l'extension à deux variables.

Nous allons chercher d'abord à déterminer une série

$$\varphi(x, y) = \Sigma \varphi_n(y) x^n, \tag{2}$$

convergente ainsi que toutes ses dérivées partielles pour toutes les valeurs de x et y appartenant au domaine considéré [défini par les inégalités (1)], et telle que la différence

$$f(x, y) - \varphi(x, y),$$

ainsi que chacune de ses dérivées par rapport à x, se réduise à la même fonction de y pour $x = +1$ et pour $x = -1$ [1]. Les fonctions $\varphi_n(y)$ et leurs dérivées satisferont, de plus, à des inégalités très importantes.

Posons

$$\varphi(x, y) = \psi_1(x^2, y) + x\psi_2(x^2, y); \tag{3}$$

nous devons avoir, par hypothèse, quel que soit l'ordre de dérivation α,

$$D_x^\alpha[f(x, y) - \varphi(x, y)]_{x=1} = D_x^\alpha[f(x, y) - \varphi(x, y)]_{x=-1}.$$

Ces équations seront évidemment vérifiées si les dérivées partielles par rapport à z des fonctions $\psi_1(z, y)$ et $\psi_2(z, y)$ se réduisent pour $z = 1$ à des fonctions de y, aisées à calculer de proche en proche et d'ailleurs déterminées en partie seulement; nous pouvons donc les remplacer d'une infinité de manières par les deux systèmes

$$D_z^\alpha[\psi_1(z, y)]_{z=1} = f_\alpha^{(1)}(y),$$
$$D_z^\alpha[\psi_2(z, y)]_{z=1} = f_\alpha^{(2)}(y),$$

dans lesquels les fonctions $f_\alpha^{(1)}(y)$, $f_\alpha^{(2)}(y)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées partielles par rapport à x de $f(x, y)$ (pour $x = \pm 1$); chacune d'elles est, en vertu des hypothèses faites sur $f(x, y)$, finie, ainsi que chacune de ses dérivées lorsque y est compris

---

[1] La fonction $f(x, y)$, pouvant n'être pas définie pour les valeurs de x et de y ne satisfaisant pas aux inégalités (1), ses dérivées pour les points du périmètre du carré peuvent n'être définies que suivant les directions *non extérieures* au carré.

entre -1 et $+1$. Nous considérerons un seul de nos deux systèmes, que nous écrirons

$$D_z^\alpha[\psi(z,y)]_{z=1} = f_\alpha(y); \tag{4}$$

nous poserons

$$\psi(z,y) = \psi_0(y) + \psi_1(y)z + \psi_2(y)z^2 + \ldots,$$

et les équations (4) prendront la forme plus explicite

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \psi_0(y)+\psi_1(y)+ & \psi_2(y)+ & \psi_3(y)+\ldots &= f_0(y), \\ \psi_1(y)+ & 2\psi_2(y)+ & 3\psi_3(y)+\ldots &= f_1(y), \\ & 1.2\psi_2(y)+ & 2.3\psi_3(y)+\ldots &= f_2(y), \\ & & 1.2.3\psi_3(y)+\ldots &= f_3(y), \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right. \tag{5}$$

C'est de la résolution de ce système (5) que nous allons tout d'abord nous occuper; nous le résoudrons d'abord avec une certaine approximation et obtiendrons ensuite une solution exacte. D'ailleurs, on verra qu'il y a un grand arbitraire dans la méthode que nous emploierons et que, par suite, la solution obtenue sera loin d'être unique; mais il nous suffira qu'elle existe.

Soit $f_\alpha^{(\beta)}(y)$ la dérivée d'ordre β par rapport à y de $f_\alpha(y)$; lorsque y varie entre -1 et $+1$, la valeur absolue de $f_\alpha^{(\beta)}(y)$ est inférieure à un nombre fixe $M_\alpha^{(\beta)}$; formons le Tableau à double entrée :

$$\begin{array}{cccccc} M_0^{(0)}, & M_1^{(0)}, & M_2^{(0)}, & \ldots, & M_\alpha^{(0)}, & \ldots, \\ M_0^{(1)}, & M_1^{(1)}, & M_2^{(1)}, & \ldots, & M_\alpha^{(1)}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ M_0^{(\beta)}, & M_1^{(\beta)}, & M_2^{(\beta)}, & \ldots, & M_\alpha^{(\beta)}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

