Annales scientifiques de l'É.N.S.

Hermann Minkowski

Généralisation de la théorie des fractions continues

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 13 (1896), p. 41-60

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1896_3_13__41_0>

GÉNÉRALISATION
DE LA
THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES,

PAR M. HERMANN MINKOWSKI,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE KOENIGSBERG.

Traduit par M. Léonce LAUGEL.

L'étude des théorèmes donnés par M. Hermite dans les Tomes XL, XLI, XLVII du *Journal de Crelle* m'a conduit à quelques généralisations de la Théorie des fractions continues, que j'exposerai brièvement comme il suit.

I.

Je m'occuperai en premier lieu de l'approximation avec laquelle on peut évaluer une *grandeur réelle unique* à l'aide de fractions rationnelles.

Soit Ω une quantité quelconque $\geqq 1$ qui peut aussi être égale à $+\infty$; il ne faut pas qu'elle soit un nombre entier. Pour une grandeur réelle a, qui n'est ni un nombre entier ni la moitié d'un nombre entier, on peut déterminer une suite de nombres entiers

$$p_n, \quad q_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

de la manière suivante :

En premier lieu, soient $p_0 = 1$, $q_0 = 0$; soit f_0 le nombre entier le plus rapproché de a, et $p_1 = f_0$, $q_1 = 1$. Désignons ensuite, pour $n \geqq 1$ et tant que $p_n - aq_n \gtrless 0$, par ε_n le signe de $\dfrac{p_{n-1} - aq_{n-1}}{p_n - aq_n}$, quotient dont la valeur absolue sera désignée par $e_n + r_n$, e_n étant un nombre entier et r_n satisfaisant à la condition $0 \leqq r_n < 1$; posons ensuite $s_n = e_n - \varepsilon_n \frac{q_{n-1}}{q_n}$ et posons, lorsque $r_n = 0$, $f_n = e_n$, mais lorsque $r_n > 0$,

$$f_n = \left\{ \begin{array}{c} e_n \\ \text{ou bien} \\ e_n + 1, \end{array} \right.$$

suivant que l'on a

$$\text{(A)} \qquad \frac{(s_n+1)^\Omega - 1}{1-(1-r_n)^\Omega} \quad \begin{array}{c} > \\ \text{ou bien} \\ \leqq \end{array} \quad \frac{s_n^\Omega - 1}{1 - r_n^\Omega},$$

et enfin

$$p_{n+1} = f_n p_n - \varepsilon_n p_{n-1},$$
$$q_{n+1} = f_n q_n - \varepsilon_n q_{n-1}.$$

Ceci posé, on aura

$$\frac{p_n}{q_n} = f_0 - \cfrac{\varepsilon_1}{f_1 - \ddots \, f_{n-2} - \cfrac{\varepsilon_{n-1}}{f_{n-1}}}$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Je dis alors que la suite des nombres p_n, q_n jouit des propriétés suivantes :

1° Lorsque a est rationnel, cette série prend fin à un indice ν pour lequel on a

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = a.$$

2° L'on a

$$0 < q_1 < q_2 < \ldots.$$

3° Les nombres p_n, q_n sont toujours premiers entre eux et l'on a

$$p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = \delta_n = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n.$$

4° Si l'on pose $t_0 = \infty$ et pour $n \geqq 1$

$$|p_{n-1} - a q_{n-1}|^\Omega + t_n q_{n-1}^\Omega = |p_n - a q_n|^\Omega + t_n q_n^\Omega = T_n,$$

t_0, t_1, t_2, ... et T_1, T_2, ... sont des suites de nombres toujours décroissants et qui convergent vers zéro, lorsque a est irrationnel. De plus, on aura

$$T_n \leqq \frac{\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\Omega}\right)\right]^{\frac{\Omega}{2}}}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\Omega}\right)\right]^{\Omega}} \sqrt{t_n}.$$

Si a est rationnel, on posera encore

$$t_{\nu+1} = 0.$$

5° Si l'on désigne par t une grandeur quelconque positive qui ne fait pas partie de la suite $t_0, t_1, t_2, \ldots$, et si $t_n > t > t_{n+1}$, et si l'on désigne encore par x, y un système de nombres entiers différents de $0, 0$, de p_n, q_n et de $-p_n, -q_n$, on a toujours

$$|x - ay|^{\Omega} + t\,|y|^{\Omega} > |p_n - aq_n|^{\Omega} + t\,|q_n|^{\Omega}.$$

6° Lorsque a est irrationnel et racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, il existe un indice l et un nombre μ tels que, à partir de $n = l$, on aura toujours

$$f_n = f_{n+\mu}, \qquad \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1+\mu}.$$

De ces propositions les cas suivants sont les plus remarquables :

1 : $\Omega = \infty$. — Pour $n \geqq 1$, on aura toujours

$$f_n = e_n, \qquad \varepsilon_{n+1} = -1,$$

et les quotients $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ sont les réduites du développement ordinaire de a en fraction continue, seulement la première de ces réduites ne s'y trouve pas lorsque l'excès de a sur le plus grand nombre entier contenu dans a est $> \frac{1}{2}$.

