S. MANGEOT

Sur la détermination des axes dans les courbes du troisième ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 43-44
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__43_0>

SUR LA

DÉTERMINATION DES AXES

DANS

LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE,

PAR M. S. MANGEOT,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE TROYES.

Soit, en coordonnées cartésiennes rectangulaires,

$$f(x, y) = 0$$

l'équation entière, à coefficients réels, d'une cubique autre qu'un système de trois droites parallèles.

Si les deux constantes

$$a = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \qquad b = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

ne sont pas nulles à la fois, la cubique ne peut avoir plus d'un axe, et, quand cet axe existe, il peut être représenté par l'équation

$$ab\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - (a^2 - b^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = 0,$$

lorsque les trois directions asymptotiques de la courbe ne sont pas confondues et, dans le cas contraire, par la formule

$$b\frac{\partial f}{\partial x} - a\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Si les constantes a et b sont nulles toutes les deux, soient α et β

les valeurs de x et y qui vérifient les équations linéaires

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]=0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]=0,$$

valeurs qui sont ici finies et déterminées. Quand on n'a pas à la fois $\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0$, $\frac{\partial f}{\partial\beta}=0$, la cubique a au plus un axe, et, s'il existe, son équation est

$$(x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial\beta}-(y-\beta)\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0.$$

Lorsqu'on a simultanément $\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0$, $\frac{\partial f}{\partial\beta}=0$, la courbe admet trois axes, qui sont définis par la formule

$$\varphi(y-\beta,\alpha-x)=0,$$

$\varphi(x,y)$ désignant l'ensemble des termes du troisième degré de $f(x,y)$ [1].

On peut encore faire usage du théorème qui suit :

Quand l'un des nombres a, b est différent de zéro, pour que la cubique ait un axe, il faut et il suffit que l'expression $b\frac{\partial f}{\partial x}-a\frac{\partial f}{\partial y}$ *admette un facteur* F *de la forme* $bx-ay+\text{const.}$; *et l'équation de l'axe est*

$$F=0.$$

Dans le cas où l'on a $a=0$, $b=0$, la condition pour que la courbe ait au moins un axe est

$$\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial\beta},-\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)=0.$$

---

(1) La question peut être considérée comme résolue, parce que, étant données les équations d'une droite et d'une courbe algébrique, on sait reconnaître si la droite est ou n'est pas axe de la courbe.