ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

H. VOGT

Sur les tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique, et dont les arêtes sont tangentes à une autre quadrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 12 (1895), p. 363-389

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1895_3_12__363_0>

SUR

LES TÉTRAÈDRES CONJUGUÉS

PAR RAPPORT A UNE QUADRIQUE,

ET DONT LES ARÊTES SONT TANGENTES A UNE AUTRE QUADRIQUE,

PAR M. H. VOGT,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

1. Pour que deux quadriques jouissent de la propriété qu'il existe un tétraèdre conjugué par rapport à l'une, et dont les arêtes sont tangentes à l'autre, il est nécessaire, comme on sait, que l'invariant appelé Φ par M. Salmon (1) soit égal à zéro; les démonstrations que l'on a données pour montrer que cette condition est suffisante sont incomplètes ou trop compliquées; de plus, elles n'indiquent pas le nombre et la nature des arbitraires qui subsistent dans la détermination des tétraèdres répondant à la question, et n'en donnent aucune propriété.

Je me propose de reprendre la question à un autre point de vue; nous verrons que $\Phi = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un tétraèdre au moins jouissant de la propriété énoncée, que ces tétraèdres forment une simple infinité, et que le lieu de leurs sommets est une courbe gauche du huitième ordre; les coordonnées des points de cette courbe, ainsi que les éléments des tétraèdres, s'expriment au moyen d'un paramètre variable. L'équation qui existe entre les paramètres relatifs à deux sommets différents d'un même tétraèdre étant de genre deux, on est amené à les exprimer en fonction

(1) SALMON, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions,* traduction CHEMIN, I^re^ Partie, p. 252 et suivantes.

quadruplement périodique de deux variables, reliées par une équation particulière.

L'introduction des fonctions hyperelliptiques de genre deux s'est présentée dans plusieurs questions, notamment dans l'étude de la surface de Kummer, qui a fait l'objet de nombreux Mémoires de Cayley, Borchardt, Weber, etc., dans celle des lignes géodésiques de l'ellipsoïde, étudiées par Weierstrass. Le théorème d'addition des intégrales hyperelliptiques a conduit M. Staude à une étude du système des tangentes communes à deux surfaces homofocales (1); les coordonnées des points de l'espace sont alors exprimées en fonction de quatre variables dont deux sont reliées par une équation. L'étude des tétraèdres dont il est question dans cet article, faite au moyen des fonctions hyperelliptiques, semble être une généralisation des recherches de Halphen sur les relations biquadratiques entre deux variables, et les polygones de Poncelet inscrits dans une conique et circonscrits à une autre (2). Il montre qu'une relation biquadratique exprime la relation qui existe entre $f(u)$ et $f(u+u_0)$, où f est une fonction doublement périodique et u_0 une constante; nous rencontrerons une relation bicubique qui en est la généralisation, et que l'on peut interpréter d'une manière analogue; on peut l'obtenir en éliminant deux variables entre trois relations où entrent des fonctions hyperelliptiques de ces deux variables.

I.

2. Soient deux quadriques Σ et S; en les rapportant à leur tétraèdre conjugué commun, on peut écrire leurs équations $\Sigma = 0$, $S = 0$, où

$$\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$
$$S = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2.$$

Le discriminant de $S + \lambda\Sigma$ est

$$\Delta(\lambda) = \Delta\lambda^4 + \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 + \Theta'\lambda + \Delta',$$

(1) STAUDE, *Geometrische Deutung der Additionstheoreme der hyperelliptischen Integrale, etc.* (*Mathematische Annalen*, Bd. 22, p. 1 et 145.)

(2) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, IIe Partie, Chap. IX, p. 329, et Chap. X, p. 367

où

$$\begin{aligned}
\Delta &= 1,\\
\Theta &= a + b + c + d,\\
\Phi &= ab + ac + ad + bc + cd + bd,\\
\Theta' &= bcd + acd + abd + abc,\\
\Delta' &= abcd;
\end{aligned}$$

ce sont les invariants des deux quadriques; en formant les équations tangentielles $\Sigma_1 = 0$, $S_1 = 0$ des deux surfaces, les quadriques inscrites dans la développable qui leur est circonscrite ont pour équation tangentielle $\Sigma_1 + \lambda S_1 = 0$, et pour équation ponctuelle (Salmon, *loc. cit.*, p. 273):

$$\Delta^2 \Sigma + \lambda \Delta T + \lambda^2 \Delta' T' + \lambda^3 \Delta'^2 S = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
T = {} & a(bc + cd + bd)x^2 \\
& + b(ac + ad + cd)y^2 + c(ab + ad + bd)z^2 + d(ab + ac + bc)t^2,
\end{aligned}$$

$$T' = a(b + c + d)x^2 + b(a + c + d)y^2 + c(a + b + d)z^2 + d(a + b + c)t^2;$$

T et T' sont les deux covariants ponctuels des deux quadriques. On sait que, si d'un point de l'espace on circonscrit un cône à chacune des surfaces Σ et S, le second sera harmoniquement inscrit dans le premier, si les coordonnées du sommet commun satisfont à l'équation $T = 0$; il lui sera harmoniquement circonscrit si le sommet est sur la surface $T' = 0$.

Nous désignerons enfin par S' la quadrique polaire réciproque de S par rapport à Σ, et nous écrirons son équation $S' = 0$, où

$$S' = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d}.$$

Cela posé, supposons qu'il existe un tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$, conjugué par rapport à Σ, et dont les arêtes sont tangentes à S. Les cônes de sommet A_1, circonscrits à S et Σ, sont tels que le premier est capable d'un trièdre conjugué par rapport au second; leur sommet A_1 doit, dès lors, se trouver sur la surface covariante $T' = 0$; mais, d'autre part, si l'on transforme la figure par polaires réciproques, relativement à Σ comme surface directrice, le tétraèdre se transforme en lui-même, et ses arêtes sont tangentes à S'; autrement dit, elles appartiennent à la congruence des droites tangentes à S et S'; les sommets doivent alors se trouver sur la surface covariante T'' analogue à T', formée au moyen de Σ et S', et ayant pour équation $T'' = 0$ où

$$T'' = (bc + bd + cd)x^2 + (ac + ad + cd)y^2 + (ab + ad + bd)z^2 + (ab + ac + bc)t^2.$$

Si l'on remarque que l'on a identiquement

$$T' + T'' = \Phi(x^2 + y^2 + z^2 + t^2),$$

on voit que, si $\Phi = 0$, les deux surfaces T' et T'' coïncident et forment un premier lieu pour les sommets du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$; au contraire, si Φ n'est pas nul, les seuls points communs aux deux surfaces T' et T'' font partie de Σ; les seuls tétraèdres répondant à la question auraient leurs sommets sur cette surface Σ, et n'existeraient plus. On en conclut que la condition $\Phi = 0$ est une condition nécessaire pour l'existence d'un tétraèdre conjugué par rapport à Σ et ayant ses arêtes tangentes à S et, par suite, à S'.

3. En supposant désormais $\Phi = 0$, les sommets du tétraèdre doivent être d'abord sur la surface T', mais remplissent une autre condition. Soient, en effet, $(x_1 y_1 z_1 t_1)$ les coordonnées d'un sommet; ce sont, en même temps, les coordonnées tangentielles du plan de la face opposée, conjuguée du sommet par rapport à Σ; ce plan détermine, dans T' et S, deux coniques telles qu'il existe un triangle inscrit dans la première et circonscrit à la seconde; on sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un tel triangle est que les invariants des deux coniques satisfassent à la condition

$$\Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0$$

(Salmon, *Géométrie plane, Sections coniques*, p. 483).

Les invariants des deux coniques de section de T' et S par un plan de coordonnées $u\,v\,w\,r$ sont précisément proportionnels aux covariants tangentiels des deux surfaces; formons, en effet, l'équation tangentielle des quadriques du faisceau $T' + \lambda S = 0$; soit

$$\frac{u^2}{a(b+c+d+\lambda)} + \frac{v^2}{b(a+c+d+\lambda)} + \frac{w^2}{c(a+b+d+\lambda)} + \frac{r^2}{d(a+b+c+\lambda)} = 0$$

ou

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 + \lambda^2\varphi_3 + \lambda^3\varphi_4 = 0$$

cette équation; ses trois racines sont les valeurs de λ pour lesquelles la surface $T' + \lambda S = 0$ est tangente au plan $(u v w r)$, c'est-à-dire pour lesquelles la section se décompose en un système de deux droites; ce sont donc les valeurs de λ annulant le discriminant de la conique de section de la surface $T' + \lambda S = 0$ par le plan considéré; on a par suite

$$\frac{\varphi_1}{\Delta} = \frac{\varphi_2}{\Theta} = \frac{\varphi_3}{\Theta'} = \frac{\varphi_4}{\Delta'},$$

et la condition $\Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0$ devient $\varphi_2^2 - 4\varphi_1\varphi_3 = 0$, qui se réduit, tous calculs faits, à

$$(u^2 + v^2 + w^2 + r^2)^2 - 4(au^2 + bv^2 + cw^2 + dr^2)\left(\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} + \frac{r^2}{d}\right) = 0.$$

Les coordonnées des sommets du tétraèdre satisfont dès lors à la relation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2 - 4(ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2)\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d}\right) = 0.$$

Nous poserons

$$W = \Sigma^2 - 4SS';$$

nous voyons que les conditions nécessaires pour l'existence du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sont : 1° que l'invariant Φ des deux surfaces soit nul; 2° que les sommets du tétraèdre soient sur la courbe du huitième ordre Γ, intersection des deux surfaces $T' = 0$ et $W = 0$.