2 : $\Omega = 2$. — Les inégalités (A) prendront ici la forme

$$\frac{1}{r_n} \quad \begin{matrix} > \\ \text{ou bien} \\ \leqq \end{matrix} \quad \frac{2s_n + 1}{s_n + 2},$$

et alors, en vertu de la propriété 5°, on rencontre un développement en fraction continue qui s'est présenté à M. Hermite, à la page 195, Tome XLI, du *Journal de Crelle*.

3 : $\Omega = 1$. — Les inégalités (A) deviennent

$$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{s_n} \quad \left.\begin{array}{c} > \\ \text{ou bien} \\ = \end{array}\right\} \quad 2.$$

On a alors

$$\mathrm{T}_n \leqq \sqrt{2 t_n}.$$

Ici le signe *égal* ne peut se présenter que lorsque a est de la forme $\frac{2\mathrm{PQ} \mp 1}{2\mathrm{Q}^2}$, $(\mathrm{Q} > 0)$, P, Q étant des nombres entiers sans diviseur commun, et alors l'égalité $\mathrm{T}_n = \sqrt{2 t_n}$ n'a lieu que pour un seul indice n tel que $t_n = \frac{1}{2\mathrm{Q}^2}$ et $q_{n-1} < \mathrm{Q} < q_n$.

On reconnaît donc que l'on aura toujours

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - a\right| < \frac{1}{2 q_n^2}.$$

Si b désigne encore une grandeur réelle quelconque, il existera au moins un système de nombres entiers X, Y, défini par

$$\mathrm{X} - 1 < \frac{q_n b}{\delta_{n-1}} < \mathrm{X} + 1,$$
$$\mathrm{Y} - 1 < \frac{-q_{n-1} b}{\delta_{n-1}} < \mathrm{Y} + 1,$$

pour lequel le second système

$$x = p_{n-1}\mathrm{X} + p_n\mathrm{Y},$$
$$y = q_{n-1}\mathrm{X} + q_n\mathrm{Y}$$

satisfait à l'inégalité

$$|x - ay - b| + t_n |y| < \sqrt{t_n}.$$

Lorsque aucune des équations $x - ay = 0$, $x - b = 0$, $x - ay - b = 0$ n'est résoluble en nombres entiers x, y, il existe donc une infinité de nombres entiers différents x, y, pour lesquels on a

$$y \gtrless 0, \qquad |x - ay - b| < \frac{1}{4|y|}.$$

M. Hermite a énoncé ce théorème à la page 15 du tome LXXXVIII du *Journal de Crelle,* en donnant pour la limite la valeur numérique moins précise $\sqrt{\frac{2}{27}}$, au lieu de $\frac{1}{4}$.

II.

Je vais maintenant considérer l'expression suivante

$$\varphi = \left|\frac{\xi}{\rho}\right|^{\Omega} + \left|\frac{\eta}{\sigma}\right|^{\Omega} + \left|\frac{\zeta}{\tau}\right|^{\Omega},$$

où ξ, η, ζ sont trois formes linéaires à trois variables x, y, z, à coefficients tous réels et à déterminant Δ différent de zéro, ρ, σ, τ désignant des paramètres positifs. Comme on peut tout aussi bien envisager le système $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$, supposons $\Delta > 0$. Relativement à cette expression φ, on peut faire l'application des mêmes principes qui m'ont conduit aux propositions que j'ai énoncées au § I.

Interprétons x, y, z comme les coordonnées cartésiennes (par exemple rectangulaires) des points de l'espace. La condition $\varphi \leqq 1$, tant que Ω a une valeur $\geqq 1$, définit chaque fois un corps *convexe;* par exemple, pour $\Omega = 1$, un *octaèdre;* pour $\Omega = 2$, un *ellipsoïde;* pour $\Omega = \infty$, un *parallélépipède,* dont la surface d'encadrement est formée par les six plans

$$\xi = \pm\rho, \qquad \eta = \pm\sigma, \qquad \zeta = \pm\tau.$$

Ce parallélépipède, je le nommerai pour abréger *un* (ρ, σ, τ), et les trois couples de plans qui en forment l'encadrement seront dits ses $\xi-$, $\eta-$, $\zeta-$ faces.

Dans le § I précédent le développement ordinaire en fraction continue se présentait précisément pour $\Omega = \infty$.

Je vais donc, dans ce qui suit, m'en tenir à ce cas.

1. Le système de tous les points x, y, z, dont les coordonnées sont des nombres entiers, je le nommerai un *réseau,* et chacun de ses points sera dit un point du réseau. Une substitution

$$x = -x^{\star}, \qquad y = -y^{\star}, \qquad z = -z^{\star}$$

transforme le réseau en lui-même, et produit le même effet sur chaque (ρ, σ, τ). Je dirai qu'un (ρ, σ, τ) est *libre*, lorsque dans son *intérieur* il n'admet aucun point du réseau, outre l'origine. Un (ρ, σ, τ) libre, qui perd cette propriété dans tous les cas où l'un de ses paramètres éprouve une augmentation si petite qu'elle soit, sera dit un parallélépipède *extrême* pour ξ, η, ζ. Il faut, par conséquent, qu'un parallélépipède extrême admette au moins un point du réseau sur chacune des faces et non situé sur les arêtes.

