RIQUIER.

De l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 65-86
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__65_0>

DE

L'EXISTENCE DES INTÉGRALES

DANS UN

SYSTÈME DIFFÉRENTIEL QUELCONQUE,

PAR M. RIQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN.

Un très petit nombre d'auteurs se sont occupés, jusqu'à présent, de l'existence des intégrales dans un système différentiel impliquant un nombre quelconque de fonctions inconnues et de variables indépendantes. Les plus simples de tous sont les systèmes complètement intégrables d'équations différentielles totales du premier ordre : ils ont été étudiés par Bouquet et M. Mayer dans des travaux bien connus de tous les géomètres (1). En ce qui concerne les systèmes partiels du même ordre, Cauchy (2), M. Darboux (3), Mme de Kowalevsky (4), M. König (5), MM. Méray et Riquier (6), M. Bourlet (7), ont étudié

(1) BOUQUET, *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. III, p. 265, 1872; A. MAYER, *Mathematische Annalen*, t. V, p. 448, et *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 1re série, t. XI.

(2) CAUCHY, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XIV, p. 1020; t. XV, p. 44, 85 et 131; t. XVI, p. 572.

(3) G. DARBOUX, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 101 et 317.

(4) SOPHIE VON KOWALEVSKY, *Journal de Crelle*, t. 80, p. 1.

(5) J. KÖNIG, *Ueber die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Functionen* (*Mathematische Annalen*, t. XXIII).

(6) MÉRAY et RIQUIER, *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (*Annales de l'École Normale supérieure*, janvier, février et mars 1890).

(7) BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (Thèse, avril 1891).

successivement des types de plus en plus généraux, et M. Bourlet, le dernier en date de ces divers auteurs, a pu, dans une thèse de doctorat, réduire un système différentiel quelconque à une forme du premier ordre assurant la convergence des développements de ses intégrales. L'introduction de cette forme, bien qu'elle constitue un progrès sur les résultats antérieurs, est pourtant loin de résoudre la question, et tout dépend à cet égard de la découverte d'une forme canonique qui soit en outre *complètement intégrable*.

Le problème est assurément compliqué, et, il y a quelques mois à peine, de profonds géomètres inclinaient à croire qu'il était impossible, dans l'état actuel de la Science, d'affirmer l'existence générale d'une pareille forme ([1]). Il n'en est rien cependant : avant que j'eusse connaissance de la thèse de M. Bourlet, avant même qu'elle fût publiée, j'étais déjà en possession d'une forme beaucoup plus générale que la sienne ([2]), et j'ai pu dernièrement effectuer la réduction d'un système quelconque à un système complètement intégrable, d'ordre égal ou supérieur à 1, et présentant, avec certaines particularités, la forme entière par rapport aux dérivées des fonctions inconnues ([3]). Le degré de généralité des intégrales générales, immédiatement connu dans les systèmes de cette dernière sorte, se trouve donc, au moins en théorie, fixé avec une entière précision dans un système quelconque.

Ces résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 28 mars 1892, et leur exposition détaillée constitue l'objet du présent Mémoire.

Systèmes harmoniques.

1. Désignant par

$$x,\ y,\ \ldots \tag{1}$$

les variables indépendantes, et par

$$u,\ v,\ \ldots \tag{2}$$

([1]) *Voir* la *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, numéro du 30 mai 1891, p. 338.

([2]) *Voir* la note de la page 68.

([3]) Les particularités dont il s'agit sont de nature telle, que, lorsque le système est par hasard du premier ordre, il est en même temps linéaire.

les fonctions inconnues d'un système différentiel quelconque, faisons correspondre à chacune des quantités (1), (2) p entiers, positifs, nuls ou négatifs, que nous nommerons respectivement *cote première*, *cote seconde*, ..., *cote* $p^{\text{ième}}$ de cette quantité. Considérant ensuite une dérivée quelconque de l'une des fonctions inconnues, et désignant par q un terme pris à volonté dans la suite $1, 2, \ldots, p$, nommons *cote* $q^{\text{ième}}$ de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote $q^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue les cotes homologues de toutes les variables de différentiation, distinctes ou non.

Cela étant, le système différentiel proposé sera dit *harmonique*, si, moyennant un choix convenable du nombre p et des cotes attribuées à $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, il remplit à la fois les diverses conditions suivantes :

1° Chacune des équations données a pour premier membre une certaine dérivée de quelque fonction inconnue, et les seconds membres de ces mêmes équations, si l'on y considère pour un instant $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et les diverses dérivées de $u, v, \ldots$ qui y figurent, comme autant de variables indépendantes distinctes, sont olotropes dans quelque système de cercles [1].

2° Les diverses dérivées des fonctions inconnues qui figurent dans le second membre d'une équation quelconque ont des ordres au plus égaux à celui du premier membre correspondant. En outre, si l'on désigne par $c_1, c_2, \ldots, c_p$ les cotes du premier membre, et par $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ celles d'une dérivée quelconque d'ordre égal figurant dans le second, les différences

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \quad \ldots, \quad c_p - c'_p$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive.

3° Aucun des premiers membres ni aucune de leurs dérivées ne

(1) La dénomination d'*olotrope* a été employée et définie pour la première fois par M. Méray, dans son *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale*; le lecteur pourra consulter à ce sujet mon Mémoire *Sur les principes de la théorie générale des fonctions* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1891, p. 59, 60, 72 et 84).

figure dans le second membre d'une équation donnée quelle qu'elle soit ([1]).