4. Je montrerai plus loin que ces conditions sont suffisantes, et que tout point de cette courbe du huitième ordre est le sommet d'un tétraèdre et d'un seul répondant à la question.

Je fais d'abord la remarque suivante : si un point quelconque A_1 est le sommet d'un tel tétraèdre, les arêtes issues de ce point appartiennent aux deux cônes de sommet A_1 circonscrits aux surfaces S et S'. Je vais vérifier que pour tout point A_1 pris sur la surface T', les génératrices communes à ces deux cônes vont rencontrer cette surface T' en des points situés sur le plan polaire du sommet A_1 par rapport à Σ. Soient pour cela x_1, y_1, z_1, t_1 les coordonnées du point considéré,

S_1, S'_1, Σ_1, T'_1 les résultats de substitution de ces coordonnées dans S, S', Σ et T', C_1 et C'_1 les cônes circonscrits à S et S', C'' le cône de sommet A_1 ayant pour directrice l'intersection de T' par le plan P_1 polaire de A_1 par rapport à Σ; les équations de ces cônes sont

$$C_1 = (aS_1 - a^2x_1^2)x^2 + \ldots - 2abx_1y_1xy - \ldots = 0,$$

$$C'_1 = \left(\frac{S'_1}{a} - \frac{x_1^2}{a^2}\right)x^2 + \ldots - 2\frac{x_1y_1}{ab}xy - \ldots = 0,$$

$$\begin{aligned} C'' = {} & [a(b+c+d)\Sigma_1 - 2a(b+c+d)x_1^2]x^2 + \ldots \\ & - 2[a(b+c+d) + b(a+c+d)]x_1y_1xy - \ldots = 0. \end{aligned}$$

Comme on a identiquement

$$C_1 - abcdC'_1 - C'' = T'_1\Sigma - \Phi[\Sigma\Sigma_1 - (xx_1 + yy_1 + zz_1 + tt_1)^2] = 0,$$

les trois cônes font partie d'un même faisceau et ont quatre génératrices communes.

Il resterait à vérifier que la condition imposée à A_1 de se trouver sur la courbe Γ est suffisante pour que trois de ces génératrices soient les arêtes d'un tétraèdre; mais je vais suivre une autre voie; en supposant simplement que les sommets se trouvent sur la surface T', je vais chercher de nouveau les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux tels points soient deux sommets d'un tétraèdre répondant à la question, je retrouverai ainsi la courbe Γ.

Soient A_1 et A_2 deux points de coordonnées $x_1y_1z_1t_1$, $x_2y_2z_2t_2$, situés sur la surface T', conjugués par rapport à Σ et tels de plus que la droite D qui les joint soit tangente aux deux surfaces S et S', c'est-à-dire soit une génératrice commune aux cônes C_1, C'_1, C''; en posant

$$\begin{aligned} P_{hk} &= x_hx_k + y_hy_k + z_hz_k + t_ht_k, \\ Q_{hk} &= ax_hx_k + by_hy_k + cz_hz_k + dt_ht_k, \\ Q'_{hk} &= \frac{x_hx_k}{a} + \frac{y_hy_k}{b} + \frac{z_hz_k}{c} + \frac{t_ht_k}{d}, \end{aligned}$$

et introduisant les six coordonnées de la droite D,

$$\begin{aligned} A &= y_1z_2 - z_1y_2, & P &= x_1t_2 - t_1x_2, \\ B &= z_1x_2 - x_1z_2, & Q &= y_1t_2 - t_1y_2, \\ C &= x_1y_2 - y_1x_2, & R &= z_1t_2 - t_1z_2, \end{aligned}$$

on peut écrire les conditions imposées aux deux points sous la forme

$$adA^2 + bdB^2 + cdC^2 + bcP^2 + caQ^2 + abR^2 = 0, \tag{1}$$

$$bcA^2 + caB^2 + abC^2 + adP^2 + bdQ^2 + cdR^2 = 0, \tag{2}$$

$$P_{12} = 0, \qquad T'_1 = 0, \qquad T'_2 = 0; \tag{3}$$

nous avons vérifié que l'une des trois dernières conditions est une conséquence des autres.

Soit maintenant D′ la droite conjuguée de D par rapport à Σ; ses coordonnées sont $A' = P$, $B' = Q$, $C' = R$, $P' = A$, $Q' = B$, $R' = C$, et elle est tangente à S et S′; soient $A_3 A_4$, $A'_3 A'_4$ les points où elle rencontre respectivement les cônes C_1 et C_2 de sommets A_1 et A_2 circonscrits à S; nous vérifierons plus loin que A_3 et A_4, ainsi que A'_3 et A'_4 sont conjugués par rapport à Σ. Pour que D et D′ soient deux arêtes opposées d'un tétraèdre répondant à la question il faut et il suffit alors que A_3 et A_4 soient confondus avec A'_3 et A'_4; en effet, la condition est évidemment nécessaire; elle est de plus suffisante, car, si elle est remplie, les cônes C'_1 et C'_2 de sommets A_1 et A_2, circonscrits à S′, seront coupés par D′ aux mêmes points $A_3 A_4$, et les six arêtes du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$ seront tangentes à S et S′.

Pour former la condition cherchée, nous écrirons d'abord l'équation tangentielle du couple de points $A_3 A_4$; nous l'obtiendrons en éliminant $xyzt$ entre les équations

$$\begin{gathered}
Q'z - R'y = A't, \\
R'x - P'z = B't, \\
P'y - Q'x = C't, \\
ux + vy + wz + rt = 0, \\
C_1 = \Sigma ab(xy_1 - yx_1)^2 = 0;
\end{gathered}$$

les quatre premières donnent

$$\frac{x}{wB' - vC' - rP'} = \frac{y}{uC' - wA' - rQ'} = \frac{z}{vA' - wB' - rR'} = \frac{t}{uP' + vQ' + wR'},$$

et, après division par Σ_1 du résultat obtenu en remplaçant dans C_1 $xyzt$ par les dénominateurs des fractions précédentes, on forme l'équation

$$\Sigma_1[\Sigma ab(wt_2 - rz_2)^2] - 2(ux_1 + vy_1 + wz_1 + rt_1)[\Sigma ab(z_1 t_2 - t_1 z_2)(wt_2 - rz_2)] = 0,$$

de sorte que les coordonnées $x_3 y_3 z_3 t_3$, $x_4 y_4 z_4 t_4$ de A_3 et A_4 sont fournies par

$$x_3 x_4 = \frac{1}{a}\Sigma_1 S'_2 - 2\frac{x_1^2}{a} S'_2 - \frac{x_2^2}{a^2}\Sigma_1 + 2\frac{x_1 x_2}{a} Q'_{12},$$

$$y_3 y_4 = \frac{1}{b}\Sigma_1 S'_2 - 2\frac{y_1^2}{b} S'_2 - \frac{y_2^2}{b^2}\Sigma_1 + 2\frac{y_1 y_2}{b} Q'_{12},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$x_3 y_4 + y_3 x_4 = -2\frac{x_2 y_2}{ab}\Sigma_1 + 2\left(\frac{x_1 y_2}{b} + \frac{y_1 x_2}{a}\right) Q'_{12} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) x_1 y_1 S'_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On vérifie bien que les points A_3 et A_4 sont conjugués par rapport à Σ, car on a identiquement $P_{34} = 0$.

