Annales scientifiques de l'É.N.S.

C. Sautreaux

Sur une question d'hydrodynamique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 95-182 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__S95_0>

SUR UNE

QUESTION D'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. C. SAUTREAUX,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

Le problème du mouvement d'un jet fluide n'a été résolu, jusqu'à ce jour, que dans un petit nombre de cas.

Dans son travail sur les mouvements discontinus des fluides, Helmholtz a, pour la première fois, déterminé théoriquement la forme d'un jet fluide libre dans un cas particulier (*Monatsberichte der Berl. Akad.*, April 1868). Sa méthode, convenablement généralisée, a conduit M. Kirchhoff à la solution de la même question, dans un certain nombre de cas. Ces savants supposent, tous deux, que le fluide est incompressible, qu'aucune force extérieure n'agit sur lui, que ses particules n'ont pas de rotation, que le mouvement est permanent, et enfin que le mouvement est partout parallèle à un plan fixe.

Nous essayerons, dans ce travail, de traiter le cas où, le fluide restant incompressible et le mouvement restant plan, des forces extérieures agissent sur le liquide.

Dans les problèmes sur la chaleur, par exemple, et, en général, dans les problèmes de Physique mathématique, les conditions aux limites s'expriment par des équations linéaires, qui permettent de décomposer la difficulté. Ici, la condition aux limites renferme les carrés des dérivées partielles. C'est ce fait qui rend, sans doute, les problèmes sur les jets fluides difficilement abordables par les méthodes ordinaires de la Physique mathématique et qui explique le peu de progrès faits dans cet ordre de questions.

Les travaux principaux, publiés sur le mouvement d'une masse liquide qui s'écoule par un orifice, sont ceux de MM. Boussinesq et Kirchhoff. Le premier de ces deux savants s'occupe surtout du mouvement du liquide à l'intérieur du réservoir, en supposant connue la vitesse d'écoulement normale au plan de l'orifice. Le second ne considère [*Vorlesungen über mathematische Physik* (1); Volume LXX du *Journal de Crelle*] que le mouvement dans le plan; il se sert des propriétés de la représentation conforme d'un plan sur un plan. La connaissance de ce travail étranger n'étant peut-être pas très répandue en France, nous en exposerons d'abord la méthode, avant de rendre compte de nos recherches personnelles. Cette partie historique constituera la première Partie de ce travail; les résultats que nous avons obtenus en constitueront la seconde.

---

(1) Leçons XXI et XXII.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Les phénomènes qui accompagnent le mouvement d'un liquide qui s'écoule par un orifice présentent un avantage précieux, consistant en ce que, d'après toutes les mesures de vitesse qui ont été prises sur des veines liquides, l'influence des frottements y est à fort peu près négligeable ([1]). Cette circonstance permet de substituer aux équations générales du mouvement celles bien plus simples qui conviennent aux fluides dits *parfaits*. Ces équations sont les suivantes

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X=\rho u',\\ &-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho Y=\rho v',\\ &-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho Z=\rho w',\end{aligned}\right.$$

où p désigne la pression, ρ la densité, X, Y, Z les trois composantes de la force agissant sur chaque molécule et rapportée à l'unité de masse, u', v', w' les accélérations de la molécule considérée. u', v', w' ont pour expressions

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} u'&=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},\\ v'&=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z},\\ w'&=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Rappelons un théorème qui nous permettra de simplifier encore

---

([1]) Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes.*

ces équations. Nous en donnerons une démonstration due à M. Boussinesq [1].

Théorème. — *Que le mouvement soit permanent ou non permanent, si les composantes u, v, w de la vitesse moyenne locale varient à un moment donné et à l'intérieur d'une particule fluide, de manière que les trois binômes différentiels*

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

y soient nuls, ces binômes différentiels seront encore nuls, à une autre époque quelconque, à l'endroit de l'espace où se trouverait à cette époque la particule, supposée animée constamment des seules vitesses translatoires u, v, w.

Il suffit, pour établir ce théorème, d'observer que la densité ρ étant constante par hypothèse, et l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ se trouvant, par hypothèse, aussi différentielle exacte, les équations (1) exigent que les accélérations u', v', w' soient les trois dérivées partielles en x, y, z d'une même fonction et satisfassent aux conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial v'}{\partial z}-\frac{\partial w'}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial w'}{\partial x}-\frac{\partial u'}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u'}{\partial y}-\frac{\partial v'}{\partial x}=0. \tag{4}$$

Remplaçons u', v', w' par leurs expressions (2); calculons seulement le premier de ces binômes (4), les autres s'en déduiront par permutation. On a

$$\frac{\partial v'}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial w'}{\partial y}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z},$$

---

[1] Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes.*

d'où

$$\frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial y} = 0 = \left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x},$$

en désignant la dérivée complète prise par rapport au temps en suivant la particule, c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$ par $\left(\frac{d}{dt}\right)$ pour abréger. On tire de là

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right). \end{aligned}\right.$$

On obtiendrait deux équations pareilles à celle-là en partant des autres binômes (3). Supposons que de ces trois expressions (3), la première, par exemple, soit celle qui acquiert à partir de l'époque $t = t_0$ les valeurs absolues les plus grandes; K désignant une quantité finie à chaque instant, la relation (5) donnera

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \mathrm{K}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

En intégrant, à partir de $t = t_0$, on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{K}\, dt},$$

où $\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ représente la valeur initiale du binôme.

Comme l'exponentielle du second membre a une valeur finie, ce second membre est nul, et l'on a bien à toute époque, aux endroits où se trouverait successivement la particule supposée animée des seules vitesses moyennes locales u, v, w,

$$(6)\qquad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Remarquons que, si, à l'époque $t = t_0$, les binômes (3) étaient seulement très petits, ils le seraient encore, d'après la démonstration précédente, au bout d'un temps fini $t - t_0$.

C'est ce qui arrivera pour toute la masse fluide dans les écoulements par les orifices. Les molécules, un peu avant d'arriver à l'orifice, ne seront animées que de vitesses dont les composantes u, v sont très petites et dont la troisième w, normale au plan de l'orifice, est à peu près constante. Les relations (6) étant vérifiées, à ce moment, tout autour de chacune d'elles, ne cesseront donc pas de l'être durant le petit instant que ces molécules emploieront pour se rendre à l'orifice ou même à la section contractée.

Ces relations (6) expriment que u, v, w sont les dérivées partielles d'une même fonction Φ, et l'on peut poser

$$(7) \qquad u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

La condition d'incompressibilité $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ devient

$$(8) \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Si l'on porte également les valeurs (7) dans les équations (1), celles-ci, respectivement multipliées par dx, dy, dz, ajoutées et intégrées, donnent

$$(9) \qquad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = F + C,$$

C désignant une simple fonction de t, F la fonction des forces telles que

$$(10) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dF.$$

Telles sont les équations que nous utiliserons. Dans le plan, elles deviennent

$$(8)' \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0,$$

$$(9)' \qquad \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = F + C,$$

avec

$$X\,dx + Y\,dy = dF. \tag{10'}$$

Φ s'appelle le *potentiel des vitesses*.

Pour le mouvement permanent d'un fluide incompressible, dans le cas où n'agit aucune force extérieure, on aura les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0, \\ &p = C - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right], \end{aligned}\right. \tag{11}$$

où C désigne une constante et où la densité du fluide est supposée égale à 1.

II.

Considérons le cas où nous avons un jet liquide qui confine à un espace où règne une pression p_0. La surface terminale du jet doit être formée de lignes de courant, car la vitesse normale y est nulle et être en même temps surface de niveau, car la pression y est constante. La seconde des équations (11) montre que la vitesse doit y être partout la même : nous supposerons que la valeur de cette vitesse est 1.

L'équation $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$ est satisfaite par la partie réelle comme par la partie imaginaire d'une fonction de la quantité complexe $x + iy$.

Posons $z = x + iy$ et représentons-nous une fonction analytique de z, que nous appellerons Z. Rappelons quelques propriétés bien connues d'une pareille fonction.

En remplaçant, chaque fois que l'occasion s'en présente, i^2 par -1, on arrive à mettre Z sous la forme $X + iY$, où X et Y sont des fonctions réelles de x et y.

D'après la définition de Z, on a

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial z}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = i\frac{\partial Z}{\partial z},$$

d'où

$$i\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y},$$

ce qui veut dire

$$i\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y}.$$

On peut prendre ces deux équations comme définition, et l'on en déduira que Z est une fonction de z.

On tire de ces équations

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

et aussi

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

qui exprime que les lignes $X = \text{const.}$ et les lignes $Y = \text{const.}$ se coupent à angle droit.

On trouvera un mouvement possible de fluide dans le plan quand on prendra pour Z une expression convenable de z et le potentiel de vitesse φ égal à l'une des deux quantités X ou Y. L'autre de ces quantités a aussi une signification simple; si on l'appelle ψ, $\psi = \text{const.}$ représente les lignes de courant.

Nous donnons quelques exemples simples :

Premier exemple. — Posons $Z = Lz$ ou $z = e^Z$. Si l'on fait $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on a

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = e^X(\cos Y + i\sin Y) \qquad \text{d'où} \qquad X = Lr, \qquad Y = \theta.$$

Nous aurons donc, ou

$$\varphi = Lr \qquad \text{et} \qquad \psi = \theta$$

ou

$$\varphi = \theta \qquad \text{et} \qquad \psi = Lr.$$

Dans le premier cas les lignes de courant sont des rayons issus de l'origine $z = 0$, et les lignes φ des cercles concentriques, décrits de l'origine comme centre. Dans le second cas, c'est l'inverse. Dans les deux cas, la vitesse est $\frac{1}{r}$. Deux lignes de courant peuvent être changées en parois solides, sans que le mouvement subisse de modification; les formules subsistent donc encore, lorsque deux des rayons ou deux des cercles sont des parois solides.

Deuxième exemple. — Posons $Z = L\frac{z-c_1}{z-c_2}$, où c_1 et c_2 sont deux constantes complexes

$$c_1 = a_1 + ib_1, \qquad c_2 = a_2 + ib_2.$$

Soient

$$x - a_1 = r_1 \cos\theta_1, \qquad x - a_2 = r_2 \cos\theta_2,$$
$$y - b_1 = r_1 \sin\theta_1, \qquad y - b_2 = r_2 \sin\theta_2,$$

on aura

$$X = L\frac{r_1}{r_2}, \qquad Y = \theta_1 - \theta_2.$$

Prenons $\varphi = X$, $\psi = Y$; comme le montre la Géométrie élémentaire, les lignes de courant sont des arcs de cercles qui se coupent aux points $z = c_1$ et $z = c_2$. De l'un de ces points sort le fluide, il se perd dans l'autre.

Les lignes φ sont des cercles : ils ont pour diamètre la distance de deux points qui divisent harmoniquement l'intervalle de $z = c_1$ à $z = c_2$. Deux lignes de courant, par exemple les deux parties d'une circonférence divisée par ces deux points, peuvent être des parois solides. Si $\psi = X$, $\varphi = Y$, c'est l'inverse.

Troisième exemple. — Si l'on pose $Z = \arcsin z$ ou $z = \sin Z$, on a

$$x = \sin X \frac{e^Y + e^{-Y}}{2}, \qquad y = \cos X \frac{e^Y - e^{-Y}}{2},$$

d'où

$$\frac{x^2}{\sin^2 X} - \frac{y^2}{\cos^2 X} = 1, \qquad \frac{4x^2}{(e^Y + e^{-Y})^2} + \frac{4y^2}{(e^Y - e^{-Y})^2} = 1.$$

Les équations $X = \text{const.}$, $Y = \text{const.}$ représentent deux systèmes d'hyperboles et d'ellipses homofocales dont les foyers ont pour coordonnées $x = \pm 1$, $y = 0$.

THÉORÈME. — *Si Z est une fonction de z, inversement z est une fonction de Z.*

Par hypothèse les relations (1) ont lieu; il s'agit de montrer que x et y considérées comme fonctions de X et de Y satisfont à des relations toutes pareilles.

Posons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} M^2 &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

expressions qui s'équivalent en vertu des relations (1). Par la résolution des équations identiques

$$1 = \frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad 1 = \frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y},$$

on obtient

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{1}{M^2}\frac{\partial X}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{1}{M^2}\frac{\partial X}{\partial y}, \qquad \frac{\partial y}{\partial X} = -\frac{1}{M^2}\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{1}{M^2}\frac{\partial Y}{\partial y},$$

et de là, par la considération des équations (1),

$$\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial y}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{\partial y}{\partial X}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On montre aussi facilement que si Z et Z′ sont deux fonctions de z, au sens donné plus haut, il en est de même du produit ZZ′.

Formons la dérivée

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dX + i\,dY}{dx + i\,dy} = \frac{\left(\dfrac{\partial X}{\partial x} + i\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)dx + \left(\dfrac{\partial X}{\partial y} + i\dfrac{\partial Y}{\partial y}\right)dy}{dx + i\,dy} = \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x},$$

d'après les relations (1). Elle est donc indépendante de dx et de dy et fonction seulement de x et de y. C'est une fonction de z, comme on le voit en différentiant partiellement les équations (1).

THÉORÈME. — *Si dans une portion finie du plan xy, Z est une fonction uniforme et continue de z, c'est-à-dire si X et Y sont des fonctions uniformes, continues de x et y qui satisfont aux équations* (1), $\frac{dZ}{dz}$ *est aussi une fonction uniforme et continue de z dans le même domaine.*

C'est ce qui résulte de la relation bien connue

$$Z_c = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{Z}{z-c}\,dz,$$

l'intégration s'étendant le long des lignes qui limitent le domaine de z et dans le sens positif.

III.

Rappelons encore quelques propriétés de la représentation conforme d'un plan sur un plan.

Considérons x et y comme les coordonnées rectangulaires d'un point d'un plan, X, Y comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un autre plan. Dans les domaines qui se correspondent l'un à l'autre de z et de Z, si Z est une fonction uniforme et continue de z, z sera aussi, d'après un théorème précédent, une fonction uniforme et continue de Z, et, d'après un autre théorème, $\frac{dz}{dZ}$ sera aussi une fonction uniforme et continue de Z et $\frac{dZ}{dz}$ de z. Par suite, aucune des deux dérivées ne sera infinie et ainsi aucune d'elles ne sera nulle.

Posons $\frac{dZ}{dz} = M(\cos\theta + i\sin\theta)$; M, module de la dérivée considérée, est la grandeur positive déterminée par les équations (2). M et θ sont des fonctions de x et de y seulement, car $\frac{dZ}{dz}$ ne dépend pas de dx et de dy. L'équation posée s'écrit

$$dX + i\,dY = M(\cos\theta + i\sin\theta)(dx + i\,dy),$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad \begin{cases} dX = M(\cos\theta\,dx - \sin\theta\,dy), \\ dY = M(\sin\theta\,dx + \cos\theta\,dy). \end{cases}$$

Supposons que le plan Z et le plan z coïncident avec un plan matériel, l'axe des X sur l'axe des x, l'axe des Y sur l'axe des y, et considérons x, y comme les coordonnées d'un point du plan matériel dans un état de ce plan, X, Y comme les coordonnées du même point dans un état modifié du plan. Les équations (3) font connaître le changement qu'a subi une partie infiniment petite du plan et montrent qu'il consiste : en un glissement, en une rotation dans le sens positif d'un angle θ et dans une dilatation égale dans toutes les directions et dans laquelle toutes les dimensions linéaires sont agrandies dans le rapport de 1 à M. Nous en concluons qu'une partie très petite du plan matériel est restée semblable à elle-même. Nous devons considérer l'altération éprouvée comme continue et produite de telle sorte que M ne soit ni nul, ni infini.

Théorème. — *Les parties infiniment petites correspondantes des plans z et Z sont semblables entre elles, et les sens positifs, relatifs à deux aires correspondantes simplement connexes, se correspondent.*

La première partie de ce théorème vient d'être établie. Considérons deux aires correspondantes f et F, M restant fini et différent de zéro, le sens d'un circuit positif autour de l'aire considérée, si c'est une aire simplement connexe, n'est pas devenu indéterminé et n'a pas été changé brusquement : il est donc resté le même. Laissons de côté, maintenant que le plan z et le plan Z coïncident avec un plan matériel : les deux propriétés indiquées dans l'énoncé n'en subsistent pas moins.

De ces propriétés, on déduit facilement les conséquences suivantes. Deux portions finies correspondantes des deux plans ne seront pas en général semblables; mais elles seront représentées l'une sur l'autre semblablement dans leurs plus petites parties. Aux points des limites d'une aire répondent exclusivement les points des limites de l'autre; à un point de l'intérieur de l'une ne peut pas, par exemple, correspondre un point des limites de l'autre, car à un cercle infiniment petit dont l'un est le centre doit correspondre un cercle infiniment petit dont l'autre est le centre. Si une des aires est complètement limitée par une ligne fermée, c'est-à-dire si elle est simplement connexe, l'autre doit être de même. A un circuit positif autour de l'une des aires correspond un circuit positif autour de l'autre.

Si Z est une fonction linéaire entière de z, Z et z sont sans restriction fonctions uniformes et continues l'une de l'autre.

Si l'on prend pour Z la fonction non entière (4) de z, Z et z sont encore des fonctions uniformes l'une de l'autre, mais elles ne sont pas partout continues. Soit

$$(4) \qquad Z = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}, \qquad \text{d'où} \quad z = -\frac{\alpha - \gamma Z}{\beta - \delta Z},$$

où α, β, γ, δ représentent des constantes complexes; si $\gamma + \delta z = 0$, Z et, si $\beta - \delta Z = 0$, z sont infinis et discontinus. Décrivons autour du point $\gamma + \delta z = 0$ une ligne infiniment petite, fermée : limitons le domaine de z par cette ligne et par une ligne infiniment grande. Le domaine de Z sera limité par une ligne infiniment petite et une ligne infiniment grande fermées, dont la petite correspond à la grande ligne limite du domaine de z, et inversement. Dans les régions ainsi délimitées, Z et z seront fonctions uniformes et continues l'une de l'autre et nous pourrons appliquer les théorèmes précédemment établis dans cette hypothèse.

Théorème. — *A un cercle dans le plan z correspond un cercle dans le plan Z.*

Désignons la quantité imaginaire conjuguée d'une grandeur par la même lettre affectée de l'indice zéro ; ainsi

$$A = a + ib, \qquad A_0 = a - ib.$$

L'équation de tout cercle peut s'écrire

$$(5) \qquad zz_0 + Az + A_0 z_0 + B = 0,$$

A étant une quantité complexe et B étant réel. Cette équation équivaut, en effet, à

$$x^2 + y^2 + 2ax - 2by + B = 0.$$

En substituant dans (5) à z et z_0 leurs valeurs (4) en fonction de Z et Z_0, il vient

$$ZZ_0 + A'Z + A'_0 Z_0 + B',$$

B' étant réel; ce sera donc encore l'équation d'un cercle.

Remarque. — Dans les relations (4) entrent trois constantes, les rapports des lettres α, β, γ à la quatrième δ. Ces trois constantes pourront être déterminées, en général, par des équations linéaires, de telle sorte que trois points du plan z, a, b, c répondent à trois points convenables du plan Z, A, B, C. Nous appellerons f et F les aires des cercles passant par a, b, c et A, B, C et qui se correspondent. Ces aires se correspondront si dans f ne se trouve pas le point $\gamma + \delta z = 0$; car f est une partie simplement connexe du domaine de z et il doit lui correspondre une partie simplement connexe du domaine de Z. Mais si le point $\gamma + \delta z = 0$ se trouve dans f, f et F ne se correspondent pas; seulement chacune de ces aires correspond à l'aire complémentaire de l'autre, si nous désignons comme aire complémentaire de f la partie du domaine de z qui subsiste à l'exclusion de f; on doit alors de la surface f exclure une partie infiniment petite qui comprend le point $\gamma + \delta z = 0$, pour former à son extérieur le domaine de z; les limites de cette partie infiniment petite répondent à une ligne fermée infiniment grande du plan Z.

