ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉTIENNE DELASSUS

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques réelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 53-123 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__S53_0>

SUR

LES ÉQUATIONS LINÉAIRES

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A CARACTÉRISTIQUES RÉELLES,

PAR M. ÉT. DELASSUS,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

INTRODUCTION.

Dans le présent travail, nous ne nous occuperons que des fonctions réelles de variables réelles, ces fonctions étant analytiques d'après la définition adoptée actuellement et résultant de la possibilité du développement en série ordonnée.

Une fonction analytique peut présenter des *points singuliers isolés* ou des *lignes singulières;* ces dernières peuvent être de deux sortes : *essentielles* s'il est impossible de continuer la fonction au delà par un prolongement analytique, et *artificielles* dans le cas contraire.

Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles et à coefficients analytiques; le problème de l'intégration pourra être considéré comme presque résolu si, étant donné les conditions initiales analytiques, on peut, sans former l'intégrale correspondante, dire dans quel domaine elle sera analytique. La recherche de ce domaine est identique à celle de son contour et celui-ci est évidemment formé par des lignes singulières essentielles de l'intégrale.

Le problème ainsi posé ne semble pas, dans l'état actuel de la Science, pouvoir être résolu dans le cas général des équations linéaires.

Je me suis proposé de déterminer la nature de ces lignes singulières essentielles et les résultats généraux auxquels j'ai été conduit permettent de déterminer, dans des cas particuliers, ces lignes ellesmêmes.

Quelques exemples simples donnent des indications sur les résultats probables.

Considérons l'équation de Laplace

$$\Delta V = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

et toutes les équations obtenues par dérivation. Toutes ces équations ont leurs caractéristiques imaginaires ou en ont au moins deux imaginaires. Toute solution de $\Delta V = 0$ les vérifie toutes et la solution du problème de Dirichlet montre qu'on peut former des intégrales analytiques ayant des lignes singulières essentielles absolument quelconques.

Il en est de même pour les équations du second ordre

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0 \qquad (B^2 - 4AC < 0),$$

ce qui résulte immédiatement des travaux de M. Picard [1], d'après lesquels *toutes* leurs intégrales sont analytiques.

Donc, *dans une région où les caractéristiques ne sont pas toutes réelles, les lignes singulières essentielles des intégrales analytiques peuvent être des lignes quelconques*.

Au contraire, considérons l'équation simple

$$\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} = 0.$$

On vérifie immédiatement sur l'intégrale générale, qu'on sait former effectivement, que les lignes singulières essentielles ne peuvent être que $x =$ const. ou $y =$ const., c'est-à-dire les caractéristiques de l'équation.

---

(1) PICARD, *Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé* (*Journal de l'École Polytechnique*, LX^e Cahier, 1890).

D'autre part, M. Appell (¹) a montré que la plupart des solutions simples de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

avaient des lignes singulières $y =$ const. et ce sont précisément des caractéristiques de l'équation.

Ces quelques exemples montrent nettement la séparation des équations linéaires en deux groupes, suivant que les caractéristiques sont ou non toutes réelles, une même équation pouvant appartenir aux deux groupes dans des portions distinctes du plan des xy.

Nous pourrons alors dire que les intégrales analytiques des équations du second groupe pourront avoir des lignes singulières essentielles absolument quelconques.

Le but principal de ce travail est l'étude des équations du premier groupe. Mes recherches m'ont conduit pour elles à la notion caractéristique de *domaine d'un arc.*

Soit σ un arc analytique régulier satisfaisant à certaines conditions restrictives; on peut lui faire correspondre un domaine ρ l'entourant complètement et ayant la propriété suivante : *Quelles que soient les fonctions initiales analytiques sur tout σ, l'intégrale correspondante est analytique dans tout ρ.* Cette région ρ s'appelle le domaine de l'arc σ.

C'est de là que résulte presque immédiatement le théorème fondamental.

Les lignes singulières essentielles des intégrales analytiques des équations du premier groupe ne peuvent être que certaines lignes fixes ou des caractéristiques (²).

Ces recherches constituent la première Partie divisée comme il suit :

Le Chapitre I contient des remarques et lemmes fondamentaux sur les équations et certains systèmes du premier ordre.

(¹) Appell, *Sur l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ *et la théorie de la chaleur* (*Journal de Mathématiques*, 1892).

(²) Notes présentées à l'Académie des Sciences dans les séances du 30 avril et du 2 juillet 1894.

Le Chapitre II est constitué par la démonstration des théorèmes généraux que nous venons d'énoncer et par quelques applications à un cas simple.

Dans le Chapitre III, je montre qu'il existe des équations à un nombre quelconque de variables qui peuvent être considérées comme généralisant les équations à deux variables, à caractéristiques réelles et pour lesquelles les propriétés fondamentales précédemment démontrées se généralisent parfaitement.

Dans les Chapitres II et III, j'ai constamment fait usage de la belle méthode des approximations successives de M. Picard [1] en la combinant avec les fonctions majorantes, ces dernières permettant de démontrer facilement la convergence des séries fournies par la méthode de M. Picard.

Dans la seconde Partie, j'étends à toute une classe d'équations d'ordre quelconque à deux variables et à caractéristiques réelles, la méthode de Riemann, en suivant l'exposition qu'en a faite M. Darboux [2], sauf pour la démonstration du lemme fondamental [3]. La démonstration qu'en donne M. Darboux est particulière au second ordre et ne semble pas pouvoir se généraliser. M. Picard a, dans le Mémoire précédemment cité, donné une démonstration extrêmement élégante, au moyen des approximations successives, et qui a l'avantage de se généraliser immédiatement. On arrive ainsi à retrouver tous les résultats obtenus pour le second ordre et, en particulier, l'intégration simultanée de l'équation et de son adjointe, au moyen d'une seule fonction de quatre variables.

---

(1) PICARD, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (*Journal de Mathématiques*, 1890).

(2) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces* (2e Partie, Chap. IV).

(3) Note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 16 octobre 1893.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

I. — Les caractéristiques des équations linéaires.

Soit

$$A_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} + \ldots + A_{n-1} \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}} + A_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = F(z)$$

une équation linéaire, $F(z)$ désignant l'ensemble des termes d'ordre égal ou inférieur à $n-1$.

Donnons-nous z et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ le long d'une courbe C, et posons $\frac{dy}{dx} = \lambda$ sur cette courbe.

Le long de C, une dérivée quelconque d'ordre $n-1$ est une fonction connue de x; sa dérivée

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^{p+1} \partial y^q} + \lambda \frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{q+1}}$$

sera aussi une fonction connue de x. En tenant compte de l'équation proposée, on aura ainsi $n+1$ équations linéaires pour déterminer les $n+1$ dérivées d'ordre n le long de C. Il y aura exception si le déterminant des inconnues est identiquement nul, c'est-à-dire si, en tous les points de la courbe C, on a

$$A_0 \lambda^n - A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} A_{n-1} \lambda + (-1)^n A_n = 0.$$

Les courbes ainsi obtenues s'appellent les *caractéristiques*. Soit $\lambda_1(x, y)$ une solution de cette équation algébrique de degré n, on obtiendra une famille de caractéristiques en intégrant

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(xy),$$

et cette famille sera de la forme $V(x,y) = \text{const}$. Ces courbes ont une propriété remarquable, c'est qu'elles se conservent par un changement de variables. Ce fait peut se démontrer directement ou être considéré comme une conséquence immédiate de la définition que nous venons d'en donner.

Nous appellerons *polynôme caractéristique* le polynôme homogène à deux variables

$$P(XY) = A_0 X^n + A_1 X^{n-1} Y + \ldots + A_{n-1} X Y^{n-1} + A_n Y^n,$$

et nous remarquerons que la dérivation de l'équation, par rapport à x, multiplie ce polynôme par X, et la dérivation, par rapport à y, le multiplie par Y; de sorte que, si l'on effectue sur l'équation proposée l'opération

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y},$$

le polynôme P se trouve remplacé par

$$\alpha X P + \beta Y P = (\alpha X + \beta Y) P,$$

autrement dit, on a introduit la nouvelle famille de caractéristiques $V(x, y) = \text{const.}$, V étant solution de

$$\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Supposons que, dans une région du plan des xy, l'équation caractéristique de l'équation linéaire proposée ait toutes ses racines réelles, distinctes ou non, λ_1, λ_2, ..., λ_n. Formons l'expression

$$\omega(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_n \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{n-1} \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

D'après la remarque précédente, l'équation $\omega(z) = 0$ aura les mêmes caractéristiques que la proposée. Les termes d'ordre n seront les mêmes à un facteur près, et l'équation considérée pourra se mettre sous la forme

$$\omega(z) = u(z),$$

$u(z)$ étant une fonction linéaire et homogène de z et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$. L'utilité de cette nouvelle forme est que l'équation

$$\omega(z) = \theta(xy)$$

s'intègre par des équations successives du premier ordre; elle est en effet équivalente au système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial z}{\partial y} &= \theta_1, \\
\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} &= \theta_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial \theta_{n-2}}{\partial x} + \lambda_{n-1} \frac{\partial \theta_{n-2}}{\partial y} &= \theta_{n-1}, \\
\frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial x} + \lambda_n \frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial y} &= \theta(xy).
\end{aligned}$$

II. — Théorème sur l'intégration des séries.

Soit une série

$$f(x) = \sum A_i (x-x_0)^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

dont tous les coefficients A sont réels et positifs.

Supposons que, pour $x = x_1$ $(x_1 - x_0 > 0)$, elle soit convergente; posons $x_1 - x_0 = \delta$. Elle sera convergente pour toutes les valeurs de x, telles que

$$|x - x_0| \leqq \delta,$$

et, en outre, le module maximum de $f(x)$ dans cet intervalle sera

$$\mathrm{M} = f(x_1) = \sum A_i \delta^i.$$

On a

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \sum A_i \frac{(x-x_0)^{i+1}}{i+1},$$

série absolument convergente dans le même intervalle, et son maximum sera

$$\mathrm{M}' = \sum A_i \frac{\delta^{i+1}}{i+1}.$$

Comparons M′ à M. On obtient la série M′ en multipliant les termes de M respectivement par les quantités $\frac{\delta}{i+1}$. Supposons que la série $f(x)$ commence par un terme de degré p, les différents multiplicateurs seront

$$\frac{\delta}{p+1}, \quad \frac{\delta}{p+2}, \quad \dots;$$

le plus grand étant le premier, il en résulte que l'on aura

$$M' < \sum A_i \delta^i \frac{\delta}{p+1},$$

c'est-à-dire

$$M' < \frac{\delta}{p+1} M.$$

La série $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ commence par un terme en $(x-x_0)^{p+1}$; de sorte que, si on l'intègre, le maximum de la nouvelle série obtenue sera M″ et l'on aura

$$M'' < \frac{\delta}{p+2} M' < \frac{\delta^2}{(p+1)(p+2)} M,$$

et, plus généralement, en intégrant q fois de x_0 à x, le maximum de la série obtenue, dans l'intervalle considéré, sera moindre que

$$\frac{\delta^q}{(p+1)(p+2)\dots(p+q)} M.$$

Ces théorèmes s'appliquent à des séries à un nombre quelconque de variables à coefficients positifs. Soit

$$f(x,y,z) = \sum A_{ikj}(x-x_0)^i (y-y_0)^k (z-z_0)^j,$$

la plus petite valeur de i étant p_1, celle de k étant p_2 et celle de j étant p_3. Supposons qu'elle soit absolument convergente si

$$|x-x_0| \leqq \delta_1, \qquad |y-y_0| \leqq \delta_2, \qquad |z-z_0| \leqq \delta_3.$$

Son maximum, dans ces conditions, sera

$$M = f(x_0+\delta_1,\ y_0+\delta_2,\ z_0+\delta_3).$$

Intégrons $f(x,y,z)$, q_1 fois par rapport à x, de x_0 à x, q_2 fois par rapport à y, de y_0 à y, et q_3 fois par rapport à z, de z_0 à z; le même raisonnement que précédemment nous montrera que la nouvelle série à coefficients positifs ainsi obtenue sera absolument convergente dans les mêmes conditions, et que, sous ces conditions, son module sera moindre que

$$\frac{\partial^{q_1}}{(p_1+1)(p_1+2)\ldots(p_1+q_1)}\,\frac{\partial^{q_2}}{(p_2+1)(p_2+2)\ldots(p_2+q_2)}\,\frac{\partial^{q_3}}{(p_3+1)(p_3+2)\ldots(p_3+q_3)}\,\mathrm{M}.$$

III. — Équations linéaires du premier ordre.

Soit l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\theta(x,y),$$

$\theta(x,y)$ étant analytique dans une région P du plan des xy. Soit, en outre, un segment $\mathrm{S}(x=x_0)$ situé entièrement dans cette région, et cherchons l'intégrale qui pour $x=x_0$ se réduit à une fonction donnée $f(y)$ analytique tout le long de S; elle sera évidemment donnée par la formule

$$\int_{x_0}^{x}\theta(x,y)\,dx+f(y).$$

Considérons les différents segments parallèles à Ox, issus des points de S et allant de part et d'autre jusqu'au contour de P; ils engendrent une région Q intérieure à P et nous trouvons immédiatement, d'après la forme de l'intégrale, le lemme suivant :

LEMME I. — *A tout système d'une région* P *et d'un segment* S *parallèle à* Oy *et situé à son intérieur correspond une région* Q.

Quelles que soient la fonction $\theta(x,y)$ *analytique dans tout* P *et la fonction initiale* $f(y)$ *analytique sur tout* S, *l'intégrale correspondante est analytique dans tout* Q.

C'est en généralisant convenablement cette propriété extrêmement simple que nous arriverons à tous les résultats contenus dans les deux Chapitres suivants.

Le lemme que nous venons d'établir peut s'énoncer sous une autre forme qui nous sera utile.

Lemme II. — *Soit un segment s parallèle à Ox et contenant le point* (x_0, y_0).

Quelles que soient la fonction $\theta(x, y)$ développable en tous les points de S et la fonction initiale $f(y)$ développable en y_0, l'intégrale correspondante est développable en tous les points de s.

Soit maintenant l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial y} + b$$

et cherchons à l'intégrer en nous donnant la fonction initiale $f(y)$, analytique tout le long du segment $S(x = x_0)$ situé dans la région P, où a et b sont analytiques.

Considérons la fonction $\alpha(x, y)$ satisfaisant à

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = a\frac{\partial \alpha}{\partial y}$$

et se réduisant pour $x = x_0$ à y; cette fonction sera analytique dans une région entourant la portion de S le long de laquelle a est analytique. Le changement de variables

$$x' = x, \qquad y' = \alpha(x, y)$$

ramènera l'équation à la forme précédente; les courbes $\alpha(x, y) = \text{const.}$, qui sont les caractéristiques, deviendront $y' = \text{const.}$ Des formules précédentes on tire

$$x = x', \qquad y = \beta(x', y');$$

$\beta(x', y')$ sera analytique dans une certaine région du plan des $x'y'$, au voisinage de la droite $x' = x_0$. Par chaque point (x_0, y_0) de la droite S passe une caractéristique

$$\alpha(x, y) = \alpha(x_0, y_0).$$

Nous pouvons supposer qu'on ait pris sur elle, de part et d'autre de x_0, y_0, un segment L tel qu'en chacun de ses points α soit développable et qu'il en soit de même pour β aux points correspondants sur la droite $y' = \alpha(x_0, y_0)$. Il en résulte immédiatement :

LEMME III. — *Par tout point (x_0, y_0) dans la région où a est analytique passe un segment L de caractéristique. Prenons-en une portion l contenant x_0, y_0.*

Quelles que soient la fonction b développable en tous les points de l et la fonction initiale $f(y)$ développable en y_0, l'intégrale correspondante est développable en tous les points de l.

Soit P′ la région engendrée par les segments L issus des différents points du segment S. Considérons les régions Q, intérieures à P et P′, et telles qu'on puisse, sans en sortir, aller d'un quelconque de leurs points au segment S, en suivant un segment L. Ces régions sont ainsi définies d'une façon indépendante de P. Nous aurons :

LEMME IV. — *A tout segment S parallèle à Oy et situé dans la région où a est analytique, correspondent des régions Q.*

Quelles que soient la fonction b analytique dans tout Q et la fonction initiale $f(y)$ analytique sur tout S, l'intégrale correspondante est analytique dans toute la région Q.