En intervertissant le rôle de A_1 et A_2 dans les calculs précédents on obtient A'_3 et A'_4; pour que les deux couples $A_3 A_4$, $A'_3 A'_4$ soient confondus, il faut que les deux rapports

$$\frac{\Sigma a x_3 x_4}{\Sigma a x'_3 x'_4} = \frac{\Sigma_1 S'_2}{\Sigma_2 S'_1},$$

$$\frac{\Sigma a^2 x_3 x_4}{\Sigma a^2 x'_3 x'_4} = \frac{\Theta\Sigma_1 S'_2 - 2 S_1 S'_2 - \Sigma_1\Sigma_2 + 2 Q_{12} Q'_{12}}{\Theta\Sigma_2 S'_1 - 2 S_2 S'_1 - \Sigma_1\Sigma_2 + 2 Q_{12} Q'_{12}}$$

soient égaux entre eux, et il est facile de vérifier que cette condition est suffisante, puisque les couples de points sont déjà conjugués par rapport à Σ; on obtient ainsi la condition

$$(4) \qquad 2 S'_1 S'_2 (\Sigma_1 S_2 - \Sigma_2 S_1) + (\Sigma_1\Sigma_2 - 2 Q_{12} Q'_{12})(\Sigma_1 S'_2 - \Sigma_2 S'_1) = 0,$$

qui forme avec les précédentes (1), (2), (3) les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un tétraèdre de sommets A_1 et A_2.

On peut les remplacer par d'autres équivalentes. Nous avons dit, en effet, que si A'_3 et A'_4 sont confondus avec A_3 et A_4, il en est de même des points de rencontre de D' avec les cônes C'_1 et C'_2; les relations précédentes doivent alors avoir pour conséquence celle qu'on déduit de (4) par le changement de S en S', c'est-à-dire

$$(5) \qquad 2 S_1 S_2 (\Sigma_1 S'_2 - \Sigma_2 S'_1) + (\Sigma_1\Sigma_2 - 2 Q_{12} Q'_{12})(\Sigma_1 S_2 - \Sigma_2 S_1) = 0,$$

en excluant les cas exceptionnels où deux des rapports $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}$, $\frac{S_1}{S_2}$, $\frac{S'_1}{S'_2}$

seraient égaux; les relations (4) et (5) entraînent la suivante

$$(6)\qquad 4S_1S_2S'_1S'_2 = (\Sigma_1\Sigma_2 - 2Q_{12}Q'_{12})^2;$$

et, comme on a, d'après les équations des cônes C_1 et C'_1 auxquels appartient le point A_2,

$$Q_{12}^2 = S_1S_2,$$
$$Q'^2_{12} = S'_1S'_2,$$

on a, comme conséquence,

$$(7)\qquad \Sigma_1\Sigma_2 - 4Q_{12}Q'_{12} = 0;$$

mais alors, en vertu de cette dernière relation, les équations (4) et (5) donnent

$$\Sigma_1S'_1(\Sigma_2^2 - 4S_2S'_2) = \Sigma_2S'_2(\Sigma_1^2 - 4S_1S'_1),$$
$$\Sigma_1S_1(\Sigma_2^2 - 4S_2S'_2) = \Sigma_2S_2(\Sigma_1^2 - 4S_1S'_1),$$

et, comme on n'a pas $S'_1S_2 - S'_2S_1 = 0$, chacun des membres de ces deux équations doit être nul.

Ainsi donc la relation (4) peut être remplacée par l'ensemble des relations

$$(8)\qquad \begin{cases} \Sigma_1^2 - 4S_1S'_1 = 0, \\ \Sigma_2^2 - 4S_2S'_2 = 0, \\ \Sigma_1\Sigma_2 - 4Q_{12}Q'_{12} = 0, \end{cases}$$

qui lui sont équivalentes, dès que les équations (1), (2), (3) sont satisfaites.

Du reste, si l'on remarque que l'on a

$$\begin{aligned}(\Sigma_1\Sigma_2 - 4Q_{12}Q'_{12})(\Sigma_1\Sigma_2 + 4Q_{12}Q'_{12}) \\ = \Sigma_1^2\Sigma_2^2 - 16S_1S'_1S_2S'_2 = \Sigma_1^2(\Sigma_2^2 - 4S_2S'_2) + 4S_2S'_2(\Sigma_1^2 - 4S_1S'_1),\end{aligned}$$

on voit que la deuxième des équations (8) est une conséquence des deux autres. Les relations (1), (2), (3) et (8) sont ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que A_1 et A_2 soient deux sommets d'un tétraèdre répondant à la question.

Nous retrouvons ainsi la surface W et la courbe Γ sur lesquelles doivent se trouver A_1 et A_2; mais les calculs précédents n'ont pas été inutiles; ils nous indiquent que si l'on a déjà choisi le point A_1 sur la courbe Γ, il faut et il suffit que A_2 soit : 1° sur une des quatre génératrices communes aux cônes C_1, C'_1, C''; 2° sur le plan P_1; 3° non seulement sur la surface W, mais sur la surface du second ordre W'_1, dont l'équation est

$$W'_1 = \Sigma\Sigma_1 - 4 Q_1 Q'_1 = 0$$

ou bien

$$W'_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \\ - 4(axx_1 + byy_1 + czz_1 + dtt_1)\left(\frac{xx_1}{a} + \frac{yy_1}{b} + \frac{zz_1}{c} + \frac{tt_1}{d}\right) = 0.$$

Des seize points de rencontre des quatre génératrices avec la surface W, quatre sont confondus avec A_1, quatre sont sur la surface W'_1, et les huit autres sur la surface

$$W''_1 = \Sigma\Sigma_1 + 4 Q_1 Q'_1 = 0;$$

ces huit derniers sont à rejeter.

5. Pour résoudre complètement la question, il ne reste plus qu'à chercher si trois des quatre génératrices communes aux cônes C_1, C'_1, C'' vont rencontrer le plan polaire P_1 sur la surface W'_1; c'est ce qui a lieu, en effet, pour trois génératrices et trois seulement, de sorte que le point A_1 est le sommet d'un tétraèdre et d'un seul répondant à la question.

Je vais montrer que la jacobienne du système des trois coniques, intersection de P_1 avec les surfaces C_1, C'_1, W'_1, se réduit à un système de trois droites; ces trois coniques auront ainsi trois points communs, et trois seulement; pour cela, je forme d'abord le lieu des points de l'espace, dont les plans polaires par rapport à ces surfaces se coupent en un point du plan P_1; il est donné par l'équation

$$\begin{vmatrix} axS_1 - ax_1Q_1 & \frac{x}{a}S'_1 - \frac{x_1}{a}Q'_1 & x\Sigma_1 - 2ax_1Q'_1 - 2\frac{x_1}{a}Q_1 & x_1 \\ byS_1 - by_1Q_1 & \frac{y}{b}S'_1 - \frac{y_1}{b}Q'_1 & y\Sigma_1 - 2by_1Q'_1 - 2\frac{y_1}{b}Q_1 & y_1 \\ czS_1 - cz_1Q_1 & \frac{z}{c}S'_1 - \frac{z_1}{c}Q'_1 & z\Sigma_1 - 2cz_1Q'_1 - 2\frac{z_1}{c}Q_1 & z_1 \\ dtS_1 - dt_1Q_1 & \frac{t}{d}S'_1 - \frac{t_1}{d}Q'_1 & t\Sigma_1 - 2dt_1Q'_1 - 2\frac{t_1}{d}Q_1 & t_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, en multipliant le premier membre par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ a x_1 & b y_1 & c z_1 & d t_1 \\ \dfrac{x_1}{a} & \dfrac{y_1}{b} & \dfrac{z_1}{c} & \dfrac{t_1}{d} \\ a(b+c+d)x_1 & b(a+c+d)y_1 & c(a+b+d)z_1 & d(a+b+c)t_1 \end{vmatrix},$$

qui n'est pas nul, et posant, de plus,

$$\begin{aligned} &\xi = a(b+c+d)xx_1 + b(a+c+d)yy_1 + c(a+b+d)zz_1 + d(a+b+c)tt_1, \\ &\eta = Q_1, \qquad \zeta = Q'_1, \qquad \theta = P_1, \\ &H = -\Theta'(S_1\theta - \Sigma_1\eta) + \Delta'(S_1\zeta - S'_1\eta), \\ &K = \quad \Theta\,(S'_1\theta - \Sigma_1\zeta) + \quad (S_1\zeta - S'_1\eta), \\ &L = \Sigma_1\xi + 2\Theta'\Sigma_1\zeta - 2\Delta'S'_1\zeta - 2\Theta\Sigma_1\eta + 2S_1\eta, \end{aligned}$$