En vertu d'un théorème que j'ai énoncé, pour la première fois, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, janvier 1893 (Lettre à M. Hermite), dans un (ρ, σ, τ) libre, on a toujours

$$\rho\sigma\tau \leqq \Delta,$$

c'est-à-dire qu'un (ρ, σ, τ), pour lequel $\rho\sigma\tau = \Delta$, doit toujours contenir, outre l'origine, d'autres points du réseau ou bien compris à l'intérieur ou bien situés sur les limites formées par l'encadrement de ce parallélépipède. Ces circonstances nous permettent de trouver un (ρ, σ, τ) extrême.

2. Je désignerai, dans ce qui suit, une substitution linéaire par la notation qui consiste, sans écrire les variables, à indiquer simplement le système quadratique de ses coefficients; les lignes horizontales correspondent ainsi à chaque équation, et l'on entendra de même, par cette notation, un système de formes linéaires, aussi bien qu'une substitution linéaire.

Pour éviter quelques complications dont la discussion exigerait plus de place, mais ne présenterait aucune difficulté, je supposerai dorénavant qu'*aucune des trois formes* ξ, η, ζ *ne s'annule pour des valeurs entières de* x, y, z *autres que* $0, 0, 0$.

Nous pouvons alors énoncer les propositions suivantes :

Lorsque (a, g, l) *est un parallélépipède extrême pour* ξ, η, ζ, *on aura toujours*

$$agl < \Delta; \tag{1}$$

(a, g, l) *contient exactement un point du réseau sur chaque face et ces* *points du réseau ont des coordonnées égales et de signes contraires pour les faces à l'opposite les unes des autres.*

On peut alors, et cela d'une seule manière, trouver trois points du réseau

$$r,\quad s,\quad t;\qquad r',\quad s',\quad t';\qquad r'',\quad s'',\quad t''$$

sur trois faces non opposées

$$\xi = \varepsilon a,\qquad \eta = \varepsilon' g,\qquad \zeta = \varepsilon'' l,$$

tels que

$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' = +1$$

et tels que, lorsque le système $\varepsilon\xi$, $\varepsilon'\eta$, $\varepsilon''\zeta$ *est transformé par l'effet de*

$$P = \begin{vmatrix} r & r' & r'' \\ s & s' & s'' \\ t & t' & t'' \end{vmatrix} \qquad en \qquad \Phi = \begin{vmatrix} a & \pm b & \pm c \\ \pm f & g & \pm h \\ \pm j & \pm k & l \end{vmatrix},$$

les grandeurs a, b, c, f, g, h, j, k, l *soient toutes positives, leurs signes étant représentés par un des six systèmes suivants :*

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
+ + +	+ − −	+ − −	+ + −	+ − +	+ − −
− + −	+ + +	− + −	− + +	+ + −	− + −
− − +	− − +	+ + +	+ − +	− + +	− − +

Le déterminant de P *sera, dans les cas* I-V, *égal à* 1, *et dans le cas* VI *restant égal à zéro, et l'on aura*

$$(2)\qquad a > b,\quad a > c;\qquad g > h,\quad g > f;\qquad l > j,\quad l > k;$$

et de plus, dans les cas indiqués ci-dessous par leurs numéros d'ordre, on aura les conditions suivantes :

I.	II.	III.
$b + c > a$, $f > h$ ou $j > k$	$h + f > g$, $k > j$ ou $b > c$	$j + k > l$, $c > b$ ou $h > f$

IV.	V.	VI.
$b > c$ ou $h > f$ ou $j > k$	$c > b$ ou $f > h$ ou $k > j$	$b + c = a$, $h + f = g$, $j + k = l$.

Parmi les deux ou trois conditions qui sont séparées ci-dessus par le mot *ou*, une *au moins* a lieu chaque fois.

Je dirai que (a, g, l), dans les cas I-V, est de *première* espèce; dans le cas VI, de *deuxième* espèce. La substitution P qui, de son côté, détermine complètement (a, g, l), sera dite une substitution *appartenant* à ξ, η, ζ.

Lorsqu'une substitution P *à coefficients entiers, à déterminant* 1, *est de telle nature qu'elle transforme* $\varepsilon\xi$, $\varepsilon'\eta$, $\varepsilon''\zeta$, *les signes* ε, ε', ε'' *étant convenablement choisis, en un système* Φ *qui remplit une des conditions des cas* I-V *précédents, cette substitution* P *est toujours une substitution appartenant à* ξ, η, ζ.

3. Formons pour un (a, g, l) extrême les systèmes P et Φ. Si l'on a $b > c$, on trouve en (b, g, l) le point du réseau r', s', t' sur le *contour* d'une ξ — et d'une η — face et le point r'', s'', t'' à l'*intérieur* d'une ζ — face. Il faut alors que $\left(b, \frac{\Delta}{bl}, l\right)$, en vertu du théorème exprimé par l'équation (1), contienne un certain (b, g_1, l) extrême avec un paramètre $g_1 > g$, et ce dernier parallélépipède *sera, entre tous les* (a_0, g_0, l_0) *extrêmes possibles où* $g_0 \geqq g$, $l_0 \geqq l$ *et où l'on a* $a_0 < a$, *celui ayant le plus grand paramètre* a_0. Lorsque $b < c$, cette propriété se transporte à un certain (c, g, l_1), $(l_1 > l)$ extrême. Ce parallélépipède déterminé, dans l'un de ces cas (b, g_1, l), dans l'autre (c, g, l_1), je le nomme le ξ — *voisin* de (a, g, l). Et pour ce ξ — voisin, on peut encore former le ξ — voisin et ainsi de suite *ad inf.* On obtient évidemment de cette façon des parallélépipèdes extrêmes, tous différents entre eux.