2. Étant donné un système harmonique, nous dirons que les fonctions

$$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

constituent pour lui un groupe d'*intégrales ordinaires*, si elles remplissent à la fois les deux conditions suivantes : 1° les fonctions $U(x, y, \ldots)$, $V(x, y, \ldots)$, ... sont olotropes à l'intérieur de quelque système de cercles, et les valeurs qu'elles acquièrent entre ces limites, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures aux cercles d'olotropie des seconds membres; 2° la substitution de $U(x, y, \ldots)$, $V(x, y, \ldots)$, ... à $u, v, \ldots$,

---

([1]) Les systèmes que j'appelle *harmoniques* renferment, comme cas particulier, les systèmes canoniques de M. Bourlet, dont voici la définition :

« Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaire, » entre m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, résolu » par rapport à un certain nombre de dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \psi_{ik},$$

» nous dirons que ce système est mis sous forme *canonique*, ou, plus brièvement, est *canonique*, si les fonctions ψ_{ik} de $x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m$ et des dérivées de u_1, » $u_2, \ldots, u_m$ (qui contiennent d'ailleurs linéairement ces dérivées) satisfont aux condi- » tions suivantes : 1° ψ_{ik} ne contient que des dérivées par rapport aux variables x_h dont » l'indice h est *égal ou supérieur à* k; 2° si une dérivée $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ d'une fonction u_j par rapport à » la variable x_k figure dans ψ_{ik}, l'indice j de cette fonction est *supérieur à* i. » (*Voir* la Thèse de M. Bourlet, p. 27.)

Considérons, en effet, un système linéaire du premier ordre résolu par rapport à un certain nombre de dérivées; attribuons-y à chacune des variables indépendantes x_1 $x_2, \ldots, x_n$ une cote première égale à son indice changé de signe et une cote seconde nulle, puis, inversement, à chacune des fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_m$ une cote première nulle et une cote seconde égale à son indice changé de signe. Il suffit alors, pour retomber sur le type canonique de M. Bourlet, de supposer que chacune des dérivées figurant dans le second membre d'une équation quelconque du système possède, soit une cote première inférieure à celle du premier membre correspondant, soit une cote première égale avec une cote seconde inférieure. Or, une telle hypothèse entraine évidemment la nature harmonique du système.

opérée entre les mêmes limites, transforme en identités les diverses équations du système.

La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations du système en transforme tous les seconds membres en des fonctions composées, habituellement différentielles, des variables, des intégrales et de certaines de leurs dérivées. D'après la définition même des intégrales ordinaires, et entre les limites assignées par cette définition, les règles établies pour les fonctions composées sont applicables aux seconds membres dont il s'agit, et l'*on peut*, en conséquence, *différentier indéfiniment les relations du système*. En adjoignant à ces dernières toutes celles qui s'en déduisent ainsi par différentiations, on obtient un groupe illimité de relations, dont la considération permet de partager en deux grandes catégories les dérivées de tous ordres des diverses fonctions inconnues : parmi ces dérivées, les unes, que nous nommerons *principales*, figurent au moins une fois dans les premiers membres des relations considérées; les autres, que nous nommerons *paramétriques*, n'y figurent jamais.

Pour abréger, nous nommerons *primitives* les relations dont il s'agit, et aussi les diverses expressions qu'elles fournissent pour les dérivées principales des intégrales. Chaque dérivée principale possède donc au moins une expression primitive, et presque toujours plusieurs (1).

3. *Les relations primitives d'un système harmonique donné peuvent se partager en groupes se succédant suivant une loi telle, que les seconds membres d'un groupe quelconque ne contiennent, outre les variables indépendantes, les fonctions inconnues et certaines dérivées paramétriques, que des dérivées principales figurant dans les premiers membres des groupes antérieurs* (en particulier, les seconds membres du premier groupe ne contiennent aucune dérivée principale).

(1) Dans la suite du présent Mémoire, j'aurai constamment à me servir des locutions : *intégrales ordinaires, dérivées principales, dérivées paramétriques, relations* et *expressions primitives, relations* et *expressions ultimes*. Ces locutions se trouvent déjà employées, à propos de certains systèmes du premier ordre, dans un Mémoire de MM. Méray et Riquier ayant pour titre : *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles*. Le lecteur pourra comparer les nos 2 à 8 du présent Mémoire aux passages analogues du Mémoire dont il s'agit (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1890, p. 24 à 27 et 33 à 38).