Il est clair que ces conclusions sont encore valables lorsque f et F sont deux parties simplement connexes, formées n'importe comment, des plans z et Z, dont les limites se correspondent mutuellement. On décide très facilement, à l'aide des considérations suivantes, si les surfaces se correspondent à elles-mêmes ou à leurs surfaces complémentaires. Dans le cas où le point $\gamma + \delta z = 0$ est dans f, on transforme par une coupure la surface doublement connexe que forme f à l'exclusion d'une partie infiniment petite contenant le point $\gamma + \delta z = 0$ en une surface simplement connexe, et l'on trace la coupure correspondante dans la surface complémentaire de F. D'après un théorème précédent, si l'on appelle a, A, b, B, c, C les points correspondants des lignes limites de f et F, on voit que ces surfaces se correspondent à elles-mêmes si les circuits *abca*, ABCA autour d'elles sont de même signe; dans le cas contraire, les surfaces f et F répondent à leurs complémentaires.

Les circonférences qui passent par deux points a, b du plan z correspondent à des circonférences qui passent par les points correspondants A, B dans le plan Z, et elles se coupent sous les mêmes angles, car l'un des plans est représenté sur l'autre semblablement dans les plus petites parties. Si le point B va à l'infini, les cercles menés par A seront des droites. Nous appellerons *croissant* (*eine Sichel*) une surface qui est limitée par deux arcs de cercle, et la surface dans laquelle se transforme un croissant, quand l'un des sommets va à l'infini, un *secteur*. Les équations (4) permettent de représenter un croissant du plan z sur un croissant de même angle du plan Z, de telle sorte qu'aux sommets de l'un a, b correspondent les deux sommets A, B de l'autre et en plus que deux points choisis convenablement sur les contours c et C se correspondent, en supposant que les points c et C sont choisis de telle sorte que les circuits autour des croissants, *abca* et ABCA, soient de même signe. Un cas spécial de cette représentation est la représentation d'un croissant sur un secteur de même angle.

IV.

Nous avons admis, dans le précédent paragraphe, que Z et z sont des fonctions uniformes l'une de l'autre dans tout le plan. Supposons maintenant que, entre ces deux variables, il existe une relation en vertu de laquelle Z et z soient des fonctions en général continues, mais non uniformes l'une de l'autre; seulement ces fonctions se comporteront, lorsque les deux domaines seront convenablement limités, comme des fonctions uniformes, c'est-à-dire que, à chaque point du domaine z correspondra un point du domaine de Z et réciproquement.

Soit z_0 un point du plan z. Si à ce point correspondent plusieurs valeurs de Z, choisissons l'une d'elles Z_0. Faisons répondre aux points du voisinage de z_0 les points du voisinage de Z_0. A un domaine suffisamment petit de z, qui contient le point z_0, correspondra un domaine de Z, semblable dans ses plus petites parties, qui contient le point Z_0, comme si nous avions affaire à des fonctions uniformes dans tout le plan. Le rapport des dimensions infiniment petites correspondantes est, en général, déterminé par le module de $\frac{dZ}{dz}$. Élargissons maintenant graduellement les bornes des deux domaines en évitant les points où $\frac{dZ}{dz}$ est nul ou infini. Si le domaine de z ne renferme aucun point pour lequel $\frac{dZ}{dz}$ soit nul ou infini, si il est limité par une ligne fermée ne se coupant pas, et si la ligne correspondante du plan Z ne se coupe pas, cette ligne limite un domaine de Z qui répond d'une manière univoque au domaine de z; Z et z sont donc dans ces domaines des fonctions uniformes l'une de l'autre; les limites du domaine de z peuvent être poussées infiniment près des points pour lesquels $\frac{dZ}{dz}$ est nul; dans le sens indiqué par là, on peut dire que de tels points se trouvent sur la limite du domaine.

Citons maintenant quelques représentations conformes dont nous aurons à faire usage.

1° Posons $Z = z^n$ (1), où n représente une constante réelle. Soient

$$X = R\cos\Theta, \qquad x = r\cos\theta,$$
$$Y = R\sin\Theta, \qquad y = r\sin\theta;$$

d'où

$$R = r^n, \qquad \Theta = n\theta.$$

Au cercle $r =$ const. répond un cercle $R =$ const.; à la droite $\theta =$ const., la droite $\Theta =$ const. Supposons que le domaine de z soit limité par deux cercles $r =$ const. et deux droites $\theta =$ const.; alors les limites du domaine de Z seront deux cercles $R =$ const. et deux droites $\Theta =$ const. Des cercles, les plus petits peuvent être infiniment petits; les plus grands, infiniment grands; les deux domaines sont alors des secteurs d'angles inégaux. Soient A et α leurs angles, on aura

$$A = n\alpha.$$

z et Z se correspondent d'une façon univoque si aucun des angles α et A n'est supérieur à 2π. Alors $\frac{dZ}{dz} = nz^{n-1}$ sera nul ou infini pour $z = 0$, suivant que l'on aura $n > 1$ ou $n < 1$.

2° Nous allons maintenant déduire de là comment un croissant peut être représenté sur un autre d'angle différent de telle sorte que les sommets se correspondent ainsi que deux points convenablement choisis du pourtour. D'ailleurs il est supposé (et dans les cas semblables, nous le supposerons sans le dire) que les points du pourtour qui doivent se correspondre sont choisis de telle sorte que les circuits correspondants autour des surfaces dont on parle soient de même signe. En outre de (1), posons

$$(2) \qquad z = k\frac{z' - c_1}{z' - c_2} \qquad \text{et} \qquad Z = K\frac{Z' - C_1}{Z' - C_2}.$$

Par là les deux secteurs qui doivent de nouveau représenter les domaines de z et de Z deviendront deux croissants d'angles α et A dans le plan de z' et dans celui de Z'; leurs sommets seront les points $z' = c_1$, $z' = c_2$, $Z' = C_1$, $Z' = C_2$. Les constantes complexes k et K peuvent être déterminées de sorte que deux points correspondants convenables de l'enveloppe des secteurs répondent à deux points convenablement choisis sur l'enveloppe des croissants. Si l'on élimine z et Z entre les équations (1) et (2) et si l'on pose $N = \frac{K}{k^n}$, on obtient

$$(3) \qquad N\frac{Z' - C_1}{Z' - C_2} = \left(\frac{z' - c_1}{z' - c_2}\right)^{\frac{A}{\alpha}},$$

équation par laquelle les croissants sont représentés l'un sur l'autre de telle sorte que les sommets se correspondent ainsi que les points qui ont été convenablement choisis sur leurs contours. Aux sommets, $\frac{dZ'}{dz'}$ est nul ou infini, suivant que l'on a $A > \alpha$ ou $A < \alpha$.

3° Nous allons montrer maintenant comment deux croissants d'angles différents peuvent être représentés l'un sur l'autre de telle sorte que, à trois points convenables du contour de l'un correspondent trois points convenables du contour de l'autre. Nous supposerons que le croissant dans le plan Z', auquel se rapporte l'équation (3), est un cercle entier, de telle sorte que $A = \pi$. Par suite, deux points de la circonférence peuvent être envisagés comme des sommets. En supprimant, d'ailleurs, les accents de z' et de Z', la relation (3) peut s'écrire

$$(4) \qquad N\frac{Z - C_1}{Z - C_2} = \left(\frac{z - c_1}{z - c_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Si l'on détermine les constantes N, C_1, C_2 dans cette équation de telle sorte que trois points convenables du contour du croissant dans le plan z correspondent à trois points choisis dans le plan Z, ce croissant sera représenté sur la surface du cercle dont la circonférence passe par ces trois points. Prenons maintenant une troisième variable z', et imaginons dans le plan z' un croissant dont les sommets sont les points $z' = c'_1$, $z' = c'_2$ et dont l'angle est α'; nous poserons

$$N' \frac{Z - C'_1}{Z - C'_2} = \left(\frac{z' - c'_1}{z' - c'_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha'}}, \tag{5}$$

et nous déterminerons les constantes N', C'_1, C'_2, de sorte que trois points convenables du contour de ce croissant correspondent à ces points du plan Z, qui ont été amenés par la considération du premier croissant dans le plan z. Les deux croissants sont donc ainsi représentés sur le même cercle l'un sur l'autre et de telle sorte que trois points pris arbitrairement sur le contour de l'un répondent à trois points pris sur le contour de l'autre. L'équation entre z et z', qui permet cette transformation, s'obtient en éliminant Z entre (4) et (5); une des quantités

$$\left(\frac{z - c_1}{z - c_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad \left(\frac{z' - c'_1}{z' - c'_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha'}} \tag{6}$$

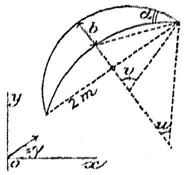
sera une fraction du premier degré de l'autre; les trois constantes qui entrent dans cette fraction seront déterminées par les trois couples de points qui doivent se correspondre.

4° Nous aurons à utiliser le cas où l'un des deux croissants se transforme en une bande limitée par deux droites parallèles : nous allons l'examiner. Nous supposerons que

$$-c_1 = c_2 = m(\cos\gamma + i\sin\gamma);$$

m représente donc la demi-distance des sommets du croissant imaginé

Fig. 1.



dans le plan z, γ l'angle que forme la ligne qui joint les sommets avec l'axe des x. Soient de plus $2u$ et $2v$ les grandeurs des angles qui limitent le croissant, en unités trigonométriques, de telle sorte que $v - u = \alpha$; enfin soit b la *flèche* du croissant (*fig.* 1), c'est-à-dire la distance des points de rencontre de son contour avec la ligne des centres des cercles dont une partie limite le croissant. On a, par les considérations de simple géométrie,

$$b = m\left(\operatorname{tang}\frac{v}{2} - \operatorname{tang}\frac{u}{2}\right). \tag{7}$$

Le croissant se transforme en une bande de l'espèce indiquée, si l'on prend m infiniment grand, v et u et par suite α infiniment petits; la flèche ou largeur de la bande sera, d'après la relation (7),

$$b = \frac{m\alpha}{2},$$

et γ est l'angle que fait la direction longitudinale de la bande avec l'axe des x. Désignons encore la commune valeur infiniment grande de $-c_1$ et c_2 par c. Nous obtenons pour $\left(\frac{z-c_1}{c_2-z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}$, dont l'expression ne diffère de la première, qui a été donnée dans (6), que par le facteur constant $(-1)^{\frac{\pi}{\alpha}}$,

$$\left(\frac{z-c_1}{c_2-z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = \left(1 + 2\frac{z}{c}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = \left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\frac{2\pi}{\alpha c}z\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Si α tend vers zéro et si αc reste constant, il vient, d'après la limite de $\left(1+\frac{x}{p}\right)^p$, pour p infini,

$$\lim\left(\frac{z-c_1}{c_2-z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = e^{\frac{2\pi z}{\alpha c}} = e^{\frac{\pi z}{b}(\cos\gamma - i\sin\gamma)}. \tag{8}$$

La seconde expression (6) sera donc une fraction du premier degré de $e^{\frac{\pi z}{b}(\cos\gamma - i\sin\gamma)}$.

Tels sont les résultats que nous allons appliquer dans les paragraphes suivants.

V.

Revenons à l'étude d'un liquide placé dans les conditions indiquées au commencement du § II. Nous supposerons que le potentiel de vitesse φ ne dépend que des deux coordonnées x et y, et nous poserons $z = x + iy$, $w = \varphi + i\psi$. Nous chercherons à déterminer w en fonction de z. Nous aurons à nous servir de ce que $\psi =$ constante est l'équation des lignes de courant.

Pour la vitesse, nous pourrons en trouver une expression par les considérations suivantes.

On a

$$(1) \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{dz}{dw} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}.$$

Posons

$$(3) \qquad \frac{dz}{dw} = \zeta = \xi + i\eta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

et considérons ξ et η comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, que nous appellerons le plan ζ; l'axe des ξ sera parallèle à l'axe des x, et l'axe des η à celui des y. En comparant les égalités (2) et (3), on a

$$\zeta = \xi + i\eta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{V^2},$$

d'où

$$\rho = \frac{1}{V}, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}.$$

On voit que, lorsqu'on mène une droite du point $\zeta = 0$ au point ζ, sa longueur, c'est-à-dire ρ, est l'inverse de la vitesse et sa direction est la direction du mouvement au point z.

Pour trouver le mouvement d'un fluide de l'espèce dont on parle, considérons φ et ψ comme les coordonnées rectangulaires d'un point sur un plan, que nous appellerons le plan w; faisons sur les domaines de w et ζ les hypothèses appropriées; cherchons la relation entre w et ζ par laquelle ces deux domaines seront représentés l'un sur l'autre semblablement dans leurs plus petites parties, et déterminons z en fonction de w et de ζ à l'aide de la relation (3). Le domaine de z, qui correspond aux domaines de w et de ζ, détermine l'espace rempli du fluide en mouvement.

Les limites de l'espace rempli du liquide considéré en mouvement, ou, comme nous dirons plutôt, les limites du domaine de z, se composent de trois parties d'espèces différentes. Une partie est constituée par des lignes à travers lesquelles coule le liquide pour entrer ou pour sortir; une seconde, par les parois solides : pour celles-là on a $\psi = \text{const.}$; la troisième, enfin, est formée par les surfaces le long desquelles le liquide en mouvement est en contact avec le liquide au repos ou avec l'espace à la pression p_0; nous les appellerons les *surfaces libres;* pour elles on a, à la fois, $\psi = \text{const.}$ et $\rho = 1$.

VI.

Comme domaine de w, prenons une bande dont les limites ont pour équations

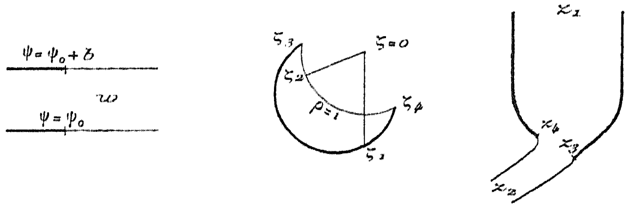
$$\psi = \psi_0, \qquad \varphi = -\infty,$$
$$\psi = \psi_0 + b, \qquad \varphi = +\infty,$$

où ψ_0 et b sont deux constantes déterminées. Comme domaine de ζ prenons un croissant dont une limite est formée par le cercle $\rho = 1$ et pour lequel l'intérieur est où l'on a $\rho > 1$. D'après les considérations vues plus haut, nous pouvons établir une liaison entre w et ζ telle que l'un de ces domaines soit représenté sur l'autre; cette liaison détermine w et ζ comme fonctions uniformes l'une de l'autre à l'intérieur de ces domaines. D'ailleurs trois points du contour de l'un peuvent correspondre à trois points arbitraires de l'autre. Nous supposerons que l'on a

$$\zeta = \zeta_1 \text{ pour } \varphi = -\infty, \qquad \zeta = \zeta_2 \text{ pour } \varphi = +\infty.$$

Nous prendrons le point ζ_2 (*fig.* 2) sur le cercle $\rho = 1$, le point ζ_1 sur le second cercle qui sert de limite au domaine de ζ. Sans déter-

Fig. 2.



miner le troisième couple de points correspondants et sans entrer plus avant dans la relation entre w et ζ, on aperçoit déjà le caractère du domaine de z et du mouvement du fluide correspondant aux hypothèses faites.

De l'équation établie précédemment, $\frac{dz}{dw} = \zeta$, on déduit $z = \int \zeta \, dw$. Il résulte d'abord de cette équation que le domaine de z s'étend à l'infini, car le domaine de w a cette propriété et ζ ne s'évanouit nulle part. Soit z_1 le point du plan z pour lequel $\varphi = -\infty$ et z_2 le point pour lequel $\varphi = +\infty$, de telle sorte que les points z_1 et z_2 qui sont à l'infini répondent aux points ζ_1 et ζ_2. Nous représenterons par ρ_1 et ρ_2 la grandeur et la direction des droites menées du point $\zeta = 0$ aux points ζ_1 et ζ_2; la grandeur de ρ_2 est 1; en z_1 et dans l'éloignement primitif la direction du mouvement est celle de ρ_1, la vitesse est $\frac{1}{\rho_1}$; en z_2 et dans l'éloignement final, la direction du mouvement est celle de ρ_2, la vitesse est 1. Partout le domaine de z est une représentation conforme de celui de w où toutes les longueurs sont augmentées dans le rapport $\frac{1}{\rho}$. Près de z_2, b est donc la largeur du courant; près de z_1 cette largeur est $\rho_1 b$. Près de z_1 les limites du domaine doivent être des parois solides, près de z_2 des surfaces libres.

Les surfaces libres correspondent à la partie du domaine de ζ limitée par le cercle $\rho = 1$. Soient ζ_3 et ζ_4 les sommets du croissant qui représente le domaine ζ, z_3 et z_4 les points correspondants dans le domaine z; chacun de ces deux points représente la fin d'une paroi solide et le commencement d'une surface libre. La *fig.* 2 représente les domaines de w, ζ et z, dont on parle. Les lignes fortes correspondent aux parois solides, les lignes faibles aux surfaces libres; ces dernières, dans le domaine z, donnent la figure du jet qui sort du réservoir, figure qui est déterminée par les premières.

Avant de passer à des exemples, traitons un autre cas, qui nous conduira au problème résolu par Helmholtz.

Limitons le domaine de w par les lignes

$$\psi = \psi_0, \qquad \varphi = -\infty,$$
$$\psi = \psi_0 + b, \qquad \varphi = +\infty,$$

comme précédemment. Nous prendrons, par exemple,

$$\psi = 0, \qquad \varphi = -\infty,$$
$$\psi = \pi, \qquad \varphi = +\infty.$$

Quant au domaine de ζ, limitons-le : 1° par un arc de cercle décrit du point $\zeta = 0$ comme centre avec le rayon 1, de longueur α et pour les extrémités duquel ζ prend les valeurs ζ_3 et ζ_4; 2° par les prolongements des rayons menés à ces points; 3° par un cercle concentrique au premier et de rayon infiniment grand.

Représentons ce domaine de ζ sur un domaine de la variable Z limité par un demi-cercle de rayon 1, les prolongements des rayons aboutissant aux extrémités de ce demi-cercle et par un cercle concentrique infiniment grand. Cette représentation est obtenue (§ IV, 1°) par la formule

$$Z = \zeta^{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{1}$$

Les valeurs que Z prend pour $\zeta = \zeta_3$ et $\zeta = \zeta_4$, nous les appellerons Z_3 et Z_4, de telle sorte que

$$Z_3 = \zeta_3^{\frac{\pi}{\alpha}}, \qquad Z_4 = \zeta_4^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Il s'agit maintenant de représenter ce domaine Z sur la bande formant le domaine w. Utilisons les résultats du § IV (3° et 4°). Nous devons écrire qu'il existe entre les binômes (6) de ce paragraphe une relation linéaire, en remarquant que l'un de ces binômes est devenu, d'après la formule (8) du même paragraphe, une exponentielle, et que l'exposant $\frac{\pi}{\alpha}$ du premier de ces binômes est 2 ici, puisque l'angle α du croissant, formé par le demi-cercle et son diamètre, est $\frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi la formule

$$\left(\frac{Z - Z_3}{Z - Z_1}\right)^2 = K\,\frac{e^w - C}{e^w - C'}. \tag{2}$$

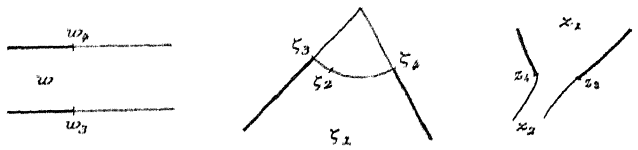
Éliminons Z entre ces formules (1) et (2), nous aurons

$$\left(\frac{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} - \zeta_3^{\frac{\pi}{\alpha}}}{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} - \zeta_4^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right)^2 = K\,\frac{e^w - C}{e^w - C'}. \tag{3}$$

Telle est la formule qui permettra de représenter le domaine w sur le domaine ζ.

Donnons-nous deux points des limites des domaines de ζ et de w comme se répondant. Soient ζ_1 et ζ_2 (*fig.* 3) les points des limites du

Fig. 3.



domaine de ζ répondant aux points $\varphi = -\infty$, $\varphi = +\infty$ du domaine de w : nous prendrons ζ_1 à l'infini, ζ_2 sur le cercle de rayon 1. Les constantes K, C et C' sont déterminées. La *fig.* 3 montre les domaines correspondants. Les parties du domaine de z pour lesquelles $\varphi = -\infty$ ou $\varphi = +\infty$ sont à l'infini; les parois solides sont droites dans toute leur étendue et ont les directions de ρ_3 ou ρ_4; le jet a, à l'infini, la direction de ρ_2 et la largeur π de la bande w.