D'une manière tout analogue, on peut définir un η — voisin et un ζ — voisin de (a, g, l); et (a, g, l) lui-même sera, selon que $b > c$ ou que $b < c$, le η — voisin ou bien le ζ — voisin de son ξ — voisin.

On peut maintenant démontrer le *théorème fondamental* suivant :

Si l'on prend pour point de départ un parallélépipède extrême pour ξ, η, ζ, *la formation successive de tous les voisins fournit alors la totalité des parallélépipèdes extrêmes qui existent pour* ξ, η, ζ.

Soient, en effet, deux parallélépipèdes extrêmes quelconques donnés (a, g, l) et (a_0, g_0, l_0); comme aucun d'eux ne peut être contenu dans l'autre, il existe en chacun d'eux au moins un paramètre plus grand que dans l'autre; supposons donc, par exemple, $a > a_0$, $g < g_0$, $l \leqq l_0$. Les deux parallélépipèdes ont alors en commun $\Pi = (a_0, g, l)$. On formera ensuite le système P pour (a, g, l); le point r', s', t', dont les coordonnées y forment la seconde colonne, ne peut être situé à l'intérieur de (a_0, g_0, l_0), et l'on a par suite $b \geqq a_0$. Maintenant, lorsque $b > c$ ou lorsque $b < c$ et en même temps $l < l_0$, le ξ — voisin de (a, g, l) qui est alors de la forme (b, g_1, l), $(g_1 > g)$ ou de la forme (c, g, l_1), $(l_1 > l)$ a en commun avec (a_0, g_0, l_0) un parallélépipède Π_1 *qui contient* Π *et se révèle comme plus grand que ce dernier.* Mais si $b < c$ et si, en même temps, on a $l = l_0$, le ξ — voisin de (a, g, l), qui alors est de forme (c, g, l_1), $(l_1 > l)$, a, il est vrai, seulement Π en commun avec (a_0, g_0, l_0), mais comme l'on a alors $c > a_0, g < g_0, l_1 > l_0$, il aura certainement, en suivant la méthode du cas précédent, en commun avec le η — voisin de (a_0, g_0, l_0), un parallélépipède Π_1 *qui contient* Π *et qui se révèle comme plus grand que ce dernier.* Les deux parallélépipèdes qui nous amènent en chacun des cas considérés au parallélépipède désigné par Π_1 peuvent maintenant être identiques; s'il en était autrement, on opérerait sur eux comme sur les deux dont nous sommes partis, et ainsi de suite. Or, en vertu de la proposition exprimée par la formule (1), chaque parallélépipède extrême qui contient Π doit être situé intérieurement à $\left(\frac{\Delta}{gl}, \frac{\Delta}{la_0}, \frac{\Delta}{a_0 g}\right)$; pour les trois paramètres de Π, Π_1, ..., on a par suite seulement à prendre en considération un nombre fini de valeurs, et une succession finie d'opérations telles qu'on vient de les décrire devra fournir une liaison complète entre (a, g, l) et (a_0, g_0, l_0) par l'entremise de voisins.

Ainsi tous les (a, g, l) extrêmes pour ξ, η, ζ forment une CHAINE *bien déterminée; à chaque terme s'accrochent pour ainsi dire ses trois voisins, et cette circonstance révèle une filiation bien précise entre tous les termes.*

Les voisins d'un (a, g, l) de deuxième espèce sont toujours tous les trois de première espèce, d'où l'on conclut qu'il y aura certainement des extrêmes de première espèce.

Pour former toute la chaîne des extrêmes appartenant à ξ, η, ζ, on prendra donc pour point de départ un terme de première espèce, et l'on n'a plus besoin alors que d'un *algorithme*, à l'aide duquel on passera d'un extrême de première espèce (a, g, l) à un voisin quelconque, et, dans le cas où ce dernier serait de deuxième espèce, d'un autre algorithme qui nous conduira directement aux voisins de ce voisin.

On formera les systèmes P et Φ pour (a, g, l), et soit alors

$$\begin{vmatrix} A & F & J \\ B & G & K \\ C & H & L \end{vmatrix}$$

le système adjoint de Φ, que l'on désignera symboliquement par $\Delta\Phi^{-1}$. Il suffira de considérer le ξ — voisin de (a, g, l), et cela, de plus, sous l'hypothèse $b > c$, car tous les cas possibles dérivent de ce cas à l'aide des permutations appropriées de ξ, η, ζ, en observant que dans Φ, non seulement les lignes horizontales, mais encore les lignes verticales sont individuellement adjointes aux formes ξ, η, ζ.

ALGORITHME RELATIF AU ξ — VOISIN.

(*Voir* l'explication qui suit à la fin de la page suivante.)

Cas II et cas V.