I. *Toute relation primitive remplit la seconde des conditions énoncées au* n° 1.

Soit

$$\delta = f(\ldots, \delta', \ldots) \tag{3}$$

une équation prise à volonté parmi celles du système donné, et dans laquelle δ, δ' désignent deux dérivées d'ordre égal; soient en outre

$$\begin{matrix} c_1, & c_2, & \ldots, & c_p, \\ c'_1, & c'_2, & \ldots, & c'_p \end{matrix}$$

les cotes respectives des dérivées δ, δ'; enfin x l'une quelconque des variables indépendantes, et $g_1, g_2, \ldots, g_p$ les cotes de cette variable. La relation déduite de (3) par une différentiation relative à x a pour premier membre $\frac{d\delta}{dx}$, et ne contient évidemment dans son second membre que des dérivées d'ordre au plus égal. Les dérivées $\frac{d\delta}{dx}$, $\frac{d\delta'}{dx}$ ont d'ailleurs pour cotes respectives

$$\begin{matrix} c_1 + g_1, & c_2 + g_2, & \ldots, & c_p + g_p, \\ c'_1 + g_1, & c'_2 + g_2, & \ldots, & c'_p + g_p, \end{matrix}$$

et les différences

$$(c_1 + g_1) - (c'_1 + g_1), \quad (c_2 + g_2) - (c'_2 + g_2), \quad \ldots, \quad (c_p + g_p) - (c'_p + g_p)$$

sont respectivement égales à

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \quad \ldots, \quad c_p - c'_p;$$

en vertu de l'hypothèse, elles ne sont donc pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive; autrement dit, la seconde des conditions énoncées au n° 1 ne cesse pas d'être satisfaite après une première différentiation exécutée sur une équation quelconque du système donné. En vertu du même raisonnement, appliqué à la relation résultante, elle ne cesse pas de l'être après une seconde, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des différentiations.

II. On partagera d'abord les relations primitives en groupes d'après les ordres de leurs premiers membres, et l'on rangera ces groupes à la suite les uns des autres de telle sorte que, dans le passage d'un groupe au suivant, l'ordre des premiers membres aille toujours en croissant; plus brièvement, on partagera les relations primitives en groupes d'après les ordres croissants de leurs premiers membres. Les relations de chaque groupe seront ensuite, toutes les fois qu'il y aura lieu, partagées en groupes partiels d'après les cotes premières croissantes de leurs premiers membres; puis, dans le groupement résultant, les relations de chaque groupe en groupes partiels d'après les cotes secondes croissantes de leurs premiers membres; et ainsi jusqu'à épuisement des p cotes.

Cela étant, il résulte immédiatement de l'alinéa I que la condition formulée par notre énoncé général se trouve satisfaite dans l'un quelconque des groupes définitifs dont nous venons d'expliquer la formation.

4. Étant donné un système harmonique, nous nommerons désormais *classe* d'une dérivée principale le rang occupé, dans la suite des groupes définitifs formés ci-dessus (3, II), par celui où elle figure comme premier membre. La *classe* d'une relation primitive sera celle de son premier membre.

Cela posé, un mécanisme très simple, appliqué aux relations primitives d'un système harmonique, permet, comme nous allons le voir, d'en déduire, pour les dérivées principales des classes successives, certaines expressions dépendant exclusivement des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques.

Désignons, en effet, par $\mathfrak{P}_1$ ou par $\mathfrak{U}_1$ indifféremment l'ensemble des relations primitives de première classe, et par

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \quad \mathfrak{P}_3, \quad \ldots$$

les groupes respectivement formés avec les relations primitives des classes 1, 2, 3, ... Remplaçons maintenant dans les relations $\mathfrak{P}_2$ et, de toutes les manières possibles, les dérivées principales de première classe par leurs expressions tirées de $\mathfrak{U}_1$; autrement dit, extrayons du groupe $\mathfrak{P}_2$ une relation quelconque $\mathfrak{p}_2$, du groupe $\mathfrak{U}_1$ un groupe $\mathfrak{U}'_1$

fournissant une expression et une seule pour chacune des dérivées principales de première classe, substituons aux dérivées dont il s'agit dans l'équation $\mathfrak{p}_2$ leurs expressions tirées de $\mathfrak{U}'_1$, et répétons l'opération en faisant successivement tous les choix possibles pour $\mathfrak{p}_2$ et pour $\mathfrak{U}'_1$. Comme les expressions fournies par $\mathfrak{U}_1$ pour les dérivées principales de première classe dépendent exclusivement des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques, le groupe des relations résultantes $\mathfrak{U}_2$ fournira, pour les dérivées principales de seconde classe, des expressions jouissant de la même propriété. Si, considérant alors les relations $\mathfrak{P}_3$, on y remplace de toutes les manières possibles les dérivées principales de première et de seconde classe par leurs expressions tirées de $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, on obtiendra un groupe $\mathfrak{U}_3$ fournissant, pour les dérivées principales de troisième classe, des expressions jouissant encore de la propriété dont il s'agit. Et ainsi de suite indéfiniment.

Nous nommerons *ultimes* les relations

$$\mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{U}_2, \quad \mathfrak{U}_3, \quad \ldots$$

obtenues à l'aide du mécanisme que nous venons de décrire, et aussi les expressions qu'elles fournissent pour les dérivées principales des classes successives 1, 2, 3, ... La *classe* d'une relation ultime sera celle de son premier membre.

5. Avant d'aller plus loin, il importe de faire les remarques suivantes :

1° *Toute expression primitive, lorsqu'elle ne coïncide pas avec quelqu'une des composantes* [1] *figurant dans les seconds membres du système harmonique donné, est une somme de termes dont chacun s'obtient en multipliant quelque dérivée partielle de ces composantes par un certain entier positif, et souvent aussi par certaines dérivées, principales ou paramétriques, des fonctions inconnues.*

---

[1] *Voir* le *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale* de M. Méray et mon Mémoire *Sur les principes de la Théorie générale des fonctions* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1891, p. 85).