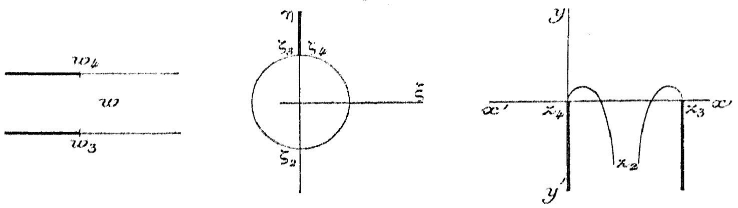
VII.

1° Considérons un exemple du cas que nous venons de traiter en dernier lieu.

Prenons $\alpha = 2\pi$, $\zeta_3 = \zeta_4 = i$, $\zeta_2 = -i$, et pour $w = 0$ soit $\zeta = i$ et $z = 0$.

Les domaines de w, ζ et z sont représentés dans la *fig.* 4. L'équation (3) du paragraphe précédent renferme alors $\sqrt{\zeta_3}$ et $\sqrt{\zeta_4}$.

Fig. 4.



Mais ces deux racines carrées ne sont pas égales, quoique ζ_3 et ζ_4 le soient : elles sont de signes contraires, puisque l'une doit se changer en l'autre quand le point ζ se déplace sur un chemin situé dans son domaine et allant de ζ_3 à ζ_4 ou inversement. De là, et des conditions

$$\begin{array}{lll} \text{pour} & \varphi = -\infty, & \zeta = \infty, \\ \quad » & \varphi = +\infty, & \zeta = -i, \\ \quad » & w = 0, & \zeta = i, \end{array}$$

il vient, pour la relation indiquée,

$$\left(\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{i}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{i}}\right)^2 = \frac{1 - e^w}{1 + e^w}$$

ou

$$\zeta - \sqrt{\zeta}\, 2\sqrt{i}\, e^{-w} - i = 0.$$

L'équation aux carrés des racines de celle-là, qui donnera les valeurs de ζ, est

$$\zeta^2 - 2i\zeta(2e^{-2w} - 1) - 1 = 0,$$

d'où

$$\zeta = i\left(2e^{-2w} - 1 + 2e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1}\right).$$

Le signe du radical est déterminé par ce fait que, si $\varphi = -\infty$, ζ est infini et non pas nul.

On aura

$$z = \int_0^w \zeta\, dw,$$

ou

$$z = -i\left[e^{-2w} + w - 1 + e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1} - \mathrm{L}\left(e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}\right)\right],$$

où le logarithme s'évanouit pour $w = 0$.

Discussion. — Si $\psi = 0$ et $\varphi < 0$, on a

$$x = 0, \qquad y = -\left[e^{-2\varphi} + \varphi - 1 + e^{-\varphi}\sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \mathrm{L}\left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\right)\right],$$

équations qui représentent Oy'.

Si φ a une valeur constante infiniment grande, négative, et si ψ croît de 0 à π, on a

$$x = -2e^{-2\varphi}\sin 2\psi + 2\psi, \qquad y = -2e^{-2\varphi}\cos 2\psi - 2\varphi + \frac{3}{2} + \mathrm{L}\,2.$$

Si $\psi = \pi$, $\varphi < 0$, on trouve

$$x = 2\pi, \qquad y = -\left[e^{-2\varphi} + \varphi - 1 + e^{-\varphi}\sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \mathrm{L}\left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\right)\right].$$

Ces équations représentent la seconde paroi solide, qui se trouve ainsi être à la distance 2π de la première. La largeur du jet est d'ailleurs égale à π à l'infini : la contraction est donc $\frac{1}{2}$.

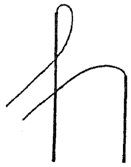
On en déduirait également les surfaces libres (*voir* IIe Partie, § VII).

Ce cas d'un jet fluide est le premier qui ait été traité mathématiquement par Helmholtz (*Monatsberichte der Berliner Akademie*, April 1868).

Si l'on donne, sans apporter de changement aux hypothèses faites, au point ζ_2 une autre position que celle qui lui est donnée dans la *fig.* 4 sur le cercle $\rho = 1$, on obtient les limites du domaine z qui sont représentées sur la *fig.* 5. Ces limites se coupent : un mouvement correspondant du fluide est impossible, à moins de réflexion sur les parois.

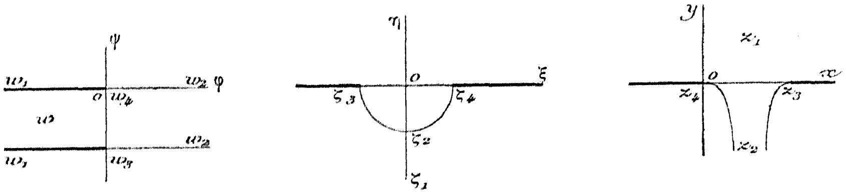
2° Prenons un exemple du premier cas. Des deux cercles qui limitent le domaine de ζ, supposons que l'un, celui pour lequel $\rho = 1$ soit un demi-cercle, que l'autre ait un rayon infiniment grand : le point ζ_2 divisera en deux parties égales le demi-cercle, et le point ζ_1 sera à l'infini sur la ligne $\zeta_0\zeta_1$.

Fig. 5.



La *fig.* 6 représente, dans ce cas, les domaines w, ζ et z; sur cette figure sont donnés les axes ξ, η, x, y, φ, ψ.

Fig. 6.



Si nous prenons comme limite de la bande qui représente le domaine w, les lignes $\psi = 0$ et $\psi = \pi$, nous avons à poser, avant tout, d'après le paragraphe précédent,

$$\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = K\frac{e^{iw} - C}{e^{iw} - C'}. \tag{1}$$

C'est l'équation (3) du précédent paragraphe, pour $\alpha = \pi$. On a pour déterminer les trois constantes C, C' et K, d'après les hypothèses déjà faites,

pour $\zeta = -i\infty$, $\quad \varphi = -\infty \quad$ (ζ_1 correspond ainsi à w_1),
pour $\zeta = -i$, $\quad \varphi = +\infty \quad$ (ζ_2 correspond ainsi à w_2).

Nous y ajouterons la troisième condition

pour $\zeta = 1$, $\quad w = 0 \quad$ (ζ_4 correspond ainsi à o ou w_4).

On aura donc

$$K = -1, \qquad C = 1, \qquad C' = -1,$$

d'où

$$\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = \frac{1 - e^{iw}}{1 + e^{iw}}.$$

De là on tire

$$\zeta^2 - 2\zeta e^{-w} + 1 = 0,$$

d'où

$$(2) \qquad \xi + i\eta = \zeta = e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}.$$

Le signe du radical est déterminé pour une valeur quelconque de w, par l'hypothèse que ζ sera infini pour $\varphi = -\infty$.

On aura

$$z = \int \left(e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}\right) dw,$$

où la limite inférieure de l'intégrale peut être choisie arbitrairement et peut être prise égale à zéro; le point $z = 0$ répond alors au point $\zeta = 1$; il est d'ailleurs aussi désigné par z_4. En intégrant, on a

$$(3) \qquad z = 1 - e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - 1} + \operatorname{arctang}\sqrt{e^{-2w} - 1},$$

où l'arctang s'annule pour $w = 0$. On peut écrire cette équation

$$z = x + iy = 1 - e^{-\varphi}(\cos\psi - i\sin\psi) - \sqrt{e^{-2\varphi}(\cos 2\psi - i\sin 2\psi) - 1}$$
$$+ \operatorname{arctang}\sqrt{e^{-2\varphi}(\cos 2\psi - i\sin 2\psi) - 1}.$$

Premier cas. — Quand $\psi = 0$ et que φ varie entre 0 et $-\infty$, on a

$$x = 1 - e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} + \operatorname{arctang}\sqrt{e^{-2\varphi} - 1},$$
$$y = 0,$$

où le radical doit être pris positivement, l'arctang étant dans le premier quadrant. Ces équations représentent la partie négative de l'axe des x; c'est une paroi solide. Pour $\varphi = -\infty$, $\psi = 0$, on a

$$x = 1 - 2e^{-\varphi} + \frac{\pi}{2}, \qquad y = 0.$$

Supposons que φ ayant une valeur très grande, négative, ψ croisse de 0 à π, on a

$$x = 1 - 2e^{-\varphi}\cos\psi + \frac{\pi}{2}, \qquad y = 2e^{-\varphi}\sin\psi,$$

en utilisant cette propriété que $\int_0^u \frac{du}{1+u^2}$ ne change pas de valeur quand le point u se meut sur une ligne tout entière à l'infini. Ces équations représentent un demi-cercle dont le centre a pour abscisse $1+\frac{\pi}{2}$ et pour ordonnée o.

Deuxième cas. — Pour $\psi=\pi$, φ compris entre o et $-\infty$, on a, en prenant la seconde détermination de l'intégrale,

$$x = 1 + e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi}-1} + \pi - \operatorname{arctang}\sqrt{e^{-2\varphi}-1},$$
$$y = 0.$$

Ces équations représentent la partie de l'axe des x entre le point $x=2+\pi$ et $x=\infty$; c'est aussi une paroi solide. Pour $\psi=\pi$, $\varphi=0$ et aussi pour $\psi=0$, $\varphi=0$, $\frac{d\zeta}{dw}$ est infini; $w=0$ et $w=i\pi$ sont les seuls points dans les limites du domaine de w pour lesquels cela se produise: le point $x=2+\pi$, $y=0$ est celui qui est représenté par z_3.

Troisième cas. — Quand $\psi=\pi$ et que φ est positif, le radical $\sqrt{e^{-2\varphi}-1}$ devient imaginaire; les valeurs de x et de y changent notablement lorsque φ passe par zéro.

On a

$$\operatorname{arctang} iu = \frac{i}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+u}{1-u},$$

d'où

$$x = 1 + e^{-\varphi} + \pi,$$
$$y = \sqrt{1-e^{-2\varphi}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{1-e^{-2\varphi}}}{1-\sqrt{1-e^{-2\varphi}}}.$$

C'est une limite libre du jet; en particulier, pour $\psi=\pi$ et $\varphi=+\infty$, on a

$$x = 1+\pi, \qquad y = 1 - \mathrm{L}2 - \varphi.$$

Si l'on donne à φ une valeur constante, très grande, positive, et si ψ décroît de π à o, on trouve

$$x = 1+\psi, \qquad y = 1 - \mathrm{L}2 - \varphi.$$

Ces équations représentent une parallèle à l'axe des x, de longueur π

pour $y = -\infty$; à travers cette ligne, le fluide coule avec la vitesse 1, dans la direction des y négatifs. Pour $\varphi = +\infty$, $\psi = 0$, on a

$$x = 1, \qquad y = 1 - \mathrm{L}\,2 - \varphi.$$

Quatrième cas. — Si $\psi = 0$ et $\varphi > 0$, on a

$$x = 1 - e^{-\varphi},$$
$$y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}.$$

La ligne ainsi représentée est la seconde limite libre du jet. En éliminant φ, on trouve

$$y = \sqrt{2x - x^2} - \frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{1 + \sqrt{2x - x^2}}{1 - \sqrt{2x - x^2}}.$$

Faisons une remarque qui s'appliquera au cas général correspondant à la *fig.* 2.

Aux points z_3 et z_4, les lignes de courant qui passent par ces points ont des tangentes déterminées : ce sont les parallèles aux lignes ρ_3 et ρ_4 du plan ζ. Mais z_3 et z_4 sont des points singuliers et certainement les seuls que ces lignes de courant possèdent, comme cela résulte de ce que partout la tangente est parallèle à la ligne ρ, en supposant, comme dans la figure, qu'on ne puisse mener aucune tangente du point ζ_0 à l'arc $\zeta_3\,\zeta_1\,\zeta_4$.

Cherchons les rayons de courbure en z_3 et en z_4.

Soit dl un élément d'une ligne de courant et $d\varphi$ l'accroissement que subit sur elle le potentiel de vitesse, comme $\frac{1}{\rho}$ est la vitesse, on a

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{1}{\rho} \qquad \text{ou} \qquad dl = \rho\, d\varphi.$$

Si θ est l'angle défini au § V, on a pour le rayon de courbure l'expression $\frac{\rho\, d\varphi}{d\theta}$. Comme on est sur une ligne de courant, $\psi = \text{const.}$ et l'on peut prendre dw à la place de $d\varphi$, il vient

$$\rho\frac{dw}{d\theta}.$$

Introduisons $d\zeta$ à la place de $d\theta$. On a

$$\zeta = \rho\, e^{i\theta},$$

d'où

$$L\zeta = L\rho + i\theta,$$

d'où

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{d\rho}{\rho} + i\,d\theta.$$

Si, comme nous l'avons supposé, dl appartient à la surface libre du jet, $\rho = 1$, d'où

$$d\rho = 0 \qquad \text{et} \qquad d\theta = -i\frac{d\zeta}{\zeta},$$

ce qui donne, pour le rayon de courbure,

$$i\zeta\frac{dw}{d\zeta}.$$

Si le point z vient en z_3 ou en z_4, le point ζ s'approche indéfiniment du point ζ_3 ou du point ζ_4, de telle sorte que $\frac{dw}{d\zeta}$ devient infiniment petit, en supposant que l'angle au sommet du croissant qui représente le domaine ζ soit inférieur à π, puisque les parties correspondantes des domaines de ζ ou w, pour lesquelles ζ diffère infiniment peu de ζ_3 ou de ζ_4, doivent être considérées comme parties de secteurs qui sont représentées l'une sur l'autre par la relation qui existe entre ζ et w. Il suit de là que les rayons de courbure considérés sont infiniment petits.

Si dl appartient à une paroi solide, on n'a pas $d\rho = 0$. Par la différentiation de l'équation entre ρ et θ qui représente le deuxième cercle qui limite le domaine de ζ, on obtient une relation entre $d\rho$ et $d\theta$, de laquelle on tirera $d\theta$ en fonction de $d\zeta$, à moins que le deuxième cercle ne devienne une droite, dans lequel cas son équation est $\theta = \text{const.}$, d'où $d\theta = 0$. En général, on obtient ainsi, ici aussi, une expression pour le rayon de courbure qui contient $\frac{dw}{dz}$ en facteur et qui, par suite, s'évanouit quand le point z vient en z_3 ou en z_4. Dans le cas exceptionnel indiqué cependant le rayon de courbure est infini et passe de l'infini à zéro quand le point z arrive en z_3 ou en z_4.

VIII.

M. Kirchhoff donne encore les exemples suivants :

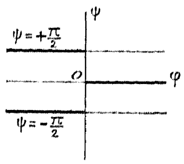
1° Supposons le domaine de w limité par les lignes

$$\psi = -\frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = -\infty,$$

$$\psi = +\frac{\pi}{2}, \qquad \varphi = +\infty,$$

et par les deux côtés de la ligne pour laquelle $\psi = 0$, $\varphi > 0$ (*fig.* 7).

Fig. 7.



Le domaine qui se déduit du précédent, quand on ne compte pas la ligne $\psi = 0$, $\varphi > 0$ comme appartenant aux limites, est représenté sur un cercle dans le plan Z par la relation

$$e^w = \frac{1+Z}{1-Z}, \tag{1}$$

et de telle sorte que :

pour $\varphi = -\infty$,	on a	$Z = -1$,
» $\varphi = +\infty$,	»	$Z = +1$,
» $w = i\frac{\pi}{2}$,	»	$Z = i$.

Le rayon du cercle est par suite 1, son centre est le point $Z = 0$, et répond au point $w = 0$. Si $\psi = 0$, $\varphi > 0$, Z est réel et plus petit que 1; à la ligne $\psi = 0$, $\varphi > 0$ répond le rayon qui va du point $Z = 0$ au point $Z = +1$. Par l'équation (1) le domaine de w considéré sera donc représenté sur un domaine de Z, qui est limité par le cercle indiqué et par les deux côtés du rayon indiqué. Ce domaine, à son tour, sera représenté par la relation

$$(2)\qquad Z = Z'^2$$

sur un demi-cercle de rayon 1 dans le plan Z', c'est-à-dire sur un croissant d'angle $\frac{\pi}{2}$ et pour les sommets duquel on aura $Z' = \pm 1$. En éliminant Z entre (1) et (2), on a la formule

$$(3)\qquad e^{iw} = \frac{1+Z'^2}{1-Z'^2},$$

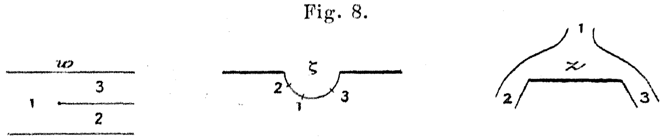
qui représente sur ce demi-cercle le domaine w. Et ce domaine w pourra, par suite, être représenté sur tout autre croissant, et de telle sorte que trois points de son contour répondent à trois points de l'autre contour.

Comme limites du domaine de ζ nous prendrons ce demi-cercle de rayon 1 et un cercle de rayon infini et nous supposerons que si ζ_1, ζ_2, ζ_3 sont trois points du demi-cercle,

pour		$\varphi = -\infty$,	on a	$\zeta = \zeta_1$,
»	$\psi < 0$,	$\varphi = +\infty$,	»	$\zeta = \zeta_2$,
»	$\psi > 0$,	$\varphi = +\infty$,	»	$\zeta = \zeta_3$.

Le caractère du domaine de z se laisse déterminer facilement d'une manière générale. La *fig.* 8 montre les domaines de w, ζ et z.

Fig. 8.



De l'infini vient un jet, qui y a la largeur π, la vitesse 1 et la direction ρ_1; vers l'infini se dirigent deux courants qui y ont la largeur $\frac{\pi}{2}$, la vitesse 1, les directions ρ_2 et ρ_3. La paroi solide est située tout entière à distance finie, elle est droite; sur elle est un point répondant à $w = 0$ où la vitesse est nulle et une ligne de courant s'y divise en deux.

2° Étudions plus complètement un cas particulier de ce qui précède.

Supposons les limites du domaine ζ comme dans la *fig.* 8. Supposons que le domaine de w soit le plan indéfini limité par les deux côtés de la ligne $\psi = 0$, $\varphi > 0$. Soit de plus

$$\begin{array}{lll} \text{pour} & w = \infty, & \zeta = -i, \\ \text{»} & w = 1, & \zeta = \pm 1. \end{array}$$

La dernière condition peut être remplie, car le point $w = 1$ est deux fois sur la limite du domaine w, et par suite doit correspondre à deux points sur la limite du domaine ζ.

La relation entre w et ζ, par laquelle les domaines des deux variables sont représentés l'un sur l'autre, conformément à ces hypothèses, se trouve de la façon suivante. Le domaine w sera représenté sur la moitié du plan des Z par

$$w = Z^2, \tag{4}$$

de sorte que :

$$\begin{array}{llll} \text{pour} & w = \infty & \text{on a} & Z = \infty \\ \text{»} & w = 1 & \text{»} & Z = \pm 1. \end{array}$$

Ce domaine de Z est un cercle de rayon infiniment grand; le croissant, que le domaine de ζ forme, sera représenté sur celui-ci par

$$\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2 = \frac{1-Z}{1+Z}, \tag{5}$$

de telle sorte que :

$$\begin{array}{llll} \text{pour} & \zeta = -i & \text{on a} & Z = \infty, \\ \text{»} & \zeta = +1 & \text{»} & Z = +1, \\ \text{»} & \zeta = -1 & \text{»} & Z = -1. \end{array}$$

De là on tire la relation entre ζ et w

$$\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{w}}{1+\sqrt{w}}. \tag{6}$$

On en déduit

$$\zeta^2 - 2\zeta\frac{1}{\sqrt{w}} + 1 = 0 \tag{7}$$

et

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{w}} + \sqrt{\frac{1}{w} - 1}. \tag{8}$$

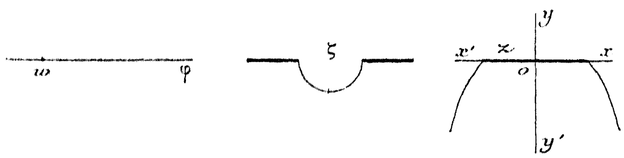
Le signe du second radical est déterminé par l'hypothèse que $\zeta = -i$ a lieu pour $w = \infty$, celui du premier par la condition que pour $w = 0$ ζ doit être infini et non pas nul, car dans le domaine de ζ il n'y a aucune valeur de ζ dont le module soit inférieur à 1. Supposons encore que z et w s'évanouissent en même temps; de (8) on tire

$$z = 2\sqrt{w} + w\sqrt{\frac{1}{w} - 1} + \operatorname{arc}\sin\sqrt{w}. \tag{9}$$

où l'arc sinus est nul pour $w = 0$. Pour la paroi solide, $\sqrt{w}$ est réel et varie de -1 à $+1$; pour la paroi on a également $y = 0$ et x compris entre $-2 - \frac{\pi}{2}$ et $2 + \frac{\pi}{2}$.