l'équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \Sigma_1\theta - 2S_1\zeta - 2S'_1\eta & \Sigma_1 \\ -S_1\xi & S'_1\eta - \Sigma_1\zeta & -\Sigma_1\eta - 2\Theta S_1\zeta & S_1 \\ S_1\theta - \Sigma_1\eta & \dfrac{S'_1}{\Delta'}\xi & -\Sigma_1\zeta - 2\dfrac{\Theta'}{\Delta'}S'_1\eta & S'_1 \\ H & K & L & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Rapportée au tétraèdre définissant les coordonnées ξ, η, ζ, θ, cette surface du troisième ordre a un point double au point A_1, et sa section, par le plan $\theta = 0$, est précisément la jacobienne cherchée des trois coniques du plan P_1; en multipliant la deuxième ligne du déterminant précédent par $4S'_1$, la troisième par $4S_1$ et se servant de l'équation

$$\Sigma_1^2 - 4S_1S'_1 = 0,$$

on peut mettre l'équation de cette jacobienne, dans le plan $\theta = 0$, sous la forme

$$\begin{matrix} -\Sigma_1\xi & -4S'_1\zeta & -2(\Theta\Sigma_1 - S_1)\zeta - 2S'_1\eta \\ -4\Delta'S_1\eta & \Sigma_1\xi & -2(\Theta'_1\Sigma_1 - S'_1)\eta - 2\Delta'S_1\zeta \\ (\Theta'\Sigma_1 - \Delta'S'_1)\eta + \Delta'S_1\zeta & -(\Theta\Sigma_1 - S_1)\zeta - S'_1\eta & \Sigma_1\xi + 2(\Theta'_1\Sigma_1 - \Delta'S'_1)\zeta - 2(\Theta\Sigma_1 - S_1)\eta \end{matrix}\Bigg| =$$

et l'on constate qu'elle est décomposable en trois droites, obtenues en remplaçant dans l'équation

$$(9)\qquad \Sigma_1\xi - 2\lambda S'_1\eta + \frac{2}{\lambda}\Delta' S_1\zeta = 0,$$

λ par chacune des racines de l'équation du troisième degré

$$(10)\qquad f(\lambda) = S'_1\lambda^3 - (\Theta\Sigma_1 - S_1)\lambda^2 - (\Theta'\Sigma_1 - \Delta' S'_1)\lambda + \Delta' S_1 = 0.$$

Le problème est ainsi complètement résolu; tout point A_1 de la courbe Γ du huitième ordre est le sommet d'un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, et d'un seul; les autres sommets sont les sommets du triangle défini, dans le plan $\theta = P_1 = 0$, par les équations (9) et (10).

6. Ces équations permettent d'exprimer les coordonnées des trois autres sommets au moyen de celles du premier; ce sont, en effet, les pôles par rapport à Σ des trois plans passant par le point A_1 et chacune des droites (9); chacun de ces plans a pour équation

$$(11)\qquad 2\Sigma_1\xi - 4\lambda S'_1\eta + 4\frac{\Delta'}{\lambda}S_1\zeta + \Sigma_1\left(\lambda - \frac{\Delta'}{\lambda}\right)\theta = 0,$$

et l'équation tangentielle de son pôle par rapport à Σ s'obtient en remplaçant respectivement x, y, z, t par u, v, w, r; il en résulte que les coordonnées d'un sommet tel que A_2 sont fournies par la formule

$$(12)\qquad \frac{x_2}{x_1} = 2a(b+c+d)\Sigma_1 - 4aS'_1\lambda + 4\frac{\Delta' S_1}{a\lambda} + \Sigma_1\left(\lambda - \frac{\Delta'}{\lambda}\right),$$

et par des formules analogues pour $\frac{y_2}{y_1}, \frac{z_2}{z_1}, \frac{t_2}{t_1}$.

Les coordonnées des plans des faces sont fournies par des équations identiques aux précédentes; celles des arêtes s'en déduisent immédiatement; une droite telle que A_1A_2 a pour coordonnées

$$(13)\qquad \begin{cases} A = (b-c)y_1z_1\left[-2(a+d)\Sigma_1 + 4S'_1\lambda + \frac{4ad}{\lambda}S_1\right], \\ B = (c-a)z_1x_1\left[-2(b+d)\Sigma_1 + 4S'_1\lambda + \frac{4bd}{\lambda}S_1\right], \end{cases}$$

les trois arêtes issues du point A_1 étant ainsi déterminées, les trois autres sont leurs conjuguées par rapport à Σ, et il suffit de changer A, B, C, P, Q, R en P', Q', R', A', B', C' pour avoir leurs coordonnées.

7. Les résultats précédents se présentent sous une forme plus simple en exprimant les coordonnées du point A_1 en fonction d'un paramètre; les points de la courbe Γ sont donnés par l'intersection des trois quadriques

$$\begin{aligned} \Sigma + 2\rho_1 S' &= 0, \\ \Sigma + \frac{2}{\rho_1} S &= 0, \\ T' &= 0, \end{aligned}$$

lorsque ρ_1 varie; ce qui donne pour déterminer les coordonnées du point A_1 les formules

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1^2 &= a(b-c)(c-d)(d-b)\left[\rho_1 a - \frac{bcd}{\rho_1} + 2a(b+c+d)\right], \\ y_1^2 &= b(c-d)(d-a)(a-c)\left[\rho_1 b - \frac{cda}{\rho_1} + 2b(c+d+a)\right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

A chaque valeur de ρ_1 correspondent huit points de la courbe Γ, formant par rapport au tétraèdre de référence primitif une figure analogue à celle des centres des sphères tangentes aux quatre faces; chacun de ces points est le sommet d'un tétraèdre défini par les équations suivantes, déduites des relations (10) et (12) par l'introduction du paramètre ρ_1,

$$(10)' \qquad \varphi(\lambda) = \Delta\lambda^3 + (2\Theta\rho_1 + \Delta\rho_1^2)\lambda^2 + (2\Theta'\rho_1 + \Delta')\lambda + \Delta'\rho_1^2 = 0,$$

$$(12)' \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{x_i}{x_1} &= 2a(b+c+d) - 2\frac{a\lambda_i}{\rho_1} + 2\Delta'\frac{\rho_1}{a\lambda_i} + \lambda_i - \frac{\Delta'}{\lambda_i}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned} \right.$$

où $\lambda_i (i = 2, 3, 4)$ sont les trois racines de l'équation $\varphi(\lambda) = 0$; à chacun des huit points fournis par (14) correspond ainsi un tétraèdre, les sommets des huit tétraèdres formant quatre figures analogues à celle que déterminent les huit points A_1.

Si l'on considère le groupe des huit tétraèdres associés, les sommets A_2, A_3, A_4 sont déterminés par des valeurs ρ_2, ρ_3, ρ_4 du paramètre ρ liées à ρ_1 par une relation simple; comme on a $\rho_i = -\frac{2S_i}{\Sigma_i}$, il en résulte l'équation suivante, qui se déduit des précédentes,

$$\lambda_i = \rho_1 \rho_i \qquad (i = 2, 3, 4),$$

de sorte que ρ_2, ρ_3, ρ_4 sont racines de l'équation bicubique symétrique

$$(15) \qquad \Delta \rho_i^2 \rho_1^2 (\rho_i + \rho_1) + 2\Theta \rho_i^2 \rho_1^2 + 2\Theta' \rho_i \rho_1 + \Delta'(\rho_i + \rho_1) = 0.$$

On peut remarquer que si l'on a calculé une racine ρ_2 de cette équation, les deux autres ρ_3 et ρ_4 sont données par une équation à coefficients symétriques en ρ_1 et ρ_2

$$(16) \qquad \Delta \rho \rho_1 \rho_2 (\rho + \rho_1 + \rho_2) + 2\Theta \rho \rho_1 \rho_2 - \Delta' = 0.$$

8. *Tétraèdres limites*. — Ils sont de deux sortes :

1° Si l'une des racines ρ_2, ρ_3, ρ_4 devient égale à ρ_1, sans être nulle ni infinie, ρ_1 est une des racines de l'équation discriminante

$$\Delta \rho^4 + \Theta \rho^3 + \Theta' \rho + \Delta' = 0,$$

et à l'une des valeurs $-a$, $-b$, $-c$, $-d$; si l'on suppose par exemple $\rho_1 = \rho_2 = -a$, on a alors

$$\begin{aligned}
x_1^2 &= -(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(c-d)(d-b),\\
y_1^2 &= b(b-a)(a-c)(c-d)(d-a)(c+d),\\
z_1^2 &= c(c-a)(a-b)(b-d)(d-a)(b+d),\\
t_1^2 &= d(d-a)(a-b)(b-c)(c-a)(b+c),
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^2}{-(b-c)(c-d)(d-b)} &= \frac{y_1^2}{b(c-d)(c+d)}\\
&= \frac{z_1^2}{c(d-b)(d+b)} = \frac{t_1^2}{d(b-c)(b+c)};
\end{aligned}$$

mais, bien que ρ_2 soit égal à ρ_1, les points A_1 et A_2 ne sont pas confondus, car les formules (12)' donnent

$$\frac{x_2}{-x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{t_2}{t_1},$$

mais on a $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, de sorte que les deux sommets A_3, A_4 sont dans une face du tétraèdre de référence, et le point A_2 est conjugué de A_1 par rapport à cette face et au sommet opposé; les huit tétraèdres se réduisent à quatre tétraèdres doubles.