Le signe supérieur est relatif au cas II, le signe inférieur au cas V.

$$\left[\frac{G}{F}\right] = M, \qquad \left[\frac{\pm H}{F}\right] = N, \qquad a - bM - cN = u, \qquad \pm j + kM - lN = v;$$

				$m.$	$n.$	$\delta.$
(1)	$u < c$,		$v > k$	M − 1	N + 1	+ 1
(2)	$u < b - c$,		$v < 0$	M	N − 1	− 1
(3, 4)	$u < b$,	mais ni (1),	ni (2)	M	N	
		(3)	$v > 0$			− 1
		(4)	$v < 0$			+ 1
(5)	$u > b$,		$v > 0$	M	N + 1	+ 1
(6)	$u > b$,		$v < 0$	M + 1	N	− 1

$$\begin{vmatrix} 0 & \mp\delta & 0 \\ \pm\delta & \mp\delta m & 0 \\ 0 & -\delta n & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \mp\delta, \quad \mp\delta, \quad +1, \\ \\ \delta=+1, \quad \mathrm{I}; \qquad \delta=-1, \quad \mathrm{IV}. \end{matrix}$$

Cas I.

(1) $j > k$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} +, \quad +, \quad +; \\ \\ \mathrm{V}. \end{matrix}$$

(2) $j < k$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} +, \quad -, \quad -; \\ \\ \mathrm{III}. \end{matrix}$$

Cas III.

(1) $a+c < 2b$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} -, \quad +, \quad -; \\ \\ \mathrm{II}. \end{matrix}$$

Cas IV.

(1) $a < 2b,\ f < h,\ j+k < l$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} +, \quad +, \quad +; \\ \\ \mathrm{II}. \end{matrix}$$

Cas III (2) *et cas IV* (2).

Les conditions (1) des deux derniers cas ne sont pas alors remplies. Ici et dans le Tableau suivant, les signes supérieurs sont relatifs au cas III, les signes inférieurs au cas IV.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 & \pm 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \pm, \quad +, \quad \pm; \\ \\ \mathrm{VI}. \end{matrix}$$

Voici comment on obtient, lorsque $b > c$, le ξ — voisin de (a, g, l), à l'aide de l'algorithme du Tableau précédent. Dans ce Tableau, il est d'abord indiqué chaque fois lequel des cas I-V du n° 2 se rapporte au système Φ. Les crochets [ ] désignent le symbole connu : *plus grand entier contenu dans*.... La substitution, qui est inscrite ensuite dans le Tableau, est chaque fois celle par laquelle P doit être multipliée (composée), à droite pour obtenir la substitution appartenant au ξ — voisin. Les trois unités, inscrites à droite de la substitution, sont les quotients des unités ε, ε', ε'', relatives au ξ — voisin et à (a, g, l).

Le chiffre, en caractères romains, au-dessous de ces dernières, nous indique celle des six combinaisons du n° 2 qui se présentera pour le ξ — voisin.

Le ξ — voisin sera donc de deuxième espèce, seulement dans les deux derniers cas du Tableau III (2) et IV (2); maintenant la règle, pour passer directement aux voisins du ξ — voisin, est indiquée par le Tableau qui suit. Les substitutions inscrites, les unités qui sont à leur droite et les chiffres romains au-dessous de ces dernières ont même signification pour le parallélépipède que l'on cherche à déterminer ici, que les désignations analogues de la page 51 pour le ξ — voisin. Quant à m, n, δ, le Tableau du premier cas doit aussi être employé dans les cas suivants.

ALGORITHME RELATIF AU ξ — VOISIN DU ξ — VOISIN.

(1) $b - c > c$:

$$\left[\frac{\pm G}{F}\right] = M, \qquad \left[\frac{\pm G + H}{F}\right] = N;$$

$$a - (b-c)M - cN = u, \qquad -j + (l-k)M - lN = v;$$

$$b - c = u'', \qquad c = u', \qquad l - k = v'.$$

			m.	n.	δ.
(1)	$u < u'$,	$v > v'$	M − 1	N + 1	+ 1
(2)	$u < u'$,	$v' > v > 0$	M	N + 1	− 1
(3)	$u > u'$,	$v > 0$	M	N + 1	+ 1
(4)	$u < u^0$,	$v < 0$	M	N	+ 1
(5)	$u > u^0$,	$v < 0$	M + 1	N + 1	− 1

$$\begin{vmatrix} 0 & \mp\delta & 0 \\ -1 & -\delta m & 0 \\ \pm 1 & \pm\delta(m-n) & \mp\delta \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \pm 1, \quad -\delta, \quad \mp\delta; \\ \\ \delta=+1, \quad \mathrm{V}; \qquad \delta=-1, \quad \mathrm{III}. \end{matrix}$$

(2) $b-c<c$:

$$\left[\frac{\pm K+L}{J}\right]=M, \qquad \left[\frac{\pm K}{L}\right]=N;$$

$$a-cM-(b-c)N=u, \qquad \pm f+hM-(g+h)N=v;$$

$$c=u^0, \qquad b-c=u', \qquad h=v'.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \mp\delta \\ 0 & -\delta & -\delta n \\ \mp 1 & \pm\delta & \mp\delta(m-n) \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \pm 1, \quad -\delta, \quad \mp\delta; \\ \\ \delta=+1, \quad \mathrm{IV}; \qquad \delta=-1, \quad \mathrm{II}. \end{matrix}$$

LE η — VOISIN DU ξ — VOISIN EST (a, g, l) LUI-MÊME.

ALGORITHME RELATIF AU ζ — VOISIN DU ξ — VOISIN.