La *fig.* 9 représente, pour le cas présent, les domaines de w, ζ et z.

Fig. 9.



Un courant de largeur infinie, qui à l'infini a la vitesse 1 et la direction Oy', rencontre une paroi de largeur $4 + \pi$, qui est perpendiculaire à l'axe des y; sur les limites libres qui partent des limites de la paroi, ce courant touche un liquide au repos.

IX.

Considérons la pression que supporte la paroi solide placée dans le liquide que l'on vient d'étudier. La pression p en un point quelconque du fluide en mouvement est donnée par l'équation

$$p = C - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] \tag{1}$$

ou

$$p = C - \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}.$$

Dans le liquide au repos, p est une constante qui peut se représenter par C_0. Aux limites libres des liquides au repos et en mouvement la pression est sur les deux côtés la même et $\rho = 1$, donc

$$C_0 = C - \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$p = C_0 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right).$$

Soit dl un élément d'une paroi qui, d'un côté, est en contact avec le liquide en mouvement et, de l'autre, avec le liquide au repos. L'excès de la pression qui s'exerce du premier côté sur celle qui s'exerce sur le second, ou, comme nous dirons pour abréger, la pression que l'élément dl supporte, est

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) dl.$$

Pour déterminer à l'aide de cette expression la pression que supporte une partie finie de la paroi, il est bon d'introduire w comme variable d'intégration. Or $dl = \rho\, d\varphi$, ou comme, pour la paroi, ψ est constant, $dl = \rho\, dw$; $d\varphi$ et dw comme dl doivent être pris positifs. La pression que supporte l'élément dl est donc

$$\frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) dw.$$

Supposons la paroi droite et parallèle à l'axe des x. Alors ζ est réelle et l'on a

$$\rho = \pm \zeta,$$

où le signe est déterminé par la condition que ρ est positif. La pression que supporte la paroi totale est donc

$$\int \pm \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) dw,$$

où l'intégration doit être étendue à la paroi et le signe est à choisir de telle sorte que tous les éléments de l'intégrale soient positifs.

Dans le cas de la *fig.* 9, on a de plus

$$\frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) = \sqrt{\frac{1}{w} - 1};$$

or le long de la paroi w varie de -1 à $+1$; la pression que la paroi supporte est donc, dans ce cas, égale à π.

X.

Débarrassons-nous enfin de quelques hypothèses que nous avons faites dans ce qui précède pour abréger les formules.

Si l'on écrit dans l'équation entre z et w qui représente un mouvement de fluide de la manière envisagée, $\frac{w}{n}$ au lieu de w, où n est une constante positive, la nouvelle équation représente un mouvement dans lequel les lignes de courant sont les anciennes, la vitesse partout proportionnelle à n, la pression que supporte une paroi proportionnelle à n^2.

Si l'on écrit dans la même équation $\frac{z}{m}$ et $\frac{w}{m}$, pour z et w, où m est une constante positive, la nouvelle équation représente un mouvement dans lequel les lignes de courant sont semblables aux premières et où la vitesse aux points correspondants est la même. Les dimensions linéaires des lignes de courant sont proportionnelles à m; la pression que supporte une paroi est aussi proportionnelle à m.

Si la densité du fluide n'est pas 1, comme nous l'avons supposé, mais égale à μ, la pression que supporte une paroi est proportionnelle à μ.

Revenons maintenant à la considération d'un mouvement tel que celui de la *fig.* 9, mais supposons que la longueur de la paroi solide soit l, la vitesse à la limite libre du liquide en mouvement ou à l'infini v, la densité du fluide μ, la pression que supporte la paroi solide est alors

$$\mu v^2 \frac{l\pi}{4+\pi}.$$

SECONDE PARTIE.

I.

Considérons un réservoir de forme cylindrique; supposons-le infini dans le sens des génératrices; enlevons la partie de cette surface cylindrique comprise entre deux génératrices voisines (A) et (B); nous obtenons ainsi, à la place de cette bande faisant partie de la paroi solide, un orifice rectangulaire dont une dimension est infinie. Le liquide contenu dans le réservoir s'écoule par cet orifice. Dans toutes les sections droites du cylindre, le fluide affecte, en général, la même forme et possède les mêmes lignes de courant. Il suffit donc d'étudier le mouvement dans le plan de l'une des sections droites.

Prenons ce plan pour plan de la figure. Soient A, B les points où ce plan coupe les génératrices (A) et (B). Nous prendrons la ligne BA pour l'un des axes de coordonnées rectangulaires; par un point O élevons la perpendiculaire à BA; nous prendrons pour second axe cette perpendiculaire. Nous supposerons, jusqu'à nouvel ordre, le mouvement parvenu à l'état permanent.

Les équations du mouvement permanent plan sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0,\\ &\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2\right]-F+C_1=0,\end{aligned}\right.$$

où F désigne la fonction des forces qui agissent sur le fluide, telle que $X\,dx+Y\,dy=dF$ et où C_1 est une constante, ρ la densité du fluide.

On peut mettre l'intégrale générale de la première de ces deux équations sous deux formes légèrement différentes, dont nous nous servirons tour à tour. On peut l'écrire

$$(2)\qquad \lambda=f(z)+f_1(z_1),$$

où

$$z = x + iy, \qquad z_1 = x - iy;$$

f et f_1 sont des fonctions arbitraires. On peut également l'écrire

$$(2)' \qquad \lambda' = f(z') + f_1(z'_1),$$

où

$$z' = y + ix, \qquad z'_1 = y - ix.$$

Les vitesses parallèles à Ox et à Oy sont les dérivées partielles de cette intégrale. Ce sont donc

$$(2)'' \qquad \left\{ \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\lambda}{\partial x} = f'_z(z) + f'_{1,z_1}(z_1), \\ v_y &= \frac{\partial\lambda}{\partial y} = if'_z(z) - if'_{1,z_1}(z_1) \end{aligned} \right.$$

dans le premier cas; et dans le second

$$(2)''' \qquad \left\{ \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\lambda'}{\partial x} = i[f'_{z'}(z') - f'_{1,z'_1}(z'_1)], \\ v_y &= \frac{\partial\lambda'}{\partial y} = f'_{z'}(z') + f'_{1,z'_1}(z'_1). \end{aligned} \right.$$

On en déduit, dans les deux cas,

$$V^2 = v_x^3 + v_y^2 = 4f'(z)f'_1(z_1) = 4f'(z')f'_1(z'_1).$$

D'autre part, les trajectoires ou lignes de courant ont pour équation

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}.$$

On aura donc, dans le premier cas,

$$\frac{dx}{f'(z) + f'_1(z_1)} = \frac{i\,dy}{-f'(z) + f'_1(z_1)},$$

d'où, par une combinaison facile,

$$\frac{dz}{f'_1(z_1)} = \frac{dz_1}{f'(z)} \qquad \text{ou} \qquad f'(z)\,dz - f'_1(z_1)\,dz_1 = 0.$$

En intégrant, on a

$$f(z) - f_1(z_1) = i\mu, \tag{3}$$

μ étant une constante.

Dans le second cas un calcul tout semblable donnerait pour l'équation des trajectoires

$$f(z') - f_1(z'_1) = i\mu', \tag{3'}$$

μ' étant une constante.

Si l'on considère λ, μ, λ', μ' comme des variables, des relations (2), (3), (2)', (3)' on tirera

$$\left\{ \begin{aligned} 2f(z) &= \lambda + i\mu, \\ 2f_1(z_1) &= \lambda - i\mu \end{aligned} \right. \tag{4}$$

ou

$$\left\{ \begin{aligned} 2f(z') &= \lambda' + i\mu', \\ 2f_1(z'_1) &= \lambda' - i\mu'. \end{aligned} \right. \tag{4'}$$

Il est facile de vérifier que l'on a les relations suivantes, où l'on désigne, suivant la coutume, par Δ^2 le symbole $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0, \\ &\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2 = V^2, \\ &\Delta^2\lambda = 0, \\ &\Delta^2\mu = 0. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

On aura, de même,

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial\lambda'}{\partial x}\frac{\partial\mu'}{\partial x} + \frac{\partial\lambda'}{\partial y}\frac{\partial\mu'}{\partial y} = 0, \\ &\left(\frac{\partial\lambda'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda'}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu'}{\partial y}\right)^2 = V^2, \\ &\Delta^2\lambda' = 0, \\ &\Delta^2\mu' = 0. \end{aligned} \right. \tag{5'}$$

La première de ces relations (5) ou (5)' montre que les courbes

$\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$ ou $\lambda' = \text{const.}$, $\mu' = \text{const.}$ sont orthogonales entre elles. Les autres montrent qu'elles forment dans le plan un système isotherme.

II.

La surface libre du jet fluide qui sort du réservoir est, à la fois, trajectoire, car la vitesse normale y est nulle, et surface de niveau, puisque la pression extérieure est constante. Si p_0 désigne la pression extérieure, on devra donc avoir, à la fois, pour tous les points de la surface de la veine fluide, les quatre équations simultanées

$$(6)\qquad \begin{cases} f(z) = f_1(z_1) + \mathrm{C} \quad (\mathrm{C} \text{ a ici une valeur bien déterminée}), \\ x + iy = z, \\ x - iy = z_1, \\ \dfrac{p_0}{\rho} + \mathrm{C}_1 = \mathrm{F} - 2f'(z)f'_1(z_1) \end{cases}$$

ou, dans le second cas,

$$(6)'\qquad \begin{cases} f(z') = f_1(z'_1) + \mathrm{C}, \\ y + ix = z', \\ y - ix = z'_1, \\ \dfrac{p_0}{\rho} + \mathrm{C}_1 = \mathrm{F} - 2f'(z')f'_1(z'_1). \end{cases}$$

D'une façon générale, on pourra se donner $f_1(z_1)$, par exemple, dans le système des équations (6), arbitrairement, puis éliminer z_1 entre la première et la dernière de ces quatre équations; on parviendra ainsi à une équation différentielle dont la résolution permettra de déterminer la fonction $f(z)$ à l'aide de la variable z. On procéderait d'une façon analogue relativement aux équations (6)'. Ce procédé donnera le plus souvent, si l'on ne choisit pas avec soin la fonction $f_1(z_1)$, des surfaces imaginaires.

Nous allons chercher une autre méthode.

III.

Prenons d'abord pour variables z et z_1. Nous avons vu les expressions (2)″ des vitesses dans ce : cas ce sont

$$V_x = \frac{\partial\lambda}{\partial x} = f'_z(z) + f'_{1,z_1}(z_1),$$

$$V_y = \frac{\partial\lambda}{\partial y} = i[f'_z(z) - f'_{1,z_1}(z_1)].$$

Les expressions de ces vitesses doivent être des fonctions réelles de x et de y; f'_z et f'_{1,z_1} doivent donc avoir même partie réelle et des parties imaginaires égales et de signes contraires.

Nous verrons le cas général au § XII. Admettons d'abord, jusqu'à nouvel ordre, que nous ayons affaire au cas particulier où f et f_1 représentent la même fonction.

Si nous posons, d'après la notation de M. Kirchhoff,

$$f(z) = \varphi + i\psi,$$

φ étant la partie réelle de cette fonction, $i\psi$ sa partie imaginaire, on aura

$$f(z_1) = \varphi - i\psi$$

et, par suite,

$$\lambda = 2\varphi, \qquad \mu = 2\psi.$$

Nous devons trouver des résultats analogues à ceux de la première partie, les fonctions λ et μ ne différant que par des facteurs constants des fonctions φ et ψ.

Nous supposerons de même, dans le système (6)′, que f et f_1 représentent la même fonction ; d'où, si $f(y+ix) = \varphi' + i\psi'$, $f(y-ix) = \varphi' - i\psi'$,

$$\lambda' = 2\varphi', \qquad \mu' = 2\psi'.$$

Supposons que nous soyons dans le cas où les variables sont z et z_1.

On doit satisfaire au système suivant

$$(7)\qquad \begin{cases} f(z) = f(z_1) + C, \\ x + iy = z, \\ x - iy = z_1, \\ \dfrac{p_0}{\rho} + C_1 = F - 2f'(z)f'(z_1). \end{cases}$$

Ici on ne pourrait pas suivre la première marche indiquée au § II, car on ne pourrait pas se donner arbitrairement la fonction f.

Posons $f(z) = w$, $f(z_1) = w_1$. On en déduirait inversement

$$z = \chi(w), \qquad z_1 = \chi(w_1).$$

On a, d'ailleurs,

$$f'_z(z) = \frac{1}{\chi'_w(w)} \qquad \text{et} \qquad f'_{z_1}(z_1) = \frac{1}{\chi'_{w_1}(w_1)}.$$

Le système (7) devient

$$(8)\qquad \begin{cases} w = w_1 + C, \\ x + iy = z, \\ x - iy = z_1, \\ \dfrac{p_0}{\rho} + C_1 = F - \dfrac{2}{\chi'(w)\chi'(w_1)}. \end{cases}$$

Dans le second cas, les variables étant z' et z'_1, des considérations toutes semblables conduiraient à un système analogue au système (8). Ce parallélisme se poursuivra jusqu'au bout. Il suffit donc d'étudier le premier cas. Une fois les résultats obtenus, nous n'aurons qu'à y changer x en y et y en x pour avoir les conclusions du second cas.

Supposons, pour fixer les idées, que la force extérieure qui agit sur chacune des molécules du fluide soit la pesanteur. Dans les formules précédentes, F sera remplacé par $+gx$, g désignant l'accélération due à la pesanteur : on suppose la pesanteur agissant parallèlement à Ox.

L'équation (1), qui donne la pression p, appliquée aux points où $p = p_0$, $x = 0$, c'est-à-dire aux points A ou B, montre que l'on a

$$\frac{p_0}{\rho} + C_1 + \tfrac{1}{2}V_A^2 = 0.$$

Si donc le mouvement du fluide est réel, comme $\frac{1}{2}V_A^2$ est positif, il faut que $\frac{p_0}{\rho} + C_1$ soit négatif. Nous poserons, par conséquent,

$$\frac{p_0}{\rho} + C_1 = -k;$$

k sera positif. On aura

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & w = w_1 + C, \\ & z = x + iy = \chi(w), \\ & z_1 = x - iy = \chi(w_1), \\ & \frac{2}{\chi'(w)\chi'(w_1)} = +gx + k = +\frac{g}{2}[\chi(w) + \chi(w_1)] + k. \end{aligned} \right.$$

En tirant w_1 de la première, la dernière devient

$$(10) \qquad \frac{2}{\chi'(w)\chi'(w-C)} = \frac{g}{2}[\chi(w) + \chi(w-C)] + k.$$

Nous sommes ainsi ramené à déterminer une fonction χ de la variable w satisfaisant à une relation telle que la relation (10), quel que soit w.

D'une façon générale, en exprimant F au moyen de $\chi(w)$ et de $\chi(w-C)$, on sera ramené à déterminer la fonction χ de la variable w satisfaisant à une relation analogue à la relation (10).

IV.

Étudions cette relation (10) dans le cas spécial où la force extérieure est la pesanteur.

Posons

$$\chi'(w)\chi'(w-C) = P,$$
$$\chi'(w) + \chi'(w-C) = S,$$

$\chi'(w)$ et $\chi'(w-C)$ seront les racines de l'équation du second degré

$$(11) \qquad D^2 - SD + P = 0.$$

Si la fonction χ satisfait à la relation (10), on doit avoir en outre

$$\frac{2}{P} = \frac{g}{2}\int S\,dw + k,$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{2}{\frac{g}{2}\int S\,d\varpi + k}.$$

Si l'on pose $S(\varpi) = F'(\varpi)$, on aura

$$\int S\,d\varpi = F(\varpi),$$

d'où

$$P = \frac{2}{\frac{g}{2}F(\varpi) + k}.$$

L'équation (11) deviendra par conséquent

$$D^2 - F'(\varpi)D + \frac{2}{\frac{g}{2}F(\varpi) + k} = 0, \tag{12}$$

où F est une fonction arbitraire.

On tire de cette équation

$$(13)\quad \begin{cases} \chi'(\varpi) = D' = \frac{1}{2}F'(\varpi) + \sqrt{\dfrac{F'^2(\varpi)}{4} - \dfrac{2}{\frac{g}{2}F(\varpi) + k}}, \\ \chi'(\varpi - C) = D'' = \frac{1}{2}F'(\varpi) - \sqrt{\dfrac{F'^2(\varpi)}{4} - \dfrac{2}{\frac{g}{2}F(\varpi) + k}} \end{cases}$$

ou, inversement,

$$(14)\quad \begin{cases} \chi'(\varpi - C) = D' = \frac{1}{2}F'(\varpi) + \sqrt{\dfrac{F'^2(\varpi)}{4} - \dfrac{2}{\frac{g}{2}F(\varpi) + k}}, \\ \chi'(\varpi) = D'' = \frac{1}{2}F'(\varpi) - \sqrt{\dfrac{F'^2(\varpi)}{4} - \dfrac{2}{\frac{g}{2}F(\varpi) + k}}. \end{cases}$$

Mais ce n'est pas tout. Il faut, bien évidemment, que si, dans la première des racines (13) ou dans la seconde des racines (14), on change ϖ en $\varpi - C$, on reproduise l'autre racine. Si cela a lieu, quelle que soit la racine qu'on a appelée D', on satisfera à cette condition à l'aide du théorème suivant; le cas où les deux racines D' et D'' ne jouent pas le même rôle sera examiné plus loin (§ XII).

THÉORÈME. — *La fonction* $F(w)$ *doit être une fonction périodique de* w, *de période* $2C$, *si les deux racines* D' *et* D'' *jouent le même rôle.*

En effet, dans le système (13), si l'on change w en $w - C$, D' se transforme et devient D''; on doit donc avoir identiquement

$$(\alpha) \qquad D'(w - C) \equiv D''(w).$$

Changeons dans les deux membres de cette identité w en $w - C$, il vient

$$(\beta) \qquad D'(w - 2C) \equiv D''(w - C).$$

Dans le système (14), si l'on change w en $w - C$, D'' doit se changer en D'; on a donc identiquement

$$(\gamma) \qquad D''(w - C) \equiv D'(w).$$

En rapprochant les identités (β) et (γ), on en déduit

$$D'(w - 2C) \equiv D'(w),$$

qui montre que D' est une fonction périodique de w, d'amplitude $2C$. On démontrerait qu'il en est de même de D'' par un procédé tout semblable.

Par suite la somme $D' + D''$, c'est-à-dire $F'(w)$, doit être périodique par rapport à w et avoir la même période $2C$. Il en est encore de même de la fonction primitive $F(w)$, ce qu'on peut voir à l'aide du produit $D'D''$ qui doit être également périodique.

Le théorème est donc établi.

D'après ce théorème, si l'on pose $F(w) + \frac{2k}{g} = \theta^2(w)$, la fonction $\theta(w)$ sera périodique et aura $2C$ pour période. Supposons de plus que, lorsqu'on change w en $w - C$, $\theta(w)$ change de signe, ce que j'exprimerai en disant que la fonction $\theta(w)$ admet $-C$ pour *demi-période;* je dis que les deux racines D' et D'' se permutent effectivement quand on change w en $w - C$.

On aura, en effet,

$$(15) \qquad \begin{cases} D' = \chi'(w) \qquad\quad = \theta(w)\,\theta'(w) + \dfrac{\sqrt{\theta^4(w)\,\theta'^2(w) - \lambda}}{\theta(w)}, \\ D'' = \chi'(w - C) = \theta(w)\,\theta'(w) - \dfrac{\sqrt{\theta^4(w)\,\theta'^2(w) - \lambda}}{\theta(w)}, \end{cases}$$

à la place du système (13) et, à la place du système (14),

$$(16)\qquad \begin{cases} D' = \chi'(w - C) = \theta(w)\,\theta'(w) + \dfrac{\sqrt{\theta^4(w)\,\theta'^2(w) - \lambda}}{\theta(w)}, \\ D'' = \chi'(w) \qquad = \theta(w)\,\theta'(w) - \dfrac{\sqrt{\theta^4(w)\,\theta'^2(w) - \lambda}}{\theta(w)}, \end{cases}$$

où λ désigne la constante $\frac{4}{g}$.