En dernier lieu, considérons l'équation

$$\omega(z) = \theta(x, y)$$

équivalente au système

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial z}{\partial y} = \theta_1,\\
&\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \theta_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{\partial \theta_{n-2}}{\partial x} + \lambda_{n-1} \frac{\partial \theta_{n-2}}{\partial y} = \theta_{n-1},\\
&\frac{\partial \theta_{n-1}}{x\partial} + \lambda_n \frac{\partial \theta_{n-1}}{\partial y} = \theta(x, y).
\end{aligned}$$

On voit immédiatement que se donner $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}$, pour $x = x_0$, revient à se donner les fonctions $f_0(y), f_1(y), \dots, f_{n-1}(y)$, auxquelles se réduisent respectivement $z, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, pour $x = x_0$. Le segment S est supposé contenu entièrement dans une région où tous les λ et la fonction θ sont analytiques. Représentons en général par R des régions telles que, sans en sortir, on puisse aller d'un quelconque de leurs points au segment S en suivant un segment L de l'un quelconque des systèmes de caractéristiques.

Quelle que soit la région entourant S et dans laquelle θ est analytique, il est possible de trouver une région R qui lui soit intérieure et qui entoure complètement S. En outre, cette région R possédera les propriétés des régions que nous avions désignées par Q, relativement à toutes les équations du système. Il en résultera, par l'application successive du lemme IV, que les fonctions θ_{n-1}, θ_{n-2}, ..., θ_1, z seront analytiques dans tout R; donc :

Lemme V. — *A tout segment* S *parallèle à* Oy *et situé dans la région où tous les* λ *sont analytiques, correspondent des régions* R.

Quelles que soient les fonctions initiales $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$, *analytiques sur tout* S *et la fonction* θ *analytique dans tout* R, *l'intégrale correspondante de l'équation* $\omega(z) = \theta(x, y)$ *est analytique dans tout* R.

IV. — Sur les fonctions majorantes.

Soient deux fonctions analytiques $F(x,y)$ et $\Phi(\xi,\eta)$. Supposons que la première soit développable en $x - x_0$, $y - y_0$, et la seconde en $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, les points (x_0, y_0) et (ξ_0, η_0) étant représentés par M_0 et μ_0.

Si les coefficients de la seconde série sont positifs et supérieurs ou égaux aux modules des coefficients correspondants de la première, nous dirons que la fonction Φ est en μ_0, majorante pour la fonction F en M_0 et, d'après M. Poincaré, nous l'indiquerons de la façon suivante [1] :

$$F(x, y)_{M_0} \leqq \Phi(\xi, \eta)_{\mu_0}.$$

Pour ce qui va suivre, il est nécessaire de distinguer le cas où l'égalité est exclue parce que la propriété se conserve pour les points voisins; nous l'indiquerons par la notation

$$F(x, y)_{M_0} < \Phi(\xi, \eta)_{\mu_0}.$$

---

[1] Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Chap. II.

Soit l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial y} + b.$$

Prenons un point (x_0, y_0) dans la région où a et b sont analytiques, et considérons l'intégrale qui, pour $x = x_0$, se réduit à $f(y)$ développable en y_0. Désignons par C le segment de caractéristique issu de (x_0, y_0); nous savons, d'après le lemme III, que, quelle que soit la fonction initiale, l'intégrale z sera développable en tous les points de C.

Au point $M_0(x_0, y_0)$ du plan des xy, faisons correspondre arbitrairement un point $\mu_0(\xi_0, \eta_0)$ du plan des $\xi\eta$; formons deux séries $\alpha(\xi, \eta)$, $\beta(\xi, \eta)$ ordonnées en $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, telles que l'on ait

$$a(x, y)_{M_0} < \alpha(\xi, \eta)_{\mu_0}, \qquad b(x, y)_{M_0} < \beta(\xi, \eta)_{\mu_0},$$

et considérons l'équation

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \alpha\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + \beta.$$

Par μ_0 passe un segment Γ analogue à C. Ne conservons que la portion de C dirigée vers les x positifs et la portion de Γ dirigée vers les ξ positifs. Nous pourrons restreindre ces deux portions de façon à satisfaire aux deux conditions suivantes :

1° Les deux segments C et Γ se correspondent point par point par la formule

$$x - x_0 = \xi - \xi_0.$$

2° M et μ étant deux points correspondants quelconques sur C et Γ, on a toujours

$$a(x, y)_M < \alpha(\xi, \eta)_\mu, \qquad b(x, y)_M < \beta(\xi, \eta)_\mu.$$

Intégrons la seconde équation en nous donnant pour $\xi = \xi_0$ une fonction initiale $\varphi(\eta)$ telle que

$$f(y)_{M_0} \leq \varphi(\eta)_{\mu_0}.$$

Je me propose de démontrer que les propriétés majorantes des coefficients et des fonctions initiales se conservent pour les intégrales, c'est-à-dire d'établir le lemme suivant :

LEMME VI. — *Quelles que soient les deux fonctions initiales $f(y)$ et* *et $\varphi(\eta)$ satisfaisant à la condition*

$$f(y)_{M_0} < \varphi(\eta)_{\mu_0},$$

l'intégrale z est développable en tous les points M *de* C, *l'intégrale ζ est développable en tous les points μ de Γ, et en deux points correspondants quelconques* M *et μ : on a toujours*

$$z(x, y)_M < \zeta(\xi, \eta)_\mu.$$

Considérons les quantités

$$\frac{\partial^{i+k}\zeta}{\partial\xi^i\,\partial\eta^k} \pm \frac{\partial^{i+k}z}{\partial x^i\,\partial y^k}$$

que nous représenterons plus simplement par

$$\zeta_{ik} \pm z_{ik},$$

ou encore par

$$T_{ik}.$$

D'après les hypothèses faites, toutes ces quantités sont positives et non nulles en M_0, μ_0. Cherchons comment elles varient lorsque le système $M\mu$ s'éloigne de $M_0\mu_0$.

Le long de C, y est fonction de x et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = -a.$$

Le long de Γ, η est fonction de ξ et l'on a de même

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\alpha.$$

En outre, en vertu de la relation

$$x - x_0 = \xi - \xi_0,$$

on aura

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi};$$

de sorte que

$$\left(\frac{d}{dx}T_{ik}\right)_M = \left(\frac{d}{d\xi}\zeta_{ik}\right)_\mu \pm \left(\frac{d}{dx}z_{ik}\right)_M.$$

Nous allons calculer séparément les deux termes

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\partial^{i+k}\zeta}{\partial\xi^i\partial\eta^k} = \frac{\partial^{i+k+1}\zeta}{\partial\xi^{i+1}\partial\eta^k} + \frac{d\eta}{d\xi}\frac{\partial^{i+k+1}\zeta}{\partial\xi^i\partial\eta^{k+1}} = \frac{\partial^{i+k+1}\zeta}{\partial\xi^{i+1}\partial\eta^k} - \alpha\frac{\partial^{i+k+1}\zeta}{\partial\xi^i\partial\eta^{k+1}}.$$

Sur l'équation

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} = \alpha\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + \beta,$$

vérifiée par ζ, effectuons l'opération $\frac{\partial^{i+k}}{\partial\xi^i\partial\eta^k}$; nous obtiendrons dans le premier membre le terme $\frac{\partial^{i+k+1}\xi}{\partial\xi^{i+1}\partial\eta^k}$ et, dans le second, d'abord $\frac{\partial^{i+k}\beta}{\partial\xi^i\partial\eta^k}$, puis des termes de la forme

$$\lambda\frac{\partial^{i'+k'}\alpha}{\partial\xi^{i'}\partial\eta^{k'}}\frac{\partial^{i''+k''}\zeta}{\partial\xi^{i''}\partial\eta^{k''}},$$

les λ étant des coefficients numériques positifs, ceux qui s'introduisent dans la dérivation d'un produit; parmi ces termes se trouve $\alpha\frac{\partial^{i+k+1}\zeta}{\partial\xi^i\partial\eta^{k+1}}$; en le faisant passer dans le premier membre, nous obtiendrons

$$\frac{d}{d\xi}\zeta_{ik} = \frac{\partial^{i+k}\beta}{\partial\xi^i\partial\eta^k} + \sum\lambda\frac{\partial^{i'+k'}\alpha}{\partial\xi^{i'}\partial\eta^{k'}}\frac{\partial^{i''+k''}\zeta}{\partial\xi^{i''}\partial\eta^{k''}}.$$

Un calcul analogue conduirait à

$$\frac{d}{dx}z_{ki} = \frac{\partial^{i+k}b}{\partial x^i\partial y^k} + \sum\lambda\frac{\partial^{i'+k'}a}{\partial x^{i'}\partial y^{k'}}\frac{\partial^{i''+k''}z}{\partial x^{i''}\partial y^{k''}}.$$

Dans ces deux formules, les termes se correspondent et les λ correspondants sont les mêmes. Par soustraction, on obtient, en reprenant la notation employée plus haut,

$$\left[\frac{d}{dx}\mathrm{T}_{ik}\right]_{\mathrm{M}} = [(\beta_{ik})_\mu \pm (b_{ik})_{\mathrm{M}}] + \sum\lambda[(\alpha_{i'k'}\zeta_{i''k''})_\mu \pm (a_{i'k'}z_{i''k''})_{\mathrm{M}}].$$

Plaçons-nous en M_0, μ_0, on voit immédiatement que toutes les quantités entre crochets sont positives, de sorte que

$$\left[\frac{d}{dx}\mathrm{T}_{ik}\right]_{\mathrm{M}_0} > 0,$$

et de plus cette quantité ne peut pas être nulle.

La quantité T_{ik} va donc en croissant à partir de M_0, μ_0 ; elle est positive au début, donc elle reste positive.

Des inégalités

$$\zeta_{ik} + z_{ik} > 0,$$
$$\zeta_{ik} - z_{ik} > 0,$$

on déduit

$$\zeta_{ik} > | z_{ik} |,$$

de sorte que la fonction ζ continue à être majorante pour z. Je dis maintenant que ce fait se produit tout le long de C et Γ.

Comme les fonctions T_{ik} sont d'abord positives et croissantes, si l'une d'elles devenait négative, elle aurait dû commencer par décroître et, par suite, sa dérivée aurait dû s'annuler.

Supposons que ce fait se produise pour la première fois en M_1, μ_1. En ce point toutes les quantités T_{ik} seront positives et non nulles, de sorte que l'on aura

$$z(x, y)_{M_1} < \zeta(\xi, \eta)_{\mu_1}.$$

En posant

$$f_1(y) = z(x_1, y), \qquad \varphi_1(\eta) = \zeta(\xi_1, \eta),$$

on aura donc

$$f_1(y)_{M_1} < \varphi_1(\eta)_{\mu_1}.$$

Mais on aurait pu obtenir z en intégrant $\dfrac{\partial z}{\partial x} = a\dfrac{\partial z}{\partial y} + b$ avec la condition $f_1(y)$ pour $x = x_1$, et ζ en intégrant $\dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \alpha\dfrac{\partial \zeta}{\partial \eta} + \beta$ avec la condition $\varphi_1(\eta)$ pour $\xi = \xi_1$; comme, par hypothèse, on a

$$a(x, y)_{M_1} < \alpha(\xi, \eta)_{\mu_1}, \qquad b(x, y)_{M_1} < \beta(\xi, \eta)_{\mu_1},$$

le raisonnement fait précédemment prouverait que toutes les quantités T_{ik} auraient encore en M_1, μ_1 des dérivées positives et non nulles, ce qui démontre complètement la propriété annoncée.

Considérons un segment $S(x = x_0)$ situé dans la région où a et b sont analytiques. Désignons par M_0 un point quelconque de S. Nous pouvons former α et β tels que

$$a(x, y)_{M_0} < \alpha(\xi, \eta)_{\mu_0}, \qquad b(x, y)_{M_0} < \beta(\xi, \eta)_{\mu_0},$$

quel que soit M_0. Nous exprimerons le fait par la notation

$$a(x, y)_S < \alpha(\xi, \eta)_{\mu_0}, \qquad b(x, y)_S < \beta(\xi, \eta)_{\mu_0};$$

à chaque point M_0 correspondent les segments C et L du lemme précédent; prenons le plus petit des segments L. Les segments C auront tous même x à leur extrémité et formeront ainsi une aire R limitée par S et un segment parallèle.

A tout point μ de L correspondront tous les points M sur les segments C; tous ces points auront même abscisse déterminée par

$$x - x_0 = \xi - \xi_0$$

et formeront un segment S_μ correspondant à μ. D'après sa définition même, on aura, quel que soit le point μ de L,

$$a(x, y)_{S_\mu} < \alpha(\xi, \eta)_\mu, \qquad b(x, y)_{S_\mu} < \beta(\xi, \eta)_\mu;$$

il suffit alors d'appliquer le lemme précédent à chacun des segments C pour obtenir :

Lemme VII. — *Quelles que soient les deux fonctions initiales, $f(y)$ analytique sur tout* S, *et $\varphi(\eta)$ développable en η_0, satisfaisant à*

$$f(y)_S \ll \varphi(\eta)_{\mu_0},$$

l'intégrale z est analytique dans tout R, *l'intégrale ζ est développable en tous les points de* Γ *et l'on a, quel que soit le point μ,*

$$z(x, y)_{S_\mu} < \zeta(\xi, \eta)_\mu.$$

En dernier lieu, considérons une équation $\omega(z) = b(x,y)$ équivalente au système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= a_1 \frac{\partial z}{\partial y} + t_1,\\
\frac{\partial t_1}{\partial x} &= a_2 \frac{\partial t_1}{\partial y} + t_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial t_{n-2}}{\partial x} &= a_{n-1} \frac{\partial t_{n-2}}{\partial y} + t_{n-1},\\
\frac{\partial t_{n-1}}{\partial x} &= a_n \frac{\partial t_{n-1}}{\partial y} + b.
\end{aligned}$$

Soit toujours le segment $S(x = x_0)$ entièrement contenu dans la région où b et tous les a sont analytiques; nous pourrons toujours former des fonctions $\alpha(\xi, \eta)$ et $\beta(\xi, \eta)$ telles que

$$\begin{aligned}
&a_1(x, y)_S < \alpha(\xi, \eta)_{\mu_0},\\
&a_2(x, y)_S < \alpha(\xi, \eta)_{\mu_0}, \qquad b(x, y)_S < \beta(\xi, \eta)_{\mu_0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_n(x, y)_S < \alpha(\xi, \eta)_{\mu_0}.
\end{aligned}$$

Par chaque point de S passent des segments $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des caractéristiques des différents systèmes, segments analogues à ceux définis dans le lemme III. Il y a de même le segment Γ issu de μ_0 et relatif à l'équation

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + \beta.$$

A un point μ de Γ faisons correspondre tous les points des segments C qui auront pour abscisse x, telle que

$$x - x_0 = \xi - \xi_0.$$

Il est évident que nous pourrons limiter le segment Γ de façon que, en désignant par S_μ^1 le segment formé par les points M_1 qui correspondent à μ sur les caractéristiques C_1, et par S_μ^2, ... les segments analogues, on ait, quel que soit μ sur Γ,

$$\begin{aligned}
&a_1(x, y)_{S_\mu^1} < \alpha(\xi, \eta)_\mu, \qquad b(x, y)_{S_\mu^1} < \beta(\xi, \eta)_\mu,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_n(x, y)_{S_\mu^n} < a(\xi, \eta)_\mu, \qquad b(x, y)_{S_\mu^n} < \beta(\xi, \eta)_\mu.
\end{aligned}$$

Désignons par S_μ la partie commune aux segments $S_\mu^1, S_\mu^2, \ldots, S_\mu^n$; les segments S_μ engendreront une région R, et il est évident que l'on pourra aller d'un de ses points au segment S en suivant des segments $C_1, C_2, \ldots, C_n$ et sans en sortir.