(1) $k<l-k$:

$$\left[\frac{-H}{J}\right]=M, \qquad \left[\frac{\mp G-H}{F}\right]=N;$$

$$j-(l-k)M-kN=u, \qquad -a+(b-c)M-bN=v;$$

$$l-k=u^0, \qquad k=u', \qquad b-c=v'.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \mp\delta & 0 \\ \delta & -\delta(m-n) & -1 \\ 0 & \pm\delta m & \pm 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \mp\delta, \quad -\delta, \quad \pm 1; \\ \\ \delta=+1, \quad \mathrm{IV}; \qquad \delta=-1, \quad \mathrm{I}. \end{matrix}$$

(2) $k>l-k$:

$(2)_1$ $j>k$:

$$\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \mp 1 & \mp 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} \pm, \quad +, \quad \pm; \\ \\ \mathrm{II}. \end{matrix}$$

$(2)_2$ $j<k$:

Dans le cas III, (2)
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} -, \quad -, \quad +; \\ \\ \mathrm{V}. \end{matrix}$$

Dans le cas IV, (2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} +, \quad -, \quad -; \\ \\ \mathrm{V}. \end{matrix}$$

4. Soit un corps Θ de nombres réels algébriques du troisième degré, dont les corps conjugués Θ', Θ'' sont également réels et dont, par suite, le discriminant D est *positif*. Soient α, β, γ trois nombres entiers du corps Θ, de telle nature que, pour les valeurs de x, y, z qui sont des nombres entiers, la forme $\xi = \alpha x + \beta y + \gamma z$ représente *tous* les nombres entiers du corps Θ; et soient $\eta = \xi'$, $\zeta = \xi''$ les formes conjuguées de ξ dans les corps Θ', Θ''.

Le déterminant de ξ, η, ζ est alors $\sqrt{\mathrm{D}}$ et la valeur de cette racine peut être prise avec le signe positif, car $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ peuvent remplacer α, β, γ. Le produit $\xi\eta\zeta = \mathrm{Nm}\,\xi$ est une forme à coefficients *tous nombres rationnels entiers* et son discriminant est D. Si l'on opère sur cette forme une substitution P de la chaîne appartenant à ξ, η, ζ, on obtient une forme φ encore à coefficients nombres rationnels entiers, de discriminant D ou bien zéro, selon que le déterminant de P est lui-même égal à 1 ou à zéro. On obtient alors, en vertu des inégalités (1) et (2) du n° 2, certaines limites supérieures pour les valeurs absolues de tous les coefficients de φ, limites qui ne dépendent que de D. *Par conséquent, on déduit de* $\mathrm{Nm}\,\xi$ *à l'aide de toutes les substitutions* P *en nombre infini, un nombre seulement fini de formes distinctes* φ.

Par une *unité* du corps Θ, nous entendrons un nombre entier du corps Θ dont la norme est 1.

Soient alors P et Q deux substitutions différentes de la chaîne relative à ξ, η, ζ, qui transforment ξ, η, ζ en *une seule et même forme* φ. L'opération P transformera ξ, η, ζ, par exemple en Ξ, H, Z; alors Q devra transformer ξ, η, ζ en ces mêmes formes Ξ, H, Z, sauf adjonction de facteurs; et, en ayant égard aux inégalités (2), n° 2, on reconnaît encore *qu'il ne peut non plus se présenter de changement dans l'ordre successif des formes,* en sorte que l'effet de la substitution Q sera de transformer ξ, η, ζ en leur ordre en $\omega\Xi$, $\omega'\mathrm{H}$, $\omega''\mathrm{Z}$. On voit alors que ω, ω', ω'' sont des nombres conjugués des corps Θ, Θ', Θ'' et que l'on a $\omega\omega'\omega'' = 1$. Le facteur ω représentera donc une unité pourvu que ce dit nombre soit un nombre algébrique *entier*.

Or, ce sera toujours le cas lorsque P et Q ont un déterminant égal à 1. En effet, l'opération QP^{-1} transforme le système ξ, η, ζ en $\omega\xi$, $\omega'\eta$, $\omega''\zeta$ et, par suite, E désignant la substitution identique et ϖ un paramètre indéterminé, ξ, η, ζ sont transformés par l'opération $\mathrm{QP}^{-1} - \varpi\mathrm{E}$

(nous faisons ici usage d'une notation symbolique connue) en $(\omega - \varpi)\xi$, $(\omega' - \varpi)\eta$, $(\omega'' - \varpi)\zeta$; par conséquent, le déterminant de $QP^{-1} - \varpi E$ est égal à $(\omega - \varpi)(\omega' - \varpi)(\omega'' - \varpi)$ et cette dernière relation nous fait voir que ϖ est un nombre entier.

Pour obtenir deux substitutions distinctes P et Q à déterminant 1, qui transforment $\mathrm{Nm}\,\xi$ en une seule et même forme φ, on pourra, par exemple, se servir d'une suite de parallélépipèdes extrêmes suffisamment prolongée, chaque parallélépipède de la suite étant le ξ — voisin du précédent. Ceci, il est clair, met en évidence une unité pour laquelle les nombres ω, ω', ω'' sont, en valeur absolue, le premier < 1, le second et le troisième > 1. On peut, d'une manière analogue, trouver une unité pour laquelle, en valeur absolue, le second de ces nombres soit < 1, le troisième et le premier > 1, ou le troisième < 1, le premier et le second > 1. Il est clair qu'entre trois pareilles unités, deux sont toujours *indépendantes,* c'est-à-dire qu'elles ne peuvent être représentées comme puissances d'une seule et même unité.