Si l'on change dans (15) w en $w - C$, $\theta(w)$ change de signe. Il en est de même de sa dérivée $\theta'(w)$, car si l'on a, quel que soit w,

$$\theta(w - C) \equiv -\theta(w),$$

on en déduit

$$\theta'(w - C) \equiv -\theta'(w).$$

Par suite $\theta(w)\theta'(w)$ ne change pas. La quantité sous le radical reste également invariable; mais, $\theta(w)$ changeant de signe, D′ et D″ se permutent. Conclusions analogues pour (16).

En résumé, les deux racines de l'équation

$$(17)\qquad D^2 - 2\theta(w)\,\theta'(w)\,D + \frac{\lambda}{\theta^2(w)} = 0,$$

où $\theta(w)$ désigne une fonction périodique admettant une demi-période, que nous désignerons par $-C$, satisfont à la relation (10) du paragraphe précédent; et l'on pourra poser

$$(18)\qquad \begin{cases} \chi'(w) \qquad = \theta(w)\,\theta'(w) + \dfrac{\sqrt{\theta^4(w)\,\theta'^2(w) - \lambda}}{\theta(w)}, \\ \chi'(w - C) = \theta(w)\,\theta'(w) - \dfrac{\sqrt{\theta^4(w)\,\theta'^2(w) - \lambda}}{\theta(w)}, \end{cases}$$

ou les égalités analogues où l'on change $\chi'(w)$ en $\chi'(w - C)$ et inversement, ce qui revient à changer le signe du radical. Dans ces formules, λ désigne la constante $\frac{4}{g}$.

V.

La relation (10) étant résolue, nous allons pouvoir résoudre facilement le système (9) et en déduire l'équation générale de la surface libre de la veine liquide.

Des équations (18) on déduit, en intégrant par rapport à w,

$$\begin{aligned}\chi(w) &= \frac{1}{2}\theta^2(w) + \int \frac{\sqrt{\theta^4(w)\theta'^2(w) - \lambda}}{\theta(w)}\,dw + \text{const.},\\ \chi(w - C) &= \frac{1}{2}\theta^2(w) - \int \frac{\sqrt{\theta^4(w)\theta'^2(w) - \lambda}}{\theta(w)}\,dw + \text{const.}\end{aligned}$$

Ces constantes introduites par l'intégration sont faciles à déterminer. D'abord, elles doivent être égales : car si l'on change w en $w - C$, la première expression doit se changer en la seconde. Soit α leur valeur commune. Portons ces valeurs de $\chi(w)$ et de $\chi(w - C)$ dans la relation (10). Elle devient

$$2\frac{g\theta^2(w)}{4} = \frac{g}{2}[\theta^2(w) + 2\alpha] + k \qquad \text{ou} \qquad \alpha g + k = 0,$$

d'où

$$\alpha = -\frac{k}{g}.$$

On aura donc enfin

$$(19)\qquad \begin{cases}\chi(w) = \dfrac{1}{2}\theta^2(w) + \displaystyle\int \frac{\sqrt{\theta^4(w)\,\theta'^2(w) - \lambda}}{\theta(w)}\,dw - \frac{k}{g},\\[2ex] \chi(w - C) = \dfrac{1}{2}\theta^2(w) - \displaystyle\int \frac{\sqrt{\theta^4(w)\,\theta'^2(w) - \lambda}}{\theta(w)}\,dw - \frac{k}{g},\end{cases}$$

où le radical a un signe quelconque. Le signe $\int$ désigne, comme d'habitude, l'intégrale indéfinie ou la fonction primitive sans constante additionnelle.

D'autre part, toujours dans le système (9) relatif aux points de la surface libre de la veine fluide, on a

$$\begin{aligned}z &= x + iy = \chi(w),\\ z_1 &= x - iy = \chi(w - C),\end{aligned}$$

d'où

$$2x = \chi(w) + \chi(w - C),$$
$$2iy = \chi(w) - \chi(w - C).$$

On a donc, pour les coordonnées (x, y) d'un point de la surface de la veine liquide,

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2x &= \theta^2(w) - \frac{2k}{g}, \\ y &= \int \frac{\sqrt{\lambda - \theta^4(w)\,\theta'^2(w)}}{\theta(w)}\,dw. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où les variables seraient z' et z'_1, des considérations semblables conduiraient à des équations qu'on déduira des équations (20) en changeant x et y en y et x, la pesanteur étant parallèle ici à Oy. On obtient ainsi

$$(20)' \qquad \left\{ \begin{aligned} 2y &= \theta^2(w) - \frac{2k}{g}, \\ x &= \int \frac{\sqrt{\lambda - \theta^4(w)\,\theta'^2(w)}}{\theta(w)}\,dw, \end{aligned} \right.$$

où $\theta(w)$ est une fonction périodique jouissant des propriétés déjà énoncées.

VI.

Du cas que l'on vient de traiter on déduira facilement le cas où il n'y a pas de forces extérieures agissant sur le fluide.

Si l'on fait, en effet, $g = 0$, dans la relation (10), elle devient

$$(21) \qquad \frac{2}{\chi'(w)\,\chi'(w - C)} = k.$$

Telle est la relation qui doit déterminer $\chi(w)$ dans ce cas. On en tire

$$\chi'(w)\,\chi'(w - C) = \frac{2}{k}.$$

On n'a ici que le produit des deux facteurs $\chi'(w)$ et $\chi'(w - C)$; on pourra donc se donner arbitrairement leur somme $2S'(w)$; $\chi'(w)$ et

$\chi'(w - C)$ seront les deux racines de l'équation du second degré suivante

$$D^2 - 2S'(w)D + \frac{2}{k} = 0. \tag{22}$$

On en tire

$$D' = \chi'(w) \qquad = S'(w) + \sqrt{S'^2(w) - \frac{2}{k}},$$

$$D'' = \chi'(w - C) = S'(w) - \sqrt{S'^2(w) - \frac{2}{k}},$$

ou inversement.

Mais il faut de plus que la fonction $S'(w)$ ait été choisie de telle sorte que, en changeant w en $w - C$ dans la première racine, on trouve la seconde.

Posons $S'^2(w) - \frac{2}{k} = \theta'^2(w)$, il vient

$$\left\{\begin{aligned} D' &= \chi'(w) &&= \sqrt{\theta'^2(w) + \frac{2}{k}} \pm \theta'(w), \\ D'' &= \chi'(w - C) &&= \sqrt{\theta'^2(w) + \frac{2}{k}} \mp \theta'(w), \end{aligned}\right. \tag{23}$$

où le radical a un signe quelconque, mais le même dans les deux formules. Si $\theta'(w)$ admet $-C$ pour demi-période, c'est-à-dire si elle change de signe quand on change w en $w - C$, ces deux racines seront permutées par ce changement.

En intégrant par rapport à w, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \chi(w) &= \int\sqrt{\theta'^2(w) + \frac{2}{k}}\,dw \pm \theta(w) + \text{const.}, \\ \chi(w - C) &= \int\sqrt{\theta'^2(w) + \frac{2}{k}}\,dw \mp \theta(w) + \text{const.}, \end{aligned}\right. \qquad (\text{const.} = \alpha); \tag{24}$$

$\theta(w)$ devra être aussi périodique et admettre une demi-période, que nous désignerons par $-C$. Les deux constantes introduites par l'intégration doivent être les mêmes, puisque $\chi(w)$ doit se changer en $\chi(w - C)$ quand on change w en $w - C$. Soit α leur valeur commune. α est d'ailleurs quelconque, car les constantes disparaissent par la différentiation et la relation (21) ne les détermine pas. Quand on change w en $w - C$, la quantité sous le radical ne change pas; il en est donc de même de son intégrale; $\theta(w)$ change de signe; $\chi(w)$ se transforme donc en $\chi(w - C)$.

$\theta'(w)$ étant périodique d'amplitude $2C$, $S'(w)$ sera donc aussi périodique de même amplitude. $S'^2(w)$ et $\theta'^2(w)$ admettront $-C$ pour période.

On déduira facilement de là l'équation de la surface de la veine fluide. On a, en effet,

$$z = x + iy = \chi(w),$$
$$z_1 = x - iy = \chi(w - C),$$

d'où

$$2x = \chi(w) + \chi(w - c),$$
$$2iy = \chi(w) - \chi(w - c);$$

d'où

$$(25)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \int \sqrt{\theta'^2(w) + \frac{2}{k}}\, dw + \alpha = S(w) + \alpha, \\ iy &= \theta(w) = \int \sqrt{S'^2(w) - \frac{2}{k}}\, dw. \end{aligned} \right.$$

En changeant x en y et y en x, on aura les résultats dans le second cas; ce sont les suivants

$$(25)'\qquad \left\{ \begin{aligned} y &= \int \sqrt{\theta'^2(w) + \frac{2}{k}}\, dw + \alpha = S(w) + \alpha, \\ ix &= \theta(w) = \int \sqrt{S'^2(w) - \frac{2}{k}}\, dw. \end{aligned} \right.$$

Il est bon de chercher dans le second cas quelle serait l'analogue de l'équation (22).

Les racines de l'équation (22) sont $\frac{dz}{dw}$ et $\frac{dz_1}{dw}$, c'est-à-dire $\frac{dx + i\,dy}{dw}$, $\frac{dx - i\,dy}{dw}$. Celles de l'équation cherchée, δ, doivent être $\frac{dz'}{dw}$ et $-\frac{dz'_1}{dw}$, c'est-à-dire $\frac{dy + i\,dx}{dw}$ et $-\frac{dy - i\,dx}{dw}$. On a donc

$$\delta' = \frac{dy + i\,dx}{dw} = \frac{i[dx - i\,dy]}{dw} = i\mathrm{D}'',$$
$$\delta'' = -\frac{dy - i\,dx}{dw} = \frac{i[dx + i\,dy]}{dw} = i\mathrm{D}'.$$

On a donc $D = -i\delta$. L'équation en δ cherchée sera

$$\delta^2 - 2iS'(w)\delta - \frac{2}{k} = 0. \tag{22'}$$

Remarquons que l'équation (22) ne diffère pas de l'équation qui donnait l'inconnue ζ de M. Kirchhoff; car ζ désignait également $\frac{dz}{dw}$.

L'équation en D étant ainsi intimement liée à l'équation en ζ de la première Partie, on pourra en déduire les conséquences déjà indiquées. En se donnant les limites du domaine w, on en déduira, comme on a vu, les limites du domaine de z, c'est-à-dire les limites du fluide en mouvement. Nous reviendrons sur ce point au § VIII. Bornons-nous, pour le moment, à des exemples simples de la détermination de la surface libre du fluide.

VII.

Premier exemple. — Prenons le cas d'un fluide soustrait à l'action des forces extérieures. Posons

$$\theta(w) = i\lambda \sin w.$$

C'est bien là une fonction périodique admettant une demi-période π ou $-\pi$.

On a

$$x = \int \sqrt{-\lambda^2 \cos^2 w + \frac{2}{k}}\, dw + \alpha,$$
$$y = \lambda \sin w.$$

Nous supposerons λ réel. On peut également supposer, pour simplifier l'écriture, que k est pris égal à 2. On a

$$x = \int \sqrt{1 - \lambda^2 \cos^2 w}\, dw + \alpha,$$
$$y = \lambda \sin w.$$

On voit que x est donné par une intégrale elliptique; si l'on pose

$$w = \frac{\pi}{2} - u, \qquad \text{d'où} \qquad dw = -du,$$

on a

$$x = -\int \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}\, du,$$

intégrale elliptique de seconde espèce, dont le module est λ, changée de signe.

On peut calculer facilement l'équation différentielle de la surface libre. On a

$$\sin w = \frac{y}{\lambda}, \qquad \text{d'où} \qquad \cos w\, dw = \frac{dy}{\lambda},$$

d'où

$$dw = \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 - y^2}}.$$

On en déduit

$$dx = \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 + y^2}{\lambda^2 - y^2}}\, dy;$$

telle est l'équation différentielle cherchée, d'où l'on déduit, même sans intégrer, la forme générale de la courbe.

Bornons-nous au cas particulier où $\lambda = \pm 1$. L'équation différentielle se réduit à la suivante

$$dx = \frac{y\, dy}{\sqrt{1 - y^2}},$$

qui s'intègre immédiatement et donne

$$(x - x_0)^2 + y^2 = 1;$$

c'est une circonférence ayant son centre en un point de l'axe des x et de rayon 1. Il est évident que si, dans ce cas, le mouvement était symétrique par rapport à Ox, il ne pourrait y avoir écoulement; mais nous verrons plus loin (§ XIV) qu'il y a en réalité mouvement de rotation, comme dans un tourbillon.

Deuxième exemple. — Il est naturel de chercher à retrouver les résultats déjà obtenus, d'après M. Kirchhoff, dans la première Partie de ce travail.

Le principal exemple est celui qui correspond à l'équation

$$\zeta^2 - 2\zeta e^{-w} + 1 = 0.$$

Pour que l'équation

$$D^2 - 2 S'(w) D + \frac{2}{k} = 0$$

coïncide avec elle, il suffit de poser

$$S'(w) = e^{-w}, \qquad k = 2.$$

On en tire

$$\chi'(w) \quad\; = D' = e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1},$$
$$\chi'(w - C) = D'' = e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - 1}.$$

La fonction e^{-w} est périodique, de période $2i\pi$; elle admet une demi-période qui est $i\pi$ ou $-i\pi$. Si l'on pose

$$e^{-2w} - 1 = \theta'^2(w),$$

$\theta'(w)$ sera périodique et admettra une demi-période. C'est ce qui résulte d'une propriété connue. Posons, en effet,

$$e^{-2w} - 1 = R(\cos\theta + i\sin\theta),$$

on en déduit

$$\sqrt{e^{-2w} - 1} = R^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Lorsque w varie de $i\pi$, $2w$ varie de $2i\pi$ et θ varie de θ_0 à $\theta_0 + 2\pi$, $\frac{\theta}{2}$ varie de $\frac{\theta_0}{2}$ à $\frac{\theta_0}{2} + \pi$: le radical part donc de la valeur

$$R^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta_0}{2} + i\sin\frac{\theta_0}{2}\right)$$

pour arriver à la valeur

$$-R^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta_0}{2} + i\sin\frac{\theta_0}{2}\right);$$

ainsi le radical change de signe quand on change w en $w \pm i\pi$. $\theta'(w)$ admet donc pour demi-période $-i\pi$.

Les deux racines D′ et D″ se permutent donc lorsqu'on change w en $w - i\pi$.

Intégrons les deux racines. Comme $\theta'(w) = \sqrt{e^{-2w} - 1}$, on aura

$$\theta(w) = -\sqrt{e^{-2w} - 1} + \operatorname{arc\,tang}\sqrt{e^{-2w} - 1}.$$

L'équation de la surface libre s'obtiendra en employant les formules (25)

$$x = -e^{-w} + \alpha,$$
$$y = \sqrt{1 - e^{-2w}} - i \operatorname{arc\,tang}\sqrt{e^{-2w} - 1}.$$

Remarquons que

$$i \operatorname{arc tang} \sqrt{e^{-2w} - 1} = \frac{1}{2} \mathrm{L} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2w}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2w}}},$$

d'où

$$x = \alpha - e^{-w},$$

$$y = \sqrt{1 - e^{-2w}} - \frac{1}{2} \mathrm{L} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2w}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2w}}};$$

ce sont les équations, dans notre système d'axes, de la surface libre du jet, déjà trouvées dans la première Partie. On en déduit, en éliminant w,

$$y = \sqrt{1 - (\alpha - x)^2} - \frac{1}{2} \mathrm{L} \frac{1 + \sqrt{1 - (\alpha - x)^2}}{1 - \sqrt{1 - (\alpha - x)^2}}.$$

Pour $\alpha = 1$, on trouve la première portion de cette surface obtenue au § VII de la première Partie; pour $\alpha = 1 + \pi$, on trouve la seconde portion.

Nous nous bornons pour le moment à la surface libre : nous compléterons plus loin (§ VIII).

Troisième exemple. — Prenons l'exemple de la première Partie répondant à l'équation

$$\zeta^2 - 2\zeta i (2e^{-2w} - 1) - 1 = 0.$$

La forme de cette équation nous conduit à l'identifier avec l'équation $(22)'$, à savoir $\left(\delta = \dfrac{dy + i\,dx}{dw} \text{ dans notre système d'axes}\right)$

$$\delta^2 - 2\delta i S'(w) - \frac{2}{k} = 0,$$

en posant

$$S'(w) = 2e^{-2w} - 1, \qquad k = 2.$$

L'équation correspondante en D serait

$$D^2 - 2D(2e^{-2w} - 1) + 1 = 0,$$

avec $D = \dfrac{dx + i\,dy}{dw}$ dans notre système d'axes.

Traitons, par exemple, la seconde. On voit que $S'(w)$ est périodique et admet la période $\pm i\pi$, qui sera demi-période pour

$$\theta'(w) = \sqrt{S'^2(w) - 1} = 2e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1},$$

on le voit, comme dans l'exemple précédent. On aura

$$D' = 2e^{-2w} - 1 + 2e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1},$$
$$D'' = 2e^{-2w} - 1 - 2e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1}.$$

On aura donc, dans notre système d'axes, pour la surface libre

$$x = \int (2e^{-2w} - 1)\,dw + \alpha,$$
$$iy = \int 2e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1}\,dw$$

ou

$$x = -e^{-2w} - w + \alpha,$$
$$iy = -e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1} + L\left(e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}\right),$$

ou, en prenant le signe $-$ devant le radical

$$x = -e^{-2w} - w + \alpha,$$
$$y = e^{-w}\sqrt{1 - e^{-2w}} - \operatorname{arc\,tang} e^{w}\sqrt{1 - e^{-2w}} = e^{-w}\sqrt{1 - e^{-2w}} - \operatorname{arc\,cos} e^{-w}.$$

Quatrième exemple. — Supposons que la pesanteur agisse et servons-nous de la formule (20).

Posons

$$\theta^2(w) = 1 - e^{-w}.$$

On en tire

$$2\theta(w)\,\theta'(w) = e^{-w},$$

et l'équation (17) devient

$$D^2 - e^{-w}D + \frac{4}{g(1 - e^{-w})} = 0.$$

Les formules (20) donneront pour la surface libre

$$2x = 1 - e^{-w} - \frac{2k}{g},$$
$$y = \int \sqrt{\frac{\lambda}{1 - e^{-w}} - \frac{e^{-2w}}{4}}\,dw,$$

où

$$\lambda = \frac{4}{g}.$$

Les formules $(20)'$ auraient donné de même

$$2y = 1 - e^{-w} - \frac{2k}{g},$$
$$x = \int \sqrt{\frac{\lambda}{1 - e^{-w}} - \frac{e^{-2w}}{4}}\,dw.$$

Si, dans les premières, on fait $k = 0$, il vient

$$2x = 1 - e^{-w},$$
$$y = \int \sqrt{\frac{\lambda}{1 - e^{-w}} - \frac{e^{-2w}}{4}}\,dw.$$

On en déduit facilement l'équation différentielle de la courbe. On a

$$e^{-w} = 1 - 2x,$$

d'où

$$dw = \frac{2\,dx}{1 - 2x},$$

donc

$$dy = \sqrt{\frac{\lambda}{2x} - \frac{1}{4}(1 - 2x)^2}\,\frac{2\,dx}{1 - 2x}.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$, y est infini. Nous aurons occasion d'étudier plus complètement cette équation (§ VIII).

Si $k = \frac{g}{2}$, on aura de même

$$dy = -\sqrt{\frac{\lambda}{1 + 2x} - x^2}\,\frac{dx}{x},$$

qui se déduit de la première équation différentielle en posant

$$x = x' + \tfrac{1}{2};$$

c'est la même courbe, les axes ayant été déplacés parallèlement à eux-mêmes.

De même, si k est quelconque, les deux signes du radical donneront deux limites symétriques par rapport aux axes.

