

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

X. STOUFF

**Sur la valeur de la courbure totale d'une surface aux points
d'une arête de rebroussement**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 9 (1892), p. 91-100

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__91_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA VALEUR

DE LA

COURBURE TOTALE D'UNE SURFACE

AUX POINTS D'UNE ARÊTE DE REBROUSSEMENT,

PAR M. X. STOUFF,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.



Une surface S qui admet une arête de rebroussement peut être considérée comme engendrée par une courbe mobile C qui a une enveloppe. Cette courbe peut être représentée par deux équations

$$(1) \quad \varphi(x, y, z, \alpha) = 0,$$
$$(2) \quad \frac{\partial \varphi(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0,$$

α étant un paramètre variable. En éliminant α entre les équations (1) et (2), on obtient une équation

$$(3) \quad F(x, y, z) = 0,$$

qui représente la surface S . Enfin on obtiendra les équations de l'arête de rebroussement en éliminant α entre les équations (1), (2) et l'équation

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Désignons par R et R' les deux rayons de courbure principaux et posons

$$H = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

la courbure totale est donnée par la formule connue

$$(5) \quad \frac{H}{RR'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut imaginer que la fonction $F(x, y, z)$ a été obtenue en portant dans $\varphi(x, y, z, a)$ la valeur de a en x, y, z tirée de l'équation (2).

On a ainsi

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \dots,$$

et, en vertu de l'équation (2),

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

on aura de même

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x} \frac{\partial a}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z} \frac{\partial a}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x} \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} \frac{\partial a}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z} \frac{\partial a}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x} \frac{\partial a}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} \frac{\partial a}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z} \frac{\partial a}{\partial z}, \end{array} \right.$$

D'ailleurs les valeurs de $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial y}, \frac{\partial a}{\partial z}$ s'obtiennent par les équations

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} \frac{\partial a}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} \frac{\partial a}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} \frac{\partial a}{\partial z} = 0,$$

obtenues par la différentiation de l'équation (2). En portant les valeurs (6) dans la formule (5), on arrive au résultat suivant. Désignons par $\mathcal{F}(\xi, \eta, \zeta)$ la forme quadratique

$$\mathcal{F}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \xi^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \eta^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \zeta^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \eta \zeta + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \zeta \xi + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \xi \eta,$$

et prenons pour ξ, η, ζ les valeurs

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y}, \\ \eta &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z}, \\ \zeta &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x},\end{aligned}$$

il vient

$$(7) \quad \frac{H^4}{RR'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} + \frac{\mathfrak{F}(\xi, \eta, \zeta)}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}}.$$

Cette formule donne la courbure totale en un point quelconque de S. Sur l'arête de rebroussement, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}$ est nul. \mathfrak{F} n'est pas nul en général.

Donc, en général, quand une surface possède une arête de rebroussement, en tout point de cette arête la courbure totale est infinie.

Il y a exception si $\mathfrak{F} = 0$. Il est facile d'interpréter géométriquement l'équation $\mathfrak{F} = 0$ quand elle a lieu en chaque point de l'arête de rebroussement.

Des équations (1), (2), (4) on peut tirer x, y, z en fonction de a , et exprimer ainsi les coordonnées de chaque point de l'arête au moyen de ce paramètre arbitraire. Suivant cette manière d'envisager les choses, différentions les équations (1), (2), (4) par rapport à a , il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{da} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{da} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x} \frac{dx}{da} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} \frac{dy}{da} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z} \frac{dz}{da} &= 0, \\ \mathfrak{F} \left(\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{d^2 x}{da^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{d^2 y}{da^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{d^2 z}{da^2} &= 0.\end{aligned}$$

Si les trois quantités ξ, η, ζ ne sont pas toutes nulles, les deux pre-

nières de ces équations montrent que, en désignant par λ une certaine quantité, on a

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} = \lambda,$$

et la troisième équation donne alors

$$\lambda^2 \mathcal{F}(\xi, \eta, \zeta) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{d^2 x}{da^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{d^2 y}{da^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{d^2 z}{da^2} = 0.$$

Si \mathcal{F} est nulle, ce qui est nécessaire pour que la courbure totale ne soit pas infinie, on a aussi

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{d^2 x}{da^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{d^2 y}{da^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{d^2 z}{da^2} = 0,$$

c'est-à-dire que le plan tangent à la surface le long de l'arête de rebroussement est le plan osculateur à cette arête.