Il résulte de recherches de Paul du Bois-Reymond (*voir* notamment *Math. Annalen*, t. XI) que l'on peut trouver une suite

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_\alpha, \quad \ldots$$

de nombres positifs indéfiniment croissants, tels que, β étant un nombre fixe quelconque, on ait

$$\lim_{\alpha=\infty} \frac{M_\alpha^{(\beta)}}{A_\alpha} = 0. \tag{6}$$

Nous désignerons par

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{7}$$

une série *divergente* à termes positifs décroissants, telle que la série

$$u = u_0 + u_1 + \frac{u_2}{2} + \ldots + \frac{u_n}{n} + \ldots$$

soit convergente; on peut, par exemple, pour fixer les idées, supposer $u_0 = 1$, $u_n = \frac{1}{n}$.

Cela posé, prenons dans la série (7) un nombre de termes suffisant pour avoir une somme supérieure ou égale à A_0; comme nous pouvons augmenter les A sans que la condition (6) cesse d'être vérifiée, nous pourrons supposer que l'on a

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_{r_0} = A_0.$$

Cela étant, définissons les fonctions χ par les égalités

$$\begin{aligned}
\chi_0(y) &= u_0 \frac{f_0(y)}{A_0},\\
\chi_1(y) &= u_1 \frac{f_0(y)}{A_0},\\
\chi_2(y) &= u_2 \frac{f_0(y)}{A_0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\chi_{r_0}(y) &= u_{r_0} \frac{f_0(y)}{A_0};
\end{aligned}$$

nous aurons manifestement

$$\chi_0(y) + \chi_1(y) + \ldots + \chi_{r_0}(y) = f_0(y).$$

Les fonctions χ seront regardées par nous comme la première approximation des fonctions ψ de même indice; en remplaçant les ψ par les χ, jusqu'à l'indice r_0 inclusivement, la seconde des équations du système (5) deviendra

$$(r_0+1)\psi_{r_0+1}(y)+(r_0+2)\psi_{r_0+2}(y)+\ldots=g_1(y),$$

en posant

$$g_1(y)=f_1(y)-[\chi_1(y)+2\chi_2(y)+\ldots+r_0\chi_0(y)].$$

Nous désignerons par

$$N_1^{(0)},\quad N_1^{(1)},\quad \ldots,\quad N_1^{(\beta)},\quad \ldots$$

les limites supérieures respectives des valeurs absolues de

$$g_1(y),\quad g_1'(y),\quad \ldots,\quad g_1^{(\beta)}(y),\quad \ldots,$$

lorsque y est compris entre -1 et $+1$; on a évidemment

$$N_1^{(\beta)}<M_1^{(\beta)}+r_0M_0^{(\beta)},$$

nous poserons

$$B_1=A_1+2r_0A_0,$$

et nous aurons

$$\frac{N_1^{(\beta)}}{B_1}<\frac{M_1^{(\beta)}}{A_1}+\frac{1}{2}\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}.$$

Ayant ainsi défini le nombre B_1, nous pourrons, en l'augmentant s'il est nécessaire, prendre dans la série divergente (7) un certain nombre de termes, *à la suite de ceux qui ont déjà été pris*, tels que l'on ait

$$u_{r_0+1}+u_{r_0+2}+\ldots+u_{r_1}=B_1;$$

et nous définirons les fonctions χ, d'indice compris entre r_0 et r_1, par les égalités

$$\begin{aligned}
(r_0+1)\chi_{r_0+1}(y)&=u_{r_0+1}\frac{g_1(y)}{B_1},\\
(r_0+2)\chi_{r_0+2}(y)&=u_{r_0+2}\frac{g_1(y)}{B_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
r_1\qquad\chi_{r_1}(y)&=u_{r_1}\frac{g_1(y)}{B_1},
\end{aligned}$$

de telle manière que l'on a

$$\chi_1(y)+2\chi_2(y)+\ldots+r_1\chi_{r_1}(y)=f_1(y).$$

En remplaçant des ψ par les χ jusqu'à l'indice r_1, la troisième des équations (5) devient