On peut passer de ce cas au cas où il n'y aurait plus de pesanteur; considérons g comme l'accélération d'une force qui tend à s'annuler. A la limite, l'équation (17) se confond avec l'équation (22); on fera donc tendre g vers zéro, à condition de poser $\lim g\theta^2(w) = 2k$ sous le radical. Il vient ainsi

$$dy = \sqrt{\frac{4}{2k} - \frac{e^{-2w}}{4}}\, dw,$$

d'où

$$dy = \sqrt{\frac{2}{k} - x^2}\,\frac{dx}{2x} = \sqrt{\frac{4}{g} - x^2}\,\frac{dx}{x},$$

car $k = \frac{g}{2}$, et enfin

$$\frac{\sqrt{g}}{2}y = \sqrt{1 - \frac{gx^2}{4}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{gx^2}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{gx^2}{4}}}.$$

Sans multiplier les exemples, montrons dans le paragraphe qui suit que, chaque fois que l'on se sera donné la fonction $\theta(w)$, on pourra étudier le mouvement complet du fluide et assigner la forme que présente le réservoir.

VIII.

La fonction $\theta(w)$ connue, le mouvement est déterminé. Nous venons de voir d'abord que la surface libre est déterminée. Les équations (19) montre que z est déterminé en fonction de w. Inversement, on déduira de ces équations w en fonction de z, soit directement, soit par un développement en série. On aura donc $w = f(z)$, et, par suite, $w_1 = f(z_1)$. On connaîtra donc $\lambda = w + w_1 = f(z) + f(z_1)$.

On pourra en déduire tous les éléments principaux du mouvement.

Trajectoires. — Elles ont pour équation, comme nous avons vu,

$$f(z) = f(z_1) + C' \qquad \text{ou} \qquad w = w_1 + C',$$

et tout est connu maintenant dans cette équation : les trajectoires sont donc déterminées.

Remarquons en particulier que, pour $C' = 0$, on obtient, entre autres trajectoires, $y = 0$. Si $C' = C_0$ donne une surface libre, où $p = p_0$, $C' = C_0 + 2C$ donne une autre surface libre, car, en changeant w en $w - 2C$, $\chi(w)$ et $\chi(w_1)$ ne changent pas et la formule qui donne p ne change pas.

Les trajectoires orthogonales de ces lignes de courant seront les courbes $\lambda = \text{const.}$ ou $f(z) + f(z_1) = \text{const.}$

Vitesse. — On a

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = f'(z) + f'(z_1), \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = i[f'(z) - f'(z_1)],$$

et l'on sait que $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ représente la composante de la vitesse parallèle à l'axe Ox, et $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$ la composante parallèle à l'axe Oy.

Or f est connu. Donc ces composantes en un point quelconque x, y du fluide sont connues.

Pression. — En portant ces valeurs de $\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \frac{\partial\lambda}{\partial y}$ dans la seconde des équations (1), on en déduira l'expression de la pression en un point quelconque (x, y) du fluide.

On n'aura pas, en général, une pression constante le long d'une trajectoire autre que la surface libre. Ce caractère permettra de reconnaître quelles sont les parties des trajectoires limites qui pourront être considérées comme parois solides ou comme surfaces libres.

En se donnant $\theta(w)$, on détermine donc le mouvement du fluide. On pourra appliquer à la relation qui lie z et w la méthode de M. Kirchhoff et déduire le domaine de z de celui de w. Reprenons, dans ce but, les principaux exemples déjà indiqués.

Notre premier exemple sera examiné plus loin (§ XIV). Considérons le second.

Deuxième exemple. — Nous avions

$$\frac{dz}{dw} = \chi'(w) = e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1},$$

d'où

$$z = \chi(w) = \alpha - e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - 1} + \operatorname{arctang}\sqrt{e^{-2w} - 1}.$$

Supposons que, pour $w = 0$, on veuille avoir $z = 0$, on doit faire $\alpha = 1$, d'où

$$z = x + iy = 1 - e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - 1} + \operatorname{arctang}\sqrt{e^{-2w} - 1},$$

avec $w = \varphi + i\psi$. Les trajectoires ont pour équation, comme nous savons, $w = w_1 + C'$ ou $2i\psi = C'$. La surface libre peut avoir pour équation

$$(\alpha) \qquad w = w_1 + C'_0,$$

où C'_0 est arbitraire; car cette équation équivaut à

$$(\beta) \qquad w - C'_0 + C = w_1 + C \qquad \text{ou} \qquad w_2 = w_1 + C,$$

en posant $w_2 = w - C'_0 + C$. L'équation (β) est bien de la forme considérée aux §§ II et suivants. Or changer w en w_2 revient à prendre, au lieu de $f(z)$, $f(z) - C'_0 + C$ ou $f(z) - \delta$, c'est-à-dire au lieu de λ à prendre $\lambda_1 = \lambda + \delta (\delta = C'_0 - C)$; or λ n'intervenant dans le mouvement, abstraction faite des axes coordonnés, que par ses dérivées, la nature du mouvement reste la même quand on remplace λ par λ_1, qui n'en diffère que par une constante additionnelle. La période de e^{-w} étant $2i\pi$, $w = w_1 + C'_0 + 2i\pi$ sera encore une surface où la pression sera constante. Soit $C'_0 = 0$, les deux portions de la surface libre correspondront à $\psi = 0$, $\psi = \pi$. Nous limiterons donc le domaine de w par les deux parallèles $\psi = 0$, $\psi = \pi$.

Nous avons vu, d'autre part, que l'on a

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = 2\,\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial x} + i\frac{\partial\lambda}{\partial y}}{V^2} = \xi + i\eta = D.$$

On en déduit

$$\xi = \frac{2\frac{\partial\lambda}{\partial x}}{V^2} = 2\frac{v_x}{V^2}, \qquad \eta = \frac{2\frac{\partial\lambda}{\partial y}}{V^2} = \frac{2v_y}{V^2}, \qquad \eta^2 + \xi^2 = \frac{4}{V^2}.$$

Enfin le rapport de similitude des plans z et w en deux points correspondants est égal au module de $\frac{dz}{dw}$ en ces points.

Les équations à étudier sont :

1° Pour $\psi = 0$,

$$D = \xi + i\eta = e^{-\varphi} \pm \sqrt{e^{-2\varphi} - 1},$$

$$x + iy = 1 - e^{-\varphi} \mp \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} \pm \operatorname{arctang}\sqrt{e^{-2\varphi} - 1}.$$

L'important, évidemment, sera de séparer les parties réelles des parties imaginaires, et pour cela de résoudre l'inégalité $e^{-2\varphi} - 1 > 0$, ce qui donne $\varphi < 0$.

Si φ varie de o à $+\infty$, on a

$$\xi = e^{-\varphi}, \qquad \eta = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}};$$

ξ est positif, prenons η négatif, c'est-à-dire le radical avec le signe $-$. On aura, par suite,

$$x = 1 - e^{-\varphi}, \qquad y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \frac{1}{2} \mathrm{L} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}.$$

La pression p est donnée par la formule

$$\frac{p}{\rho} + C_1 + \frac{2}{\xi^2 + \eta^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{p}{\rho} + C_1 + 2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad p = \text{const.};$$

c'est une surface libre, comme nous savons déjà.

Si φ varie de o à $-\infty$, on a

$$\xi = e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}, \qquad \eta = 0;$$

ξ est positif. La vitesse a donc une direction constante, mais son intensité varie : la pression n'est donc pas constante. La portion correspondante de la trajectoire doit être considérée comme une paroi solide. Cette paroi a pour équations

$$x = 1 - e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} + \operatorname{arctang} \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}, \qquad y = 0.$$

On a pris, en effet, $\sqrt{e^{-2\varphi} - 1}$ avec le signe $+$ ici, car, pour $\varphi = -\infty$, on doit avoir $\xi = +\infty$. Ces équations représentent la partie négative de l'axe des y.

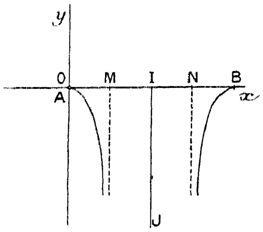
2° Pour $\psi = \pi$, les équations à étudier sont

$$\begin{aligned} &\xi + i\eta = -e^{-\varphi} \pm \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}, \\ &x + iy = 1 + \pi + e^{-\varphi} \mp \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} \pm \operatorname{arc\,tang} \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}. \end{aligned}$$

La seconde peut s'établir de la façon suivante. La trajectoire $\psi = \pi$ doit passer par un certain point B de l'axe des x. Pour $\varphi = +\infty$, la première partie, déjà trouvée, de la surface libre a une asymptote parallèle à l'axe des y, $x = 1$; la largeur du jet à l'infini est π puisque, à l'infini, le rapport de similitude du plan z et du plan w, $\left|\frac{dz}{dw}\right|$ ou $|\mathrm{D}|$, est 1. La seconde partie de la surface libre devant être symétrique de la première, on doit avoir, en appelant N son asymptote, M l'asymptote $x = 1$ (*fig.* 10),

$$BN = AM = 1, \qquad \text{d'où} \qquad OB = 2 + \pi.$$

Fig. 10.



Ainsi, pour $\psi = \pi$, $\varphi = 0$, on doit avoir

$$z = 2 + \pi, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = 1 + \pi.$$

De plus, pour $\varphi > 0$, on a

$$\xi = -e^{-\varphi}, \qquad \eta = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}.$$

ξ est négatif, η doit être négatif : nous prendrons donc le radical avec le signe —. On en déduit

$$x = 1 + \pi + e^{-\varphi}, \qquad y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \frac{1}{2} \mathrm{L} \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}},$$

surface libre déjà trouvée.

Pour $\varphi < 0$, on a

$$\xi = -e^{-\varphi} \pm \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}, \qquad \eta = 0;$$

on doit prendre le radical avec le signe —, car, pour $\varphi = -\infty$, on doit avoir $\xi = -\infty$. On a donc

$$x = 1 + \pi + e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \operatorname{arc\,tang} \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}, \qquad x = 0,$$

qui représentent la partie positive de l'axe des y depuis le point d'abscisse $2 + \pi$ jusqu'à l'infini. C'est une paroi solide.

Remarquons que le coefficient de contraction de la veine est

$$\frac{\pi}{2 + \pi} = 0{,}611.$$

Proposons-nous de chercher la vitesse au point I, milieu de l'orifice OB.

1° On obtiendra IJ pour trajectoire en faisant $\psi = \frac{\pi}{2}$. Les équations générales

$$\frac{dz}{dw} = \xi + i\eta = e^{-w} \pm \sqrt{e^{-2w} - 1},$$
$$z = x + iy = \alpha - e^{-w} \mp \sqrt{e^{-2w} - 1} \pm \text{arc tang}\sqrt{e^{-2w} - 1}$$

deviennent

$$\xi_1 + i\eta_1 = -ie^{-\varphi} \pm i\sqrt{e^{-2\varphi} + 1},$$
$$x_1 + iy_1 = \alpha + ie^{-\varphi} \mp i\sqrt{e^{-2\varphi} + 1} \pm \text{arc tang}\, i\sqrt{e^{-2\varphi} + 1}.$$

Nous prendrons dans la première de ces deux égalités le radical avec le signe $-$; car, si nous prenions le signe $+$, nous aurions pour η_1 une valeur positive. Il vient donc

$$\xi_1 + i\eta_1 = -ie^{-\varphi} - i\sqrt{e^{-2\varphi} + 1};$$

ou

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_1 = 0, \\ -\eta_1 = e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} + 1} \end{cases}$$

et

$$x_1 + iy_1 = \alpha + ie^{-\varphi} + i\sqrt{e^{-2\varphi} + 1} - i\mathrm{L}\frac{1 + \sqrt{e^{-2\varphi} + 1}}{e^{-\varphi}} - (2\mu + 1)\frac{\pi}{2};$$

car

$$\text{arc tang}\, iu = \frac{i}{2}\mathrm{L}\frac{1 + u}{1 - u} = \frac{i}{2}\mathrm{L}\frac{(1 + u)^2}{1 - u^2} = \frac{i}{2}\mathrm{L}(1 + u)^2 - \frac{i}{2}\mathrm{L}(1 - u^2)$$
$$= i\mathrm{L}(1 + u) - \frac{i}{2}\mathrm{L}(1 - u^2).$$

On a donc ici, où $u = \sqrt{e^{-2\varphi} + 1}$,

$$\text{arc tang}\, i\sqrt{e^{-2\varphi} + 1} = i\mathrm{L}\left(1 + \sqrt{e^{-2\varphi} + 1}\right) - \frac{i}{2}\mathrm{L}(-e^{-2\varphi})$$
$$= i\mathrm{L}\left(1 + \sqrt{1 + e^{-2\varphi}}\right) - \frac{i}{2}\mathrm{L}e^{-2\varphi} - \frac{i}{2}\mathrm{L}(-1)$$
$$= i\mathrm{L}\frac{1 + \sqrt{1 + e^{-2\varphi}}}{e^{-\varphi}} - \frac{i}{2}[0 + i(2\mu + 1)\pi],$$

d'où

$$x_1 + iy_1 = \alpha + ie^{-\varphi} + i\sqrt{e^{-2\varphi}+1} - i\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{e^{-2\varphi}+1}}{e^{-\varphi}} - (2\mu+1)\frac{\pi}{2}.$$

Pour x_1, on doit trouver

$$x_1 = 1 + \frac{\pi}{2},$$

car

$$\mathrm{OI} = 1 + \frac{\pi}{2};$$

on prendra donc d'abord $\alpha = 1$, comme nous avons déjà pris $\mu = -1$. On a

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{\pi}{2}, \\ y_1 = e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi}+1} - \mathrm{L}\,\dfrac{1+\sqrt{e^{-2\varphi}+1}}{e^{-\varphi}}. \end{cases}$$

Posons

$$e^{-\varphi} = t,$$

il vient

$$(2)'\qquad \begin{cases} x_1 = 1 + \dfrac{\pi}{2}, \\ y_1 = t + \sqrt{t^2+1} - \mathrm{L}\,\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$$

2° Cherchons d'autre part le rapport des vitesses sur IJ et à la surface. Je désignerai la valeur absolue de la première par V_1 et celle de la seconde par V_0. Je poserai

$$Z = \frac{V_1}{V_0}.$$

Or

$$\frac{4}{V_1^2} = \eta_1^2 + \xi_1^2 = \left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi}+1}\right)^2 = \left(t + \sqrt{t^2+1}\right)^2,$$

d'où

$$V_1 = \frac{2}{t + \sqrt{t^2+1}}.$$

Pour $\psi = 0$, on avait

$$\xi = e^{-\varphi}, \qquad \eta = \sqrt{1 - e^{-\varphi}},$$

ou

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{4}{V_0^2} = 1,$$

d'où

$$V_0 = 2;$$

on a donc

$$Z = \frac{1}{1 + \sqrt{t^2 + 1}}.$$

3° Cherchons quelle valeur il faut donner à φ pour que ce rapport, sur la ligne médiane IJ, prenne la valeur 0,69 que lui assigne l'expérience. L'équation qui détermine φ est

$$Z = 0,69, \qquad \text{ou} \qquad t + \sqrt{t^2 + 1} = \frac{1}{0,69} = k,$$

d'où

$$t = \frac{k^2 - 1}{2k} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{t^2 + 1} = k - t = k - \frac{k^2 - 1}{2k} = \frac{k^2 + 1}{2k}.$$

Portons cette valeur de t dans y_1, et voyons quel est le point de IJ où la vitesse a cette valeur. Il vient

$$Y_1 = k - L\,\frac{1 + \dfrac{k^2 + 1}{2k}}{\dfrac{k^2 - 1}{2k}} = k - L\,\frac{(k + 1)^2}{k^2 - 1} = k - L\,\frac{k + 1}{k - 1} = k - \frac{\log\left(\dfrac{k + 1}{k - 1}\right)}{\log e},$$

en désignant par L les logarithmes népériens et par log les logarithmes vulgaires.

Or on a

$$\frac{k + 1}{k - 1} = \frac{1,69}{0,31}, \quad k = 1,44927, \quad \log\frac{k + 1}{k - 1} = 0,73653, \quad L\,\frac{k + 1}{k - 1} = 1,695923,$$

d'où

$$Y_1 = 1,44927 - 1,695923 = -0,246653.$$

Ce point est donc un peu au-dessous de l'orifice, à l'extérieur du réservoir. On a d'ailleurs

$$\frac{Y_1}{OB} = \frac{0,24665}{2 + \pi} = -\frac{0,24665}{5,1416} = -0,04\ldots$$

environ. Ce point est donc sur l'axe médian au-dessous de l'orifice à une distance de l'axe des x qui est environ les $\frac{4}{100}$ ou $\frac{1}{25}$ de la largeur de l'orifice. Comme l'orifice est généralement étroit, ce point se confond, dans l'expérience, avec le centre I de l'ouverture.

Quatrième exemple. — Traitons de même notre quatrième exemple. Les limites du domaine de w seront, pour la même raison que dans l'exemple précédent, $\psi = 0$ et $\psi = \pi$.

1° Pour $\psi = 0$, les équations à étudier sont

$$2D = 2\xi + 2i\eta = e^{-\varphi} \pm \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{4\lambda}{1 - e^{-\varphi}}}, \qquad \text{où} \qquad \lambda = \frac{4}{g},$$

$$2x + 2iy = 1 - e^{-\varphi} \pm \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{4\lambda}{1 - e^{-\varphi}}}\, d\varphi,$$

en supposant que pour $\varphi = 0$ on veuille avoir $z = 0$. Plus généralement, pour simplifier les calculs, nous supposerons que la force qui agit est une force constante parallèle à Ox; son accélération g sera un nombre quelconque; par suite nous pourrons donner à λ telle valeur simple qui conviendra.

Cherchons à résoudre l'inégalité

$$e^{-2\varphi} - \frac{4\lambda}{1 - e^{-\varphi}} > 0.$$

Supposons $\lambda = \frac{1}{2}$, il vient

$$e^{-2\varphi} - \frac{2}{1 - e^{-\varphi}} > 0 \qquad \text{ou} \qquad (1 - e^{-\varphi})(e^{3\varphi} - e^{-2\varphi} + 2) < 0.$$

Posons $e^{-\varphi} = u$, on a pour le second facteur

$$u^3 - u^2 + 2 \equiv (u^2 - 2u + 2)(u + 1).$$

$u^2 - 2u + 2$ est toujours positif, l'inégalité revient donc à la suivante

$$(1 - e^{-\varphi})(e^{-\varphi} + 1) < 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi < 0.$$

Donc, quand ψ est nul, les radicaux sont

si $\varphi < 0$ réels,
si $\varphi > 0$ imaginaires.

A. Pour $\varphi < 0$, on a donc

$$2\xi = e^{-\varphi} \pm \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{2}{1-e^{-\varphi}}}, \qquad 2\eta = 0,$$

paroi plane. On doit prendre le radical avec le signe $+$ car, pour $\varphi = -\infty$, on doit avoir ξ infini; on aura donc

$$2x + 2iy = 1 - e^{-\varphi} + \int_0^\varphi \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{2}{1-e^{-\varphi}}}\, d\varphi,$$

d'où

$$2x = 1 - e^{-\varphi} + \int_0^\varphi \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{2}{1-e^{-\varphi}}}\, d\varphi, \qquad 2y = 0.$$

Ces équations représentent la partie négative de l'axe des x. On s'en assure ainsi. Pour $\varphi = 0$, $x = 0$; la dérivée de x, ξ, est positive : donc φ décroissant, x décroît et devient négatif. Je dis de plus que, pour $\varphi = -\infty$, $2x = -\infty$. Pour écarter les formes illusoires on peut, sans intégrer, procéder comme il suit.

Posons $e^{-\varphi} = u$, d'où

$$2x - 1 = -u - \int_1^u \sqrt{u^2 - \frac{2}{1-u}}\, \frac{du}{u},$$

$$2x - 1 = -u\left(1 + \frac{\displaystyle\int_1^u \sqrt{u^2 - \frac{2}{1-u}}\, \frac{du}{u}}{u}\right).$$

Le rapport qui est dans la parenthèse du second membre prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$; en le remplaçant par le rapport des dérivées, on a

$$2x - 1 = -u\left(1 + \frac{\sqrt{u^2 - \frac{2}{1-u}\frac{1}{u}}}{1}\right).$$

Pour $u = +\infty$, on a donc

$$2x - 1 = -\infty(1+1) = -2\infty \qquad \text{ou} \qquad x = -\infty.$$

Les équations représentent donc la partie négative de l'axe des x tout entière.