Ce cas est donc le cas d'exception principal au cas général, dans lequel la courbure totale est infinie. Je suppose remplie la condition (8); je me propose alors de démontrer que la courbure totale a une valeur finie et bien déterminée en chaque point de l'arête de rebroussement. Considérons la fraction $\frac{\mathcal{F}}{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}}$ pour un certain point M de

la surface, et voyons si cette fraction tend vers une limite quand ce point se rapproche indéfiniment d'un point P de l'arête de rebroussement.

Imaginons que x, y, z représentent les coordonnées du point P, a la valeur du paramètre relative à ce point; par le point M passe une des courbes C correspondant à la valeur $a + da$ du paramètre. Soient $x + dx, y + dy, z + dz$ les coordonnées du point M. Nous traitons dx, dy, dz, da comme des infiniment petits du premier ordre, et nous négligerons les infiniment petits du second ordre. Il faut toutefois remarquer que dx, dy, dz sont des infiniment petits par rapport à da , tant que la direction PM n'est pas voisine de la tangente en P à l'arête de rebroussement.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que la direction MP est

infiniment voisine de cette tangente. Cela suffit, si la limite obtenue finalement pour la courbure totale varie d'une manière continue le long de l'arête de rebroussement. En effet, si l'on aborde le point P par une route sur la surface qui ne soit pas tangente à l'arête, on obtiendra nécessairement la même limite; car les courbes C qui passent par les positions successives du point M touchent l'arête de rebroussement en un point Q qui tend vers le point P. La courbure totale en M est infiniment voisine de la limite de la courbure totale en Q, obtenue par un déplacement suivant la courbe C qui passe à la position actuelle du point M, et si cette limite varie elle-même d'une manière continue le long de l'arête, sa valeur en Q est infiniment voisine de sa valeur en P.

En désignant par $d\theta$ un certain rapport infiniment petit, nous aurons

$$dx = \xi d\theta, \quad dy = \eta d\theta, \quad dz = \zeta d\theta,$$

et, en remarquant que sur l'arête de rebroussement $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}$ est nul,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} &= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial x} dx + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} dy + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z} dz + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^3} da, \\ (9) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} &= \left(\xi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial x} + \eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} + \zeta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z} \right) d\theta + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^3} da, \end{aligned}$$

on a, de même, en remarquant que, par hypothèse, \mathcal{F} est nul sur cette arête, et en désignant par $d\xi, d\eta, d\zeta$ les variations de ξ, η, ζ produites par le changement de x, y, z, a en $x + dx, y + dy, z + dz, a + da$,

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{F}(\xi, \eta, \zeta) &= \xi^2 d\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) + \eta^2 d\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \zeta^2 d\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) + 2\eta\zeta d\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}\right) \\ &\quad + 2\xi\zeta d\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}\right) + 2\xi\eta d\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right) \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \xi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \eta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \zeta\right) d\xi \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \xi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \eta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \zeta\right) d\eta \\ &\quad + 2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \xi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} \eta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \zeta\right) d\zeta, \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \mathcal{G}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \xi^3 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} \eta^3 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \zeta^3 + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2 \partial z} \eta^2 \zeta \\ &+ 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y \partial z^2} \eta \zeta^2 + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^2 \partial x} \zeta^2 \xi + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial x^2} \zeta \xi^2 \\ &+ 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \xi^2 \eta + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \xi \eta^2 + 6 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y \partial z} \xi \eta \zeta, \\ \mathcal{F}_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a \partial x^2} \xi^2 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a \partial y^2} \eta^2 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a \partial z^2} \zeta^2 \\ &+ 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a \partial y \partial z} \eta \zeta + 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a \partial z \partial x} \zeta \xi + 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a \partial x \partial y} \xi \eta, \end{aligned} \right.$$

l'équation (10) devient

$$\mathcal{F}(\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{G}(\xi, \eta, \zeta) d\theta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} d\zeta + \mathcal{F}_1(\xi, \eta, \zeta) da.$$

Mais on a, par un calcul facile,

$$d\xi = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \eta} \right) d\theta \\ + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} \right) da,$$

par suite

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} d\zeta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta} & \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \eta} & \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\theta \\ + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial x} & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z} \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \eta} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \zeta} \end{vmatrix} da.$$

Nous aurons donc

$$\frac{H'}{RR'} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & 0 \end{vmatrix} + \frac{\left\{ j(\xi, \eta, \zeta) + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \right\} d\theta + \left\{ \bar{x}_1 + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial z} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \right\} da}{\left(\xi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial x} + \eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial y} + \zeta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial z} \right) d\theta + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3} da}$$