Soient $f_0(y), f_1(y), \ldots, f_{n-1}(y)$ les fonctions initiales pour $z, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, supposées analytiques tout le long de S. Nous pouvons former des fonctions $\varphi_0(\eta), \varphi_1(\eta), \ldots, \varphi_{n-1}(\eta)$ développables en η_0, et telles que

$$f_0(y)_S \ll \varphi_0(\eta)_{\mu_0}, \qquad f_1(y)_S \ll \varphi_1(\eta)_{\mu_0}, \qquad \ldots, \qquad f_{n-1}(y)_S \ll \varphi_{n-1}(\eta)_\mu.$$

Considérons le système auxiliaire

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\zeta}{\partial\xi} &= \alpha\,\frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + \tau_1,\\
\frac{\partial\tau_1}{\partial\xi} &= \alpha\,\frac{\partial\tau_1}{\partial\eta} + \tau_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\frac{\partial\tau_{n-2}}{\partial\xi} &= \alpha\,\frac{\partial\tau_{n-2}}{\partial\eta} + \tau_{n-1},\\
\frac{\partial\tau_{n-1}}{\partial\xi} &= \alpha\,\frac{\partial\tau_{n-1}}{\partial\eta} + \beta,
\end{aligned}$$

et intégrons-le en prenant comme fonctions initiales $\varphi_0(\eta)$, $\varphi_1(\eta)$, ..., $\varphi_{n-1}(\eta)$.

En appliquant le lemme VII à la dernière équation, on aura

$$t_{n-1}(x, y)_{S_\mu} < \tau_{n-1}(\xi, \eta)_\mu;$$

il en résultera, par l'application du même lemme à l'équation précédente,

$$t_{n-2}(x, y)_{S_\mu} < \tau_{n-2}(\xi, \eta)_\mu,$$

et ainsi de suite; finalement, on arrivera à

$$z(x, y)_{S_\mu} < \zeta(\xi, \eta)_\mu.$$

Nous obtenons ainsi :

Lemme VIII. — *Quelles que soient les fonctions initiales $f_0(y)$, ..., $f_{n-1}(y)$ analytiques sur tout* S, $\varphi_0(\eta)$, ..., $\varphi_{n-1}(\eta)$ *développables en* η_0 *et satisfaisant aux conditions*

$$f_p(x, y)_S \leqslant \varphi_p(\zeta, \eta)_{\mu_0} \qquad (p = 0, 1, \ldots, n-1),$$

l'intégrale z *est analytique dans tout* R, *l'intégrale* ζ *est développable en tous les points de* Γ, *et l'on a, quel que soit* μ *sur* Γ,

$$z(x, y)_{S_\mu} < \zeta(\xi, \eta)_\mu.$$

CHAPITRE II.

I. — Équations à un seul système de caractéristiques.

Soit une équation

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \mathrm{U}(z), \quad \mathrm{U}(z) = \sum a_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}, \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, n-1, \\ k = 0, 1, \ldots, n-1, \end{matrix} \; i + k < n \right).$$

Dans une région où tous les a_{ik} sont analytiques, prenons un segment de droite S $(x = x_0)$ et cherchons l'intégrale z telle que, pour $x = x_0$, z et ses $n-1$ premières dérivées par rapport à x se réduisent à des fonctions de y,

$$\mathrm{Y}_0, \quad \mathrm{Y}_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{Y}_{n-1},$$

développables en tous les points de S.

Intégrons par approximations successives. Nous serons conduit, d'après la forme linéaire de l'équation proposée, à considérer le système

$$\frac{\partial^n z_1}{\partial x^n} = 0, \qquad \frac{\partial^n z_2}{\partial x^n} = \mathrm{U}(z_1), \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^n z_m}{\partial x^n} = \mathrm{U}(z_{m-1}), \qquad \ldots,$$

la première étant intégrée avec les conditions initiales $\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_{n+1}$ et les suivantes avec les conditions initiales $0, 0, \ldots, 0$.

Supposons qu'au voisinage du point (x_0, y_0) de S, les séries Y soient absolument convergentes si $|y - y_0| < \rho$ et les séries a_{ik} si

$$|x - x_0| < \Delta, \qquad |y - y_0| < \rho.$$

Les formules

$$z_1 = \mathrm{Y}_0 + \frac{x - x_0}{1} \mathrm{Y}_1 + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \mathrm{Y}_{n-1},$$

$$z_2 = \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} \mathrm{U}(z_1)\, dx^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_m = \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} \mathrm{U}(z_{m-1})\, dx^n,$$

montrent immédiatement que $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ seront des séries en $x - x_0$, $y - y_0$ qui seront toutes absolument convergentes dans le rectangle Δ, ρ. Nous nous proposons de démontrer que la série

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_m + \ldots$$

est absolument convergente dans tout le rectangle Δ, ρ, qu'elle peut s'ordonner en $x - x_0$, $y - y_0$ en donnant ainsi une série absolument convergente dans Δ, ρ, et qu'enfin elle représente l'intégrale cherchée. Cette dernière partie est une conséquence des deux premières. Posons en effet

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_m = s_m.$$

On verra immédiatement la formule

$$s_m = z_1 + \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} \mathrm{U}(s_{m-1})\, dx^n,$$

et à la limite s_m et s_{m-1} tendant vers z

$$z = z_1 + \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} \mathrm{U}(z)\, dx^n,$$

d'où

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \mathrm{U}(z),$$

puisque

$$\frac{\partial^n z_1}{\partial x^n} = 0.$$

Pour démontrer la convergence, nous nous appuierons sur le théorème bien connu :

Soit la série

$$z = z_1 + z_2 + \ldots + z_m + \ldots.$$

Soient $z'_1, z'_2, \ldots, z'_m, \ldots$ des séries respectivement majorantes en x_0, y_0, pour $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Si la série

$$z' = z'_1 + z'_2 + \ldots + z'_m + \ldots$$

est convergente pour $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$, la série z peut s'ordonner *en* $x - x_0$, $y - y_0$, *en donnant une série qui sera absolument convergente tant que l'on aura*

$$|x - x_0| \leqq h, \qquad |y - y_0| \leqq k.$$

Pour appliquer ce théorème, remplaçons les Y_i et les a_{ik} par les séries correspondantes à termes positifs, Y'_i et a'_{ik}; nous obtiendrons le système

$$\frac{\partial^n z'_1}{\partial x^n} = 0, \qquad \frac{\partial^n z'_2}{\partial x^n} = U'(z'_1), \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^n z'_m}{\partial x^n} = U'(z'_{m-1}) \qquad \ldots,$$

et les séries $z'_1, z'_2, \ldots, z'_m, \ldots$ ainsi obtenues satisferont à la condition cherchée.

Nous allons montrer que la série z' est convergente pour $x = x_0 + \delta$, $y = y_0 + \rho\varepsilon$ et cela quels que soient δ et ε tels que $\delta < \Delta$, $\varepsilon < 1$.

Remarquons d'abord qu'étant donnée une série $f(x, y)$ convergente dans le rectangle Δ, ρ, on peut former une série majorante

$$\varphi(x, y) = \frac{M'}{\left(1 - \frac{x - x_0}{\Delta}\right)\left(1 - \frac{y - y_0}{\rho}\right)}.$$

On aura une limite supérieure du module d'une dérivée quelconque de f dans le rectangle δ, $\rho\varepsilon$, en prenant la dérivée analogue de φ pour $x = x_0 + \delta$, $y = y_0 + \rho\varepsilon$.

En particulier, si l'on ne considère que les dérivées par rapport à y, on pourra, dans φ, faire tout de suite $x = x_0 + \delta$ et, en posant

$$M = \frac{M'}{1 - \frac{\delta}{\Delta}},$$

considérer la fonction

$$\frac{M}{1 - \frac{y - y_0}{\rho}},$$

de sorte qu'à l'intérieur du rectangle δ, $\rho\varepsilon$, on aura

$$\left|\frac{\partial^p f(x, y)}{\partial y^p}\right| < \left[\frac{d^p}{dy^p} \frac{M}{1 - \frac{y - y_0}{\rho}}\right]_{y = y_0 + \rho\varepsilon}.$$

Si plusieurs séries sont convergentes dans Δ, ρ, il suffira de prendre pour M la plus grande des valeurs qui correspondent aux différentes fonctions pour obtenir une fonction

$$\frac{M}{1-\frac{y-y_0}{\rho}}$$

jouant le même rôle que précédemment, mais relativement à plusieurs séries.

Soient

$$\frac{M}{1-\frac{y-y_0}{\rho}}=F(y) \quad \text{et} \quad \frac{N}{1-\frac{y-y_0}{\rho}}=\Phi(y)$$

deux telles fonctions; la première relative à tous les a'_{ik} et la seconde à $u'(z'_1)$.

On a

$$z'_2=\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}U'(z'_1)\,dx^n, \qquad \frac{\partial^{p_1+q_1}z'_2}{\partial x^{p_1}\partial y^{q_1}}=\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{q_1}U'(z'_1)}{\partial y^{q_1}}\,d^{n-p_1}x \quad (p_1+q_1<n).$$

Il résulte, de ce qui précède et des remarques faites sur l'intégration des séries à termes positifs, que l'on a, à l'intérieur du rectangle δ, $\rho\varepsilon$,

$$|z'_2|<\frac{\delta^n}{1.2\ldots n}\Phi(y), \qquad \left|\frac{\partial^{p_1+q_1}z'_2}{\partial x^{p_1}\partial y^{q_1}}\right|<\frac{\delta^{n-p_1}}{1.2\ldots(n-p_1)}\frac{d^{q_1}\Phi}{dy^{q_1}},$$

avec cette convention, faite une fois pour toutes, que dans les seconds membres des inégalités il faudra, après avoir effectué les opérations, faire $y=y_0+\rho\varepsilon$.

z'_2 et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ s'annulent pour $x=x_0$; donc $U'(z'_2)$ s'annule pour $x=x_0$, et il en est de même de toutes ses dérivées par rapport à y. On aura donc

$$z'_3=\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}U'(z'_2)\,dx^n, \qquad \frac{\partial^{p_2+q_2}z'_3}{\partial x^{p_2}\partial y^{q_2}}=\int_{x_0}^{x}\cdots\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^{q_2}U'(z'_2)}{\partial y^{q_2}}\,d^{n-p_2}x \quad (p_2+q_2<n),$$

$$|U'(z'_2)|<F(y)\sum\frac{\delta^{n-p_1}}{1.2\ldots(n-p_1)}\frac{d^{q_1}\Phi}{dy^{q_1}}.$$

et

$$\left|\frac{\partial^{q_2} U'(z'_2)}{\partial y^{q_2}}\right| < \frac{d^{q_2}}{dy^{q_2}} F(y) \sum \frac{\partial^{n-p_1}}{1.2\ldots(n-p_1)} \frac{d^{q_1}\Phi}{dy^{q_1}},$$

$$|z'_3| < \frac{\partial^n}{2.3\ldots(n+1)} F \sum \frac{\partial^{n-p_1}}{1.2\ldots(n-p_1)} \frac{d^{q_1}\Phi}{dy^{q_1}},$$

$$\left|\frac{\partial^{p_2+q_2} z'_3}{\partial x^{p_2} \partial y^{q_2}}\right| < \frac{\partial^{n-p_2}}{2.3\ldots(n-p_2+1)} \frac{d^{q_2}}{dy^{q_2}} F \sum \frac{\partial^{n-p_1}}{1.2\ldots n-p_1} \frac{d^{q_1}\Phi}{dy^{q_1}}.$$

Relativement à $x - x_0$, $U'(z'_2)$ commence par un terme du degré 1, z'_3 commence donc par un terme de degré $n+1$; il en résulte que toutes ses dérivées d'ordre $n-1$ au plus et, par suite, $U'(z'_3)$ commencent par un terme de degré 2 au moins. On voit par là comment on peut continuer la recherche des inégalités successives (¹) et arriver à l'inégalité générale

$$|z'_{m+1}| < \frac{\partial^n}{A^n_{n+m-1}} F \sum \frac{\partial^{s_{m-1}}}{A^{s_{m-1}}_{s_{m-1}+m-2}} \frac{d^{q_{m-1}}}{dy^{q_{m-1}}} F \sum \ldots F \sum \frac{\partial^{s_1}}{A^{s_1}_{s_1}} \frac{d^{q_1}}{dy^{q_1}} \Phi.$$

Dans cette inégalité, nous avons fait le changement $n - p = s$, de sorte que chaque Σ introduit tous les systèmes d'indices q et s satisfaisant à

$$n \geqq s \geqq q + 1 > 0.$$

Désignons par Z_{m+1} le second membre de l'inégalité ; tout se ramène actuellement à démontrer que la série

$$Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_m + \ldots$$

est convergente. A cet effet, nous allons prouver que, quels que soient ∂ et ε, le rapport

$$\frac{Z_{m+1}}{Z_m}$$

tend vers 0 quand m croît indéfiniment.

En effectuant les calculs, on trouve

$$= \frac{\partial^n}{A^n_{n+m-1}} \frac{NM^{m-1}}{1-\varepsilon} \sum \ldots \sum \frac{A^{q_1}_{q_1}}{A^{s_1}_{s_1}} \frac{A^{q_2}_{q_1+q_2+1}}{A^{s_2}_{s_2+1}} \cdots \frac{A^{q_{m-1}}_{q_1+\ldots+q_{m-1}+m-2}}{A^{s_{m-1}}_{s_{m-1}+m-2}} \frac{\partial^{s_1+s_2+\ldots+s_{m-1}}}{\rho^{q_1+q_2+\ldots+q_{m-1}}} \frac{1}{(1-\varepsilon)^{q_1+\ldots+q_{m-1}+m-2}}.$$

(¹) Par l'application des remarques faites dans le premier Chapitre à propos de l'intégration des séries.

Considérons un système quelconque d'indices $q_1, q_2, \ldots, q_{m-2}, s_1, s_2, \ldots, s_{m-2}$, il y correspondra un seul terme dans Z_m, terme qui sera

$$\frac{\delta^n}{A^n_{n+m-2}} \frac{NM^{m-2}}{1-\varepsilon} \frac{A^{q_1}_{q_1}}{A^{s_1}_{s_1}} \cdots \frac{A^{q_{m-2}}_{q_1+\ldots+q_{m-2}+m-3}}{A^{s_{m-2}}_{s_{m-2}+m-3}} \frac{\delta^{s_1+\ldots+s_{m-2}}}{\rho^{q_1+\ldots+q_{m-2}}} \frac{1}{(1-\varepsilon)^{q_1+\ldots+q_{m-2}+m-3}}.$$

Dans Z_{m+1}, il y correspondra tout un groupe de termes, mais on voit facilement que la plus grande partie du précédent s'y trouvera en facteur.

Après avoir mis ce terme en facteur dans tout le groupe, il restera

$$\frac{A^n_{n+m-2}}{A^n_{n+m-1}} M \sum \frac{A^{q_{m-1}}_{q+\ldots+q_{m-1}+m-2}}{A^{s_{m-1}}_{s_{m-1}+m-2}} \frac{\delta^{s_{m-1}}}{\rho^{q_{m-1}}} \frac{1}{(1-\varepsilon)^{q_{m-1}+1}},$$

le Σ correspondant à toutes les combinaisons d'indices q_{m-1} et s_{m-1}. Le rapport $\frac{Z_{m+1}}{Z_m}$ est donc de la forme

$$\frac{B_1 C_1 + B_2 C_2 + \ldots + B_\lambda C_\lambda}{B_1 + B_2 + \ldots + B_\lambda}.$$

On sait qu'un tel rapport est compris entre la plus grande et la plus petite des quantités C.

Nous allons démontrer que toutes les quantités C tendent vers o; il en résultera donc que $\frac{Z_{m+1}}{Z_m}$ tendra vers o.

Le facteur $\frac{A^n_{n+m-2}}{A^n_{n+m-1}}$ est une fraction rationnelle en m, les deux termes sont tous deux de degré n, et, dans chacun d'eux, le coefficient de m^n est 1; ce facteur tend donc vers 1 quand m croît indéfiniment.

Voyons le Σ : il se compose de $\frac{n(n-1)}{2}$ termes; comme ce nombre est indépendant de m, il suffit de prouver que chaque terme tend vers o.

Un terme du Σ se compose de deux portions : la première

$$\frac{\delta^{s_{m-1}}}{\rho^{q_{m-1}}} \frac{1}{(1-\varepsilon)^{q_{m-1}+1}}$$

reste comprise entre des limites fixes, puisque s_{m-1} et q_{m-1} sont compris entre o et n.

La seconde

$$\frac{A^{q_{m-1}}_{q_1+q_2+\ldots+q_{m-1}+m-2}}{A^{s_{m-1}}_{s_{m-1}+m-2}}$$

est, puisque $q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}$ sont plus petits que n, moindre que

$$\frac{A^{q_{m-1}}_{n(m-1)-1}}{A^{s_{m-1}}_{s_{m-1}+m-2}}.$$

Quel que soit le système d'indices q_{m-1}, s_{m-1}, satisfaisant à

$$n \geqq s_{m-1} \geqq q_{m-1} + 1 > 0,$$

c'est une fraction rationnelle en m; le degré du numérateur est q_{m-1}, celui du dénominateur est s_{m-1}, et de l'inégalité $s_{m-1} \geqq q_{m-1} + 1$ résulte qu'elle tend vers o quand m croît indéfiniment.