B. Pour $\varphi > 0$, on a

$$2\xi = e^{-\varphi}, \qquad 2\eta = \pm\sqrt{\frac{2}{1-e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}},$$

surface libre. ξ est positif, on doit prendre η négatif, c'est-à-dire le radical avec le signe $-$. On en déduit

$$2x = 1 - e^{-\varphi}, \qquad 2y = -\int_0^\varphi \sqrt{\frac{2}{1-e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi;$$

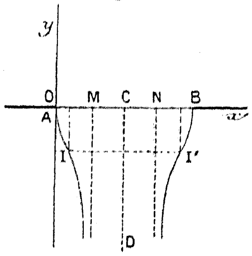
ce sont les équations déjà obtenues au § VII pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $k = 0$, et où le radical a un signe bien déterminé.

Pour $\varphi = +\infty$, on a

$$x = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{OM} = \tfrac{1}{2};$$

c'est une asymptote parallèle à Oy. A l'infini le jet a une largeur égale à $\pi\frac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{MN}$. La seconde partie de la surface devant être symétrique de la première, nous prendrons $\mathrm{NB} = \frac{1}{2}$. Le point B sera le point de

Fig. 11.



rencontre de la seconde partie de la surface libre avec Ox. On aura

$$\mathrm{OB} = 1 + \pi\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad 2\,\mathrm{OB} = 2 + \pi\sqrt{2}.$$

Nous reviendrons dans un instant sur la forme de la surface libre.

2° Pour $\psi = \pi$, les équations à étudier sont

$$2\xi + 2i\eta = -e^{-\varphi} \pm \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{2}{1+e^{-\varphi}}},$$

$$2x + 2iy = 1 + e^{-\varphi} + \pi\sqrt{2} \pm \int_0^\varphi \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{2}{1+e^{-\varphi}}}\,d\varphi.$$

Résolvons l'inégalité

$$e^{-2\varphi} - \frac{2}{1 + e^{-\varphi}} > 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{-3\varphi} + e^{-2\varphi} - 2 > 0.$$

Posons $e^{-\varphi} = u$, on a

$$u^3 + u^2 - 2 > 0 \qquad \text{ou} \qquad (u^2 + 2u + 2)(u - 1) > 0.$$

Le premier facteur est essentiellement positif, on doit donc avoir

$$u > 1 \qquad \text{ou} \qquad e^{-\varphi} > 1.$$

Donc

$\varphi > 0$, les radicaux sont imaginaires,
$\varphi < 0$, les radicaux sont réels.

A. Soit $\varphi < 0$, on a

$$2\xi = -e^{-\varphi} \pm \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{2}{1 + e^{-\varphi}}}, \qquad 2\eta = 0,$$

paroi plane. Pour $\varphi = -\infty$, on doit avoir $\xi = -\infty$, on prendra donc le radical avec le signe —. On en tire

$$2x = 1 + e^{-\varphi} + \pi\sqrt{2} - \int_0^\varphi \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{2}{1 + e^{-\varphi}}}\, d\varphi, \qquad 2y = 0.$$

Ces équations représentent la partie positive de l'axe des x depuis le point B jusqu'à l'infini. Pour $\varphi = 0$, on a $x = \mathrm{OB}$; la dérivée est négative; donc φ décroissant, x croît. On s'assurera, comme précédemment, qu'il croît indéfiniment.

B. Pour $\varphi > 0$, on a

$$2\xi = -e^{-\varphi}, \qquad 2\eta = \pm\sqrt{\frac{2}{1 + e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}$$

surface libre, car la pression y est constante. On doit prendre η négatif, c'est-à-dire le radical avec le signe —; de là

$$2x = 1 + e^{-\varphi} + \pi\sqrt{2}, \qquad 2y = -\int_0^\varphi \sqrt{\frac{2}{1 + e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\, d\varphi.$$

Forme de la surface libre. — Cherchons l'équation différentielle de la première partie de la surface libre, on a

$$2x = 1 - e^{-\varphi}, \qquad 2\,dy = -\sqrt{\frac{2}{1-e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi,$$

d'où

$$d\varphi = \frac{2\,dx}{1-2x};$$

on a donc pour l'équation cherchée

$$(1) \qquad dy = -\sqrt{\frac{1}{x} - (1-2x)^2}\,\frac{dx}{1-2x}.$$

Pour la seconde partie de la surface libre, on a

$$2x = 1 + e^{-\varphi} + \pi\sqrt{2}, \qquad 2\,dy = -\sqrt{\frac{2}{1+e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}\,d\varphi,$$

d'où

$$d\varphi = \frac{2\,dx}{1+\pi\sqrt{2}-2x};$$

on a pour l'équation différentielle

$$(2) \qquad dy = -\sqrt{\frac{2}{2x-\pi\sqrt{2}} - (1+\pi\sqrt{2}-2x)^2}\,\frac{dx}{1+\pi\sqrt{2}-2x}.$$

Si l'on pose dans cette équation (2)

$$x = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} + x',$$

on retrouve l'équation (1).

Ces deux courbes ont même forme; l'une passe par le point A, l'autre par le point B, enfin elles sont orientées en sens inverse; car dans la première $\frac{dy}{dx}$ est négatif, x étant inférieur à $\frac{1}{2}$; dans la seconde $\frac{dy}{dx}$ est positif.

Il suffit donc d'étudier l'équation différentielle (1). $\frac{dy}{dx}$ est nul pour les racines de l'équation

$$-f = 1 - x(1-2x)^2 \qquad \text{ou} \qquad f = 4x^3 - 4x^2 + x - 1 = 0,$$

ou

$$f = (4x^2+1)(x-1) = 0.$$

Comme x varie de 0 à $\frac{1}{2}$, le polynôme f n'est jamais nul dans l'intervalle considéré. Pour $x=0$, $\frac{dy}{dx}$ est égal à $-\infty$; pour $x=\frac{1}{2}$, $\frac{dy}{dx}=-\infty$. La dérivée part donc d'une valeur infinie, croît jusqu'en un certain point, puis décroît jusqu'à $-\infty$.

C'est ce qu'on vérifie encore en prenant la dérivée seconde

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3\lambda(x-\frac{1}{6})}{2x(1-2x)\sqrt{\frac{\lambda}{2}x - x^2(1-2x)^2}}.$$

Pour $x=\frac{1}{6}$ elle s'annule; le point correspondant est un point d'inflexion.

La forme générale de la surface libre est représentée dans la *fig.* 11.

La veine fluide est symétrique par rapport à la droite CD passant par le milieu de AB parce que, en réalité, cette veine fluide n'est pas soumise à la pesanteur, mais à une force égale et parallèle à la pesanteur d'un côté du plan CD et à une force égale à la pesanteur mais de sens contraire de l'autre côté de CD. C'est ce que la suite des calculs met en évidence. En effet, l'équation en D était

$$D^2 - F'(w)D + \frac{2}{\frac{g}{2}F(w)+1},$$

où l'on avait pris

$$F(w) = -e^{-w},$$

en posant

$$\theta^2(w) = F(w) + \frac{2k}{g} = 1 - e^{-w},$$

d'où

$$F(w) = -e^{-w}, \qquad \frac{2k}{g} = 1, \qquad \text{avec} \qquad w = \varphi + i\psi.$$

Pour $\psi = 0$, on a donc

$$(1)\qquad D^2 - e^{-\varphi}D + \frac{2}{-\frac{g}{2}e^{-\varphi}+1} = 0;$$

pour $\psi = \pi$,

$$D^2 + e^{-\varphi} D + \frac{2}{\frac{g}{2} e^{-\varphi} + 1} = 0. \tag{2}$$

On ramène (2) à (1) de la façon suivante :

1° Je change la direction positive de l'axe des x. Alors D est changé en $-$ D. En effet, on avait

$$x = \chi(w) + \chi(w - C), \qquad \text{d'où} \qquad dx = [\chi'(w) + \chi'(w - C)]\, dw;$$

donc, si x change de signe, dw ou $d\varphi$ conservant le sien, c'est que $\chi'(w) + \chi'(w - C)$ ou S change de signe. Quant à $P = \chi'(w)\chi'(w - C)$, il est positif, car $\frac{1}{P}$ représente, à un facteur positif constant près, le carré de la vitesse à la surface. Donc $\chi'(w)$ et $\chi'(w - C)$ ou les deux racines de (2) changent de signe et sont maintenant racines de

$$D^2 - e^{-\varphi} D + \frac{2}{\frac{g}{2} e^{-\varphi} + 1} = 0. \tag{3}$$

2° Si l'on change en plus la direction de la force g, c'est-à-dire si l'on change g en $-g$, (3) devient (1).

Ainsi la portion de la veine qui est d'un côté de CD n'est autre chose que la portion qui est de l'autre côté, après changement de la direction positive de l'axe des x et renversement de la pesanteur. Il peut, par suite, y avoir discontinuité le long de CD.

Comme la pesanteur est parallèle à Ox, ce mouvement sera réalisé en supposant que le liquide coule dans un canal. On ne change pas le mouvement, en effet, en remplaçant l'une des trajectoires par une paroi solide. En retournant alors la figure pour que la pesanteur agisse suivant la verticale on a un cas réalisable.

IX.

Étudions encore quelques propriétés du mouvement. Reprenons le second exemple, aucune force n'agissant sur le fluide.

Cherchons si dans le liquide, dans la veine fluide ou dans le réservoir, la pression peut être la même tout le long d'une trajectoire autre que la surface libre. Pour cela, je considère la trajectoire $\psi = \varepsilon$ infiniment voisine de la surface libre $\psi = 0$. Nous considérerons les puissances de ε, dont le degré est supérieur à deux, comme négligeables. On aura

$$D = e^{-\varphi}(1 - i\varepsilon) + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1 - 2i\varepsilon e^{-2\varphi}}$$

ou

$$D = e^{-\varphi}(1 - i\varepsilon) + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\left(1 - \frac{i\varepsilon e^{-2\varphi}}{e^{-2\varphi} - 1}\right) = \xi + i\eta.$$

1° $\varphi > 0$:

$$\xi + i\eta = e^{-\varphi} - i\varepsilon e^{-\varphi} + i\sqrt{1 - e^{-2\varphi}}\left(1 + \frac{i\varepsilon e^{-2\varphi}}{1 - e^{-2\varphi}}\right),$$

d'où

$$\xi = e^{-\varphi} - \varepsilon\frac{e^{-2\varphi}}{\sqrt{1 - e^{-2\varphi}}} = \frac{e^{-\varphi}}{\sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}\left(\sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \varepsilon e^{-\varphi}\right),$$

$$\eta = -\varepsilon e^{-\varphi} + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}.$$

Donc

$$\xi^2 + \eta^2 = \rho^2 = \left(\frac{\sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \varepsilon e^{-\varphi}}{\sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad \rho = 1 - \varepsilon\frac{e^{-\varphi}}{\sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}.$$

ρ, et par suite V et p, varient le long de la trajectoire, puisque ρ varie avec φ. De plus ρ n'est pas indépendant de ε et par suite varie d'une trajectoire à l'autre. Ainsi la pression n'est pas constante dans la veine fluide.

2° $\varphi < 0$, on a

$$\xi + i\eta = e^{-\varphi} - i\varepsilon e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - i\varepsilon\frac{e^{-2\varphi}}{\sqrt{e^{-2\varphi} - 1}},$$

d'où

$$\xi = e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1},$$

$$\eta = -\varepsilon e^{-\varphi} - \varepsilon\frac{e^{-2\varphi}}{\sqrt{e^{-2\varphi} - 1}} = -\frac{\varepsilon e^{-\varphi}}{\sqrt{e^{-2\varphi} - 1}}\left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\right),$$

$$\eta^2 + \xi^2 = \rho^2 = \left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\right)^2\left(1 + \frac{\varepsilon^2 e^{-2\varphi}}{e^{-2\varphi} - 1}\right),$$

$$\rho = \left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\right)\left[1 + \varepsilon^2\frac{e^{-2\varphi}}{2(e^{-2\varphi} - 1)}\right] = \rho_0 + \varepsilon^2\rho_1.$$

Ainsi la vitesse est la même à des écarts près de l'ordre de ε^2 sur les différentes trajectoires à l'intérieur du réservoir sur une courbe $\varphi = \text{const.}$, en appelant *intérieur* du réservoir l'espace compris entre les parois planes Ox', Bx et la courbe $\varphi = \text{const.}$ passant par O et B. La vitesse V varie donc avec une certaine lenteur, ainsi que la pression p, en ces différents points des courbes $\varphi = \text{const.}$ de l'intérieur du réservoir.

Faisons la même chose dans le quatrième exemple, le fluide étant soumis à la pesanteur. On a pour $\psi = \varepsilon$ (ε infiniment petit)

$$2D = 2\xi + 2i\eta = e^{-\varphi}(1 - i\varepsilon) + \sqrt{e^{-2\varphi}(1 - i\varepsilon)^2 - \frac{\lambda}{1 - e^{-\varphi} + i\varepsilon e^{-\varphi}}}.$$

Posons $1 - e^{-\varphi} = B$, on a

$$\frac{\lambda}{B + i\varepsilon e^{-\varphi}} = \frac{\lambda}{B} \times \frac{1}{1 + \frac{i\varepsilon e^{-\varphi}}{B}} = \frac{\lambda}{B}\left[1 + \frac{i\varepsilon e^{-\varphi}}{B} + \left(\frac{i\varepsilon e^{-\varphi}}{B}\right)^2 + \ldots\right].$$

En se bornant aux termes du premier ordre,

$$2D = e^{-\varphi} - i\varepsilon e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{\lambda}{B} - 2i\varepsilon e^{-2\varphi} - \frac{\lambda}{B}\,\frac{i\varepsilon e^{-\varphi}}{B}}.$$

Posons $A = e^{-2\varphi} + \dfrac{\lambda}{e^{-\varphi} - 1}$, il vient

$$\begin{aligned} 2D &= e^{-\varphi} - i\varepsilon e^{-\varphi} + \sqrt{A}\sqrt{1 - \frac{i\varepsilon}{A}\left(2e^{-2\varphi} + \frac{\lambda e^{-\varphi}}{B^2}\right)} \\ &= e^{-\varphi} - i\varepsilon e^{-\varphi} + \sqrt{A}\left[1 - \frac{i\varepsilon}{2A}\left(2e^{-2\varphi} + \frac{\lambda e^{-\varphi}}{B^2}\right)\right]. \end{aligned}$$

1° $\varphi < 0$. A est positif, $\sqrt{A}$ réel, d'où

$$\begin{aligned} \xi &= e^{-\varphi} + \sqrt{A}, \\ \eta &= -\frac{\varepsilon e^{-\varphi}}{2\sqrt{A}}\left(2\sqrt{A} + 2e^{-\varphi} + \frac{\lambda}{B^2}\right). \end{aligned}$$

Donc $\xi^2 + \eta^2$ est de la forme

$$M^2 + \varepsilon^2 N^2,$$

et, par suite, il en est de même de sa racine carrée; donc ρ varie lentement avec ε. Il en est de même de V son inverse.

2° $\varphi > 0$. A est négatif, $\sqrt{A}$ imaginaire; on a donc

$$\xi = e^{-\varphi} + \varepsilon e^{-\varphi}\left(2e^{-\varphi} + \frac{\lambda}{B^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{A}},$$
$$\eta = -\varepsilon e^{-\varphi} + \sqrt{A}.$$

Donc $\xi^2 + \eta^2$, et par suite ρ, contient ε au premier degré : V varie avec ε et φ.

X.

La méthode que l'on vient d'exposer dans les paragraphes précédents peut encore être appliquée à d'autres cas où le liquide obéit à l'action de forces extérieures autres que la force de la pesanteur.

On peut supposer, par exemple, que le liquide est soumis à l'action de forces admettant un potentiel et ne dépendant que de l'une des variables x ou y. On peut appliquer cette méthode au cas où toutes les molécules fluides subissent une attraction ou une répulsion émanant de l'axe $y'y$ et fonction seulement de x; ou bien une attraction ou une répulsion émanant de l'axe $x'x$ et fonction seulement de y.

Nous allons prendre pour exemple le cas où les molécules liquides sont soumises à une répulsion émanant de $y'y$ et proportionnelle à la distance; soit $8x$ l'expression de cette répulsion sur l'unité de masse ; on aura pour l'équation d'une surface libre

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2\right] = 4x^2 - C_1,$$

d'où, en se servant de ce que $w_1 = w - C$ et $\frac{p_0}{\rho} + C_1 = -k$,

$$-k + \frac{2}{\chi'(w)\chi'(w-C)} = [\chi(w) + \chi(w-C)]^2,$$

en conservant les mêmes notations que précédemment.

Posons

$$\chi'(w) + \chi'(w-C) = S(w),$$
$$\chi'(w) \times \chi'(w-C) = P(w),$$

on aura

$$\frac{2}{P(w)} = k + \left[\int S(w)\,dw\right]^2, \qquad \text{d'où} \qquad \int S(w)\,dw = \sqrt{\frac{2}{P(w)} - k},$$

ou, en posant

$$\frac{2}{P(w)} = R^2(w),$$

$$\int S(w)\,dw = \sqrt{R^2(w) - k}, \qquad \text{d'où} \qquad S(w) = \frac{R(w)\,R'(w)}{\sqrt{R^2(w) - k}}.$$

$\chi'(w)$ et $\chi'(w - C)$ sont donc racines de l'équation suivante du second degré

$$D^2 - \frac{R(w)\,R'(w)}{\sqrt{R^2(w) - k}}\,D + \frac{2}{R^2(w)} = 0,$$

d'où l'on tire

$$D = \frac{R(w)\,R'(w)}{2\sqrt{R^2(w) - k}} \pm \sqrt{\frac{R^2(w)\,R'^2(w)}{4[R^2(w) - k]} - \frac{8}{R^2(w)}},$$

ou

$$D = \frac{R(w)R'(w) \pm \dfrac{\sqrt{R^4(w)\,R'^2(w) - 32\,[R^2(w) - k]}}{R(w)}}{2\sqrt{R^2(w) - k}}.$$

Si, de plus, $R(w)$ admet $-C$ pour demi-période, c'est-à-dire change de signe quand on change w en $w - C$, les racines seront permutées entre elles par ce changement de w en $w - C$, car $R(w)\,R'(w)$ ne changera pas de signe, $R^2(w)$ non plus, mais $R(w)$ en changera.

On peut encore faire le calcul de la façon suivante.

On a

$$\frac{2}{P(w)} = k + \left[\int S(w)\,dw\right]^2.$$

Soit

$$S(w) = F'(w),$$

il vient

$$P(w) = \frac{2}{k + F^2(w)}.$$

L'équation du second degré sera

$$D^2 - F'(w)\,D + \frac{2}{F^2(w) + k} = 0.$$

On en tire

$$2D = F'(w) \pm \sqrt{F'^2(w) - \frac{8}{F^2(w)+k}}.$$

Posons

$$F^2(w) + k = N^2(w),$$

on aura aussi

$$F(w) = \sqrt{N^2(w) - k} \qquad \text{et} \qquad F'(w) = \frac{N(w)N'(w)}{\sqrt{N^2(w)-k}},$$

d'où

$$2D = \frac{N(w)N'(w) \pm \dfrac{\sqrt{N^4(w)N'^2(w) - 8[N^2(w)-k]}}{N(w)}}{\sqrt{N^2(w)-k}},$$

qui n'est autre chose que la formule déjà obtenue où l'on a remplacé $R(w)$ par $N(w)$. Si donc $N(w)$ admet $-C$ pour demi-période, c'est-à-dire change de signe quand on permute w en $w-C$, les deux racines se permutent aussi.

Or $D = \frac{dx + i\,dy}{dw}$; en intégrant et en séparant parties réelles et imaginaires, on pourra étudier, comme on l'a vu plus haut, le domaine de z au moyen de celui de w.

On procéderait d'une façon analogue pour une force attractive ou répulsive émanant de yy' et de la forme kx^n. Plus généralement on pourra suivre cette marche pour une force dont l'expression sera $f(x)$.

Si, au lieu d'une fonction de x, la force était une fonction de y, on pourrait procéder d'une façon analogue; car

$$2iy = \chi(w) - \chi(w - C);$$

on poserait

$$\chi'(w) - \chi'(w-C) = \Delta(w), \qquad \chi'(w)\chi'(w-C) = P(w)$$

et l'on serait ramené à former une équation du second degré connaissant la différence des deux racines et leur produit ou bien on prendrait l'intégrale $f(y+ix) + f(y-ix)$ et l'on procéderait comme dans le cas où la force est une fonction de x.