2° *Toute expression ultime est une somme de produits pouvant contenir comme facteurs quatre sortes de quantités, savoir : certains entiers positifs; certaines composantes des seconds membres du système donné; certaines dérivées partielles de ces composantes; enfin certaines dérivées paramétriques des fonctions inconnues.*

3° *Les variables $x, y, \ldots$, les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ et leurs dérivées principales et paramétriques de tous ordres étant considérées pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes, pour que les relations primitives soient vérifiées par des valeurs particulières données des variables dont il s'agit, il faut et il suffit que les relations ultimes le soient.*

6. *Quand un système harmonique possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, les développements de ces intégrales par la formule de Taylor, à partir des valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots$, peuvent être reconstruits, dès que l'on connaît seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres.* [On suppose, bien entendu, que les valeurs $x_0, y_0, \ldots$ n'excèdent pas les limites assignées par la définition des intégrales ordinaires (2).]

Effectivement, les seconds membres des formules ultimes ne contenant que les variables indépendantes, les intégrales et leurs dérivées paramétriques, l'hypothèse numérique $x = x_0$, $y = y_0, \ldots$ les transforme tous en des quantités connues, et fait connaître, par suite, les valeurs initiales de leurs premiers membres, c'est-à-dire de toutes les dérivées principales des intégrales dont il s'agit.

En résumé, on connaît donc ainsi les valeurs initiales de ces intégrales et de toutes leurs dérivées sans distinction, c'est-à-dire ce qui est nécessaire pour construire les développements cherchés.

7. Par rapport aux valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$ des variables indépendantes, nous nommerons *détermination initiale* d'une intégrale la portion de son développement formée par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques connus près, ont pour coefficients les valeurs initiales de l'intégrale et de ses dérivées paramétriques de tous ordres. Quelquefois aussi, nous nommerons *principale* la portion restante du même développement.

Cela étant, le théorème ci-dessus (6) peut s'exprimer comme il suit : *Quand un système harmonique possède quelque groupe d'intégrales ordinaires, leurs développements par la formule de Taylor peuvent être reconstruits dès que l'on connaît seulement leurs déterminations initiales.*

8. *Inversement, cherchons s'il existe quelque groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.* (On suppose, bien entendu : 1° que chaque détermination initiale est convergente; 2° que les valeurs initiales des variables, prises conjointement avec celles des intégrales hypothétiques et des dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres du système donné, sont intérieures aux cercles d'olotropie de ces derniers.)

I. *Pour que de pareilles intégrales existent, il est tout d'abord nécessaire que les relations ultimes s'accordent numériquement par rapport aux conditions initiales dont il s'agit,* c'est-à-dire que les diverses expressions ultimes d'une même dérivée principale prennent toutes la même valeur numérique, lorsqu'on remplace par leurs valeurs initiales les variables indépendantes, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques.

Effectivement, à cause de la multiplicité de ces expressions, on pourra bien obtenir de plusieurs manières les valeurs de certains coefficients des développements; mais, si les intégrales dont il s'agit existent, les valeurs obtenues pour un même coefficient sont numériquement égales les unes aux autres, parce que les relations d'où on les tire sont toutes des conséquences nécessaires de l'existence supposée des intégrales.

II. *La concordance numérique des relations ultimes étant supposée avoir lieu, la convergence des développements des intégrales hypothétiques correspondant aux données initiales est encore une condition évidemment nécessaire à l'existence effective de ces intégrales.*

III. Cela posé, *si, pour un choix déterminé des conditions initiales, les relations ultimes s'accordent numériquement, et qu'en outre les développements des intégrales hypothétiques soient convergents, leurs sommes constituent des intégrales ordinaires du système harmonique donné.*

Soient, en effet,

$x, y, \ldots$ les variables indépendantes;
$u, v, \ldots$ les fonctions inconnues;
$\delta, \ldots$ les diverses dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres du système donné;
$x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales de $x, y, \ldots$;
U, V, ... les sommes des développements, supposés convergents, des intégrales hypothétiques;
$\Delta, \ldots$ les sommes des développements des dérivées de U, V, ... qui se rapportent respectivement aux mêmes variables que $\delta, \ldots$.

Traçons de $x_0, y_0, \ldots$ comme centres des cercles $\mathfrak{C}_x, \mathfrak{C}_y, \ldots$ de rayons suffisamment petits pour que les développements U, V, ..., par suite aussi $\Delta, \ldots$, convergent dans leur intérieur, et pour que les valeurs de $x, y, \ldots$, prises conjointement avec U, V, ..., $\Delta, \ldots$, soient intérieures aux cercles d'olotropie des seconds membres du système donné. Dans ces limites, la substitution de U, V, ... à $u, v, \ldots$ transforme les deux membres des équations différentielles proposées en des fonctions de $x, y, \ldots$ olotropes à l'intérieur des cercles $\mathfrak{C}_x, \mathfrak{C}_y, \ldots$. Or, les valeurs initiales des variables indépendantes, prises conjointement avec celles des développements eux-mêmes et de leurs dérivées de tous ordres, vérifient les formules ultimes, et par suite (5, 3°) les formules primitives. Donc les fonctions de $x, y, \ldots$ qui, après la substitution, figurent dans les deux membres d'une équation différentielle quelconque, sont égales, ainsi que leurs dérivées semblables de tous ordres, pour $x = x_0$, $y = y_0$, ..., et par suite sont identiquement égales entre elles dans tout l'intérieur des cercles $\mathfrak{C}_x, \mathfrak{C}_y, \ldots$.