Je dis que la fraction qui figure dans le second membre est indépendante de la valeur de $\frac{d\theta}{da}$. En effet, si l'on considère un point de l'arête de rebroussement et les coordonnées x, y, z de ce point comme fonctions du paramètre α , définies par les équations (1), (2), (4), on obtient par des différentiations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{d\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial z} \frac{dz}{d\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial y} \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial z} \frac{dz}{d\alpha} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3} &= 0, \end{aligned}$$

$$(12) \quad \frac{dx}{d\alpha} = - \frac{\xi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3}}{\xi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial x} + \eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial y} + \zeta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial z}},$$

et les valeurs analogues pour $\frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{d\alpha}$.

On en déduit, après quelques simplifications,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 x}{da^2} &= - \frac{d\xi}{da} \frac{\frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^3}}{\xi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial x} + \eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} + \zeta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z}} \\ &+ \frac{dx}{da} \frac{d}{da} \log \frac{\frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^3}}{\xi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial x} + \eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} + \zeta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z}}. \end{aligned} \right.$$

Tout le long de l'arête de rebroussement, on a d'ailleurs, par hypothèse,

$$\bar{x} = 0,$$

et en différentiant

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta \left(\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da} \right) + \bar{x}_1 \left(\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da} \right) + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dx}{da} \right)} \frac{d^2 x}{da^2} \\ + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dy}{da} \right)} \frac{d^2 y}{da^2} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dz}{da} \right)} \frac{d^2 z}{da^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

A l'aide des valeurs (13), on trouve

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dx}{da} \right)} \frac{d^2 x}{da^2} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dy}{da} \right)} \frac{d^2 y}{da^2} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dz}{da} \right)} \frac{d^2 z}{da^2} \\ = - \frac{\frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^3}}{\xi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial x} + \eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} + \zeta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z}} \left[\frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dx}{da} \right)} \frac{d\xi}{da} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dy}{da} \right)} \frac{d\eta}{da} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dz}{da} \right)} \frac{d\zeta}{da} \right]. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs

$$(16) \quad \frac{d\xi}{da} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dy}{da} \right)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dz}{da} \right)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{d}{da} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{d}{da} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} \right),$$

et, en remplaçant dans le second membre de (14) $\frac{d\xi}{da}, \frac{d\eta}{da}, \frac{d\zeta}{da}$ par leurs valeurs (15), il vient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dx}{da}\right)} \frac{d^2 x}{da^2} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \left(\frac{dy}{da}\right)} \frac{d^2 y}{da^2} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial \left(\frac{dz}{da}\right)} \frac{d^2 z}{da^2} \\ &= - \frac{\frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^3}}{\xi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial x} + \eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} + \zeta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z}} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{d}{da} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial x} \right) & \frac{d}{da} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial y} \right) & \frac{d}{da} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial \left(\frac{dx}{da}\right)} & \frac{\partial \bar{y}}{\partial \left(\frac{dy}{da}\right)} & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \left(\frac{dz}{da}\right)} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

et l'équation (14) donne alors, en remplaçant $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da}$ par leurs valeurs (12),

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^3} \{j(\xi, \eta, \zeta) + \bar{x}_1(\xi, \eta, \zeta) \left(\xi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial x} + \eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} + \zeta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^3} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \\ & + \left(\xi \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial x} + \eta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} + \zeta \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z} \right) \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial x} & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial y} & \frac{\partial^3 \varphi}{\partial a^2 \partial z} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{x}}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

C'est précisément la condition pour que la fraction qui figure dans l'expression de $\frac{H^3}{RR'}$ soit indépendante de $\frac{d\theta}{da}$.

Parmi les surfaces les plus intéressantes qui présentent une arête de rebroussement, sont les surfaces des centres de courbure des surfaces minima; les deux nappes de la surface qui aboutissent à cette arête sont applicables l'une sur l'autre. On sait d'ailleurs que ces surfaces sont toutes applicables sur la surface de révolution engendrée par la

développée d'une chaînette. Tout le long de l'arête de rebroussement, la courbure totale reste finie, de sorte que ces surfaces présentent notre cas d'exception principal, et le plan osculateur de l'arête de rebroussement est aussi le plan tangent de rebroussement (1).

(1) Comparer la note de l'auteur (*Annales de Grenoble*; 1890). Voir aussi, sur ces surfaces, un article de M. Razzaboni (*Journal de Battaglini*; 1890).