$$r_1(r_1+1)\psi_{r_1+1}(y)+(r_1+1)(r_1+2)\psi_{r_1+2}(y)+\ldots=g_2(y);$$

en posant

$$g_2(y)=f_2(y)-[1.2\chi_2(y)+2.3\chi_3(y)+\ldots+(r_1-1)r_1\chi_{r_1}(y)].$$

Si nous désignons par $N_2^{(\beta)}$ le module maximum de $g_2(y)$, on a

$$N_2^{(\beta)}<M_2^{(\beta)}+r_1N_1^{(\beta)}+r_0^2M_0^{(\beta)};$$

et en posant

$$B_2=A_2+2^2r_1B_1+2^3r_0^2A_0,$$

on a

$$\frac{N_2^{(\beta)}}{B_2}<\frac{M_2^{(\beta)}}{A_2}+\frac{1}{2^2}\frac{N_1^{(\beta)}}{B_1}+\frac{1}{2^3}\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}$$
$$<\frac{M_2^{(\beta)}}{A_2}+\frac{1}{2^2}\left(\frac{M_1^{(\beta)}}{A_1}+\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}\right).$$

Nous aurons, en continuant de même,

$$N_3^{(\beta)}<M_3^{(\beta)}+r_2N_2^{(\beta)}+r_1^2N_1^{(\beta)}+r_0^3M_0^{(\beta)},$$

et nous poserons

$$B_3=A_3+2^3r_2B_2+2^4r_1^2B_1+2^5r_0^3A_0,$$

de sorte que l'on aura

$$\frac{N_3^{(\beta)}}{B_3}<\frac{M_3^{(\beta)}}{A_3}+\frac{1}{2^3}\left[\frac{M_2^{(\beta)}}{A_2}+\frac{1}{2^2}\left(\frac{M_1^{(\beta)}}{A_1}+\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2^4}\left(\frac{M_1^{(\beta)}}{A_1}+\frac{1}{2}\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}\right)+\frac{1}{2^5}\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}$$

ou bien

$$\frac{N_3^{(\beta)}}{B_3}<\frac{M_3^{(\beta)}}{A_3}+\frac{1}{2^3}\left(\frac{M_2^{(\beta)}}{A_2}+\frac{M_1^{(\beta)}}{A_1}+\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}\right).$$

D'une manière générale, on pourra choisir les B, de sorte que l'on ait

$$\frac{N_\alpha^{(\beta)}}{B_\alpha}<\frac{M_\alpha^{(\beta)}}{A_\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\left(\frac{M_{\alpha-1}^{(\beta)}}{A_{\alpha-1}}+\frac{M_{\alpha-2}^{(\beta)}}{A_{\alpha-2}}+\ldots+\frac{M_0^{(\beta)}}{A_0}\right),$$

et l'on en conclut aisément, d'après (6), que, quel que soit le nombre fixe β, on a

$$\lim_{\alpha=\infty} \frac{N_\alpha^\beta}{B_\alpha} = 0. \tag{8}$$

D'ailleurs les nombres r_i étant définis par les relations

$$u_{r_{i-1}+1} + u_{r_{i-1}+2} + \ldots + u_{r_i} = B_i,$$

on a, α étant compris entre r_{i-1} et r_i,

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)\,\chi_\alpha(y) = u_\alpha \frac{g_i(y)}{B_i}; \tag{9}$$

la fonction $g_i(y)$ étant définie par l'égalité

$$g_i(y) = f_i(y) - \sum_{j=i}^{j=r_{i-1}} \frac{j!}{(j-i)!}\chi_j(y),$$

de sorte que, d'après (9),

$$\sum_{\alpha=i}^{\alpha=r_i} \frac{\alpha!}{(\alpha-i)!}\chi_\alpha(y) = f_i(y); \tag{10}$$

d'ailleurs $N_\alpha^{(\beta)}$ désigne le maximum de la valeur absolue de $g_\alpha^{(\beta)}(y)$. On conclut de l'égalité (9) que l'on a

$$|\chi_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{u_\alpha}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)} \frac{N_i^{(\beta)}}{B_i} \qquad (r_{i-1} < \alpha \leqq r_i).$$