IV. *Il ne peut y avoir enfin plus d'un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données.*

Car chaque relation ultime, étant du premier degré par rapport à la dérivée principale qui figure dans son premier membre, ne fournit pour cette dernière qu'une seule valeur initiale.

9. Nous avons donc à nous occuper maintenant des deux conditions relatives : 1° à la concordance numérique des relations ultimes (8, I);

2° à la convergence des développements des intégrales (8, II). C'est ce que nous allons faire successivement dans les deux paragraphes suivants.

Conditions de passivité d'un système harmonique [1].

10. La concordance numérique des relations ultimes, dont nous avons indiqué plus haut la nécessité (8, I), peut résulter de deux causes entièrement différentes :

Ou *d'un choix convenable des données initiales relativement à la nature particulière des composantes figurant dans les seconds membres*, choix qui, *s'il est possible*, fait naître la concordance numérique pour ces données initiales sans l'assurer pour d'autres ;

Ou *d'une corrélation mutuelle spéciale entre les composantes des seconds membres, en vertu de laquelle la concordance dont il s'agit subsiste indépendamment des données initiales.*

Nous exprimerons l'existence de cette dernière corrélation en disant que le système harmonique proposé est *passif*. La distinction entre les systèmes harmoniques passifs et les systèmes harmoniques non passifs s'opère aisément comme il suit.

11. Si l'on considère deux dérivées (distinctes) d'une fonction quelconque $F(x, y, \ldots)$, et que l'on adjoigne mentalement à chacune d'elles la suite indéfinie de ses propres dérivées, tout terme commun aux deux groupes illimités ainsi obtenus se nommera une *résultante* des deux dérivées en question. Pour passer de la fonction F à l'une ou à l'autre de ces dernières, il faut exécuter sur elle certaines différentiations dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre : en désignant par le symbole D. l'ensemble des différentiations communes, et par les symboles D'., D''. l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement, les

[1] Ce paragraphe contient l'extension aux systèmes harmoniques des conditions de passivité formulées par MM. Méray et Riquier pour une certaine catégorie de systèmes du premier ordre (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1890 ; p. 38 et suivantes).

deux dérivées considérées peuvent évidemment s'écrire

$$\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\mathrm{F},$$
$$\mathrm{D}.\mathrm{D}''.\mathrm{F},$$

et l'on voit sans peine : 1° qu'elles admettent $\mathrm{D}.\mathrm{D}'.\mathrm{D}''.\mathrm{F}$ comme *résultante unique d'ordre minimum;* 2° que le groupe complet de leurs résultantes s'obtient en adjoignant à celle d'ordre minimum la suite indéfinie de ses propres dérivées.

Considérons maintenant un système harmonique dont les premiers membres soient tous distincts, et, dans ce système, deux équations ayant pour premiers membres respectifs deux dérivées d'une même fonction inconnue; puis, prenons la résultante d'ordre minimum de ces dérivées, et répétons l'opération en faisant varier de toutes les manières possibles le choix de la fonction inconnue et celui des deux équations sur les premiers membres desquels on doit opérer : les résultantes, en nombre essentiellement limité, que nous obtiendrons ainsi, se nommeront, par rapport au système donné, les *dérivées cardinales* de ses diverses fonctions inconnues.

12. Cela posé, *pour qu'un système différentiel harmonique soit passif, il faut et il suffit :* 1° *que les premiers membres de ses diverses équations soient tous distincts;* 2° *que les diverses expressions ultimes d'une même dérivée cardinale quelconque* (11) *soient égales identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs attribuées aux variables, aux fonctions inconnues et à celles de leurs dérivées paramétriques qui y figurent, ces trois sortes de quantités étant considérées pour un instant comme autant de variables indépendantes distinctes.*

I. La passivité d'un système harmonique entraînant l'identité de toutes les expressions ultimes d'une même dérivée principale quelconque, il est clair: 1° que si deux équations d'un système passif ont le même premier membre, elles ont forcément aussi le même second membre, autrement dit, que les équations d'un pareil système ont leurs premiers membres tous distincts; 2° que les diverses expressions ultimes d'une même dérivée cardinale quelconque sont identiquement égales entre elles.

Les conditions posées sont donc nécessaires, et il nous reste à prouver qu'elles sont suffisantes.

II. Étant donné un système harmonique quelconque dont chaque second membre soit une fonction connue des diverses quantités dont il dépend, considérons en particulier l'un des seconds membres en question, et remplaçons-le par une composante indéterminée (olotrope à l'intérieur des mêmes cercles) des variables indépendantes $x, y, \ldots$ des fonctions inconnues $u, v, \ldots$ et des diverses dérivées paramétriques figurant dans le second membre que l'on considère. En répétant cette opération sur chaque équation du système donné, nous obtiendrons un nouveau système que nous nommerons *algorithmique,* par opposition au système donné qui sera dit *concret.* Ces systèmes sont tous deux harmoniques : les dérivées principales et paramétriques y sont respectivement les mêmes de part et d'autre, et la classe de chaque dérivée principale y est également la même.