XI.

On peut pousser encore plus loin l'application du procédé. Supposons que la force soit une force centrale. Pour que le mouvement soit symétrique, le centre d'attraction doit être sur l'axe de symétrie; mais on pourra le supposer plus généralement n'importe où.

Supposons d'abord que ce centre soit à l'origine des coordonnées. La fonction des forces sera alors une fonction de x^2+y^2. Or, pour la surface libre, on a

$$2x = \chi(w) + \chi(w-C),$$
$$2iy = \chi(w) - \chi(w-C),$$

d'où

$$4(x^2+y^2) = 4\chi(w)\chi(w-C).$$

Posons

$$\chi(w)\chi(w-C) = \pi(w),$$
$$\chi'(w)\chi'(w-C) = P(w).$$

En prenant la dérivée logarithmique de la première, il vient

$$\frac{\chi'(w)}{\chi(w)} + \frac{\chi'(w-C)}{\chi(w-C)} = \frac{\pi'(w)}{\pi(w)}.$$

Or on a

$$\frac{\chi'(w)}{\chi(w)} \times \frac{\chi'(w-C)}{\chi(w-C)} = \frac{P(w)}{\pi(w)};$$

donc $\frac{\chi'(w)}{\chi(w)}$ et $\frac{\chi'(w-C)}{\chi(w-C)}$ sont les deux racines de l'équation du second degré

$$D^2 - \frac{\pi'(w)}{\pi(w)} D + \frac{P(w)}{\pi(w)} = 0.$$

Supposons, par exemple, que la force soit proportionnelle à la distance et égale à $2r$, où $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On aura pour la surface libre

$$\frac{p_0}{\rho} + C_1 + \frac{2}{\chi'(w)\chi'(w-C)} = r^2 = \chi(w)\chi(w-C)$$

ou, en posant toujours $\frac{p_0}{\rho} + C_1 = -k$,

$$-k + \frac{2}{P(w)} = \pi(w),$$

d'où

$$P(w) = \frac{2}{\pi(w) + k}.$$

L'équation du second degré devient

$$\pi(w) D^2 - \pi'(w) D + \frac{2}{\pi(w) + k} = 0.$$

De là on tire, pour les deux racines,

$$2D = \frac{\pi'(w)}{\pi(w)} \pm \sqrt{\frac{\pi'^2(w)}{\pi^2(w)} - \frac{8}{\pi(w)[\pi(w) + k]}}.$$

Supposons, de plus, qu'elles doivent se permuter quand on change w en $w - C$. Posons

$$\frac{2}{P(w)} = R^2(w),$$

on aura

$$\pi(w) + k = R^2(w), \qquad \pi'(w) = 2R(w) R'(w).$$

L'équation deviendra

$$[R^2(w) - k] D^2 - 2R(w) R'(w) D + \frac{2}{R^2(w)} = 0,$$

et l'on en tire

$$D = \frac{R(w) R'(w) \pm \dfrac{\sqrt{R^4(w) R'^2(w) - 2[R^2(w) - k]}}{R(w)}}{R^2(w) - k}.$$

Si donc $R(w)$ est une fonction périodique admettant une demi-période $-C$, c'est-à-dire changeant de signe quand on change w en $w - C$, les racines seront permutées entre elles par ce changement, car $R^2(w)$ ni $R(w) R'(w)$ ne changeront, mais $R(w)$ changera de signe.

Ces valeurs de D représentent $\frac{\chi'(w)}{\chi(w)}$ et $\frac{\chi'(w-C)}{\chi(w-C)}$ et, en intégrant par rapport à w, on aura $L\chi(w)$ et $L\chi(w - C)$, d'où, en passant aux exponentielles, $\chi(w)$ et $\chi(w - C)$: de là, les coordonnées x et y d'un point quelconque de la surface libre en fonction du paramètre w. On se donnera chaque fois la fonction $R(w)$: de là également z en fonction de w et l'étude du domaine de z à l'aide de celui de w.

On ramène le cas où le centre d'attraction ou de répulsion n'est pas au point O, origine des coordonnées, au cas où il est à cette origine, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes. Les calculs subsistent, à condition de remplacer z par $x - a + i(y - b)$ et z_1 par $x - a - i(y - b)$.

Il n'y a donc que des constantes de changées; la marche générale subsiste.

Il est clair qu'il y aura d'autres cas encore où, la fonction des forces étant $f(x, y)$, on pourra aller jusqu'au bout à l'aide de la méthode indiquée ci-dessus. Enfin on pourrait aborder le cas où le mouvement n'est pas permanent. Bornons-nous, dans ce Travail, à ces cas principaux.

XII.

Supposons maintenant que les fonctions f et f_1 ne soient pas les mêmes. Pour que $\lambda = f(z) + f_1(z_1)$ soit réel, ainsi que ses dérivées, il suffit que f et f_1 soient des fonctions conjuguées de la même variable. Car si $f(u) \equiv M(u) + iN(u)$ et $f_1(u) \equiv M(u) - iN(u)$, $M(u)$ et $N(u)$ étant des fonctions réelles de u, $f(z)$ et $f_1(z_1)$ seront aussi conjuguées; leur somme sera donc réelle, ainsi que les dérivées partielles de cette somme : c'est ce que nous supposerons maintenant. Si l'on suppose que $N(u)$ est identiquement nulle, on retrouve le cas traité jusqu'à présent.

La marche reste la même. Posons

$$w = f(z), \qquad w_1 = f_1(z_1),$$

d'où

$$z = \chi(w), \qquad z_1 = \chi_1(w_1), \qquad f'_z(z) = \frac{1}{\chi'_w(w)}, \qquad f'_{1.z_1}(z_1) = \frac{1}{\chi'_{w_1}(w_1)}.$$

Les trajectoires ont toujours pour équation $w = w_1 + C'$. Les coordonnées (x, y) d'un point de la surface libre, dans le cas, par exemple, de la pesanteur, devront satisfaire au système d'équations suivant

$$(1)\quad \begin{cases} x+iy=z, & w=w_1+C, \\ x-iy=z_1, & -k+\dfrac{2}{\chi'(w)\chi_1'(w_1)}=\dfrac{g}{2}[\chi(w)+\chi_1(w_1)]. \end{cases}$$

On aurait un système analogue en prenant pour variables $z'=y+ix$ et $z_1'=y-ix$. Occupons-nous seulement du système d'équations précédent; les résultats du second cas se déduiront de ceux du premier en changeant x en y et y en x.

Portons la valeur $w_1=w-C$ dans la quatrième équation et posons

$$\chi'(w)+\chi_1'(w-C)=S'(w),$$
$$\chi'(w).\chi_1'(w-C)=P(w).$$

On aura

$$-k+\frac{2}{P(w)}=\frac{g}{2}S(w),\qquad \text{d'où}\qquad P(w)=\frac{2}{\dfrac{g}{2}S(w)+k},$$

et $\chi'(w)$ et $\chi_1'(w-C)$ sont les deux racines de l'équation du second degré

$$D^2-S'(w)D+\frac{2}{\dfrac{g}{2}S(w)+k}=0.$$

S'il n'y a pas de pesanteur, $g=0$, et l'équation devient

$$D^2-S'(w)D+\frac{2}{k}=0.$$

On tire de la première

$$2D'=2\chi'(w)\qquad =S'(w)+\sqrt{S'^2(w)-\frac{8}{\dfrac{g}{2}S(w)+k}},$$

$$2D''=2\chi_1'(w-C)=S'(w)-\sqrt{S'^2(w)-\frac{8}{\dfrac{g}{2}S(w)+k}}.$$

Il n'y a pas besoin ici que les racines se permutent quand on change w en $w-C$.

En intégrant les deux membres par rapport à w, on aura

$$2\chi(w) \qquad = S(w) + \int\sqrt{S'^2(w) - \frac{8}{\frac{g}{2}S(w)+k}} + \alpha,$$

$$2\chi_1(w - C) = S(w) - \int\sqrt{S'^2(w) - \frac{8}{\frac{g}{2}S(w)+k}} + \beta.$$

En portant ces valeurs dans la relation quatrième du système d'équations (1), on a

$$-k + \frac{g}{2}S(w) + k = \frac{g}{2}\left[S(w) + \frac{\alpha+\beta}{2}\right],$$

d'où

$$\alpha + \beta = 0 \qquad \text{ou} \qquad \beta = -\alpha.$$

Pour un point de la surface libre de la veine fluide, on a

$$z = x + iy = \chi(w) \qquad \text{et} \qquad z_1 = x - iy = \chi_1(w - C),$$

d'où

$$2x = \chi(w) + \chi_1(w - C), \qquad 2iy = \chi(w) - \chi_1(w - C).$$

On aura donc pour les coordonnées d'un point de la surface libre

$$2x = S(w), \qquad 2iy = \int\sqrt{S'^2(w) - \frac{8}{\frac{g}{2}S(w)+k}} + \alpha.$$

Dans le second cas, on aurait

$$2y = S(w), \qquad 2ix = \int\sqrt{S'^2(w) - \frac{8}{\frac{g}{2}S(w)+k}} + \alpha.$$

Comme nous l'avons vu (§ VIII), on peut ramener l'une des surfaces libres à avoir pour équation

$$w = w_1.$$

Supposons qu'il en soit ainsi. On voit que $\chi'(w)$ et $\chi'_1(w_1)$ sont conjuguées; il en est donc de même de $\chi(w)$ et de $\chi_1(w_1)$, donc de leurs inverses $f(z)$ et $f_1(z_1)$; donc λ est réel, ainsi que ses dérivées : nous sommes bien dans le cas indiqué.

De la relation

$$2z = S(w) + \int \sqrt{S'^2(w) - \frac{8}{\frac{g}{2} S(w) + k}} + \alpha$$

on déduira le domaine de z en fonction de celui de w.

Nous ne prendrons que des exemples très simples.

Premier exemple. — Soit $S'(w) = 0$, $g = 0$. L'équation du second degré devient, en prenant $k = 2$,

$$D^2 + 1 = 0,$$

d'où

$$D' = \chi'(w) = i,$$
$$D'' = \chi'_1(w_1) = -i,$$
$$x + iy = \chi(w) = iw + \alpha,$$
$$x - iy = \chi_1(w_1) = -iw - \alpha.$$

La surface libre est donc la droite $x = 0$. En changeant x en y et y en x, on aurait $y = 0$.

On peut poser $w = \varphi + i\psi$, il vient

$$z = x + iy = \chi(w) = i(\varphi + i\psi),$$

d'où

$$x = -\psi, \qquad y = \varphi.$$

Pour les trajectoires, on a

$$\psi = \text{const.}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \text{const.}$$

Si l'on supposait que l'on a $S'(w) = 0$, $S(w) = \text{const.}$, $g \neq 0$, on arriverait à des résultats analogues.

Deuxième exemple. — Soit $k = 2$, $g = 0$, $S'(w) = \frac{2}{\sqrt{w}}$. L'équation du second degré devient

$$D^2 - \frac{2}{\sqrt{w}} D + 1 = 0,$$

d'où

$$D' = \frac{1}{\sqrt{w}} + \sqrt{\frac{1}{w} - 1} = \chi'(w),$$
$$D'' = \frac{1}{\sqrt{w}} - \sqrt{\frac{1}{w} - 1} = \chi'_1(w);$$

on en déduit, en intégrant,

$$x + iy = 2\sqrt{w} + w\sqrt{\frac{1}{w} - 1} + \arcsin w,$$

$$x - iy = 2\sqrt{w} - w\sqrt{\frac{1}{w} - 1} - \arcsin w.$$

On a donc, pour la surface libre,

$$x = 2\sqrt{w},$$

$$iy = w\sqrt{\frac{1}{w} - 1} + \arcsin\sqrt{w},$$

ou

$$x = 2\sqrt{w},$$

$$y = -w\sqrt{1 - \frac{1}{w}} - i\arcsin\sqrt{w} = -w\sqrt{1 - \frac{1}{w}} - \mathrm{L}(\sqrt{w} + \sqrt{w - 1}).$$

Si l'on change le radical $\sqrt{w}$ de signe, on obtient une seconde surface libre, symétrique de celle-là.

On peut encore écrire

$$z = x + iy = 2\sqrt{w} + w\sqrt{\frac{1}{w} - 1} + \arcsin\sqrt{w},$$

l'arcsinus s'annulant pour $w = 0$, et poser $w = \varphi + i\psi$.

1° Soit $\psi = 0$, $0 < \varphi < 1$. On a

$$x + iy = 2\sqrt{\varphi} + \varphi\sqrt{\frac{1}{\varphi} - 1} + \arcsin\sqrt{\varphi},$$

d'où

$$x = 2\sqrt{\varphi} + \varphi\sqrt{\frac{1}{\varphi} - 1} + \arcsin\sqrt{\varphi},$$

$$y = 0.$$

x varie de 0 à $2 + \frac{\pi}{2}$ et, en prenant les radicaux avec le signe $-$, de 0 à $-2 - \frac{\pi}{2}$. C'est une portion de l'axe des x : c'est une paroi solide.

2° Soit $\psi = 0$, $\varphi > 1$. Alors $\arcsin\sqrt{\varphi}$, φ étant supérieur à 1, est égal à $i\,\mathrm{L}(\sqrt{\varphi}+\sqrt{\varphi-1})+\frac{\pi}{2}$, et l'on a

$$x+iy=2\sqrt{\varphi}+i\varphi\sqrt{1-\frac{1}{\varphi}}+i\,\mathrm{L}(\sqrt{\varphi}+\sqrt{\varphi-1})+\frac{\pi}{2},$$

d'où

$$x=2\sqrt{\varphi}+\frac{\pi}{2},$$

$$y=\varphi\sqrt{1-\frac{1}{\varphi}}+\mathrm{L}(\sqrt{\varphi}+\sqrt{\varphi-1}),$$

surface libre déjà trouvée.

XIII.

En prenant la fonction $\mathrm{S}(w)$ au hasard, on court la chance de ne pas tomber sur un cas pratique. Mais on peut, du moins théoriquement, déterminer $\mathrm{S}(w)$ de façon que la surface libre ait telle forme que l'on veut

$$y=f(x), \tag{1}$$

par exemple. Il suffit d'éliminer y et x entre cette relation (1) et les équations de la surface libre

$$2x=\theta^2(w)-\frac{2k}{g}, \qquad y=\int\frac{\sqrt{\lambda-\theta^4(w)\,\theta'^2(w)}}{\theta(w)}\,dw,$$

en posant

$$\theta^2(w)=\mathrm{S}(w)+\frac{2k}{g};$$

ce qui donne l'équation différentielle en θ

$$\frac{\sqrt{\lambda-\theta^4(w)\,\theta'^2(w)}}{\theta(w)}=f'\left[\frac{\theta^2(w)}{2}-\frac{k}{g}\right]\theta(w)\,\theta'(w),$$

d'où l'on tire θ en fonction de w. On voit qu'en prenant w pour fonction, w est donnée par une quadrature en fonction de θ; on en tirera ensuite θ en fonction de w.

XIV.

Dans le cas où les fonctions f et f_1 sont les mêmes, il peut y avoir symétrie par rapport à l'un des axes de coordonnées ou par rapport à une parallèle à l'un de ces axes; car soit, d'une façon générale,

$$\lambda = f[x-a+i(y-b)] + f[x-a-i(y-b)],$$

$$V_x = \frac{\partial\lambda}{\partial x} = f'_z[x-a+i(y-b)] + f'_z[x-a-i(y-b)],$$

$$V_y = \frac{\partial\lambda}{\partial y} = i\{f'_z[x-a+i(y-b)] - f'_z[x-a-i(y-b)]\};$$

si l'on pose d'abord $y = b+h$ et ensuite $y = b-h$, $x = x_0$, pour ces deux points V_x est le même et les valeurs de V_y sont égales et de signes contraires. C'est un des caractères d'un mouvement symétrique par rapport à la droite dont l'équation est $y-b=0$.

En prenant de même

$$\lambda' = f[y-b+i(x-a)] + f[y-b-i(x-a)],$$

on verrait qu'un pareil mouvement peut être symétrique par rapport à la droite dont l'équation est $x-a=0$.

Mais ces conditions nécessaires ne sont pas toujours suffisantes, pour que le mouvement soit symétrique. Il faut encore voir ce qui se passe quand on change, dans le premier cas, $x-a$ en $-(x-a)$ et, dans le second, $y-b$ en $-(y-b)$. Nous allons donner un exemple où ces conditions nécessaires ne suffisent pas.

Remarquons encore auparavant que, lorsque f et f_1 ne représentent pas la même fonction, le mouvement n'est pas, en général, symétrique par rapport à un axe. Toutefois il peut arriver, comme dans l'exemple II précédent, que les équations de la surface libre renferment des radicaux de telle manière que, en changeant convenablement leurs signes, on obtienne une seconde surface libre formant avec la première un ensemble symétrique.

Exemple. — Prenons $g=0$, $S'(w) = 2\sin w$, $k=2$. C'est un cas particulier du premier exemple du § VII; dans ce cas nous trouvions une surface libre circulaire. L'équation du second degré est

$$D^2 - 2D\sin w + 1 = 0.$$

On en tire

$$\chi'(w) = D' = \sin w + \sqrt{\sin^2 w - 1} = \sin w + i\cos w,$$

$$\chi'_1(w) = D'' = \sin w - \sqrt{\sin^2 w - 1} = \sin w - i\cos w,$$

d'où, en intégrant,

$$x + iy = \chi(w) = -\cos w + i\sin w,$$
$$x - iy = \chi_1(w) = -\cos w - i\sin w,$$

en supposant nulles les constantes d'intégration. On en déduit, pour les coordonnées d'un point de la surface libre,

$$x = -\cos w,$$
$$y = \sin w,$$

d'où $x^2 + y^2 = 1$. Nous retrouvons bien une surface libre circulaire. On peut aussi écrire

$$z = -\cos w + i\sin w = -e^{-iw} = -e^{-i(\varphi+i\psi)},$$

d'où

$$x + iy = -e^{-i\varphi+\psi} = -e^{+\psi}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$
$$x = -e^{+\psi}\cos\varphi,$$
$$y = e^{+\psi}\sin\varphi.$$

Pour $\psi =$ const., on obtient les trajectoires : ce sont

$$x^2 + y^2 = e^{+2\psi};$$

les trajectoires, et en particulier la surface libre, sont donc circulaires.

Calculons les éléments du mouvement. On a

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{y}{x}, \qquad \frac{\lambda}{2} = \varphi = \operatorname{arc\,tang}\left(-\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{+y}{x^2+y^2} = +\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+iy} - \frac{1}{x-iy}\right),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+iy} + \frac{1}{x-iy}\right).$$

On voit que la vitesse parallèle à Ox change de signe, quand on change y en $-y$; la vitesse parallèle à Oy change de signe quand on change x en $-x$. La vitesse parallèle à Ox a le signe de $+y$: positive du côté de Ox où se trouve les y positifs, négative de l'autre côté. La vitesse parallèle à Oy a le signe de $-x$: positive du côté des x négatifs, négative du côté opposé. On a donc un mouvement de rotation circulaire dans le sens négatif.

On aura

$$V^2 = \frac{4}{x^2+y^2} \quad \text{ou} \quad V = \frac{2}{r},$$

r étant le rayon vecteur du point considéré du fluide. On en déduit, pour la pression, la formule

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + 2\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right),$$

$r = R$ étant l'équation de la surface libre; r croîtra de R jusqu'à $+\infty$.

On a donc affaire à un liquide tourbillonnant autour d'un espace à la pression p_0. On voit que la vitesse en un point de ce tourbillon est donnée par la formule

$$V = \frac{2}{r}.$$

Cette loi a été indiquée, pour les tourbillons accompagnant l'écoulement par un orifice, par Léonard de Vinci et vérifiée par Venturi (*Essai sur les œuvres physico-mathématiques de Léonard de Vinci* ou *Recherches sur la communication latérale du mouvement dans les fluides*). M. Boussinesq a donné, dans son *Essai sur la théorie des eaux courantes*, la théorie rationnelle complète de ces tourbillons.

XV.

Il est à peine besoin de faire remarquer que les §§ X et suivants subsistent dans le cas où les fonctions f et f_1 sont fonctions conjuguées d'une même variable. Il n'est plus nécessaire dans ce cas que les racines se permutent : la fonction arbitraire peut donc être quelconque.