Il est donc démontré que la série

$$Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_m + \ldots$$

est convergente quels que soient δ et ε.

Nous avons ainsi démontré que la série

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_m + \ldots$$

peut s'ordonner en $x - x_0$, $y - y_0$; la série ainsi obtenue étant absolument convergente dans tout rectangle δ, $\rho\varepsilon$, il en résulte qu'elle est absolument convergente dans tout le rectangle Δ, ρ. Donc :

Théorème I. — *La série en $x - x_0$, $y - y_0$, qui représente l'intégrale cherchée, est absolument convergente dans un rectangle dont la dimension parallèle à Ox est indépendante des fonctions initiales $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ supposées développables en y_0.*

On en déduit immédiatement :

Corollaire. — *Par chaque point (x_0, y_0), situé dans la région où tous les a_{ik} sont analytiques, passe un segment L parallèle à Ox. Quelles que soient les fonctions initiales $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ développables en y_0, l'intégrale correspondante est développable en tous les points de L.*

Soit un segment S parallèle à Oy et situé dans la région où tous les a_{ik} sont analytiques, les segments L, qui correspondent aux différents points de S, forment une région R entourant complètement S. Il résulte immédiatement du corollaire précédent que, si les fonctions initiales sont analytiques sur tout S, l'intégrale z sera analytique dans tout R, donc :

Théorème II. — *A tout segment* S, *parallèle à* Oy *et situé entièrement dans la région où tous les* a_{ik} *sont analytiques, correspond une région* R, *l'entourant complètement.*

Quelles que soient les fonctions initiales $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ *analytiques sur tout* S, *l'intégrale correspondante* Z *est analytique dans tout* R.

Considérons maintenant une équation linéaire quelconque mais dont l'équation caractéristique n'a qu'une racine a; prenons un segment S le long duquel a et tous les coefficients de l'équation sont analytiques; formons α solution de

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + a \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0$$

et se réduisant par exemple à y le long de S. α sera analytique le long de S et, en faisant le changement de variables

$$x' = x,$$
$$y' = \alpha(x, y),$$

on en tirera

$$x = x',$$
$$y = \beta(x', y'),$$

β étant analytique tout le long d'un segment S′ parallèle à Oy' et correspondant à S.

Avec ces nouvelles variables on sera ramené au cas précédent. En appliquant le théorème II, puis revenant aux anciennes variables x et y, nous obtiendrons :

Théorème III. — *A tout segment* S, *parallèle à* Oy *et situé dans une région où la racine unique de l'équation caractéristique et tous les coefficients sont analytiques, correspond une région* R, *l'entourant complètement.*

Quelles que soient les fonctions initiales analytiques sur tout S, *l'intégrale correspondante est analytique dans tout* R.

II. — Équations à caractéristiques quelconques.

Mettons l'équation sous la forme

$$\omega(z) = u(z),$$

et considérons le segment S parallèle à Oy et entièrement situé dans une région où tous les coefficients de l'équation sont analytiques et où toutes les racines de l'équation caractéristique $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont réelles et analytiques.

Soient $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ les n fonctions initiales supposées analytiques tout le long de S. Pour intégrer par approximations successives, nous aurons à considérer la suite infinie d'équations

$$\omega(z_1) = 0, \qquad \omega(z_2) = u(z_1), \qquad \ldots, \qquad \omega(z_m) = u(z_{m-1}), \qquad \ldots,$$

la première étant intégrée avec les conditions initiales $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ et toutes les suivantes avec les conditions initiales o, o, ..., o.

Nous pouvons former une région R satisfaisant aux conditions du lemme V et à l'intérieur de laquelle tous les coefficients de u sont analytiques.

Il résulte de ce lemme que z_1 est analytique dans R; il en sera de même de $u(z_1)$ et, par suite, de z_2, etc. De sorte que toutes les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ sont analytiques dans R.

Admettons pour un moment que la série $z_1 + z_2 + \ldots + z_m + \ldots$ soit convergente dans une certaine portion de R. Soit z sa somme, je dis que z est la solution cherchée. En effet, en additionnant les m premières équations et tenant compte de ce que ω et u sont linéaires et homogènes, nous aurons

$$\omega(z_1 + z_2 + \ldots + z_m) = u(z_1 + z_3 + \ldots + z_{m-1}),$$

égalité vraie quel que soit m. En faisant croître m indéfiniment les deux sommes tendront vers z, de sorte qu'on aura

$$\omega(z) = u(z).$$

Quant aux fonctions initiales de z, on voit immédiatement qu'elles se réduisent à celles de z_1, de sorte que tout se ramène à la question de convergence.

A cet effet, formons une fonction $\Omega(\zeta)$ en remplaçant dans ω tous les a par la fonction $\alpha(\xi, \eta)$, comme dans le lemme VIII. Remplaçons aussi dans u tous les coefficients par des fonctions analogues, ce qui nous donnera U et considérons l'équation

$$\Omega(\zeta) = \mathrm{U}(\zeta)$$

que nous allons intégrer en prenant des fonctions initiales $\varphi_0(\eta), \ldots, \varphi_{n-1}(\eta)$ telles que

$$(\mathrm{Y}_i)_{\mathrm{S}} \ll \varphi_i(\eta)_{\mu_0} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Cette équation est du genre étudié dans le paragraphe précédent. En l'intégrant par approximations successives on aura les équations

$$\Omega(\zeta_1) = 0, \qquad \Omega(\zeta_2) = \mathrm{U}(\zeta_1), \qquad \ldots, \qquad \Omega(\zeta_m) = \mathrm{U}(\zeta_{m-1}), \qquad \ldots.$$

D'après ce qui a été démontré, il existera un segment de la caractéristique issue de μ_0, indépendant des fonctions initiales, en tous les points duquel $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m, \ldots$ seront développables et, en outre, en tous ces points, la série

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_m + \ldots$$

sera absolument convergente.

Il suffit de faire le simple changement de variables, déjà considéré, qui ramène les caractéristiques à être des droites parallèles à Ox pour voir immédiatement qu'en un point quelconque μ de ce segment de caractéristique, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m, \ldots$, sont des séries ordonnées, qui sont toutes absolument convergentes dans le même rectangle.

Ceci posé, nous pouvons, comme dans le lemme VIII, prendre un segment Γ sur le segment précédent et lui faire correspondre la région R, de façon qu'en un point quelconque μ de Γ la fonction α et les coefficients de U soient des fonctions majorantes pour les a et les coefficients de u en un point quelconque du segment S_μ.

Par l'application de ce lemme on obtiendra les formules suivantes, dont chacune est une conséquence de la précédente,

$$(z_1)_{\mathrm{S}_\mu} \ll (\zeta_1)_\mu, \quad u(z_1)_{\mathrm{S}_\mu} \ll \mathrm{U}(\zeta_1)_\mu, \quad (z_2)_{\mathrm{S}_\mu} \ll (\zeta_2)_\mu, \quad u(z_2)_{\mathrm{S}_\mu} \ll \mathrm{U}(\zeta_2)_\mu, \quad \ldots.$$

Soit r_μ le rectangle où toutes les séries $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m, \ldots$ ordonnées au point μ, sont absolument convergentes. Soit ρ_μ le rectangle dans lequel la série

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_m + \ldots,$$

ordonnée de la même façon, est absolument convergente.

Soit M un point quelconque de R; il est sur un segment S_μ. Les séries qui représentent $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m, \ldots$ en μ étant respectivement majorantes pour les séries $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ en M, il en résulte que ces dernières séries sont toutes absolument convergentes dans un même rectangle égal à r_μ. En outre, la série $\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_m + \ldots$ étant absolument convergente, dans tout le rectangle ρ_μ, il résulte d'un théorème déjà cité, sur les séries ordonnées, que la série

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_m \ldots$$

est convergente au voisinage de M et peut, en ce point, s'ordonner en donnant une série absolument convergente dans un rectangle égal à ρ_μ.

Il est donc démontré que dans la région R, *qui ne dépend pas des fonctions initiales,* la série $z_1 + z_2 + \ldots + z_m + \ldots$ est convergente et en chaque point de R peut s'ordonner.

Mais R ne s'étend que du côté des x positifs. En faisant le changement de variables

$$x' = -x, \qquad y' = y,$$

et recommençant le raisonnement, on aurait trouvé une région analogue du côté des x négatifs.

Considérons maintenant une équation non homogène

$$\omega(z) = u(z) + \theta(x, y),$$

et supposons qu'en tous les points du segment S, la fonction θ soit analytique. On ramènera au cas précédent en posant

$$z = z' + \theta'(x, y),$$

θ' étant une solution de la proposée ayant o, o, ..., o pour fonctions initiales le long de S; z' sera solution de

$$\omega(z) = u(z)$$

et ayant les fonctions initiales données; θ' ne dépendant pas de ces fonctions et z' étant analytique dans une région qui n'en dépend pas; il en est de même de $z' + \theta'$, c'est-à-dire de z.

En rapprochant ces résultats de ceux fournis par les lemmes IV et V et le théorème III, nous arrivons à une propriété générale des équations linéaires à caractéristiques réelles.

Théorème. — *Soit une équation linéaire quelconque mise sous la forme*

$$\omega(z) = u(z) + \theta(x, y),$$

à tout segment S, *parallèle à* Oy *et situé dans une région où toutes les racines de l'équation caractéristique sont réelles et où toutes ces racines ainsi que* θ *et tous les coefficients de* u *sont analytiques, correspond une région* R *l'entourant complètement.*

Quelles que soient les fonctions initiales analytiques sur tout S, *l'intégrale correspondante est analytique dans tout* R.

Nous allons maintenant étudier une équation linéaire quelconque dans une région plus étendue P, définie de la façon suivante :

1° *Tous les coefficients de l'équation sont analytiques dans tout* P;

2° *Il n'y a aucun point à l'intérieur de* P *où tous les coefficients des termes d'ordre* n *s'annulent simultanément;*

3° *En tout point de* P *l'équation caractéristique a toutes ses racines réelles;*

4° *Toutes ces racines sont analytiques dans tout* P, *sauf en certains points, isolés ou formant des lignes, qui sont des pôles, c'est-à-dire où leurs inverses sont analytiques.*

Considérons un arc analytique régulier σ entièrement situé dans P, c'est-à-dire ne pouvant avoir, au plus, que ses extrémités sur le contour de P. Supposons, en outre, que σ ne possède aucune tangente caractéristique. Il est évident que l'on pourra décomposer σ en arcs σ_1, σ_2, ..., empiétant les uns sur les autres et tels que le premier n'ait aucune tangente parallèle à Ox, le second aucune tangente parallèle à Oy, le troisième aucune tangente parallèle à Ox, etc.

Prenons un quelconque de ces arcs, par exemple σ_1 qui n'a aucune tangente parallèle à Ox; le long de σ_1, y sera une fonction analytique de x

$$y = \varphi(x);$$

faisons le changement,

$$\begin{aligned} x' &= y - \varphi(x), & x &= y', \\ y' &= x, & y &= x' + \varphi(y'). \end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{P}(XY)$ le polynôme caractéristique de l'équation proposée. On voit, par un calcul facile, que le polynôme caractéristique $\mathfrak{P}'(X'Y')$ de l'équation transformée s'obtiendra en faisant dans les coefficients de $\mathfrak{P}$ le changement de variables, puis en posant

$$\begin{aligned} X &= Y' - X'\varphi'(y'), \\ Y &= X'. \end{aligned}$$

Si, en un point, $\mathfrak{P}'$ était identiquement nul, il en serait de même de $\mathfrak{P}$; donc, en aucun point de σ_1, les coefficients de $\mathfrak{P}'$ ne seront simultanément nuls.

Une racine a de l'équation caractéristique conduira dans la transformée à la racine a' liée à la première par

$$a = \frac{1 + a'\varphi'}{a'},$$

ce que l'on peut écrire

$$a' = \frac{1}{a - \varphi'} \qquad \text{ou} \qquad a' = \frac{\frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}\varphi'}.$$

En un point quelconque de σ_1, a ou $\frac{1}{a}$ est analytique. Si c'est a, $a - \varphi'$ est analytique et n'est pas nul parce que la tangente n'est pas caractéristique : donc a' est analytique. Si c'est $\frac{1}{a}$, on obtient le même résultat en prenant la seconde forme de a'.

De ces remarques résulte que le segment σ_1 se transforme en un segment S_1 parallèle à Oy'; en tout point de S_1, tous les coefficients de l'équation sont analytiques, les coefficients des termes d'ordre n ne s'annulent pas simultanément et les racines de l'équation caractéristique sont toutes réelles et analytiques. Puisque le coefficient de $\frac{\partial^n z}{\partial x'^n}$ ne s'annule pas, on peut ramener l'équation à la forme employée dans le théorème précédent et appliquer ce théorème. En revenant ensuite aux variables x et y, on obtiendra une région ρ_1 entourant σ_1. Les segments σ_1, σ_2, ... empiétant les uns sur les autres et les régions ρ_1, ρ_2, ... les entourant complètement, la région totale ρ, formée par toutes les régions ρ_1, ρ_2, ..., entourera complètement l'arc analytique σ.

Nous pouvons donc maintenant énoncer la propriété générale que nous avions en vue :

Théorème général I. — *Étant donnée une équation linéaire quelconque à coefficients analytiques et à laquelle correspondent des régions* P, *à tout arc analytique régulier* σ *situé complètement dans une région* P *et n'ayant aucune tangente caractéristique, correspond une région* ρ *l'entourant complètement.*

Quelles que soient les fonctions initiales supposées analytiques sur tout σ, *l'intégrale correspondante est analytique dans tout* ρ.

Nous appellerons cette région ρ, dont l'existence est maintenant démontrée dans tous les cas, le *domaine de l'arc* σ.

Il est évident, en outre, d'après la façon dont on obtient ρ, que si σ se déplace et se déforme d'une façon continue dans P, son domaine ρ en fera autant.

III. — Lignes singulières essentielles.

On dit que Γ est une ligne singulière essentielle de $z(x, y)$, si z est analytique d'un côté de Γ et ne peut se prolonger analytiquement au delà de Γ.

Supposons qu'une intégrale d'une équation linéaire soit analytique en un point de P. En cherchant à la prolonger analytiquement, il peut se faire qu'avant d'arriver au contour de P on rencontre des points isolés où la fonction cesse d'être régulière, ou bien que l'on rencontre des lignes singulières essentielles.

Nous allons prouver que toute ligne singulière essentielle distincte du contour de P est forcément une caractéristique ou est formée par des segments de caractéristiques.

Supposons que Γ ne soit pas une caractéristique, on pourra trouver sur Γ un point M non anguleux et où la tangente ne soit pas caractéristique. Par ce point M on pourra faire passer un arc analytique régulier σ ne traversant pas Γ, situé entièrement dans P et dans la région où l'intégrale est, par hypothèse, analytique et, en outre, ne possédant aucune tangente caractéristique. Soit ρ son domaine. Nous pouvons déplacer et déformer infiniment peu cet arc σ de façon qu'il devienne σ_1, satisfaisant aux mêmes conditions, mais ne passe plus par M et que son domaine ρ_1, qui diffère infiniment peu de ρ, contienne encore le point M; l'intégrale pourra être considérée comme définie par des conditions initiales analytiques tout le long de σ_1 et, par suite, sera analytique dans tout ρ_1.

Or ρ_1 est traversé par Γ; donc, au voisinage de M, l'intégrale pourrait se prolonger analytiquement au delà de Γ et, par suite, cette ligne ne serait pas une ligne singulière essentielle.

On est alors conduit à distinguer deux sortes de lignes singulières des intégrales, le premier groupe étant formé par les lignes qui limitent les régions P et le second par des caractéristiques, de sorte que nous obtenons :

Théorème général II. — *Dans une région où toutes les racines de l'équation caractéristique sont réelles, les intégrales analytiques ne peuvent présenter que deux sortes de lignes singulières essentielles :*

I. *Des lignes singulières essentielles mobiles. Ces lignes sont forcément des caractéristiques de l'équation proposée;*

II. *Des lignes singulières essentielles fixes. Ces lignes sont les suivantes :*

1° *Les lignes le long desquelles tous les coefficients des termes d'ordre n s'annulent simultanément;*

2° *Les lignes singulières essentielles des coefficients;*

3° *Les lignes singulières essentielles des racines de l'équation caractéristique à l'exception des lignes polaires de ces racines.*

En nous plaçant, comme nous l'avons toujours fait, au point de vue des fonctions réelles de variables réelles, nous avons encore à étudier les points isolés où l'intégrale cesse d'être régulière.