Il est clair que, si l'on effectue parallèlement les mêmes calculs, d'abord sur les équations du système algorithmique, puis sur celles du système concret, le second résultat peut se déduire du premier en substituant aux composantes indéterminées du système algorithmique et à leurs dérivées partielles les composantes connues du système concret et leurs dérivées semblables. C'est de cette manière, par exemple, que les relations primitives ou ultimes du système concret pourraient se déduire de celles du système algorithmique. Pour faciliter le langage, nous conviendrons d'attribuer la qualification d'*algorithmiques* et celle de *concrets* aux résultats de calculs quelconques effectués respectivement sur le système algorithmique et sur le système concret.

III. Les variables $x, y, \ldots$ et les fonctions $u, v, \ldots$ étant affectées chacune de p cotes, considérons une relation ayant pour premier membre une dérivée quelconque de $u, v, \ldots$ et pour second membre une fonction quelconque de $x, y, \ldots$, de $u, v, \ldots$ et de quelques-unes des dérivées de ces fonctions : si la relation dont il s'agit satisfait à la seconde des conditions énoncées au n° 1, nous dirons, pour abréger, qu'elle est *harmonique,* comme aussi l'expression fournie par elle pour la dérivée contenue dans son premier membre.

Cela étant, *si sur une relation harmonique on exécute des différentiations quelconques, en remplaçant après quelques-unes de ces différentiations telles ou telles des dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions harmoniques des dérivées en question, on tombe encore sur une relation harmonique.* (Dans cette suite de calculs, on suppose, bien entendu, que les principes généraux de la théorie des fonctions composées ne cessent pas d'être applicables.)

1° Si sur une relation harmonique on exécute une différentiation première, on tombe sur une relation de même nature.

Même raisonnement qu'à l'alinéa I du n° 3.

2° Si dans le second membre d'une relation harmonique on remplace telle ou telle dérivée par quelqu'une de ses expressions harmoniques, on tombe encore sur une relation harmonique.

Ce point est évident lorsque la dérivée δ' dont il s'agit est d'ordre inférieur au premier membre δ de la relation harmonique donnée. Supposons alors qu'elle soit d'ordre égal, et désignons par δ'' une dérivée du même ordre figurant dans l'expression harmonique de δ', puis par

$$\begin{array}{cccc} c_1, & c_2, & \ldots, & c_p, \\ c'_1, & c'_2, & \ldots, & c'_p, \\ c''_1, & c''_2, & \ldots, & c''_p \end{array}$$

les cotes respectives des dérivées δ, δ', δ''. Si l'on considère les différences

$$\begin{array}{cccc} c_1 - c'_1, & c_2 - c'_2, & \ldots, & c_p - c'_p, \\ c'_1 - c''_1, & c'_2 - c''_2, & \ldots, & c'_p - c''_p, \\ c_1 - c''_1, & c_2 - c''_2, & \ldots, & c_p - c''_p, \end{array}$$

il résulte des hypothèses que, dans chacune des deux premières lignes horizontales, les différences ne sont pas toutes nulles, et que la première non égale à zéro y est positive; comme d'ailleurs le dernier terme de chaque colonne verticale est égal à la somme des deux premiers, la dernière ligne horizontale jouit évidemment de la même propriété que les deux premières.

3° Le rapprochement de 1° et 2° prouve, dans toute sa généralité, le point énoncé au début de l'alinéa III, et cela *alors même que, dans les diverses relations harmoniques qui concourent à engendrer la relation* *finale, les composantes des seconds membres seraient plus ou moins indéterminées.*

IV. Considérons actuellement, dans un système harmonique quelconque, une relation obtenue en différentiant un nombre quelconque de fois l'une des équations qui le composent, et remplaçant après quelques-unes de ces différentiations, *en tous cas après la dernière*, les diverses dérivées principales contenues dans le second membre par telles ou telles de leurs expressions ultimes. Dans le premier membre de la relation résultante figure évidemment une dérivée principale, qui se trouve alors exprimée *immédiatement* au moyen des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques. Pour abréger, nous nommerons *immédiates* les relations, algorithmiques ou concrètes, auxquelles peut conduire l'application du mécanisme précédent (en y comprenant celles du système lui-même, algorithmique ou concret), et nous affecterons de la même qualification les expressions qu'elles fournissent pour les diverses dérivées principales des fonctions inconnues. Il est clair que les relations ultimes (4), en particulier, se trouvent au nombre des relations immédiates.

Notons ici, nous réservant d'utiliser cette remarque au moment voulu (VII), que chacune des dérivées principales de première classe figure comme premier membre dans quelque équation du système, et que l'ensemble des relations immédiates exprimant les dérivées dont il s'agit s'obtient en extrayant du système les diverses équations dont elles constituent les premiers membres.

Ces définitions posées, on conclut facilement de l'alinéa III que *les relations ultimes sont toutes harmoniques;* puis, que *si l'on forme, à l'aide du mécanisme décrit ci-dessus, une relation immédiate quelconque, les relations successivement rencontrées dans le cours d'un semblable calcul jouissent de la même propriété;* que, *par suite, toute dérivée principale figurant dans le second membre d'une des relations intermédiaires est de classe nécessairement inférieure au premier membre correspondant.*

Ces conclusions sont d'ailleurs indifféremment applicables au système algorithmique et au système concret (II).