Par l'opération d'une substitution O à coefficients entiers et à déterminant 1, le réseau est toujours transformé en lui-même et un parallélépipède extrême correspondant à une substitution P se transforme en un extrême correspondant à la substitution $O^{-1}P$, extrême qui, du reste, ne doit pas appartenir à la même chaîne.

D'autre part, ω désignant un nombre entier quelconque du corps θ, il y aura toujours une certaine substitution O à coefficients entiers qui transforme ξ en $\omega\xi$; la même substitution remplace η par $\omega'\eta$ et ζ par $\omega''\zeta$ et, par suite, le déterminant de O est égal à $\omega\omega'\omega''$, c'est-à-dire égal à 1, pourvu que ω représente une unité. On reconnaît maintenant que :

(λ, μ, ν) *étant un parallélépipède extrême pour* ξ, η, ζ; P *désignant la substitution qui lui appartient,* ω *une unité quelconque du corps* θ, *et* O *la substitution à coefficients entiers qui transforme* ξ *en* $\omega\xi$, $\left(\frac{\lambda}{|\omega|}, \frac{\mu}{|\omega'|}, \frac{\nu}{|\omega''|}\right)$ *sera toujours aussi un parallélépipède extrême pour* ξ, η, ζ; *la substitution qui lui appartient sera* $O^{-1}P$ *et cette dernière transformera* $\mathrm{Nm}\,\xi$ *en la même forme* φ *que la substitution* P.

Deux parallélépipèdes extrêmes, ayant entre eux une relation telle que nous venons de l'exposer, peuvent être dits *équivalents*.

Ces principes nous conduisent au procédé suivant pour obtenir *toutes* les unités du corps 0. On prendra pour point de départ un parallélépipède extrême pour ξ, η, ζ, on établira sa forme correspondante φ, on formera un voisin, puis, pour celui-ci, on établira la forme φ qui lui correspond et l'on continuera cette recherche des voisins et des formes qui leur correspondent aussi longtemps que cela peut se faire, en évitant toujours de tomber sur deux parallélépipèdes extrêmes de première espèce, possédant une même forme φ, et ayant déjà dans la série deux voisins de même désignation. Ce procédé prendra fin nécessairement et fournit un nombre limité de parallélépipèdes extrêmes auxquels on peut alors donner le nom d'une *série fondamentale* pour la chaîne correspondant à ξ, η, ζ.

Maintenant, pour chaque couple parmi les parallélépipèdes obtenus (λ, μ, ν), auxquels correspond la même forme φ, on formera le quotient de leurs paramètres λ. Si ce quotient est un nombre entier, il représente, affecté d'un signe convenablement choisi, une unité du corps. On obtient ainsi un nombre fini d'unités, à l'aide desquelles on exprimera, par les opérations de la multiplication et de la division, toutes les unités contenues dans le corps 0.

Il doit certainement, d'après ce qui précède, se trouver parmi cellesci deux unités indépendantes, et l'on peut toujours facilement obtenir deux pareilles unités, dont *toutes* les autres dérivent par multiplication et division.

L'algorithme que nous avons exposé, appliqué à la recherche des unités d'un corps cubique à discriminant positif, est tout à fait analogue à la résolution de l'équation de Pell, à l'aide de la formation d'une période de formes quadratiques binaires indéfinies réduites d'après la méthode de Gauss.

Quant à l'étude des corps cubiques à discriminant négatif, je n'y entrerai pas en cette occasion.

Le corps cubique 0 le plus simple [1] est déterminé par $2\cos\frac{2\pi}{7}$;

---

[1] M. L. Charve, parmi d'autres exemples, a traité celui-ci dans son Mémoire *De la*

$\vartheta = 2\cos\frac{2\pi}{7}$, $\vartheta' = 2\cos\frac{4\pi}{7}$, $\vartheta'' = 2\cos\frac{6\pi}{7}$ sont trois nombres algébriques conjugués *entiers*, ils ont approximativement pour valeur

$$\vartheta = 1{,}25, \qquad \vartheta' = -0{,}45, \qquad \vartheta'' = -1{,}80$$

et sont les racines de l'équation

$$\vartheta^3 + \vartheta^2 - 2\vartheta - 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est égal à 49, partant carré parfait; θ est donc un corps *abélien*. On a

$$(\vartheta' - \vartheta)(\vartheta'' - \vartheta)(\vartheta'' - \vartheta') = -7,$$

d'où résultent les relations

$$\vartheta' = \vartheta^2 - 2, \qquad \vartheta'' = -\vartheta^2 - \vartheta - 1,$$

ainsi que celles que l'on en tire par permutation cyclique de ϑ, ϑ', ϑ''.