D'après la condition (8), on peut trouver un nombre C_β supérieur à chacune des expressions

$$\frac{\alpha^i}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)} \frac{N_i^{(\beta)}}{B_i},$$

car lorsque α et i augmentent indéfiniment, β étant fixe, cette expression tend vers zéro [1]. On en conclut que l'on a

$$|\chi_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{C_\beta u_\alpha}{\alpha^i} \qquad (r_{i-1} < \alpha \leqq r_i)$$

---

[1] Comme on peut augmenter les B, on a pu toujours s'arranger pour que r_i croisse très rapidement lorsque i croît; par exemple, $r_i > e^i$; on a $r_{i-1} < \alpha < r_i$, et l'on en conclut $\lim\limits_{=\infty} \frac{\alpha^i}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-i+1)} = 1$.

quel que soit y dans l'intervalle $-1, +1$. D'ailleurs, en désignant par p un nombre fixe, les α inférieurs à r_p sont en nombre limité; on en conclut que l'on peut déterminer une constante $C_{\beta p}$ telle que l'on ait, quel que soit α,

$$|\chi_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{C_{\beta p}}{\alpha^p} u_\alpha.$$

On en conclut que la série

$$\chi(z, y) = \Sigma \chi_n(y) z^n$$

est, ainsi que chacune de ses dérivées partielles, par rapport à y et z, absolument et uniformément convergente sous les conditions

$$-1 < y < 1, \qquad |z| < 1;$$

y est nécessairement réel; z pourrait être imaginaire.

Nous poserons

$$\psi(z, y) = \chi(z, y) + \theta(z, y),$$

et nous allons chercher les dérivées partielles de θ par rapport à z pour $z = 1$; posons

$$\begin{aligned} \theta(1, y) &= \theta_0(y), \\ D_z[\theta(z, y)]_{z=1} &= \theta_1(y), \\ D_z^2[\theta(z, y)]_{z=1} &= \theta_2(y), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous avons, par hypothèse,

$$D_z^i[\psi(z, y)]_{z=1} = f_i(y).$$

D'autre part, d'après l'équation (10), on a

$$D_z^i[\chi(z, y)]_{z=1} = f_i(y) - \sum_{\alpha=r_i+1}^{\alpha=\infty} \frac{\alpha!}{(\alpha-i)!}\chi_\alpha(y),$$

on en conclut

$$\theta_i(y) = -\sum_{\alpha=r_i+1}^{\alpha=\infty} \frac{\alpha!}{(\alpha-i)!}\chi_\alpha(y).$$

Or, α étant supérieur à r_i, nous avons

$$|\chi_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{C_\beta u_\alpha}{\alpha^{i+1}}$$

et, par suite,

$$|\theta_i^{(\beta)}(y)| < C_\beta \sum_{r_i+1}^{\infty} \frac{u_\alpha}{\alpha} < C_\beta u.$$

Posons maintenant

$$\theta(z, y) = \sum_0^\infty \frac{\theta_i(y)}{i!}(z-1)^i.$$

Il résulte des inégalités précédentes que cette fonction est une fonction de z holomorphe dans tout le plan, ainsi que chacune de ses dérivées par rapport à y; d'ailleurs, ses dérivées par rapport à z, pour $z = 1$, sont précisément les fonctions $\theta_i(y)$. Ordonnons cette fonction suivant les puissances de z

$$\theta(z, y) = \eta_0(y) + \eta_1(y) z + \eta_2(y) z^2 + \ldots.$$

Il est manifeste que la valeur absolue de $\eta_\alpha^{(\beta)}(y)$ est inférieure au coefficient de z^α dans le développement, suivant les puissances de z, de la fonction

$$\sum_0^\infty \frac{C_\beta u}{i!}(z+1)^i = C_\beta u e^{z+1},$$

c'est-à-dire à $\frac{C_\beta u e}{\alpha!}$. On en conclut que, en posant

$$\psi_\alpha(y) = \chi_\alpha(y) + \eta_\alpha(y),$$

on peut déterminer des constantes $D_{\beta p}$ telles que l'on ait, quel que soit α,

$$|\psi_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{D_{\beta p}}{\alpha^p}.$$

On a d'ailleurs

$$\psi(z, y) = \chi(z, y) + \theta(z, y) = \sum_0^\infty \psi_\alpha(y) z^\alpha,$$

et les fonctions ψ_α satisfont aux équations (5), qui sont ainsi complètement résolues.