2° Le cas le plus important est celui où ρ_1 est nul ou infini.

Si $\rho_1 = 0$, une autre valeur ρ_2 par exemple est aussi nulle, ρ_3 et ρ_4 sont infinis; les points A_1 et A_2 sont confondus en un des huit points de rencontre des surfaces Σ, S et T', et les points A_3 et A_4 confondus en un point correspondant, intersection de Σ, S' et T'; on a alors

$$\frac{x_1^2}{(b-c)(c-d)(d-b)} = \frac{y_1^2}{(a-c)(c-d)(d-a)} = \frac{z_1^2}{(a-b)(b-d)(d-a)} = \frac{t_1^2}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

$$x_2 = x_1, \qquad y_2 = y_1, \qquad z_2 = z_1, \qquad t_2 = t_1,$$

$$x_3 = x_4 = a x_1, \qquad y_3 = y_4 = b y_1, \qquad z_3 = z_4 = c z_1, \qquad t_3 = t_4 = d t_1.$$

Le tétraèdre se réduit à deux droites simples A_1A_2, A_3A_4, et à une droite quadruple A_1A_3, que l'on vérifie être une génératrice de la surface Σ.

On a ainsi huit tétraèdres limites dont les droites quadruples constituent huit génératrices particulières de Σ, limitées aux points où elles rencontrent les surfaces S et S' auxquelles elles sont tangentes. Chacune de ces huit génératrices est rencontrée par quatre autres aux points où elle perce les faces du tétraèdre de référence; par exemple, celle qui est issue du point (x_1, y_1, z_1, t_1) rencontre celles qui sont issues de $(-x_1, y_1, z_1, t_1)$, $(x_1, -y_1, z_1, t_1)$, $(x_1, y_1, -z_1, t_1)$, $(x_1, y_1, z_1, -t_1)$; il y a donc quatre génératrices d'un système et quatre de l'autre.

Ces résultats s'obtiennent aussi géométriquement : si A_1 et A_2 sont confondus, le plan $A_2A_3A_4$ conjugué de A_1 est tangent à Σ, et A_1 appartient à cette surface, donc est un point commun à Σ, T' et S ou S'.

S'il est sur S, A_1A_3 et A_2A_4 sont dans le plan tangent à Σ, et aussi dans le plan tangent à S; elles sont dès lors confondues et, comme elles sont conjuguées par rapport à Σ, elles constituent une génératrice de cette surface, tangente à S en A_1 et à S' en un point où sont réunis A_3 et A_4; on peut ajouter que A_1A_2 est la tangente à la courbe Γ et est l'intersection des plans tangents à S et T', de même A_3A_4 est tangente à S' et T'; le plan $A_1A_2A_3$ est le plan tangent à Σ en A_3 et le plan $A_1A_3A_4$ le plan tangent à Σ en A_1.

Comme il y a quatre génératrices de chaque système de Σ tangentes à S, il y a huit tétraèdres limites.

II.

9. Le résultat le plus important des recherches précédentes est la relation

$$(15)\qquad \Delta\rho_i^2\rho_1^2(\rho_i+\rho_1)+2\Theta\rho_i^2\rho_1^2+2\Theta'\rho_i\rho_1+\Delta'(\rho_i+\rho_1)=0,$$

qui existe entre les paramètres de deux sommets d'un tétraèdre; nous allons en déduire une représentation de ces paramètres au moyen de fonctions hyperelliptiques.

La relation précédente est de genre deux; la courbe représentative se transforme en une courbe hyperelliptique à l'aide d'une transformation Cremona; si l'on pose, en effet,

$$\rho_1\rho_i=X,$$

ρ_1 et ρ_i ont une somme déterminée par l'équation (15); ils sont racines de l'équation

$$\rho^2+\frac{2(\Theta X^2+\Theta' X)}{\Delta X^2+\Delta'}\rho+X=0,$$

et ont pour valeurs

$$\rho=-\frac{(\Theta X^2+\Theta' X)\pm\sqrt{R(X)}}{\Delta X^2+\Delta'},$$

où

$$\begin{aligned}R(X)&=-X(\Delta X^2+\Delta')^2+(\Theta X^2+\Theta' X)^2\\&=-X(X-a^2)(X-b^2)(X-c^2)(X-d^2).\end{aligned}$$

ρ s'exprime ainsi par un radical portant sur un polynome du cinquième degré; on peut poser

$$\begin{aligned}X&=\rho_1\rho_i,\\Y&=\sqrt{R(X)}=\rho_1(\Delta\rho_1^2\rho_i^2+\Delta')+(\Theta\rho_i^2\rho_1^2+\Theta'\rho_i\rho_1),\end{aligned}$$

ce qui fournit une transformation rationnelle réversible; on a, en effet, inversement

$$(17) \qquad \rho_1 = \frac{Y - \Theta X^2 - \Theta' X}{\Delta X^2 + \Delta'}, \qquad \rho_i = \frac{-Y - \Theta X^2 - \Theta' X}{\Delta X^2 + \Delta'}.$$

et la courbe primitive se change en la courbe hyperelliptique

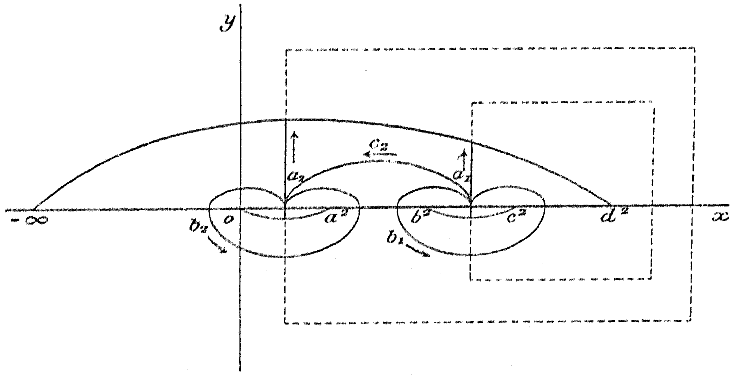
$$(18) \qquad Y^2 = -X(X - a^2)(X - b^2)(X - c^2)(X - d^2).$$

Construisons la surface de Riemann à deux feuillets sur laquelle est représentée la fonction Y; elle a comme points de ramification les points o, ∞, a^2, b^2, c^2 et d^2.

Nous supposerons dans ce qui suit que les racines a, b, c, d du discriminant sont réelles, deux positives et deux négatives, de sorte que a^2, b^2, c^2, d^2 sont positifs et que les racines de $\Delta X^2 + \Delta' = 0$ sont imaginaires, de la forme $\pm i\sqrt{abcd}$; les raisonnements s'appliqueraient au cas général, sans modification sensible, mais la figure est plus simple dans le cas particulier considéré,

Je trace les coupures $(0, a^2)$, (b^2, c^2), $(d^2 - \infty)$ (*fig.* 1) de la

Fig. 1.



même manière que celles qui sont indiquées dans le savant Mémoire de M. Appell [1], p. 87 et 89.

Ce seront les lignes de réunion des deux feuillets, et je rends la surface simplement connexe par les coupures a_1, a_2, b_1, b_2 et c_2; en

[1] APPELL, *Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs etc.* Mémoire couronné par S. M. le roi de Suède (*Acta mathematica*, t. XIII).

convenant de prendre le radical $\sqrt{R(X)}$ réel et positif sur le segment $(0, -\infty)$ du feuillet supérieur, on a sur l'axe ox les valeurs suivantes du radical, où S' désigne une quantité variable, réelle et positive :

	Feuillets supérieur.	Feuillets inférieur.
$-\infty, 0$	S'	$-S'$
$0, a^2$	$-iS'$	iS'
a^2, b^2	$-S'$	S'
b^2, c^2	iS'	$-iS'$
c^2, d^2	S'	$-S'$
$d^2, +\infty$	iS'	$-iS'$