V. *Si, dans un système harmonique quelconque, l'égalité identique a lieu entre les diverses expressions immédiates (concrètes) de chaque dérivée principale des classes* 1, 2, ..., j, *toutes les expressions immédiates (concrètes) d'une dérivée déterminée de classe* $j+1$ *obtenues en effectuant sur une même équation du système proposé l'opération ci-dessus indiquée* (IV) *sont identiquement égales entre elles, de quelque manière que cette opération soit conduite.*

1° En premier lieu, si l'on n'opère de substitutions qu'après la dernière différentiation, les expressions immédiates (concrètes) auxquelles on est conduit pour la dérivée en question sont identiquement égales; car la relation primitive résultant des seules différentiations est indépendante de l'ordre dans lequel on les exécute, et pour chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à $j+1$, qui y figurent, les diverses expressions immédiates (concrètes), à plus forte raison les diverses expressions ultimes (concrètes), sont par hypothèse identiques.

2° Si l'on ne change pas l'ordre relatif des différentiations, le résultat de l'opération ci-dessus indiquée (IV) est indépendant de toutes les autres conditions dans lesquelles on l'effectue.

Supposons, en effet, que les différentiations soient exécutées dans un ordre déterminé, certaines d'entre elles étant suivies de substitutions déterminées, et soit x celle des variables indépendantes par rapport à laquelle la dernière doit avoir lieu. La relation concrète sur laquelle on doit exécuter cette dernière différentiation peut, comme nous l'avons fait remarquer (II), se déduire d'une certaine relation algorithmique par la simple substitution des composantes connues du système concret et de leurs dérivées partielles aux composantes indéterminées du système algorithmique et à leurs dérivées semblables. Soient dès lors

$$\partial = \mathfrak{f}(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \sigma, \ldots, \tau, \ldots), \tag{4}$$

$$\partial = f(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \sigma, \ldots, \tau, \ldots) \tag{5}$$

les relations, algorithmique et concrète, dont il s'agit; dans ces relations, nous avons désigné par δ une certaine dérivée principale, de classe au plus égale à j, par $\sigma, \ldots, \tau, \ldots$ les diverses dérivées, respectivement principales et paramétriques, qui figurent dans le second membre (algorithmique) de (4), et dont les premières sont de classes au plus égales à $j-1$ (IV). Les dérivées $\frac{d\sigma}{dx}, \cdots$ et celles d'entre les dérivées $\frac{d\tau}{dx}, \cdots$ qui sont principales, sont au plus de la classe j; car elles figurent dans le second membre de la relation algorithmique que l'on déduit de (4) à l'aide d'une différentiation relative à x, et, par suite, sont de classes inférieures au premier membre $\frac{d\delta}{dx}$, qui est de classe $j+1$ (IV). Chacune de ces dérivées, comme aussi chacune des dérivées principales $\sigma, \ldots$, a donc, dans le système concret, une expression immédiate unique, qui se trouve être, à plus forte raison, son expression ultime unique. De là résulte en particulier que, si l'on désigne par

$$\Sigma, \quad \ldots, \quad \Sigma_x, \quad \ldots$$

les expressions immédiates (concrètes) de

$$\sigma, \quad \ldots, \quad \frac{d\sigma}{dx}, \quad \ldots,$$

et par $\left(\left(\frac{d\Sigma}{dx}\right)\right), \cdots$ les résultats que donne la règle des fonctions composées quand on effectue sur $\Sigma, \ldots$ une différentiation relative à x, les diverses expressions immédiates $\Sigma_x, \ldots$ peuvent s'obtenir en éliminant respectivement des diverses expressions $\left(\left(\frac{d\Sigma}{dx}\right)\right), \cdots$ les dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à j, qui peuvent y figurer.

Cela posé, au lieu de différentier par rapport à x la relation (concrète) (5), ce qui donne

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{df}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dx} + \ldots + \frac{df}{d\tau}\frac{d\tau}{dx} + \ldots,$$

puis de remplacer, d'une part les dérivées principales

$$\sigma, \quad \ldots, \quad \frac{d\sigma}{dx}, \quad \ldots.$$

par leurs expressions immédiates

$$\Sigma, \quad \ldots, \quad \Sigma_x, \quad \ldots,$$

d'autre part celles d'entre les dérivées

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{dv}{dx}, \quad \ldots, \quad \frac{d\tau}{dx}, \quad \ldots$$

qui sont principales par les expressions immédiates correspondantes, il revient évidemment au même de différentier par rapport à x la relation

$$\delta = f(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \Sigma, \ldots, \tau, \ldots),$$

ce qui donne

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{du}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{df}{d\Sigma}\left(\left(\frac{d\Sigma}{dx}\right)\right) + \ldots + \frac{df}{d\tau}\frac{d\tau}{dx} + \ldots,$$

puis de remplacer par leurs expressions immédiates les dérivées principales qui peuvent alors figurer dans le second membre.