Nous avions posé

$$\varphi(x, y) = \psi_1(x^2, y) + x\,\psi_2(x^2, y).$$

On en conclut aisément que, si l'on a

$$\varphi(x, y) = \Sigma\, \varphi_\alpha(y)\, x^n,$$

il existe des constantes $H_{\beta p}$ vérifiant les inégalités

$$(11) \qquad |\varphi_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{H_{\beta p}}{\alpha^p},$$

car des constantes analogues existent pour les fonctions $\psi_1(z, y)$ et $\psi_2(z, y)$ et la difficulté résultant de ce que les exposants de x ne sont pas les mêmes que les exposants de z se lève aisément grâce à l'arbitraire de p.

Ces inégalités (11) sont pour nous fondamentales; rappelons que la fonction $\varphi(x, y)$ satisfait aux relations

$$D_x^\alpha[f(x, y) - \varphi(x, y)]_{x=1} = D_x^\alpha[f(x, y) - \varphi(x, y)]_{x=-1}.$$

Posons maintenant

$$f(x, y) - \varphi(x, y) = \varpi(x, y)$$

et ensuite

$$\lambda_\alpha(y) = \int_{-1}^{+1} \varpi(x, y) \cos \pi\alpha x\, dx,$$

$$\mu_\alpha(y) = \int_{-1}^{+1} \varpi(x, y) \sin \pi\alpha x\, dx,$$

le nombre entier α prenant toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'infini.

Désignons par $\varpi_{p\beta}$ la dérivée partielle de $\varpi(x, y)$ prise p fois par rapport à x et β fois par rapport à y; si l'on remarque que $\varpi_{p\beta}$ se réduit pour $x = +1$ et $x = -1$ à la même fonction de y, on obtient aisément, en intégrant par parties p fois de suite,

$$\lambda_\alpha^{(\beta)}(y) = \frac{1}{\alpha^p \pi^p} \int_{-1}^{+1} \varpi_{p\beta}(x, y) \cos \pi\left(\alpha x - \frac{p}{2}\right) dx.$$

Il résulte, d'autre part, des hypothèses et des calculs déjà faits, que l'on a

$$\left|\frac{2}{\pi^p}\varpi_{p\beta}(x,y)\right| < \mathrm{K}_{\beta p};$$

on en conclut

$$(12)\qquad |\lambda_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{\mathrm{K}_{\beta p}}{\alpha^p},$$

et de même

$$(13)\qquad |\mu_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{\mathrm{K}_{\beta p}}{\alpha^p}.$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$\begin{aligned}\varpi(x,y) = \tfrac{1}{2}\lambda_0(y) &+ \lambda_1(y)\cos\pi x + \mu_1(y)\sin\pi x + \ldots\\ &+ \lambda_\alpha(y)\cos\pi\alpha x + \mu_\alpha(y)\sin\pi\alpha x + \ldots,\end{aligned}$$

et en réunissant $\frac{1}{2}\lambda_0(y)$ à $\varphi_0(y)$, on peut écrire

$$f(x,y) = \varphi_0(y) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\lambda_\alpha(y)\cos\pi\alpha x + \mu_\alpha(y)\sin\pi\alpha x + \varphi_\alpha(y)x^\alpha,$$

les fonctions λ_α, μ_α, φ_α satisfaisant aux inégalités (11), (12), (13), grâce auxquelles on peut affirmer que la série est absolument et uniformément convergente, ainsi que chacune de ses dérivées partielles par rapport à y, sous les conditions

$$-1 \leqq x \leqq 1, \qquad -1 \leqq y \leqq 1.$$

Nous allons montrer maintenant que l'on peut développer chacune des fonctions $\varphi_\alpha(y)$ en une série de la forme

$$(14)\qquad \varphi_\alpha(y) = \mathrm{C}_{\alpha 0} + \sum_1^\infty{}_\beta(\mathrm{A}_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y + \mathrm{B}_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y + \mathrm{C}_{\alpha\beta}y^\beta),$$

les constantes A, B, C satisfaisant à la condition suivante : à chaque couple de nombres entiers p, q correspond un nombre m_{pq} tel que l'on ait, quels que soient α et β,

$$(15)\qquad |\alpha^p\beta^q\mathrm{A}_{\alpha\beta}| < m_{pq}, \qquad |\alpha^p\beta^q\mathrm{B}_{\alpha\beta} < m_{pq}, \qquad |\alpha^p\beta^q\mathrm{C}_{\alpha\beta}| < m_{pq}.$$