10. En posant, avec Neumann [1],

$$W_1 = \int_0^X \frac{dX}{Y}, \qquad W_2 = \int_0^X \frac{X\,dX}{Y},$$

les modules de périodicité A et B le long des coupures a et b s'expriment par des intégrales définies prises sur le feuillet supérieur, et sont

$$A_{11} = 2\int_{b^2}^{c^2} dW_1 = -iA'_{11}, \qquad A_{12} = 2\int_0^{a^2} dW_1 = iA'_{12},$$

$$B_{11} = 2\int_{c^2}^{d^2} dW_1 = B'_{11}, \qquad B_{12} = 2\int_0^{-\infty} dW_1 = -B'_{12},$$

$$A_{21} = 2\int_{b^2}^{c^2} dW_2 = -iA'_{21}, \qquad A_{22} = 2\int_0^{a^2} dW_2 = iA'_{22},$$

$$B_{21} = 2\int_{c^2}^{d^2} dW_2 = B'_{21}, \qquad B_{22} = 2\int_0^{-\infty} dW_2 = B'_{22},$$

où les lettres accentuées désignent des quantités réelles et positives. Les intégrales normales sont

$$w_1 = k_1 W_1 + k_2 W_2 = \int_0^X \frac{(k_1 + k_2 X)\,dX}{Y},$$

$$w_2 = l_1 W_1 + l_2 W_2 = \int_0^X \frac{(l_1 + l_2 X)\,dX}{Y},$$

(1) NEUMANN, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der abel'schen Integrale*. Comparez pour ce qui suit 2e édition, p. 248 et 360.

où

$$\begin{aligned} D k_1 &= \pi i A_{22}, & D k_2 &= -\pi i A_{12}, \\ D l_1 &= -\pi i A_{21}, & D l_2 &= \pi i A_{11}, \\ D &= A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}, \end{aligned}$$

et ont pour modules de périodicité

$$a_{11} = \pi i, \qquad a_{12} = 0, \qquad b_{11} = \pi i \frac{A_{22} B_{11} - A_{12} B_{21}}{D}, \qquad b_{12} = \pi i \frac{A_{11} B_{21} - A_{12} B_{11}}{D},$$

$$a_{21} = 0, \qquad a_{22} = \pi i, \qquad b_{21} = \pi i \frac{A_{11} B_{21} - A_{12} B_{11}}{D}, \qquad b_{22} = \pi i \frac{A_{11} B_{22} - A_{21} B_{12}}{D}.$$

En introduisant les quantités A′ et B′, on constate que les modules b sont réels, et, en s'appuyant sur ce que la forme $b_{11} x^2 + 2 b_{12} xy + b_{22} y^2$ est constamment négative, on trouve que k_1 et l_1 sont des quantités réelles et positives, k_2 et l_2 des quantités réelles et négatives, résultat analogue à celui de M. Appell (Mémoire cité, p. 90).

Les valeurs des intégrales pour les points de ramification sont (Neumann, p. 360) :

$$\begin{aligned} &\varpi_1(0) = 0, && \varpi_2(0) = 0, \\ &\varpi_1(a^2) = 0, && \varpi_2(a^2) = -\frac{\pi i}{2}, \\ &\varpi_1(b^2) = \frac{b_{11} - b_{12}}{2}, && \varpi_2(b^2) = -\frac{\pi i}{2} + \frac{b_{21} - b_{22}}{2}, \\ &\varpi_1(c^2) = -\frac{\pi i}{2} + \frac{b_{11} - b_{12}}{2}, && \varpi_2(c^2) = -\frac{\pi i}{2} + \frac{b_{21} - b_{22}}{2}, \\ &\varpi_1(d^2) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{b_{12}}{2}, && \varpi_2(d^2) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{b_{22}}{2}, \\ &\varpi_1(-\infty) = -\frac{b_{12}}{2}, && \varpi_2(-\infty) = -\frac{b_{22}}{2}; \end{aligned}$$

les quantités K de Riemann sont (p. 367)

$$K_1 \equiv \varpi_1(-\infty) - \varpi_1(c^2) - \varpi_1(a^2) \equiv \frac{\pi i}{2} - \frac{b_{11}}{2},$$

$$K_2 \equiv \varpi_2(-\infty) - \varpi_2(c^2) - \varpi_2(a^2) \equiv -\frac{b_{21}}{2},$$

et ce sont précisément, puisque $p = 2$, les constantes qu'il faut ajouter aux intégrales ϖ_1 et ϖ_2 pour appliquer les formules d'inversion ; on pourra donc, en remarquant que $2K_1 \equiv 0$, $2K_2 \equiv 0$, appliquer immédiatement ces formules, en posant

$$\begin{aligned} w_1(X_1) + w_1(X_2) + 2K_1 &\equiv w_1(X_1) + w_1(X_2) \equiv u_1, \\ w_2(X_1) + w_2(X_2) + 2K_2 &\equiv w_2(X_1) + w_2(X_2) \equiv u_2; \end{aligned}$$

X_1 et X_2 sont fournis par deux des trois formules suivantes (p. 374) :

$$(X_1 - d^2)(X_2 - d^2) = \sqrt{(c^2 - d^2)(a^2 - d^2)}\sqrt{-d^2(b^2 - d^2)}\,\frac{\mathfrak{S}^2\left(u_1 + \frac{b_{11}+b_{12}}{2},\ u_2 + \frac{\pi i}{2} + \frac{b_{21}+b_{22}}{2}\right)}{\mathfrak{S}^2\left(u_1 + \frac{\pi i}{2} + \frac{b_{11}+b_{12}}{2},\ u_2 + \frac{b_{21}+b_{22}}{2}\right)},$$

$$\frac{(X_1 - a^2)(X_2 - a^2)}{X_1 X_2} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2}}\sqrt{\frac{(b^2 - a^2)(d^2 - a^2)}{b^2 d^2}}\,\frac{\mathfrak{S}^2\left(u_1 + \frac{\pi i}{2} + \frac{b_{11}}{2},\ u_2 + \frac{\pi i}{2} + \frac{b_{21}}{2}\right)}{\mathfrak{S}^2\left(u_1 + \frac{\pi i}{2} + \frac{b_{11}}{2},\ u_2 + \frac{b_{21}}{2}\right)},$$

$$\frac{(X_1 - c^2)(X_2 - c^2)}{(X_1 - b^2)(X_2 - b^2)} = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}\sqrt{\frac{c^2(d^2 - c^2)}{b^2(d^2 - b^2)}}\,\frac{\mathfrak{S}^2\left(u_1 + \frac{b_{12}}{2},\ u_2 + \frac{\pi i}{2} + \frac{b_{22}}{2}\right)}{\mathfrak{S}^2\left(u_1 + \frac{\pi i}{2} + \frac{b_{12}}{2},\ u_2 + \frac{\pi i}{2} + \frac{b_{22}}{2}\right)}.$$

Nous emploierons la notation des caractéristiques de Weber (¹); en donnant aux limites X_1, X_2 des valeurs égales à 0, a^2, b^2, c^2, d^2 ou $-\infty$, et faisant usage des relations entre les fonctions $\mathfrak{S}$ pour des arguments quelconques et des arguments nuls, on peut exprimer rationnellement les radicaux, et déterminer a^2, b^2, c^2 en fonction de d^2; on obtient

$$\frac{a^2}{d^2} = \frac{\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}{\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}},$$

$$\frac{b^2}{d^2} = \frac{\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}{\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}},$$

$$\frac{c^2}{d^2} = \frac{\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}{\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\mathfrak{S}^2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}},$$

(¹) Consulter, à ce sujet, KRAZER, *Theorie der zweifachunendlichen Thetareihen*, en particulier les formules (II), p. 41, (III), p. 43 et 47.

où les arguments sont nuls, et en outre

$$\frac{X_1 X_2}{d^4} = \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}}\,\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1 u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1 u_2)},$$

$$\frac{(X_1-a^2)(X_2-a^2)}{d^4} = \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}}\,\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}(u_1 u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1 u_2)},$$

$$\frac{(X_1-b^2)(X_2-b^2)}{d^4} = \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}\,\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}(u_1 u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1 u_2)},$$

$$\frac{(X_1-c^2)(X_2-c^2)}{d^4} = \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}\,\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1 u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1 u_2)},$$

$$\frac{(X_1-d^2)(X_2-d^2)}{d^4} = \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}}\,\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}(u_1 u_2)}{\vartheta^2\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}(u_1 u_2)};$$

les fonctions dont les arguments ne sont pas nuls sont les six fonctions ϑ impaires [1].

11. Cela posé, pour exprimer ρ_1 et ρ_i en fonction d'un paramètre, on supposera $X_1 X_2 = 0$, ce qui établit entre u_1 et u_2 la relation

$$\vartheta\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}(u_1 u_2) = 0, \tag{19}$$

la variable restante X non nulle s'exprime en fonction hyperelliptique de u_1 et u_2; Y est une fonction uniforme de X sur la surface de Riemann; les formules (17) donnent alors ρ_1 et ρ_i en fonction des deux paramètres u_1 et u_2 liés par la relation précédente.