Il peut exister des points isolés qui annulent simultanément tous les coefficients des termes d'ordre n, des points singuliers isolés des coefficients et des points singuliers isolés des racines de l'équation caractéristique, en exceptant les points polaires de ces racines. Pour former les régions P, il a fallu entourer ces points par des cercles infiniment petits.

Admettons qu'un point M, distinct des précédents et non situé sur une ligne singulière fixe, soit un point singulier isolé d'une intégrale analytique. On voit immédiatement qu'on peut trouver un arc σ_1, analogue à celui de la démonstration précédente, et dont le domaine ρ_1 contienne M. Il en résulte que l'intégrale est régulière en M.

Il peut arriver qu'une intégrale déterminée d'une certaine façon soit régulière tout le long d'une ligne singulière fixe, sauf en certains de ses points, lesquels dépendront de l'intégrale, de sorte que nous obtenons :

Théorème général III. — *Dans une région où toutes les racines de l'équation caractéristique sont réelles, les intégrales analytiques ne peuvent présenter que deux sortes de points singuliers isolés :*

I. *Les points singuliers isolés mobiles. Ces points sont forcément situés sur les lignes singulières fixes ;*

II. *Les points singuliers isolés fixes. Ils sont de trois sortes :*

1° *Les points isolés qui annulent simultanément tous les coefficients des termes d'ordre n ;*

2° *Les points singuliers isolés des coefficients ;*

3° *Les points singuliers isolés des racines de l'équation caractéristique, à l'exception des points polaires.*

Considérons le domaine D dans lequel une intégrale est analytique. Le contour de ce domaine peut présenter des points anguleux. Soit M l'un d'eux, et supposons qu'il ne soit sur aucune ligne singulière fixe et ne coïncide avec aucun point singulier isolé fixe. La pointe de l'angle M ne peut être tournée vers l'intérieur de D. En effet, supposons qu'il en soit ainsi : on pourrait trouver un arc analytique régulier σ passant par M, n'ayant aucune tangente caractéristique et entièrement situé dans D. Cet arc σ aurait un domaine ρ, puisque, d'après les hypothèses faites sur M, σ serait entièrement dans une région P. On pourrait déplacer infiniment peu σ de façon qu'il ne passe plus par M, mais conserve ses autres propriétés, et que son domaine contienne encore M. Il en résulterait qu'au voisinage de M l'intégrale pourrait s'étendre analytiquement en dehors de D, ce qui est contraire à l'hypothèse, de sorte que l'on a :

Théorème général IV. — *Le contour du domaine dans lequel une intégrale est analytique ne peut présenter de points anguleux dirigés vers l'intérieur, à moins que ces points n'appartiennent aux lignes singulières fixes ou ne coïncident avec des points singuliers isolés fixes.*

IV. — Application à une classe d'équations linéaires.

Considérons les équations linéaires satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Tous les coefficients des termes d'ordre n sont des constantes réelles;*

2° *Les racines de l'équation caractéristique, qui sont des constantes, sont toutes réelles;*

3° *Tous les coefficients sont analytiques dans tout le plan.*

Nous représenterons de telles équations par $\Omega(z) = U(z) + \Theta(x,y)$ ou plus simplement par $V(z) = 0$.

Pour de telles équations il n'existe pas de lignes singulières fixes, ni de points singuliers isolés fixes. Les intégrales ne peuvent donc avoir que des lignes singulières essentielles qui seront des caractéristiques, et celles-ci sont ici des droites parallèles à des directions fixes.

Supposons que l'équation caractéristique ait m racines distinctes et considérons le domaine dans lequel une intégrale est analytique. Le théorème général II nous montre que ce domaine sera limité par des caractéristiques, c'est-à-dire sera un polygone ayant ses côtés parallèles à m directions fixes. Le théorème général IV nous montre qu'il sera convexe et, par suite, aura au plus deux côtés parallèles à une direction, c'est-à-dire, en tout, au plus $2m$ côtés. Quant au théorème général III, il nous prouvera que l'intégrale ne possède pas de points singuliers isolés.

Ce polygone peut très bien ne pas être fermé, c'est-à-dire s'étendre à l'infini; le contour est alors une ligne brisée convexe s'étendant à l'infini; dans les deux sens, elle a au plus $m+1$ côtés, et le domaine dans lequel l'intégrale est analytique est la portion du plan située dans sa concavité. On a donc :

THÉORÈME. — *Le domaine dans lequel une intégrale quelconque d'une équation* $V(z)=0$ *est analytique est l'aire d'un polygone convexe ayant au plus* $2m$ *côtés parallèles aux* m *directions caractéristiques distinctes, ou la portion du plan située dans la concavité d'une ligne brisée convexe illimitée ayant au plus* $m+1$ *côtés parallèles à ces* m *directions.*

Supposons que, par un procédé quelconque, on ait démontré qu'une intégrale de $V(z)$ est analytique dans un domaine D. Elle sera analytique dans l'intérieur d'un polygone convexe contenant D. Comprenons D de toutes les façons possibles, entre deux parallèles à chaque direction caractéristique. La partie commune à toutes les bandes ainsi formées constituera un polygone analogue à ceux du théorème précédent et qui sera intérieur à tout polygone du même genre contenant D. On pourra donc affirmer que l'intégrale est analytique dans tout ce polygone.

Considérons maintenant deux ou plusieurs équations $V(z)$ ayant une intégrale analytique commune.

Supposons que les équations caractéristiques aient q racines distinctes communes. Les lignes singulières essentielles de l'intégrale commune ne pourront être que des caractéristiques communes, et, par suite :

THÉORÈME. — *Si plusieurs équations* $V(z)$, *ayant en commun* q *directions caractéristiques distinctes, ont une intégrale analytique commune, cette intégrale est analytique à l'intérieur d'un polygone convexe ayant* $2q$ *côtés au plus, parallèles à ces* q *directions. Ce polygone peut se réduire à une ligne brisée convexe illimitée ayant au plus* $q+1$ *côtés.*

Si les équations $V(z)$ n'ont aucune direction caractéristique commune, l'intégrale commune ne pourra avoir de lignes singulières essentielles et, par suite, sera analytique dans tout le plan.

THÉORÈME. — *Si plusieurs équations* $V(z)$, *n'ayant aucune direction caractéristique commune, ont une intégrale analytique commune, cette intégrale est analytique dans tout le plan.*

Occupons-nous maintenant du domaine dans lequel une intégrale de $V(z)$ est analytique, cette intégrale étant déterminée par des conditions initiales.

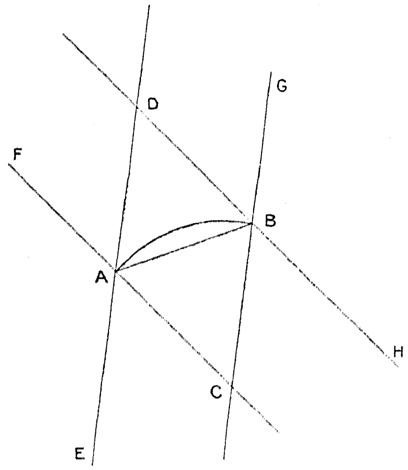
Pour abréger, nous appellerons polygone V tout polygone convexe ayant ses côtés parallèles aux directions caractéristiques de $V(z)$.

Soit un arc analytique régulier. Prenons-en un segment quelconque σ ne possédant aucune tangente caractéristique, sauf peut-être à ses extrémités A et B, et supposons que les fonctions initiales soient analytiques sur tout σ, qu'il y en ait au moins une qui ne puisse se prolonger analytiquement au delà de A et une au moins qui ne puisse se prolonger au delà de B. A et B seront forcément sur le contour du polygone V dans lequel l'intégrale sera analytique.

Si l'équation $V(z)$ n'a qu'une seule direction caractéristique, ce polygone V sera déterminé par cette seule condition : ce sera la bande limitée par les deux caractéristiques issues de A et B. Le problème serait même résolu si, avec les hypothèses précédentes, les coefficients de $U(z)$ et la fonction Θ avaient des lignes singulières essentielles; σ serait entièrement contenu dans une région P où ces coefficients seraient analytiques. On formerait la région Q telle qu'on puisse aller d'un quelconque de ses points au segment σ en suivant l'unique caractéristique et sans sortir de P; Q serait la plus petite région contenant σ et limitée par des caractéristiques ou des lignes singulières fixes; donc l'intégrale serait analytique dans tout Q. En général, elle ne pourrait s'étendre analytiquement au delà, mais on conçoit qu'il pourrait exister des cas où il en serait autrement.

Supposons maintenant que l'équation $V(z)$ ait au moins deux directions caractéristiques distinctes. Menons par O les parallèles à ces m directions; elles détermineront $2m$ angles rayonnant autour de O. Il résulte immédiatement, de ce que σ n'a aucune tangente caractéristique, que si l'on transporte cet arc parallèlement à lui-même, de façon qu'une de ses extrémités A ou B vienne en O, la droite AB ne coïncidera avec aucune des m directions et, en outre, la droite AB et l'arc σ seront entièrement dans un même angle. Par les points A et B, menons les parallèles aux deux côtés de cet angle (*fig.* 1). Nous déterminerons ainsi deux régions, la première étant le parallélogramme ABCD et la seconde la région illimitée EAFGBH.

Fig. 1.



Quelques remarques de Géométrie élémentaire montrent facilement :

1° Tout polygone V, dont le contour passe par A et B, contient le parallélogramme ABCD;

2° Tout polygone V, dont le contour passe par A et B, est entièrement à l'intérieur de EAFGBH.

Ces deux régions ne dépendent pas de l'arc σ lui-même, mais seulement de ses deux extrémités A et B, de sorte que :

Théorème. — *A tout système de deux points* A *et* B, *tels que la droite* AB *ne soit pas une caractéristique, correspond un parallélogramme p. Tout arc analytique régulier, allant de* A *en* B *et n'ayant aucune tangente caractéristique, est entièrement contenu dans p, et quelles que soient les fonctions initiales analytiques sur σ, l'intégrale correspondante est analytique dans tout p.*

Quant à la seconde région qui correspond à AB, on peut dire que, si toutes les fonctions initiales ne peuvent s'étendre au delà de σ, l'intégrale ne pourra jamais s'étendre analytiquement au dehors de cette région.

Considérons un arc analytique régulier illimité dans les deux sens, n'ayant aucune tangente ni asymptote caractéristique et supposons les fonctions initiales analytiques sur cette courbe. En prenant deux points A et B sur elle, l'intégrale sera analytique dans le parallélogramme correspondant p, et si l'on fait éloigner A et B dans des sens différents, de façon à les envoyer tous deux à l'infini, on voit que, d'après les hypothèses faites, p arrivera à recouvrir tout le plan. Donc :

Théorème. — *Si un arc analytique régulier illimité dans les deux sens n'a aucune tangente ou asymptote caractéristique, toute intégrale, définie par des conditions initiales analytiques tout le long de cette courbe, est analytique dans tout le plan.*

C'est, par exemple, ce qui arrive lorsqu'on se donne les conditions initiales analytiques tout le long d'une droite indéfinie non caractéristique.

CHAPITRE III.

Nous nous proposons maintenant d'étendre aux équations linéaires, à un nombre quelconque de variables, la plupart des résultats précédemment obtenus. Pour ne pas compliquer inutilement les notations et le langage, nous prendrons des équations à trois variables ; les raisonnements seront tout à fait généraux.

1. Soit

$$\sum A_{ijk} \frac{\partial^{i+j+k} f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}$$

l'ensemble des termes d'ordre n. Cherchons à intégrer l'équation en nous donnant toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n-1$ sur une surface $F(x, y, z) = 0$.

Sur cette surface, $\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}$ $(i+j+k=n-1)$ sera une fonction connue de x et y, il en sera de même de ses dérivées par rapport à x et y,

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{i+1} \partial y^j \partial z^k} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^{k+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{j+1} \partial z^k} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^{k+1}},$$

c'est-à-dire de

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^{i+1} \partial y^j \partial z^k} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^{k+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{j+1} \partial z^k} - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^{k+1}}.$$

On en déduira de proche en proche

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)^i \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)^j \frac{\partial^n f}{\partial z^n} + \text{fonction connue de } x \text{ et } y.$$

En portant dans l'équation proposée, on obtiendra une équation du premier degré pour déterminer $\frac{\partial^n f}{\partial z^n}$, d'où l'on déduira les autres dérivées d'ordre n. Mais le coefficient de $\frac{\partial^n f}{\partial z^n}$ est

$$\sum A_{ijk} \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)^i \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)^j;$$

il y a exception s'il est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$\sum A_{ijk} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^j \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^k = 0.$$

Nous appellerons les surfaces ainsi définies *surfaces caractéristiques*. Considérons le polynôme caractéristique

$$\sum A_{ijk} X^i Y^j Z^k.$$

C'est ici que s'introduit la différence essentielle avec les équations à deux variables. C'est qu'à un système de valeurs non nulles de X et Y annulant un polynôme homogène en X et Y correspond un facteur linéaire, tandis que cela n'est plus vrai dans le cas de plus de deux variables; il peut alors exister des surfaces caractéristiques réelles sans que le polynôme caractéristique soit décomposable en facteurs linéaires réels.

Dans tout ce qui va suivre, nous ne nous occuperons que des *équations linéaires dont le polynôme caractéristique est décomposable en un produit de facteurs du premier degré à coefficients réels.*

On aura

$$\sum A_{ijk} X^i Y^j Z^k = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=n} (A_\lambda X + B_\lambda Y + C_\lambda Z)$$

dans certaines régions de l'espace. Les surfaces caractéristiques seront données par des équations de la forme

$$A \frac{\partial F}{\partial x} + B \frac{\partial F}{\partial y} + C \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Il y en aura n familles distinctes ou non.

Soient u et v deux solutions particulières de cette équation; les surfaces caractéristiques de cette famille seront

$$F(u, v) = 0,$$

F étant une fonction quelconque. On pourra considérer ces surfaces comme engendrées par les courbes

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.},$$

et ces courbes s'appelleront des *caractéristiques.*

2. On remarque que, si une équation linéaire $\theta(z) = 0$ a pour polynôme caractéristique $P(XYZ)$, l'équation

$$A \frac{\partial \theta}{\partial x} + B \frac{\partial \theta}{\partial y} + C \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

a pour polynôme caractéristique

$$(AX + BY + CZ) P(XYZ);$$

autrement dit, l'opération $A \frac{\partial \theta}{\partial x} + B \frac{\partial \theta}{\partial y} + C \frac{\partial \theta}{\partial z}$ introduit les surfaces caractéristiques

$$A\frac{\partial F}{\partial x}+B\frac{\partial F}{\partial y}+C\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Il en résulte que, si l'on forme l'équation

$$\left(A_n\frac{\partial}{\partial x}+B_n\frac{\partial}{\partial y}+C_n\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdots\left(A_2\frac{\partial}{\partial x}+B_2\frac{\partial}{\partial y}+C_2\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(A_1\frac{\partial f}{\partial x}+B_1\frac{\partial f}{\partial y}+C_1\frac{\partial f}{\partial z}\right)=0,$$

cette équation aura les mêmes caractéristiques que la proposée et que, si l'on représente l'expression précédente par $\omega(f)$, l'équation pourra se mettre sous la forme

$$\omega(f)=u(f)+\theta(x,y,z),$$

$u(f)$ étant une fonction linéaire et homogène de f et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$.