D'ailleurs, les fonctions λ_α et μ_α satisfaisant aux mêmes inégalités que les φ_α, la même démonstration prouvera que l'on peut poser

$$\lambda_\alpha(y) = C'_{\alpha 0} + \sum_1^\infty A'_{\alpha\beta} \cos \pi\beta y + B'_{\alpha\beta} \sin \pi\beta y + C'_{\alpha\beta} y^\beta,$$

$$\mu_\alpha(y) = C''_{\alpha 0} + \sum_1^\infty{}^\beta A''_{\alpha\beta} \cos \pi\beta y + B''_{\alpha\beta} \sin \pi\beta y + C''_{\alpha\beta} y^\beta,$$

les A′, B′, C′, A″, B″, C″ satisfaisant aux mêmes inégalités que les A, B, C.

Il en résultera que la série double, obtenue en remplaçant les φ_α, λ_α, μ_α par leurs développements dans l'expression de $f(x, y)$, sera absolument et uniformément convergente, ainsi que chacune de ses dérivées partielles par rapport à x et y.

Tout revient à démontrer la possibilité des développements (14), satisfaisant aux conditions (15), en se servant des inégalités (11), que nous récrivons

$$(11) \qquad |\varphi_\alpha^{(\beta)}(y)| < \frac{H_{\beta,p}}{\alpha^p}.$$

Nous poserons

$$\varphi_\alpha(y) = \psi_\alpha(y^2) + y\chi_\alpha(y^2) + \varpi_\alpha(y);$$

et, supposant que $\varpi_\alpha(y)$ a des dérivées égales pour $y = +1$ et $y = -1$, nous déterminerons les valeurs des dérivées des fonctions $\psi_\alpha(z)$ et $\chi_\alpha(z)$ pour $z = 1$; nous aurons évidemment

$$|\psi_\alpha^{(\beta)}(1)| < \frac{M_{\beta,p}}{\alpha^p},$$

les constantes M se déduisant par des relations simples des constantes H.

Quelles que soient ces constantes M, nous pourrons trouver une suite

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_\beta, \quad \ldots$$

de nombres croissants, tels que l'on ait, quel que soit le nombre fixe p,

$$\lim_{\beta=\infty} \frac{M_{\beta,p}}{A_\beta} = 0.$$

Ce point étant acquis, posons

$$\psi_\alpha^{(\beta)}(1) = f_{\alpha\beta}$$

et

$$\psi_\alpha(z) = a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1} z + a_{\alpha 2} z^2 + \ldots + a_{\alpha\beta} z^\beta + \ldots;$$

nous devrons avoir

$$\begin{aligned} a_{\alpha 0} + a_{\alpha 1} + \quad a_{\alpha 2} + \quad a_{\alpha 3} + \ldots &= f_{\alpha 0}, \\ a_{\alpha 1} + \quad 2 a_{\alpha 2} + \quad 3 a_{\alpha 3} + \ldots &= f_{\alpha 1}, \\ 1.2 a_{\alpha 2} + 2.3 a_{\alpha 3} + \ldots &= f_{\alpha 3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Prenons la série divergente des u, dont il a été déjà fait usage, et soit