---

[1] Les premiers membres peuvent aussi s'exprimer au moyen des fonctions σ. Consultez STAUDE, *Thetafunctionen zweier Veränderliche* (*Mathematische Annalen*, Bd. 24, p. 281).

Au lieu de calculer Y en fonction de u_1 et u_2, il est préférable d'employer le théorème d'Abel. Coupons la courbe hyperelliptique

$$Y^2 + X(X-a^2)(X-b^2)(X-c^2)(X-d^2) = 0,$$

par la courbe représentée par l'équation (17),

$$Y = \Theta X^2 + \Theta' X + \rho_1(\Delta X^2 + \Delta');$$

il existe deux points communs fixes, quel que soit ρ_1, donnés par $\Delta X^2 + \Delta' = 0$, et trois points d'intersection variables dont les abscisses sont données par

$$\Delta X^3 + (\rho_1^2\Delta + 2\rho_1\Theta)X^2 + (\Delta' + 2\rho_1\Theta')X + \rho_1^2\Delta' = 0. \tag{20}$$

C'est précisément l'équation $(10)'$ dont les racines sont les valeurs $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ qui nous ont servi à déterminer les sommets A_2, A_3, A_4 du tétraèdre en fonction de ρ_1, et satisfont aux relations $\lambda_i = \rho_1\rho_i$; nous désignerons encore par $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les abscisses fournies par l'équation (20). Ce sont des fonctions de ρ_1 qui, pour $\rho_1 = 0$, se réduisent respectivement à 0, $i\sqrt{\Delta'}$ et $-i\sqrt{\Delta'}$ et, pour ρ_1 infini, se réduisent à ∞, $i\sqrt{\Delta'}$ et $-i\sqrt{\Delta'}$; mais si l'on se reporte à l'équation (17), et si l'on fait varier X d'une manière continue depuis une valeur réelle négative jusqu'à l'une ou l'autre des valeurs $\pm i\sqrt{\Delta'}$, on vérifie facilement que, pour que ρ_1 devienne nul, il faut faire suivre à X des chemins situés sur un même feuillet de la surface de Riemann, et pour qu'il devienne infini, il faut faire suivre à la variable des chemins situés tous deux sur l'autre feuillet.

Cela posé, le théorème d'Abel donne, en faisant varier ρ_1 à partir de zéro, et prenant les points d'affixe $\pm i\sqrt{\Delta'}$ sur le feuillet convenable,

$$\int_0^{\lambda_2} dw_1 + \int_{i\sqrt{\Delta'}}^{\lambda_3} dw_1 + \int_{-i\sqrt{\Delta'}}^{\lambda_4} dw_1 = 0,$$

$$\int_0^{\lambda_2} dw_2 + \int_{i\sqrt{\Delta'}}^{\lambda_3} dw_2 + \int_{-i\sqrt{\Delta'}}^{\lambda_4} dw_2 = 0,$$

ou bien

$$\int_0^{\lambda_2} dw_1 + \int_0^{\lambda_3} dw_1 + \int_0^{\lambda_4} dw_1 = -\int_{i\sqrt{\Delta'}}^{0} dw_1 - \int_{-i\sqrt{\Delta'}}^{0} dw_1, \tag{21}$$

et de même pour dw_2.

Faisons maintenant varier ρ_1 par une suite quelconque de valeurs de o à ∞, en évitant cependant les valeurs qui annuleraient le discriminant de l'équation (20) et les valeurs $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, pour lesquelles l'une des racines $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ est égale à a^2, b^2, c^2 ou d^2 (n° 8); pour $\rho_1 = 0$, l'une des racines est nulle, et les autres égales à $\pm i\sqrt{\Delta'}$ sur un certain feuillet; pour $\rho_1 = \infty$, l'une des racines devient infinie, les deux autres égales à $\pm i\sqrt{\Delta'}$ sur un feuillet différent du premier; pour cette variation de ρ_1, on a, aux multiples près de périodes simultanées,

$$w_1(-\infty) = -\frac{b_{12}}{2} = -2\left(\int_{i\sqrt{\Delta'}}^{0} dw_1 + \int_{-i\sqrt{\Delta'}}^{0} dw_1\right),$$

$$w_2(-\infty) = -\frac{b_{22}}{2} = -2\left(\int_{i\sqrt{\Delta'}}^{0} dw_2 + \int_{-i\sqrt{\Delta'}} dw_2\right),$$

où les seconds membres ont la signification qu'ils possèdent dans l'équation (21); on en déduit qu'on peut remplacer cette dernière et l'équation analogue par

$$\int_0^{\lambda_2} dw_1 + \int_0^{\lambda_3} dw_1 + \int_0^{\lambda_4} dw_1 + \frac{b_{12}}{4} = 0,$$

$$\int_0^{\lambda_2} dw_2 + \int_0^{\lambda_3} dw_2 + \int_0^{\lambda_4} dw_2 + \frac{b_{22}}{4} = 0.$$

En introduisant la limite $\lambda_0 = 0$, posons

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\lambda_0} dw_1 + \int_0^{\lambda_2} dw_1 = u_1, & \displaystyle\int_0^{\lambda_3} dw_1 + \int_0^{\lambda_4} dw_1 = -u_1 - \frac{b_{12}}{4}, \\ \displaystyle\int_0^{\lambda_0} dw_2 + \int_0^{\lambda_2} dw_2 = u_2, & \displaystyle\int_0^{\lambda_3} dw_2 + \int_0^{\lambda_4} dw_2 = -u_2 - \frac{b_{22}}{4}; \end{cases}$$

soient $F(u_1, u_2)$ et $\Phi(u_1, u_2)$ les fonctions hyperelliptiques exprimées au moyen des fonctions ϑ et donnant le produit et la somme des limites des intégrales, d'après les formules d'inversion du n° 10; on aura

$$(23)\quad \begin{cases} \lambda_0\lambda_2 = 0 = F(u_1, u_2), & \lambda_3\lambda_4 = F\left(-u_1 - \dfrac{b_{12}}{4}, -u_2 - \dfrac{b_{22}}{4}\right), \\ \lambda_0 + \lambda_2 = \lambda_2 = \Phi(u_1, u_2), & \lambda_3 + \lambda_4 = \Phi\left(-u_1 - \dfrac{b_{12}}{4}, -u_2 - \dfrac{b_{22}}{4}\right). \end{cases}$$

On a ainsi, avec la condition $F(u_1, u_2) = 0$, identique à

$$\vartheta\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}(u_1, u_2) = 0,$$

les expressions de λ_2, λ_3 et λ_4 en fonction des deux variables u_1, u_2 liées par la relation précédente; pour obtenir les valeurs des paramètres ρ au moyen des mêmes variables, nous remarquerons que l'équation (20) donne, entre les coefficients et les racines, les relations

$$(24)\qquad \begin{cases} \Delta\rho_1^2 + 2\Theta\rho_1 = -\Delta(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4), \\ 2\Theta'\rho_1 + \Delta' = \Delta(\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4), \\ \Delta'\rho_1^2 = -\Delta\lambda_2\lambda_3\lambda_4. \end{cases}$$

L'élimination de ρ_1 entre ces équations conduirait aux expressions de $\lambda_3\lambda_4$ et $\lambda_3+\lambda_4$ en fonction de λ_2 ou de u_1 et u_2; elle donnerait lieu à un théorème particulier d'addition des fonctions F et Φ; l'une des équations précédentes donne ρ_1 lui-même; on a par exemple

$$(25)\qquad \begin{cases} 2\Theta'\rho_1 + \Delta' = \Delta\,\Phi(u_1, u_2)\,\Phi\left(-u_1 - \dfrac{b_{12}}{4}, -u_2 - \dfrac{b_{22}}{4}\right) \\ \qquad\qquad + \Delta\,F\left(-u_1 - \dfrac{b_{12}}{4}, -u_2 - \dfrac{b_{22}}{4}\right). \end{cases}$$

Remarquons en passant que, si l'on fait $\lambda_2 = 0$, u_1 et u_2 sont nuls; on a $\rho_1 = 0$, $\lambda_3 = i\sqrt{\Delta'}$, $\lambda_4 = -i\sqrt{\Delta'}$, de sorte que l'on peut écrire les relations particulières

$$0 = \Phi\left(-\frac{b_{12}}{4}, -\frac{b_{22}}{4}\right) = \Phi\left(\frac{b_{12}}{4}, \frac{b_{22}}{4}\right),$$
$$\Delta' = F\left(-\frac{b_{12}}{4}, -\frac{b_{22}}{4}\right) = F\left(\frac{b_{12}}{4}, \frac{b_{22}}{4}\right),$$

F et Φ étant des fonctions paires s'exprimant par les carrés des fonctions ϑ impaires.