Nous pouvons maintenant poser

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma = -1, \quad -\vartheta, \quad -\vartheta^2;$$

alors les coefficients de ξ, η, ζ sont

$$\begin{vmatrix} -1 & -1{,}25 & -1{,}55 \\ -1 & 0{,}45 & -0{,}20 \\ -1 & 1{,}80 & -3{,}25 \end{vmatrix}.$$

Ensuite $-\xi$, $-\eta$, ζ sont transformées par l'effet de

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

en

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1{,}25 & 1 & -0{,}55 \\ -0{,}45 & 1 & 0{,}80 \\ 1{,}80 & -1 & 2{,}25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vartheta & 1 & 1-\vartheta^2 \\ \vartheta' & 1 & 1-\vartheta'^2 \\ -\vartheta'' & -1 & -1+\vartheta''^2 \end{vmatrix}.$$

---

réduction des formes ternaires quadratiques positives et de son application aux irrationnelles du troisième degré (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, Supplément au Tome IX).

Ce système Φ satisfait aux conditions IV du n° 2, et par suite

$$(\mathfrak{z},\ 1,\ -1+\mathfrak{z}''^2) = (\Phi)$$

est un parallélépipède extrême relatif à ξ, η, ζ, et P est la substitution qui lui correspond; alors l'opération P transforme $\xi\eta\zeta$ en

$$\varphi = -x^3 - y^3 - z^3 + 2x^2y + 2y^2z + 2z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2 + xyz.$$

Le fait que cette forme φ reste invariable pour les permutations cycliques de x, y, z met en évidence que 0 est un corps abélien. *On reconnaît que c'est là une propriété caractéristique relative à toutes les chaînes formées d'une manière analogue dans les corps abéliens.*

Pour déterminer le ξ —, le η — et le ζ — voisin de (Φ), il faut appliquer chaque fois la même règle [ici la règle du cas IV, (2)], en sorte que ces voisins seront tous de deuxième espèce. On tire ainsi de Φ

$$\Psi = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}45 & -0{,}55 \\ -1 & 1{,}80 & -0{,}80 \\ -1 & -1{,}25 & 2{,}25 \end{vmatrix},$$

$$\Psi' = \begin{vmatrix} 1{,}25 & -0{,}55 & -0{,}70 \\ -0{,}45 & 0{,}80 & -0{,}35 \\ -1{,}80 & -2{,}25 & 4{,}05 \end{vmatrix},$$

$$\Psi'' = \begin{vmatrix} 2{,}25 & -1 & -1{,}25 \\ -0{,}55 & 1 & -0{,}45 \\ -0{,}80 & -1 & 1{,}80 \end{vmatrix};$$

et φ est transformée par ces trois substitutions chaque fois en la même forme

$$\psi = x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - y^2z - z^2x - 2xy^2 - 2yz^2 - 2zx^2 + 2xyz,$$

qui a pour discriminant zéro.

Les paramètres de ξ dans les parallélépipèdes extrêmes correspondants (Ψ), (Ψ'), (Ψ'') sont 1, $\mathfrak{z}$, $1+\mathfrak{z}$, et comme les quotients de ces grandeurs sont des nombres entiers, ces parallélépipèdes sont équivalents.

Maintenant, inversement, (Φ) est le η —, ζ —, ξ — voisin de (Ψ), (Ψ'), (Ψ''), et par suite tous les voisins de ces trois derniers sont des parallélépipèdes équivalents à (Φ). Ainsi avec (Φ), (Ψ), (Ψ'), (Ψ''), nous avons déjà trouvé une série fondamentale pour la chaîne appartenant à ξ, η, ζ, et nous sommes parvenus à ce résultat; les unités ϑ, $\frac{-1}{1+\vartheta}=\vartheta'$, $\frac{-1-\vartheta}{\vartheta}=\vartheta''$, qui sont encore liées par la relation $\vartheta\vartheta'\vartheta''=1$, fournissent par leurs puissances et par les produits de ces puissances toutes les unités du corps θ.

A ces unités du corps θ correspondent les transformations

$$\left|\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right|$$

de la forme φ en elle-même.

Avec de légères modifications, les propositions des n[os] 2, 3 peuvent s'étendre à de pareilles formes linéaires, qui peuvent représenter rationnellement zéro. Pour trois formes du type particulier

$$x+ay+bz, \quad y+cz, \quad z,$$

$(1, 1, 1)$ est évidemment toujours un parallélépipède extrême, ce qui nous fournit un point de départ parfaitement déterminé pour la chaîne qui correspond aux formes. Des théorèmes qui ont été établis, on conclut aisément, α, β, γ; ξ, η, ζ ayant les désignations dont on vient de faire usage pour le corps cubique θ, que toute substitution P de la chaîne appartenant à ξ, η, ζ, pour un parallélépipède (λ, μ, ν) de laquelle les quotients $\frac{\mu}{\lambda}$, $\frac{\nu}{\mu}$ surpassent certaines grandeurs, doit aussi se présenter dans la chaîne appartenant aux formes

$$x+\frac{\beta}{\alpha}y+\frac{\gamma}{\alpha}z, \quad y+\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}z, \quad z.$$

Le théorème qui, dans la théorie de deux formes linéaires, correspond à celui-ci est précisément le théorème de Lagrange, que, pour un nombre irrationnel quadratique réel, le développement ordinaire en fraction continue est périodique.

J'ai l'intention de revenir sur l'étude de trois formes du type

$$x - az, \quad y - bz, \quad z,$$

a et b désignant deux grandeurs réelles quelconques, et de donner en cette occasion une autre généralisation beaucoup plus remarquable de ce célèbre théorème de Lagrange.

Königsberg, le 15 octobre 1894.