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{r_0} = A_0.$$

Nous prendrons, β étant inférieur ou égal à r_0,

$$a_{\alpha\beta} = u_\beta \frac{f_{\alpha 0}}{A_0};$$

nous poserons ensuite

$$g_{\alpha 1} = f_{\alpha 1} - (a_{\alpha 1} + 2 a_{\alpha 2} + \ldots + r_0 a_{\alpha r_0}),$$

et nous aurons

$$|g_{\alpha 1}| < \frac{1}{\alpha^p} (M_{1p} + r_0 M_{0p});$$

nous prendrons

$$B_1 = A_1 + 2 r_0 A_0,$$

et nous procéderons de la même manière que plus haut (pages 83-84); nous aurons, β étant compris entre r_{q-1} et r_q,

$$a_{\alpha\beta} = \frac{u_\beta}{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-q+1)} \frac{g_{\alpha q}}{B_q}$$

et

$$\frac{|g_{\alpha q}|}{B_q} < \frac{1}{\alpha^p}\left[\frac{M_{qp}}{A_q} + \frac{1}{2^q}\left(\frac{M_{q-1,p}}{A_{q-1}} + \frac{M_{q-2,p}}{A_{q-2}} + \ldots + \frac{M_{0,p}}{A_0}\right)\right].$$

Or $\frac{M_{qp}}{A_q}$ tend vers zéro lorsque q augmente indéfiniment, quelle que soit la valeur fixe de p; on en conclut que l'on a

$$\frac{|g_{\alpha q}|}{B_q} < \frac{N_p}{\alpha^p},$$

N_p étant une constante qui ne dépend que de p.

D'ailleurs r_q est une fonction croissante de q, *qui ne dépend pas de* α, puisque les r_q sont définis uniquement à l'aide des constantes A_β et de la série u.

On en conclut que, sous la seule condition $\beta > r_{q-1}$, on a

$$\alpha^p \beta^q a_{\alpha\beta} < u_\beta \frac{\beta^q}{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-q+1)} N_p < R_p u_\beta < R_p u,$$

R_p étant une constante. D'ailleurs les valeurs de β, inférieures à r_q, sont en nombre limité (car r_q ne dépend pas de α) et, pour chacune d'elles, on a

$$a_{\alpha\beta} < u_\beta \frac{N_p}{\alpha^p}$$

et, par suite,

$$\alpha^p \beta^q a_{\alpha\beta} < u_p N_p \beta^q < u_p N_p r_q^q.$$

En prenant $R_{p,q}$ égal au plus grand des nombres R_p et $u N_p r_q^q$, on a

$$|\alpha^p \beta^q a_{\alpha\beta}| < R_{p,q}.$$

Les constantes $a_{\alpha\beta}$ ainsi calculées nous définissent des fonctions

$$\eta_\alpha(z) = \Sigma a_{\alpha\beta} z^\beta;$$

nous poserons

$$\psi_\alpha(z) = \eta_\alpha(z) + \theta_\alpha(z);$$

et nous allons chercher les valeurs des dérivées successives de $\theta_\alpha(z)$ pour $z = 1$; on a

$$\eta_\alpha^{(\beta)}(1) = \sum_\beta^\infty {}_i \frac{i!}{(i-\beta)!} a_{\alpha i}.$$

D'autre part, d'après la manière dont on a calculé les a, on a

$$\sum_{i=\beta}^{i=r_\beta} \frac{i!}{(i-\beta)!} a_{\alpha i} = f_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{(\beta)}(1).$$

On en conclut

$$\theta_\alpha^{(\beta)}(1) = -\sum_{r_\beta+1}^{\infty}{}_i \frac{i!}{(i-\beta)!} a_{\alpha i}.$$

Or, i étant supérieur à r_β, on a

$$\alpha^p i^{\beta+1} a_{\alpha i} < \mathrm{R}_p u_i$$

et, par suite,

$$|\theta_\alpha^{(\beta)}(1)| < \frac{\mathrm{R}_p}{\alpha^p} \sum_{r_\beta+1}^{\infty}{}_i \frac{u_i}{i} < \frac{\mathrm{R}_p u}{\alpha^p}.$$