En outre, une équation

$$\omega(f)=\theta(x,y,z)$$

est équivalente au système

$$\begin{aligned}
&A_1\frac{\partial f}{\partial x}+B_1\frac{\partial f}{\partial y}+C_1\frac{\partial f}{\partial z}=t_1,\\
&A_2\frac{\partial t_1}{\partial x}+B_2\frac{\partial t_1}{\partial y}+C_2\frac{\partial t_1}{\partial z}=t_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&A_{n-1}\frac{\partial t_{n-2}}{\partial x}+B_{n-1}\frac{\partial t_{n-2}}{\partial y}+C_{n-1}\frac{\partial t_{n-2}}{\partial z}=t_{n-1},\\
&A_n\frac{\partial t_{n-1}}{\partial x}+B_n\frac{\partial t_{n-1}}{\partial y}+C_n\frac{\partial t_{n-1}}{\partial z}=\theta(x,y,z).
\end{aligned}$$

3. Considérons une équation linéaire

$$A\frac{\partial f}{\partial x}+B\frac{\partial f}{\partial y}+C\frac{\partial f}{\partial z}=\theta(x,y,z).$$

Soient f_1 et f_2 deux solutions particulières; en faisant le changement

$$x'=f_1(x,y,z),\qquad y'=f_2(x,y,z),\qquad z'=z.$$

Elle se ramènera à la forme

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = \theta'(x', y', z').$$

Les caractéristiques sont devenues des lignes

$$x' = \text{const.}, \qquad y' = \text{const.},$$

c'est-à-dire des parallèles à Oz'.

Si l'on se donne $\psi(x', y')$, à laquelle se réduit f pour $z' = z'_0$, on aura

$$f = \int_{z_0}^{z'} \theta'(x', y', z')\,dz' + \psi(x', y').$$

On voit donc que la série représentant f au voisinage de (x'_0, y'_0, z'_0) sera absolument convergente dans un parallélépipède, dont la dimension parallèle à Oz' sera indépendante de la fonction initiale, et, en revenant aux variables primitives, on retrouvera l'analogue du lemme III (Chapitre I) :

Il existe sur la caractéristique issue de (x_0, y_0, z_0) un segment L *tel que, quelle que soit la fonction initiale développable en x_0, y_0, l'intégrale soit développable en tous les points de* L.

En suivant exactement la même méthode que dans le Chapitre I, on en déduira la notion de domaine d'une aire σ parallèle à xOy, et l'on étendra facilement cette propriété au cas des équations

$$\omega(f) = \theta(x, y, z).$$

4. Considérons maintenant le lemme VI sur l'équation du premier ordre et les fonctions majorantes.

Soit

$$\frac{\partial f}{\partial z} = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c,$$

a, b, c étant analytiques en x_0, y_0, z_0 ; soit $e(x, y)$ la fonction initiale analytique en x_0, y_0.

Soient $\alpha(\xi, \eta, \zeta)$, $\beta(\xi, \eta, \zeta)$, $\gamma(\xi, \eta, \xi)$, $\varepsilon(\xi, \eta)$ des fonctions développables en $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$, et telles que l'on ait

$$a(x, y, z)_{M_0} < \alpha(\xi, \eta, \zeta)_{\mu_0}, \quad b(x, y, z)_{M_0} < \beta(\xi, \eta, \zeta)_{\mu_0}, \quad c(x, y, z)_{M_0} < \gamma(\xi, \eta, \zeta)_{\mu_0},$$
$$e(x, y)_{M_0} \leqq \varepsilon(\xi, \eta)_{\mu_0}.$$

Considérons l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \gamma$$

avec la condition initiale $\varepsilon(\xi, \eta)$ pour $\zeta = \zeta_0$.

Nous ferons correspondre par

$$z - z_0 = \zeta - \zeta_0$$

les points des deux caractéristiques issues de M_0 et μ_0

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{-1},$$
$$\frac{d\xi}{\alpha} = \frac{d\eta}{\beta} = \frac{d\zeta}{-1}$$

et nous prendrons les deux segments C et Γ analogues à ceux du lemme VI.

En calculant la dérivée sur la caractéristique, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\zeta}\frac{\partial^{i+j+k}\varphi}{\partial\xi^i\partial\eta^j\partial\zeta^k} &= \frac{d\xi}{d\zeta}\frac{\partial^{i+j+k+1}\varphi}{\partial\xi^{i+1}\partial\eta^j\partial\zeta^k} + \frac{d\eta}{d\zeta}\frac{\partial^{i+j+k+1}\varphi}{\partial\xi^i\partial\eta^{j+1}\partial\zeta^k} + \frac{\partial^{i+j+k+1}\varphi}{\partial\xi^i\partial\eta^j\partial\zeta^{k+1}}\\ &= -\alpha\frac{\partial^{i+j+k+1}\varphi}{\partial\xi^{i+1}\partial\eta^j\partial\zeta^k} - \beta\frac{\partial^{i+j+k+1}\varphi}{\partial\xi^i\partial\eta^{j+1}\partial\zeta^k} + \frac{\partial^{i+j+k+1}\varphi}{\partial\xi^i\partial\eta^j\partial\zeta^{k+1}}.\end{aligned}$$

En effectuant sur l'équation que vérifie φ l'opération $\frac{\partial^{i+j+k}}{\partial\xi^i\partial\eta^j\partial\zeta^k}$, on obtiendra dans le premier membre le terme $\frac{\partial^{i+j+k+1}\varphi}{\partial\xi^i\partial\eta^j\partial\zeta^{k+1}}$; dans le second membre on aura des termes de la forme

$$\lambda\frac{\partial^{i'+j'+k'}\alpha}{\partial\xi^{i'}\partial\eta^{j'}\partial\zeta^{k'}}\quad\frac{\partial^{i''+j''+k''}\varphi}{\partial\xi^{i''}\partial\eta^{j''}\partial\zeta^{k''}}$$

et des termes analogues avec β, puis le terme $\frac{\partial^{i+k+j}\gamma}{\partial\xi^i\partial\eta^j\partial\zeta^k}$.

Les λ seront des coefficients numériques, ceux qui s'introduisent dans la dérivation d'un produit et, en outre, parmi les deux premiers groupes de termes, on trouvera

$$\alpha \frac{\partial^{i+j+k+1}\varphi}{\partial\xi^{i+1}\partial\eta^j\partial\zeta^k} \quad \text{et} \quad \beta \frac{\partial^{i+j+k+1}\varphi}{\partial\xi^{i}\partial\eta^{j+1}\partial\zeta^k}.$$

On les fera passer dans le premier membre, et l'on continuera le raisonnement comme dans le lemme VI pour arriver à la même conclusion : *Quels que soient les points correspondants* M *et* μ *sur* C *et* Γ, *et quelles que soient les fonctions initiales* $e(x,y)$, $\varepsilon(\xi,\eta)$ *développables en* M_0, μ_0 *et telles que*

$$e(x,y)_{M_0} \ll \varepsilon(\xi,\eta)_{\mu_0},$$

1° f *sera développable en tous les points de* C;

2° φ *sera développable en tous les points de* Γ ;

3° *On aura toujours*

$$f(x,y,z)_M < \varphi(\xi,\eta,\zeta)_\mu.$$

Quant à la généralisation pour les aires et pour les équations $\omega(f)$, tout se fait comme dans le premier Chapitre et l'on est amené aux mêmes conclusions, sauf que les segments S_μ sont remplacés par des aires planes parallèles à xOy.

5. Pour suivre la même marche que dans le cas de deux variables, nous devons maintenant considérer les équations à un seul système de caractéristiques et commencer par l'équation

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n} = \sum a_{ijk} \frac{\partial^{i+j+k} f}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \qquad \left(\begin{matrix} i = 0, \ldots, n-1, \\ j = 0, \ldots, n-1, \\ k = 0, \ldots, n-1, \end{matrix} \quad i+j+k < n \right),$$

à laquelle on les ramène par un changement de variables.

Nous ferons pour cela la remarque analogue à celle déjà faite au commencement du Chapitre II : c'est que si une fonction $F(x,y,z)$ est en x_0, y_0, z_0, développable en série absolument convergente dans le parallélépipède ρ, ρ, Δ, on peut trouver M tel que dans tout l'intérieur du parallélépipède $\rho\varepsilon, \rho\varepsilon, \delta$ $(\varepsilon < 1, \delta < \Delta)$ on ait, quels que soient i et j,

$$\left| \frac{\partial^{i+j} F}{\partial x^i \partial y^k} \right| < \left[\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \frac{M}{\left(1 - \frac{x-x_0}{\rho}\right)\left(1 - \frac{y-y_0}{\rho}\right)} \right]_{\substack{x = x_0 + \rho\varepsilon \\ y = y_0 + \rho\varepsilon}}.$$

En recommençant tous les raisonnements du début du Chapitre II, on sera conduit, pour arriver à une conclusion analogue, à démontrer la convergence de la série dont le terme général sera

$$\begin{aligned}F_{m+1} = {} & \frac{\partial^n}{A^n_{n+m-1}} \frac{NM^{m-1}}{1-\varepsilon} \sum \cdots \sum \frac{A^{\alpha_1}_{\alpha_1} A^{\beta_1}_{\beta_1}}{A^{s_1}_{s_1}} \frac{A^{\alpha_2}_{\alpha_1+\alpha_2+1} A^{\beta_2}_{\beta_1+\beta_2+1}}{A^{s_2}_{s_2+1}} \cdots \\ & \times \frac{A^{\alpha_{m-1}}_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1}+m-2} A^{\beta_{m-1}}_{\beta_1+\ldots+\beta_{m-1}+m-2}}{A^{s_{m-1}}_{s_{m-1}+m-2}} \\ & \times \frac{\partial^{s_1+\ldots+s_{m-1}}}{\rho^{\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1}+\beta_1+\ldots+\beta_{m-1}}} \frac{1}{(1-\varepsilon)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1}+\beta_1+\ldots+\beta_{m-1}+m-2}}.\end{aligned}$$

Dans cette formule, toutes les combinaisons d'indices α, β, s doivent vérifier

$$n \geqq s \geqq \alpha + \beta + 1 \geqq 1.$$

En raisonnant comme dans le cas de deux variables, on sera ramené à démontrer que les quantités

$$\frac{A^{\alpha_{m-1}}_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1}+m-2} A^{\beta_{m-1}}_{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{m-1}+m-2}}{A^{s_{m-1}}_{s_{m-1}+m-2}}$$

tendent vers o quand m croît indéfiniment. On aperçoit immédiatement l'inégalité

$$A^{\lambda}_{\mu+h} \cdot A^{\lambda'}_{\mu'+h} < A^{\lambda+\lambda'}_{\mu+\mu'+h}, \qquad \text{si} \quad \lambda \leqq \mu, \qquad \lambda' \leqq \mu'.$$

En l'appliquant ici et remarquant en outre que l'on a toujours

$$\alpha + \beta \leqq n - 1,$$

on aura

$$A^{\alpha_{m-1}}_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1}+m-2} \cdot A^{\beta_{m-1}}_{\beta_1+\ldots+\beta_{m-1}+m-2} < A^{\alpha_{m-1}+\beta_{m-1}}_{(\alpha_1+\beta_1)+\ldots+(\alpha_{m-1}+\beta_{m-1})+m-2} < A^{\alpha_{m-1}+\beta_{m-1}}_{(m-1)(n-1)+m-2}.$$

On est donc ramené à montrer que la fraction

$$\frac{A^{\alpha_{m-1}+\beta_{m-1}}_{n(m-1)-1}}{A^{s_{m-1}}_{s_{m-1}+m-2}}$$

tend vers o. Ceci est évident, car $\alpha_{m-1} + \beta_{m-1} < s_{m-1}$. Nous arriverons donc au résultat suivant :

A toute aire plane S, *parallèle à* xOy *et située entièrement dans la région de l'espace où tous les* a_{ijk} *sont analytiques, correspond une région*

R *l'entourant complètement. Quelles que soient les fonctions initiales analytiques sur tout* S, *l'intégrale correspondante est analytique dans tout* R.

Pour les équations n'ayant qu'une seule famille de caractéristiques, mais non ramenées à la forme précédente, on ramènera le coefficient de $\frac{\partial^n f}{\partial z^n}$ à être l'unité s'il n'est pas nul; alors le polynôme caractéristique sera

$$(AX + BY + Z)^n.$$

On aura la même propriété à condition que S soit entièrement située dans une région où A, B et tous les coefficients de la nouvelle équation sont analytiques.

6. Considérons maintenant les équations dont le polynôme caractéristique a un nombre quelconque de facteurs distincts. En suivant presque mot pour mot le raisonnement fait dans le cas de deux variables, nous obtiendrons :

Soit une équation linéaire quelconque ramenée à la forme

$$\omega(f) = u(f) + \theta(x, y, z)$$

et dont le polynôme caractéristique est

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=n} (A_\lambda X + B_\lambda Y + Z),$$

à toute aire plane S, *parallèle à* $x\mathrm{O}y$ *et située entièrement dans une région où tous les* A_λ, *les* B_λ, *les coefficients de* u *et la fonction* θ *sont analytiques, correspond une région* R *l'entourant complètement.*

Quelles que soient les fonctions initiales analytiques sur tout S, *l'intégrale correspondante est analytique dans tout* R.

Considérons, en dernier lieu, une équation quelconque

$$\omega(f) = u(f) + \theta(x, y, z)$$

dont le polynôme caractéristique est

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=n} (A_\lambda X + B_\lambda Y + C_\lambda Z).$$

Prenons une région P satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Tous les coefficients de l'équation sont analytiques dans tout* P.

2° *Tous les* A_λ, *les* B_λ *et les* C_λ *sont analytiques dans tout* P.

3° *Il n'y a aucun point à l'intérieur de* P *où tous les coefficients des termes d'ordre n s'annulent simultanément.*

Soit σ une aire analytique régulière située entièrement dans P, c'est-à-dire une aire sur laquelle x, y, z sont des fonctions analytiques de deux paramètres α et β et sur laquelle n'existe aucun point où les trois quantités

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta}-\frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}-\frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta}-\frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

sont nulles simultanément.

Par un point M quelconque sur σ passent des directions caractéristiques

$$\frac{dx}{A_\lambda}=\frac{dy}{B_\lambda}=\frac{dz}{C_\lambda}.$$

Supposons qu'il n'y ait aucune de ces directions qui soit tangente en M à σ. Nous exprimerons ce fait en disant que σ n'a aucune tangente caractéristique.

Sur σ il y a des points formant des lignes et où le plan tangent est parallèle à Oz, de même pour les deux autres axes; mais il n'y a aucun point commun à ces trois sortes de lignes. De là résulte la possibilité de décomposer σ en aires partielles σ_1, σ_2, ..., telles que tout point intérieur à σ soit intérieur au moins à l'une de ces régions partielles et qu'une quelconque d'entre elles n'ait aucun plan tangent parallèle à l'un des axes et empiète sur ses voisines tout le long de la portion de son contour distincte de celui de σ.

Soit σ_1 n'ayant aucun plan tangent parallèle à Oz. Sur tout σ_1, z sera une fonction analytique de x et y

$$z=\varphi(x,y);$$

faisons le changement

$$\begin{aligned} x' &= x, & x &= x',\\ y' &= y, & y &= y',\\ z' &= z-\varphi(x,y), & z &= z'+\varphi(x',y'). \end{aligned}$$

On voit immédiatement que σ_1 se transformera en une aire plane s_1 parallèle à $x'Oy'$ et que l'équation transformée aura les propriétés suivantes :

Il n'y aura aucun point de s_1 où les coefficients des termes d'ordre n s'annuleront simultanément. Les nouveaux coefficients seront analytiques en tous les points de s_1; il en sera de même des nouveaux termes $A'_\lambda, B'_\lambda, C'_\lambda$, et les trois coefficients $A'_\lambda, B'_\lambda, C'_\lambda$ d'un même facteur ne pourront s'annuler simultanément, car il en résulterait que tous les termes d'ordre n auraient simultanément des coefficients nuls.

Les coefficients C'_λ ne peuvent jamais s'annuler sur σ_1, car il y aurait dans la transformée des caractéristiques tangentes à s_1 et, par suite, dans l'équation primitive des caractéristiques tangentes à σ_1, ce qui est contraire à l'hypothèse. On est donc sur s_1 dans les conditions d'application du théorème précédent, d'où l'on déduit l'existence de la région ρ_1 entourant complètement σ_1.

Les diverses régions ρ_1, ρ_2, ... forment, par leur ensemble, une région ρ entourant complètement σ et n'ayant d'autres points communs avec elle que son contour. Donc :

A toute aire analytique régulière σ, entièrement contenue dans une région P *et n'ayant aucune tangente caractéristique, correspond une région ρ l'entourant complètement. Quelles que soient les fonctions initiales analytiques sur tout σ, l'intégrale correspondante est analytique dans tout ρ.*

7. Les fonctions analytiques de trois variables x, y, z peuvent présenter :

1° Des surfaces singulières essentielles; par exemple, la surface $x = 0$, pour $\frac{y.z}{x}$;

2° Des lignes singulières; par exemple, la ligne $x = 0, y = 0$ pour $\frac{z}{x^2+y^2}$;

3° Des points singuliers isolés, comme le point $x = 0, y = 0, z = 0$ pour $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

Considérons trois sortes de points :

1° *Les points où les coefficients de l'équation cessent d'être analytiques ;*

2° *Les points où les coefficients* A_λ, B_λ, C_λ *cessent d'être analytiques;*

3° *Les points qui annulent simultanément tous les coefficients des termes d'ordre* n.