Ayant ainsi exprimé ρ_1 en fonction des deux variables u_1, u_2 non indépendantes, on a

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_1}, \qquad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\rho_1}, \qquad \rho_4 = \frac{\lambda_4}{\rho_1}$$

et les équations (14) et (12)' donnent tous les éléments des tétraèdres successifs en fonction de u_1 et u_2. On peut ajouter que, pour $u_1 = 0$,

$u_2 = 0$, on obtient un tétraèdre limite où les sommets A_1 et A_2 sont confondus (n° 8).

Dans les formules (22) et (23) λ_2 désigne l'une quelconque des trois racines λ_2, λ_3, λ_4; cela signifie que, si l'on cherche à déterminer un couple de valeurs de variables satisfaisant à l'équation $F(u_1, u_2) = 0$ et à l'équation (25), où ρ_1 est supposé donné, on trouve, aux multiples près de périodes simultanées, trois systèmes distincts que j'appelle (u_1, u_2), (v_1, v_2), (r_1, r_2), tels que l'on ait

$$\lambda_2 = \Phi(u_1, u_2), \qquad \lambda_3 = \Phi(v_1, v_2), \qquad \lambda_4 = \Phi(r_1, r_2),$$

de sorte que

$$\rho_2 = \frac{\Phi(u_1, u_2)}{\rho_1}, \qquad \rho_3 = \frac{\Phi(v_1, v_2)}{\rho_1}, \qquad \rho_4 = \frac{\Phi(r_1, r_2)}{\rho_1};$$

ils satisfont, d'après le théorème d'Abel, aux relations

$$u_1 + v_1 + r_1 + \frac{b_{12}}{4} = 0,$$

$$u_2 + v_2 + r_2 + \frac{b_{22}}{4} = 0$$

et donnent lieu à des identités que l'on obtient en comparant les valeurs des seconds membres des équations (24) pour chacun des trois systèmes de variables.

12. Soit (u_1, u_2) un couple de valeurs des variables donnant lieu à une valeur de ρ_1 tirée de l'équation (25) et à des valeurs correspondantes de λ_2, λ_3, λ_4 tirées de (23); j'appelle $A_1A_2A_3A_4$ le tétraèdre ainsi formé, où A_i correspond à ρ_i; en réalité, il existe huit points tels que A_1 et huit tétraèdres, mais on ne peut les séparer les uns des autres dans le calcul actuel.

Je cherche un système de valeurs (u'_1, u'_2) tel que la valeur ρ'_1 correspondante donne pour A'_1 un point confondu avec l'un des huit sommets A_2 des tétraèdres précédents; si A'_1 est confondu avec un de ces huit points, le tétraèdre $A'_1A'_2A'_3A'_4$ est identique à $A_1A_2A_3A_4$ car chaque point de la courbe Γ est le sommet d'un tétraèdre et d'un seul; parmi les trois couples de variables (u'_1, u'_2), (v'_1, v'_2), (r'_1, r'_2), je choisis celui pour lequel A'_2 se confond avec A_1, et A'_3, A'_4 avec A_3, A_4; je suppose que ce soit le couple (u'_1, u'_2); alors, d'après la manière dont ρ_i s'exprime au moyen des coordonnées de A_i, on doit avoir

$$\rho'_1 = \rho_2, \qquad \rho'_2 = \rho_1, \qquad \rho'_3 = \rho_3, \qquad \rho'_4 = \rho_4,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \lambda'_2 &= \rho'_1 \rho'_2 = \rho_1 \rho_2 = \lambda_2, \\ \lambda'_3 &= \rho'_1 \rho'_3 = \rho_2 \rho_3, \\ \lambda'_4 &= \rho'_1 \rho'_4 = \rho_2 \rho_4. \end{aligned}$$

De l'égalité $\lambda'_2 = \lambda_2$ résulte que $F(u'_1, u'_2)$ et $\Phi(u'_1, u'_2)$ ont les mêmes valeurs que $F(u_1, u_2)$ et $\Phi(u_1, u_2)$; il en est de même des carrés de toutes les fonctions $\mathfrak{S}$ impaires, qui peuvent s'exprimer au moyen de F et Φ; donc on doit avoir, d'après un théorème connu (¹),

$$u'_1 = \pm u_1, \qquad u'_2 = \pm u_2,$$

les signes supérieurs étant pris ensemble, ainsi que les signes inférieurs; on doit prendre ici

$$u'_1 = -u_1, \qquad u'_2 = -u_2.$$

Les deux autres équations donnent

$$\begin{aligned} \lambda'_3 \lambda'_4 &= \rho_2^2 \rho_3 \rho_4 = \frac{\lambda_2^2 \lambda_3 \lambda_4}{\rho_1^4} = \frac{\Delta'^2}{\Delta^2 \lambda_3 \lambda_4}, \\ \lambda'_3 + \lambda'_4 &= \rho_2(\rho_3 + \rho_4) = \frac{\lambda_2(\lambda_3 + \lambda_4)}{\rho_1^2} = \frac{-\Delta'(\lambda_3 + \lambda_4)}{\Delta \lambda_3 \lambda_4}, \end{aligned}$$

ce qui conduit aux relations suivantes, tant que $F(u_1, u_2) = 0$:

$$\Delta^2 F\left(u_1 - \frac{b_{12}}{4}, u_2 - \frac{b_{22}}{4}\right) F\left(-u_1 - \frac{b_{12}}{4}, -u_2 - \frac{b_{22}}{4}\right) = \Delta'^2,$$

$$\begin{aligned} &\Delta \Phi\left(u_1 - \frac{b_{12}}{4}, u_2 - \frac{b_{22}}{4}\right) F\left(-u_1 - \frac{b_{12}}{4}, -u_2 - \frac{b_{22}}{4}\right) \\ &\quad = -\Delta' \Phi\left(-u_1 - \frac{b_{12}}{4}, -u_1 - \frac{b_{22}}{4}\right). \end{aligned}$$

Ainsi donc l'un des couples de variables relatives au sommet A_2 du tétraèdre primitif est égal à $(-u_1, -u_2)$; on verrait de même que si (u''_1, u''_2) est le couple correspondant au sommet A_3, tel que si

(¹) Krause, *Die Transformation der hyperelliptischen Functionen*, p. 68.

$A''_1 = A_3$ on ait $A''_2 = A_1$, il est donné par

$$u''_1 = -v_1, \qquad u''_2 = -v_2,$$

et enfin si (u'''_1, u'''_2) est le couple correspondant au sommet A_4 tel que $A'''_1 = A_4$, $A'''_2 = A_1$ il est donné par

$$u'''_1 = -r_1, \qquad u'''_2 = -r_2.$$

La relation bicubique (15) entre ρ_1 et ρ_i peut alors s'interpréter de la manière suivante :

$F(u_1, u_2)$ et $\Phi(u_1, u_2)$ étant les deux fonctions hyperelliptiques dont on a parlé, il existe trois couples de valeurs des variables satisfaisant aux relations

$$F(u_1, u_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} 2\Theta'\rho_1 + \Delta' = \Delta\,\Phi(u_1, u_2)\,\Phi\left(-u_1 - \frac{b_{12}}{4}, -u_2 - \frac{b_{22}}{4}\right) \\ + \Delta\,F\left(-u_1 - \frac{b_{12}}{4}, -u_2 - \frac{b_{22}}{4}\right), \end{aligned}$$

et donnant à $\Phi(u_1, u_2)$ des valeurs distinctes; si (u_1, u_2), (v_1, v_2) (r_1, r_2) sont ces trois couples, on aura les trois racines de l'équation bicubique en remplaçant (u_1, u_2) par $(-u_1, -u_2)$, $(-v_1, -v_2)$, $(-r_1, -r_2)$ dans la valeur de ρ_1.

En d'autres termes, la relation (15) résulte de l'élimination de (u_1, u_2) entre les trois équations

$$F(u_1, u_2) = 0,$$

$$\begin{aligned} 2\Theta'\rho_1 + \Delta' = \Delta\,\Phi(u_1, u_2)\,\Phi\left(-u_1 - \frac{b_{12}}{4}, -u_2 - \frac{b_{22}}{4}\right) \\ + \Delta\,F\left(-u_1 - \frac{b_{12}}{4}, -u_2 - \frac{b_{22}}{4}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\Theta'\rho_i + \Delta' = \Delta\,\Phi(-u_1, -u_2)\,\Phi\left(u_1 - \frac{b_{12}}{4}, u_2 - \frac{b_{22}}{4}\right) \\ + \Delta\,F\left(u_1 - \frac{b_{12}}{4}, u_2 - \frac{b_{22}}{4}\right). \end{aligned}$$