Donc si l'on développe, suivant les puissances de z, l'expression

$$\theta_\alpha(z) = \sum_0^{\infty}{}_\beta \frac{\theta_\alpha^{(\beta)}(1)}{\beta!}(z-1)^\beta,$$

on verra, comme plus haut (page 87), que le coefficient $b_{\alpha\beta}$ de z^β est inférieur à $\frac{\mathrm{R}_p u.e}{\alpha^p \beta!}$, et par suite, quel que soit le nombre fixe q, on pourra déterminer R_{pq} de manière qu'il soit inférieur à $\frac{\mathrm{R}_{pq}}{\alpha^p \beta^q}$, puisque les valeurs de β telles que $\beta! < \beta^q$ sont en nombre limité. En posant

$$\psi_\alpha(z) = \eta_\alpha(z) + \theta_\alpha(z) = \sum_0^{\infty}{}_\beta (a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta}) z^\beta,$$

les coefficients de $\psi_\alpha(z)$ vérifieront des inégalités analogues; on procédera de même pour les fonctions χ_α, et, en prenant

$$\varphi_\alpha(y) - \varpi_\alpha(y) = \psi_\alpha(y^2) + y\chi_\alpha(y^2) = \sum_0^{\infty}{}_\beta \mathrm{C}_{\alpha\beta} y^\beta,$$

les constantes $\mathrm{C}_{\alpha\beta}$ satisferont bien aux inégalités (15).

Les fonctions

$$\varpi_\alpha(y) = \varphi_\alpha(y) - \sum_0^{\infty}{}_\beta \mathrm{C}_{\alpha\beta} y^\beta$$

ont des dérivées égales pour $y = +1$ et $y = -1$; je dis de plus qu'elles satisfont à des inégalités analogues aux inégalités (11); cela est manifeste, car il en est ainsi des fonctions $\varphi_\alpha(y)$ et de plus des fonctions $\mu_\alpha(y)=\sum_1^\infty{}^\beta \mathrm{C}_{\alpha\beta}y^\beta$, grâce aux inégalités que vérifient les $\mathrm{C}_{\alpha\beta}$.

On a donc

$$|2\varpi_\alpha^{(\beta)}(y)|<\frac{\mathrm{K}_{\beta p}}{\alpha^p}.$$

Dès lors, si l'on pose

$$\varpi_\alpha(y)=\Sigma\,\mathrm{A}_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y+\mathrm{B}_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y,$$

on a, par exemple,

$$\mathrm{A}_{\alpha\beta}=\int_{-1}^{+1}\varpi_\alpha(y)\cos\pi\beta y\,dy=\int_{-1}^{+1}\frac{\varpi_\alpha^{(q)}(y)}{\beta^q}\cos\pi\left(\beta y-\frac{q}{2}\right)dy<\frac{\mathrm{K}_{qp}}{\alpha^p\beta^q}.$$

Notre démonstration est donc complète et nous pouvons affirmer que *toute fonction des deux variables x et y ayant des dérivées partielles de tous les ordres sous les conditions*

$$-1\leqq x\leqq+1,\qquad -1\leqq y\leqq+1$$

peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned}f(x,y)=\sum_\alpha\sum_\beta&(\mathrm{A}_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y+\mathrm{B}_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y+\mathrm{C}_{\alpha\beta}y^\beta)x^\alpha\\&+(\mathrm{A}'_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y+\mathrm{B}'_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y+\mathrm{C}'_{\alpha\beta}y^\beta)\cos\pi\alpha x\\&+(\mathrm{A}''_{\alpha\beta}\cos\pi\beta y+\mathrm{B}''_{\alpha\beta}\sin\pi\beta y+\mathrm{C}''_{\alpha\beta}y^\beta)\sin\pi\alpha x,\end{aligned}$$

les constantes $\mathrm{A}_{\alpha\beta}$, ..., $\mathrm{C}''_{\alpha\beta}$ *étant telles que l'on ait, pour toutes les valeurs de p et de q,*

$$|\alpha^p\beta^q\mathrm{A}_{\alpha\beta}|<m_{pq},\qquad\ldots,\qquad|\alpha^p\beta^q\mathrm{C}''_{\alpha\beta}|<m_{pq},$$

les nombres m_{pq} ne dépendant pas de α ni de β.

Il semble que l'extension, par nos méthodes, de ce théorème aux fonctions de plus de deux variables réelles, ne présenterait d'autre difficulté que des longueurs de rédaction; il serait désirable, et nous le souhaitons vivement, qu'un analyste plus habile que nous trouve une démonstration rendant intuitives ces propositions si simples dans leur énoncé.