En résumé donc, au lieu d'effectuer sur une équation quelconque ($\mathfrak{a}$) du système concret une suite de différentiations et substitutions propre à engendrer quelque relation immédiate, on peut, sans rien changer au résultat final, procéder de la manière suivante : en désignant par k le nombre des différentiations successives, et par δ la dérivée principale que l'exécution sur ($\mathfrak{a}$) des $k - 1$ premières amènerait dans le premier membre, on prendra la relation immédiate (unique) dont le premier membre est δ, on effectuera sur elle la $k^{\text{ième}}$ différentiation, et l'on remplacera finalement par son expression immédiate (unique) chacune des dérivées principales que cette $k^{\text{ième}}$ différentiation aura pu introduire dans le second membre. Il est visible dès lors que, dans la première suite d'opérations, l'ordre relatif des différentiations peut seul influer sur le résultat final.

3° Considérons deux quelconques des expressions immédiates (concrètes) dont le présent alinéa (V) a pour but de démontrer l'identité, et qui se déduisent, comme nous l'avons expliqué (IV), par différentiations et substitutions, d'une même équation du système concret. Si, sans changer de part ni d'autre l'ordre relatif des différentiations, on n'opère de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, on tombe sur deux expressions immédiates respectivement identiques aux deux précédentes (2°), et l'on sait d'ailleurs (1°) qu'en procédant ainsi le résultat est indépendant de l'ordre des différentiations.

VI. *Si, dans un système harmonique où les premiers membres sont tous distincts, l'égalité identique a lieu, d'une part entre les diverses expressions immédiates (concrètes) de chaque dérivée principale des classes* 1, 2, ..., j, *d'autre part entre les diverses expressions ultimes (concrètes) de chaque dérivée cardinale* (II) *de la classe* $j+1$, *les deux expressions immédiates (concrètes) d'une même dérivée principale de classe* $j+1$, *déduites de deux équations différentes du système proposé par l'opération indiquée plus haut* (IV), *sont nécessairement identiques.*

Supposons, pour fixer les idées, que ce soit la fonction u dont certaines dérivées figurent dans les premiers membres des deux équations considérées. Pour passer de la fonction u à l'une ou à l'autre de ces deux dérivées, il faut exécuter sur elle certaines différentiations, dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre. Nous désignerons par le symbole D. l'ensemble de ces différentiations communes, et par les symboles D'., D''. l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement. Les deux équations peuvent donc s'écrire

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{D.D'.}u = \ldots,$$

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{D.D''.}u = \ldots.$$

Cela posé, la dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide soit avec $D.D'.D''.u$, soit avec quelque dérivée de $D.D'.D''.u$ (11). Dans le premier cas, en vertu de l'alinéa précédent (V), les opérations à effectuer soit sur l'équation (6), soit sur l'équation (7), pour en déduire une expression immédiate de $D.D'.D''.u$, pourront l'être comme il suit : on exécutera d'abord la différentiation D''. s'il s'agit de l'équation (6), la différentiation D'. s'il s'agit de l'équation (7), et l'on remplacera ensuite dans les seconds membres des formules résultantes les dérivées principales des classes $1, 2, \ldots, j$ par leurs expressions ultimes. Or ce mécanisme engendre précisément deux expressions ultimes (concrètes) de la dérivée cardinale $D.D'.D''.u$, c'est-à-dire deux expressions qui, par hypothèse, sont identiquement égales l'une à l'autre.

Si la dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide avec quelque dérivée de $D.D'.D''.u$, les opérations à effectuer soit sur l'équation (6), soit sur l'équation (7) pour en déduire une expression immédiate de la dérivée en question pourront l'être comme il suit : 1° on effectuera d'abord la différentiation $D.''$ s'il s'agit de la première, la différentiation $D.'$ s'il s'agit de la seconde, et l'on remplacera les dérivées principales figurant dans les seconds membres par leurs expressions ultimes ; 2° on exécutera ensuite les différentiations restantes, qui sont les mêmes de part et d'autre, et l'on éliminera finalement des seconds membres les dérivées principales. Or, comme nous venons de le voir, les résultats sont identiques après la première partie de l'opération, par suite aussi après la seconde.

VII. Dans un système harmonique où les premiers membres sont tous distincts, l'égalité identique entre les diverses expressions immédiates (concrètes) d'une même dérivée principale de première classe a lieu d'elle-même, puisque les relations immédiates de première classe font directement partie du système (IV). On en conclura, par l'application répétée des propositions ci-dessus (V) (VI), que cette égalité identique a encore lieu pour la deuxième classe, puis pour la troisième, et ainsi de suite indéfiniment. *Il n'y a donc, pour une même dérivée principale quelconque, qu'une seule expression immédiate concrète, et à plus forte raison qu'une seule expression ultime concrète.*

13. Si l'on partage en groupes les équations du système harmonique donné suivant celles d'entre les fonctions inconnues u, v, ... dont quelque dérivée figure dans leurs premiers membres, à un groupe formé d'une seule équation ne correspondra aucune condition de passivité. En particulier, si chaque groupe ne contient qu'une seule équation, le système sera nécessairement passif.

Dans un système harmonique et passif, on peut toujours supposer qu'un premier membre, quel qu'il soit, n'est la dérivée d'aucun autre : car, si deux équations du système avaient respectivement pour premiers membres $D_1.u$, $D_2.D_1.u$ par exemple, l'identité des diverses expressions ultimes de toute dérivée principale permettrait évidemment de supprimer la seconde.

(*A suivre.*)