Ces points constitueront ce que nous appellerons les *singularités fixes*.

Si de tels points forment une surface, on l'appellera une *surface singulière essentielle fixe*.

S'ils forment une ligne, ce sera une *ligne singulière fixe*.

S'ils sont isolés, ils seront des *points singuliers isolés fixes*.

Supposons qu'une intégrale ait une surface singulière essentielle distincte des surfaces singulières essentielles fixes et qui ne soit pas une surface caractéristique. On pourrait trouver sur elle un point M n'appartenant pas aux singularités fixes, point ordinaire et où il n'y aurait aucune tangente caractéristique. De là résulterait la possibilité de trouver une aire analytique régulière n'ayant aucune tangente caractéristique, située entièrement dans le domaine où l'intégrale est analytique et dans une région P, et dont le domaine ρ contiendrait M. Cette intégrale pourrait alors se prolonger analytiquement au delà de la surface considérée, de sorte que nous avons :

Les intégrales analytiques ne peuvent présenter que deux sortes de surfaces singulières essentielles;

1° *Des surfaces singulières essentielles fixes;*

2° *Des surfaces caractéristiques.*

Soit une ligne singulière essentielle distincte des lignes singulières fixes et qui ne soit pas une caractéristique. On pourra trouver sur elle un point M ordinaire où la tangente ne sera pas caractéristique, et, par suite, l'aire σ dont le domaine contient M existera encore et l'intégrale sera analytique en M; donc :

Les intégrales analytiques ne peuvent présenter que deux sortes de lignes singulières essentielles :

1° *Les lignes singulières essentielles fixes;*

2° *Des lignes singulières mobiles. Ces dernières sont sur les surfaces singulières fixes ou sont des caractéristiques.*

Enfin, l'existence de l'aire σ se voit encore immédiatement pour un point qui n'est pas sur les surfaces ou lignes singulières fixes et qui n'est pas un point singulier isolé fixe ; donc :

Les intégrales analytiques ne peuvent présenter que deux sortes de points singuliers isolés :

1° *Les points singuliers isolés fixes ;*

2° *Des points singuliers isolés mobiles qui se trouvent forcément sur les surfaces ou lignes singulières essentielles fixes.*

SECONDE PARTIE.

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE RIEMANN.

Riemann a donné une méthode célèbre pour l'intégration de l'équation $E(\beta, \beta)$ (1). Cette méthode, généralisée plus tard pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

ramène l'intégration d'une telle équation à la recherche d'une certaine intégrale particulière dépendant de deux constantes arbitraires (2).

Je me propose de démontrer qu'on peut établir une méthode tout à fait analogue pour une classe très générale d'équations linéaires d'un ordre quelconque.

Soit une fonction linéaire de z et de ses dérivées partielles, dans laquelle on ne dérive jamais plus de p fois par rapport à x, et plus de q fois par rapport à y

$$\mathfrak{F}(z) = \sum A_{ik}\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\, \partial y^k} \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, p, \\ k = 0, 1, \ldots, q, \end{matrix} \quad p+q=n, \quad pq \neq 0, \quad A_{pq} = 1\right),$$

et considérons l'équation

$$\mathfrak{F}(z) = 0,$$

(1) Riemann, *Gesammelte Werke* (zweite Auflage), S. 171.

(2) *Voir* Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces* (T. II, Ch. IV).

dont l'équation précédente du second ordre n'est qu'un cas particulier ($n=2$, $p=1$, $q=1$).

Ces équations sont à caractéristiques réelles et n'en ont que deux systèmes : les caractéristiques $x=$ const. d'ordre q et les caractéristiques $y=$ const. d'ordre p.

Nous commencerons par établir un lemme fondamental :

Lemme fondamental. — *Si les coefficients A_{ik} restent tous finis et continus à l'intérieur d'un rectangle parallèle aux axes et ayant x_0, y_0 comme centre, il existe une fonction Z satisfaisant à l'équation $\mathcal{F}(z)=0$, continue, ainsi que toutes ses dérivées entrant dans $\mathcal{F}(z)$, au voisinage de x_0, y_0 et satisfaisant aux conditions initiales*

$$
\begin{aligned}
&Z(x_0, y) = Y_0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y) = Y_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x^{p-1}}(x_0, y) = Y_{p-1},\\
&Z(x, y_0) = X_0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y_0) = X_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^{q-1} z}{\partial y^{q-1}}(x, y_0) = X_{q-1}.
\end{aligned}
$$

Les Y ayant des dérivées jusqu'à l'ordre q, continues au voisinage de y_0, les X ayant des dérivées jusqu'à l'ordre p, continues au voisinage de x_0, et satisfaisant en outre aux conditions

$$
\left(\frac{d^\lambda X_\mu}{dx^\lambda}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d^\mu Y_\lambda}{dy^\mu}\right)_{y=y_0} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, p-1 \\ \mu = 0, 1, \ldots, q-1 \end{pmatrix}.
$$

Pour démontrer ce lemme, nous reprendrons presque mot à mot l'élégante démonstration (¹) qu'en a donnée M. Picard dans le cas du second ordre.

Écrivons l'équation $\mathcal{F}(z)$ en isolant le premier terme; soit

$$
\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q} = F(z),
$$

et convenons de représenter par la notation $[z]_i^k$ celles des dérivées de z qui figurent dans $F(z)$.

Pour intégrer par approximations successives, nous aurons à consi-

---

(¹) Picard, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (*Journal de Mathématiques*, 1890, Ch. II).

dérer la suite infinie d'équations

$$\frac{\partial^n z_1}{\partial x^p \partial y^q} = 0, \qquad \frac{\partial^n z_2}{\partial x^p \partial y^q} = F(z_1), \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^n z_m}{\partial x^p \partial y^q} = F(z_{m-1}), \qquad \ldots,$$

la première étant intégrée avec les conditions initiales proposées et les suivantes avec des conditions initiales analogues, mais où tous les X et Y seraient nuls.

On obtient immédiatement

$$z_1 = \sum X_k \frac{(y-y_0)^k}{k!} + \sum Y_i \frac{(x-x_0)^i}{i!} - \sum \frac{1}{i! \times k!} (x-x_0)^i (y-y_0)^k \left(\frac{d^i X_k}{dx^i}\right)_{x=x_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_m = \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \cdots \int_{y_0}^{y} F(z_{m-1})\, dx^p\, dy^q,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Supposons que les hypothèses faites dans l'énoncé, sur les coefficients et les fonctions initiales, soient réalisées tant que

$$|x - x_0| < \alpha, \qquad |y - y_0| < \beta,$$

c'est-à-dire à l'intérieur d'un rectangle que nous appellerons le rectangle α, β. Elles seront *a fortiori* réalisées dans un rectangle intérieur α', β', et il suffit de considérer les formules donnant de proche en proche $z_1, z_2, \ldots$ pour voir immédiatement que $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sont des fonctions continues dans ce rectangle et possèdent des dérivées analogues à celles qui figurent dans $F(z)$, également continues dans ce rectangle.

Soit M le maximum de $F(z_1)$ dans le rectangle α, β; soit Θ l'expression obtenue en remplaçant dans $F(z)$ chaque coefficient par son module maximum dans α, β, et chaque terme $[z]_i^k$ par $\alpha'^{p-i}, \beta'^{q-k}$. Θ sera un polynôme en α', β' ne contenant pas de terme constant, car dans $F(z)$ on n'a jamais simultanément $i = p$, $k = q$. Il en résulte qu'on pourra toujours prendre α' et β' suffisamment petits pour que Θ soit aussi petit qu'on voudra, par exemple pour que l'on ait

$$\Theta < 1.$$

On voit immédiatement les inégalités suivantes, vraies dans le rectangle α', β' et telles que chacune d'elles résulte des précédentes,

$$\begin{array}{ll} |F(z_1)| < M, & |[z_2]_i^k| < M\alpha'^{p-i}\beta'^{q-k}, \\ |F(z_2)| < M\Theta, & |[z_3]_i^k| < M\Theta\alpha'^{p-i}\beta'^{q-k}, \\ |F(z_3)| < M\Theta^2, & |[z_4]_i^k| < M\Theta^2\alpha'^{p-i}\beta'^{q-k}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Il en résulte, puisque $\Theta < 1$, que les séries

$$\begin{array}{c} z_1 + z_2 + \ldots + z_m + \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ [z_1]_i^k + [z_2]_i^k + \ldots + [z_m]_i^k + \ldots \end{array}$$

sont absolument convergentes dans α', β' et que, si l'on représente les sommes de ces séries par z, ..., $[z]_i^k$, ..., la fonction z est continue dans α', β' et possède des dérivées $[z]_i^k$ continues dans ce rectangle et représentées par les séries suivantes.

z satisfait aux conditions initiales, car, si l'on cherche à former ses fonctions initiales, on retrouve celles de z_1, c'est-à-dire celles de l'énoncé.

En dernier lieu, il faut montrer que z possède une dérivée $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^p \partial x^q}$ et vérifie l'équation proposée. Posons

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_m = V_m.$$

On aura les égalités successives

$$V_m = z_1 + \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{y_0}^{y} F(z_1)\,dx^p\,dy^q + \ldots + \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{y_0}^{y} F(z_{m-1})\,dx^p\,dy^q,$$

$$V_m = z_1 + \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{y_0}^{y} F(z_1 + z_2 + \ldots + z_{m-1})\,dx^p\,dy^q,$$

$$V_m = z_1 + \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{y_0}^{y} F(V_{m-1})\,dx^p\,dy^q.$$

Cette égalité est vraie quel que soit m, et lorsque m croît indéfiniment V_m et V_{m-1} tendent tous deux vers la même fonction z : on a donc

$$z = z_1 + \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{y_0}^{y} \mathrm{F}(z)\, dx^p\, dy^q.$$

On en déduit immédiatement que z a une dérivée $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q}$ et que l'on a

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q} = \frac{\partial^n z_1}{\partial x^p \partial y^q} + \mathrm{F}(z)$$

ou, plus simplement,

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^q} = \mathrm{F}(z),$$

puisque, par hypothèse, on a $\frac{\partial^n z_1}{\partial x^p \partial y^q} = 0$.

Ce lemme fondamental étant établi, supposons que dans une région du plan, les A_{ik} aient des dérivées analogues à celles de z qui figurent dans $\mathrm{F}(z)$, et qu'en outre les A_{ik} et ces dérivées y soient continues, $\mathcal{F}(z)$ aura une équation adjointe

$$\mathcal{G}(u) = \sum (-1)^{i+k} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} (\mathrm{A}_{ik} u) = 0,$$

laquelle sera de même forme que $\mathcal{F}(z)$ et aura tous ses coefficients continus dans la région considérée.

Un calcul facile, mais long, que nous omettrons à dessein, conduit à l'identité (¹)

$$u\mathcal{F}(z) - z\mathcal{G}(u) = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y},$$

où l'on a

$$\mathrm{M} = \sum \mathrm{B}^i \frac{\partial^i z}{\partial x^i}, \qquad \ldots \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

$$\mathrm{N} = \sum \mathrm{C}_k \frac{\partial^k z}{\partial y^k}, \qquad \ldots \qquad (k = 0, 1, \ldots, q-1),$$

$$\Theta = \sum \mathrm{C}_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i dy^k}, \qquad \ldots \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, p-1 \\ k = 0, 1, \ldots, q-1 \end{pmatrix},$$

(¹) Pour ce calcul *voir* DARBOUX, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II; note de la page 73.

avec les valeurs suivantes des coefficients

$$B_i = \sum (-1)^{\alpha+\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(A_{i+\alpha+1,\beta}\, u), \quad \ldots \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, p-i-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, q \end{pmatrix},$$

$$C_k = \sum (-1)^{\alpha+\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(A_{\alpha,k+\beta+1}\, u), \quad \ldots \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, p \\ \beta = 0, 1, \ldots, q-k-1 \end{pmatrix},$$

$$D_{ik} = \sum (-1)^{\alpha+\beta} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(A_{i+\alpha+1,k+\beta+1}\, u), \quad \ldots \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, p-i-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, q-k-1 \end{pmatrix}.$$

Nous nous proposons de démontrer qu'il existe des fonctions U telles que tous les coefficients B soient nuls identiquement pour $x = x_0$ et tous les coefficients C nuls identiquement pour $y = y_0$ et satisfaisant à $\mathcal{G}(U) = 0$.

Reprenons les notations du lemme, et soient $X_0, X_1, \ldots, X_{q-1}$, $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-1}$ les fonctions initiales de U. On voit immédiatement que l'équation $(B_{p-1})_{x=x_0} = 0$ a pour premier membre une fonction linéaire et homogène de Y_0 et de ses dérivées jusqu'à l'ordre q, le coefficient de cette dernière dérivée étant au signe près A_{pq}, c'est-à-dire 1, et les autres coefficients étant des combinaisons linéaires et homogènes des A_{ik} et de leurs dérivées analogues à celles qui entrent dans $F(z)$, c'est-à-dire que ces coefficients sont des fonctions de y, continues au voisinage de y_0. Donnons-nous q constantes arbitraires

$$\lambda_0^0, \quad \lambda_0^1, \quad \ldots, \quad \lambda_0^{q-1}$$

comme valeurs initiales de Y_0 et de ses $q-1$ premières dérivées, il y correspondra une fonction Y_0, solution de l'équation $(B_{p-1})_{x=x_0} = 0$ et continue au voisinage de y_0.

Connaissant Y_0, l'équation $(B_{p-1})_{x=x_0} = 0$ déterminera d'une façon analogue Y_1 en fonction de q nouvelles constantes arbitraires

$$\lambda_1^0, \quad \lambda_1^1, \quad \ldots, \quad \lambda_1^{q-1}$$

et ainsi de suite, de sorte que les équations

$$(B_i)_{x=x_0} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, p-1)$$

font correspondre à tout système

$$\begin{array}{llll}
\lambda_0^0, & \lambda_0^1, & \ldots, & \lambda_0^{q-1}, \\
\lambda_1^0, & \lambda_1^1, & \ldots, & \lambda_1^{q-1}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\lambda_{p-1}^0, & \lambda_{p-1}^1, & \ldots, & \lambda_{p-1}^{q-1},
\end{array}$$

de pq constantes arbitraires, des fonctions $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{p-1}$, continues au voisinage de y_0, et ayant des dérivées jusqu'à l'ordre q également continues au voisinage de y_0.

Les équations

$$(C_k)_{y=y_0} = 0$$

détermineraient de la même façon les fonctions $X_0, X_1, \ldots, X_{q-1}$, mais les conditions indispensables

$$\left(\frac{d^k Y_i}{dy^k}\right)_{y=y_0} = \left(\frac{d^i X_k}{dx^i}\right)_{x=x_0} \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, p-1 \\ k = 0, 1, \ldots, q-1 \end{pmatrix}$$

montrent que les valeurs initiales des X sont les mêmes que celles des Y, mais prises dans un ordre différent, celles relatives à X_k étant

$$\lambda_0^k, \quad \lambda_1^k, \quad \ldots, \quad \lambda_{p-1}^k.$$

Les fonctions X_k et Y_i ainsi déterminées satisfont aux conditions du lemme fondamental et par suite il existe une solution U de $\mathcal{G}(u) = 0$ ayant ces fonctions initiales.

Les constantes λ que nous venons d'introduire n'étant pas commodes pour la suite, nous allons les remplacer par d'autres.

Les coefficients D_{ik} en x_0, y_0 sont des expressions linéaires et homogènes des λ_i^k et leur nombre est pq, c'est-à-dire celui des λ.

Posons en général

$$(D_{i,k})_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = \mu_{ik},$$

et considérons l'équation

$$(D_{p-1,q-1})_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = \mu_{p-1,q-1}.$$

Le premier membre n'a qu'un terme; c'est un terme en λ_0^0, et son coefficient est, au signe près, A_{pq}, c'est-à-dire 1. Elle détermine donc λ_0^0.

Prenons celles de ces équations dont la somme des indices est $p+q-3$; il y en a deux. Le premier membre de l'une d'elles contiendra les λ dont la somme des indices sera au plus $p+q-i-k-2$ ou 1, puisque $i+k=p+q-3$, et il n'y en aura qu'un

$$\lambda_{p-i-1}^{q-k-1}$$

provenant des valeurs $\alpha=p-i-1$, $\beta=q-k-1$. Ce terme aura en outre pour coefficient, au signe près, A_{pq}, c'est-à-dire 1.

Puisqu'on connaît λ_0^0, elle déterminera λ_{p-i-1}^{q-k-1}.

Les deux équations de ce genre détermineront par suite λ_0^1 et λ_1^0.

Admettons que les équations pour lesquelles on a

$$i+k \geqq p+q-m-2$$

aient déterminé tous les λ dont la somme des indices est inférieure ou égale à m. Considérons les équations pour lesquelles on a

$$i+k=p+q-m-3,$$

il y en aura $m+2$; le premier membre de chacune d'elles contient des termes λ_i^k, pour lesquels on a $i+k \leqq m$, et un seul terme pour lequel $i+k=m+1$: c'est le terme λ_{p-i-1}^{q-k-1} provenant des valeurs

$$\alpha=p-i-1, \qquad \beta=q-k-1.$$

Ce terme a encore, au signe près, pour coefficient A_{pq} ou 1, de sorte que chacune des équations que nous considérons déterminera un λ, dont la somme des indices sera $m+1$.

On pourra donc toujours exprimer tous les λ_i^k comme fonctions linéaires et homogènes des μ_{ik}, et énoncer la propriété suivante :

A tout système de valeurs initiales μ_{ik} des coefficients D_{ik} correspond une fonction U, solution de $\mathcal{G}(U)=0$ et satisfaisant aux conditions

$$(B_i)_{x=x_0}=0, \qquad (C_k)_{y=y_0}=0.$$

Soit U une telle fonction et z une intégrale quelconque de $\mathcal{F}(z)$; en vertu de l'identité fondamentale, on aura

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}=0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{M}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)+\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}=0.$$

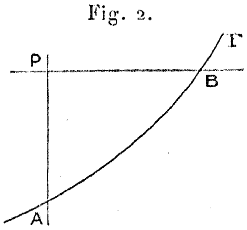
On en déduit que l'intégrale

$$\int\left(\mathrm{M}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) dy-\mathrm{N}\, dx,$$

prise le long d'un contour fermé, à l'intérieur duquel M, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ et N sont des fonctions continues, est nulle.

Traçons une courbe quelconque Γ (*fig.* 2) dans cette région et soit

Fig. 2.



$x_0 y_0$ un quelconque des points de la même région, tel que l'espace limité par Γ et les deux caractéristiques issues de x_0, y_0, y soit entièrement contenu.

Si l'on remarque que, d'après la définition de U, M est identiquement nul sur PA et N identiquement nul sur PB, on aura, sur ce contour d'intégration,

$$\Theta_{\mathrm{A}}-\Theta_{\mathrm{P}}+\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\left(\mathrm{M}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) dy-\mathrm{N}\, dx=0,$$

ou, en remarquant que, par définition, on a

$$\Theta_{\mathrm{P}}=\sum \mu_{ik}\left[\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right]_{\mathrm{P}},$$

on aura finalement

$$\sum \mu_{ik}\left[\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right]_{\mathrm{P}}=\Theta_{\mathrm{A}}+\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\left(\mathrm{M}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) dy-\mathrm{N}\, dx=\mathrm{V},$$

V ne dépendant que de z et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n-1$ sur Γ.

Posons $pq = m$ et considérons m systèmes de constantes initiales μ_{ik}^{j}, à chacun desquels correspond une fonction U_j. Nous aurons m équations analogues à la précédente

$$\sum \mu_{ik}^{j} \left[\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right]_{P} = V_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Si les μ_{ik}^{j} ont été choisies de façon que leur déterminant ne soit pas nul, on tirera de ces équations toutes les quantités $\left[\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right]_{P}$ comme fonctions linéaires et homogènes des V_j. $[z]_P$ étant l'une des inconnues du premier membre, on aura

$$[z]_P = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_m V_m,$$

les a étant des constantes, de sorte que la valeur de z en P se trouve exprimée au moyen des valeurs de z et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ sur l'arc Γ.

Plus généralement, soient m' fonctions U, telles que le tableau rectangulaire formé par les μ_{ik} correspondants ait $m - m'$ colonnes formées par des zéros, à l'exclusion de celle des μ_{00}, et que le déterminant formé par les m' colonnes restantes ne soit pas nul. Les m' équations

$$\sum \mu_{ik}^{j} \left[\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right]_{P} = V_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m')$$

ne contiendront que m' quantités $\left[\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}\right]_{P}$, puisque les autres ont des coefficients nuls; le déterminant de ces m' inconnues n'est pas nul, par hypothèse, et $[z]_P$ se trouve parmi elles, de sorte qu'on aura

$$[z]_P = a_1 V_1 + a_2 V_2 + \ldots + a_{m'} V_{m'}.$$

Nous dirons que ces m' fonctions U forment un système intégrant.

Il pourra y avoir des systèmes intégrants formés de m' fonctions U, m' pouvant prendre les valeurs $1, 2, \ldots, m$.

Le plus intéressant de ces systèmes est celui qui est formé d'une seule fonction. On l'obtiendra en prenant tous les μ_{ik} nuls, sauf μ_{00} qu'on pourra, sans restreindre la généralité, supposer égal à l'unité.

Nous représenterons cette fonction par

$$R(x, y, x_0, y_0);$$

elle donnera simplement

$$[z]_P = \Theta_A + \int_A^B \left(M + \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) dy - N\,dx.$$

Nous sommes parti, pour faire la théorie précédente, de l'identité

$$u\,\mathcal{F}(z) - z\,\mathcal{G}(u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y},$$

et le fait essentiel était que M ne contenait que des dérivées $\dfrac{\partial^i z}{\partial x^i}$ et N des dérivées $\dfrac{\partial^k z}{\partial y^k}$.

On reconnaît facilement que, si l'on pose

$$M_1 = M + \frac{\partial\Theta}{\partial y}, \qquad N_1 = N + \frac{\partial\Theta}{\partial x},$$

on aura

$$u\,\mathcal{F}(z) - z\,\mathcal{G}(u) = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y},$$

et le second membre sera maintenant composé avec u et ses dérivées, exactement comme il l'était primitivement avec z et ses dérivées.

Au moyen de cette nouvelle forme, on prouvera, comme précédemment, l'existence des fonctions Z solutions de $\mathcal{F}(z) = 0$, annulant identiquement M_1 pour $x = x_0$, et N_1 pour $y = y_0$ et dépendant de m constantes arbitraires, valeurs initiales des coefficients de la fonction Θ supposée ordonnée par rapport aux dérivées de u.

On pourra former des systèmes intégrants avec des fonctions Z, qui permettront d'intégrer $\mathcal{G}(u) = 0$ comme les systèmes intégrants de fonctions U permettaient d'intégrer $\mathcal{F}(z) = 0$.

En particulier, il existera un système intégrant formé par une seule fonction Z; nous la représenterons par

$$S(x, y, x_1, y_1).$$

Considérons un rectangle formé par les caractéristiques issues de $P(x_0, y_0)$ et $Q(x_1, y_1)$ (*fig.* 3).

En employant une fonction U quelconque, on aura

$$\Theta_P = \Theta_A - \int_B^Q \left(M + \frac{\partial\Theta}{\partial y}\right) dy - \int_A^Q N\,dx,$$

ou

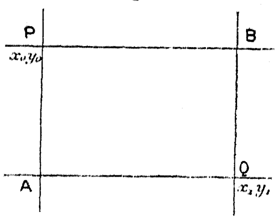
$$\Theta_P = \Theta_A - \int_B^Q M_1\,dy - \int_A^Q \left(N_1 - \frac{\partial\Theta}{\partial x}\right) dx,$$

ou

$$\Theta_P = \Theta_Q - \int_B^Q M_1\,dy - \int_A^Q N_1\,dx.$$

Supposons que z soit une fonction Z relative au point x_1, y_1 et pro-

Fig. 3.



venant des constantes $v_{l,h}$, M_1 et N_1 seront identiquement nuls et l'on aura

$$\Theta_P = \Theta_Q$$

ou

$$\sum \mu_{i,k} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x_0^i\,\partial y_0^k} Z(x_0, y_0, x_1, y_1) = \sum v_{l,h} \frac{\partial^{l+h}}{\partial x_1^l\,\partial y_1^h} U(x_1, y_1, x_0, y_0).$$

C'est l'identité fondamentale reliant les fonctions Z et U et dont nous allons tirer un certain nombre de conséquences. Prenons pour Z et U respectivement les fonctions S et R, l'identité se réduira à

$$S(x_0, y_0, x_1, y_1) = R(x_1, y_1, x_0, y_0),$$

ce qui montre que les fonctions R et S sont identiques; de sorte que l'on a :

Il existe une fonction $R(x_1, y_1, x_0, y_0)$ *pouvant être définie comme solution de* $\mathcal{F}(z) = 0$ *ou de* $\mathcal{G}(u) = 0$, *suivant qu'on considère* x_0, y_0, *ou x_1, y_1, comme variables et qui permet d'intégrer simultanément l'équation proposée et son adjointe.*

Appliquons l'identité générale en prenant la fonction R avec une fonction Z ou U, nous obtiendrons

$$Z(x_0, y_0, x_1, y_1) = \sum \nu_{i,k} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x_1^i \, \partial y_1^k} R(x_1, y_1, x_0, y_0),$$

$$U(x_1, y_1, x_0, y_0) = \sum \mu_{i,k} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x_0^i \, \partial y_0^k} R(x_1, y_1, x_0, y_0),$$

ce qui montre que :

Toutes les fonctions Z *et* U *peuvent s'exprimer comme fonctions linéaires et homogènes de* R *et de ses dérivées partielles, jusqu'à l'ordre $n-1$ au plus, par rapport à l'un des systèmes de variables.*

Appelons *fonctions générales* Z ou U ces fonctions dans lesquelles on laisse indéterminées les constantes arbitraires. Les formules précédentes donnent les expressions de ces fonctions générales, de sorte que

Les fonctions générales Z *ou* U *sont des fonctions linéaires et homogènes des m constantes arbitraires dont elles dépendent.*

Supposons maintenant qu'on connaisse un système intégrant quelconque

$$U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_{m'},$$

et considérons les m' équations

$$U_j(x_1, y_1, x_0, y_0) = \sum \mu_{i,k} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \, \partial y^k} R(x_1, y_1, x_0, y_0) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m').$$

D'après la définition d'un système intégrant, si l'on considère R et ses dérivés comme des inconnues, il n'y aura dans le second membre que m' inconnues distinctes, parmi lesquelles figurera effectivement R, et le déterminant des coefficients ne sera pas nul. On en tirera

$$R(x_1, y_1, x_0, y_0) = b_1 U_1 + b_2 U_2 + \ldots + b_{m'} U_{m'},$$

les b étant des constantes. Ayant R, on pourra alors former toutes les fonctions Z et U; donc :

La connaissance d'un système intégrant quelconque permet de former la fonction R *ainsi que toutes les fonctions* Z *et* U. *Autrement dit, si l'on sait intégrer l'une des deux équations* $\mathcal{F}(z) = 0$, $\mathcal{G}(u) = 0$ *par la méthode de Riemann, il en résulte forcément l'intégration de l'autre par la même méthode.*

En dernier lieu, on peut remarquer que la méthode de Riemann permet de démontrer facilement pour l'équation $\mathcal{F}(z) = 0$ le théorème général du Chapitre III sur les lignes singulières essentielles.

Soit (ξ, η) un point où tous les A_{ik} sont analytiques. On démontre facilement, en reprenant le théorème sur l'existence des fonctions U, qu'il existe un rectangle ayant (ξ, η) comme centre et tel que la fonction $R(x_1, y_1, x_0, y_0)$ soit développable en série ordonnée en

$$x_1 - \xi, \qquad y_1 - \eta, \qquad x_0 - \xi, \qquad y_0 - \eta,$$

absolument et uniformément convergente tant que x_1, y_1, x_0, y_0 représentent des points de ce rectangle.

Soit une ligne essentielle Γ d'une intégrale analytique, traversant une région où tous les A_{ik} sont analytiques et qui ne soit pas une caractéristique. Prenons sur elle un point quelconque (ξ, η) à tangente non caractéristique et considérons un rectangle ayant (ξ, η) comme centre, intérieur à celui que nous venons de définir précédemment et assez petit pour que l'un des quatre rectangles partiels en lesquels il est décomposé par les deux caractéristiques issues de (ξ, η) soit entièrement dans la région où l'intégrale est analytique.

Soit $P(x, y)$ un point quelconque de ce rectangle et soit (x_1, y_1) le point Q (*fig.* 4). Puisque sur le contour EQF, l'intégrale est analytique, la méthode de Riemann permettra de définir la fonction en point quelconque de MEQF en se servant de la fonction

$$R(x_1, y_1, x, y).$$

On aura

$$Z(x, y) = \Theta_A + \Theta_B - \Theta_Q - \int_A^Q N\,dx - \int_B^Q M\,dy.$$

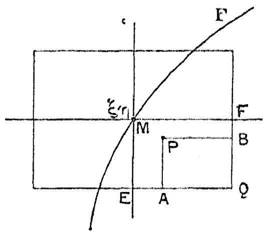
On vérifie facilement que tous les termes du second membre sont des séries ordonnées en $x - \xi$, $y - \eta$ absolument et uniformément convergentes au voisinage de M. Soit $z'(x,y)$ la série totale ainsi obtenue.

Dans l'intérieur du rectangle MEQF et au voisinage de M on aura, d'après la méthode de Riemann,

$$z(x,y) = z'(x,y);$$

la fonction z', étant développable des deux côtés de Γ et coïncidant d'un côté avec z, constitue un prolongement analytique de z au delà de Γ, et de là résulte immédiatement la propriété annoncée.

Fig. 4.



La méthode de Riemann permet encore de démontrer à l'égard des équations $\mathcal{F}(z) = 0$ une propriété présentant de grandes analogies avec la précédente.

Supposons que, dans une région D du plan des x, y, tous les A_{ik} possèdent des dérivées de la forme

$$\frac{\partial^{i'+k'} A_{ik}}{\partial x^{i'} \partial y^{k'}} \qquad \begin{pmatrix} i' = 0, 1, \ldots, p+\nu, & \\ k' = 0, 1, \ldots, q+\nu, & i'+k' < p+q+\nu \end{pmatrix}$$

qui y soient toutes continues.

En reprenant complètement la démonstration de l'existence des fonctions U au moyen des approximations successives, on démontrera facilement : (ξ, η) étant un point quelconque à l'intérieur de D, il existe un rectangle R parallèle aux axes, ayant (ξ, η) comme centre et tel que, (x, y) et (x_0, y_0) étant des points quelconques à son intérieur, toutes les fonctions $U(x, y, x_0, y_0)$ sont continues relativement aux quatre variables x, y, x_0, y_0 et possèdent des dérivées continues de la forme

$$\frac{\partial^{i+k+j+h} U}{\partial x^i \partial y^k \partial x_0^j \partial y_0^h} \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, p-1, \\ k = 0, 1, \ldots, q-1, \end{matrix} \quad j + h \leqq \nu \right).$$

Supposons que dans une portion de D il y ait une intégrale z possédant des dérivées continues de la forme

$$\frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} \quad \left(\begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, p+\nu-1, \\ k = 0, 1, \ldots, q+\nu-1, \end{matrix} \quad i + k \leqq p + q + \nu - 2 \right)$$

et qu'il y ait une ligne Γ, non caractéristique et distincte du contour de D, au delà de laquelle il ne soit pas possible de prolonger z en conservant la continuité des dérivées que nous considérons.

En prenant, comme précédemment, un point M quelconque et à tangente non caractéristique sur Γ, on arriverait, par l'application de la méthode de Riemann, à une égalité

$$z(x, y) = z'(x, y),$$

vraie d'un côté de Γ et la fonction z' resterait continue ainsi que toutes ses dérivées de la forme considérée dans un rectangle traversé par Γ. Elle constituerait un prolongement de z au delà de Γ, et de là on pourrait conclure immédiatement que les lignes traversant D, et au delà desquelles on ne peut pas prolonger z en conservant la continuité des dérivées considérées, sont forcément des caractéristiques.