Paul Painlevé

# Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre (suite)

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 9 (1892), p. 9-30
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1892_3_9__9_0>

# ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

# L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.


---

## MÉMOIRE

SUR LES

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

[SUITE (1)],


PAR M. PAUL PAINLEVÉ,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.


## CHAPITRE V.

APPLICATION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE AUX ÉQUATIONS DE LA FORME

$$y' = R[y, (x)].$$

---

1. Quand le genre de la relation

$$F[y', y, (x)] = 0$$

en $y'$ et $y$ est nul, une transformation birationnelle permet, comme nous l'avons dit, de ramener l'équation différentielle à la forme

$$(1) \qquad y' = R[y, (x)],$$

où R désigne une fraction rationnelle en $y$.

---

(1) *Annales de l'École Normale*, t. VIII, p. 267.

Si l'intégrale générale d'une telle équation n'admet que $n$ valeurs se permutant autour des points critiques mobiles, elle peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{M}[y,(x)]}{\mathrm{N}[y,(x)]} = \mathrm{C},$$

M et N étant deux polynômes en $y$ de degré $n$ et C une constante; ou bien encore

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & y^n + y^{n-1}\frac{(\alpha_{n-1}\mathrm{C}+\beta_{n-1})}{\alpha_n\mathrm{C}+\alpha_n} + y^{n-2}\frac{(\alpha_{n-2}\mathrm{C}+\beta_{n-2})}{\alpha_n\mathrm{C}+\beta_n} + \ldots + \frac{\alpha_0\mathrm{C}+\beta_0}{\alpha_n\mathrm{C}+\beta_n} \\ & \qquad \equiv y^n + \gamma_{n-1}y^{n-1} + \gamma_{n-2}y^{n-2} + \ldots + \gamma_1 y + \gamma_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

L'un au moins des coefficients $\gamma_i(x)$ dépend de la constante C. Pour fixer les idées, admettons que $\gamma_0$ dépende de C. (Pour échapper d'ailleurs au cas exceptionnel où cela n'aurait pas lieu, il suffirait de remplacer $y$ par $y+k$, $k$ représentant une constante quelconque.) Dans cette hypothèse, exprimons C en fonction de $\gamma_0$; on voit que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \mathrm{A}_1\ \ \gamma_0 + \mathrm{B}_1, \\ \gamma_2 &= \mathrm{A}_2\ \ \gamma_0 + \mathrm{B}_2, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \gamma_{n-1} &= \mathrm{A}_{n-1}\gamma_0 + \mathrm{B}_{n-1}. \end{aligned}$$

L'équation (2) devient ainsi

$$(3)\qquad y^n + (\mathrm{A}_{n-1}\gamma_0 + \mathrm{B}_{n-1})y^{n-1} + \ldots + (\mathrm{A}_1\gamma_0 + \mathrm{B}_1)y + \gamma_0 = 0,$$

ou encore

$$(4)\qquad \gamma_0 = -\frac{y^n + \mathrm{B}_{n-1}y^{n-1} + \mathrm{B}_{n-2}y^{n-2} + \ldots + \mathrm{B}_1 y}{\mathrm{A}_{n-1}y^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_1 y + 1}.$$

Dans cette égalité les A et B désignent des fonctions de $x$ bien déterminées, et $\gamma_0$ une fonction qui satisfait à une équation de Riccati

$$(5)\qquad \gamma_0' = m\gamma_0^2 + n\gamma_0 + p.$$

Si l'intégrale de l'équation (1) est de la forme (2), il existe un système de fonctions $\mathrm{A}_i$, $\mathrm{B}_j$, $m$, $n$, $p$, et un seul, telle que cette intégrale soit définie par l'équation (3). Il en résulte qu'étant donnée une équation (1), on reconnaît à l'aide d'opérations linéaires si l'on peut déterminer un pareil système, et, dans ce cas, le système s'obtient lui-même à l'aide d'opérations linéaires.

Ceci rappelé, voici quelle doit être la marche du calcul : on différentie l'équation (4) par rapport à $x$, et on remplace $y_0$ et $y'_0$ par leurs valeurs en $y$ et $y'$ dans l'équation (5). En identifiant l'équation ainsi obtenue avec l'équation donnée, on forme un certain système de relations qui doivent être compatibles, et qui, si elles sont compatibles, sont parfaitement déterminées. L'équation se trouve alors ramenée, par des opérations purement algébriques, à une équation de Riccati.

Inversement, ce procédé permet de former toutes les équations (1)

$$y' = \mathrm{R}[y, (x)] = \frac{\mathrm{P}[y, (x)]}{\mathrm{Q}[y, (x)]},$$

dont l'intégrale prend seulement $n$ valeurs autour des points critiques mobiles ($n$ étant donné). On voit que, dans le cas plus général, P est de degré $2n$, et Q de degré $2n-2$. Les $(4n-1)$ coefficients de R s'expriment en fonction des $(2n+1)$ fonctions arbitraires $\mathrm{A}_i$, $\mathrm{B}_j$, $m$, $n$, $p$, et de leurs dérivées premières. Ces coefficients satisfont donc à $(2n-2)$ relations différentielles. Pour calculer ces relations, on élimine entre les $(4n-1)$ valeurs des coefficients de R les $(2n-2)$ dérivées des $\mathrm{A}_i$, $\mathrm{B}_j$ qui figurent seules. Il reste ainsi $(2n+1)$ égalités, d'où l'on peut tirer les $\mathrm{A}_i$, $\mathrm{B}_j$, $m$, $n$, $p$ en fonction des coefficients de R, et, en portant ces expressions dans les valeurs de $\frac{d\mathrm{A}_i}{dx}$, $\frac{d\mathrm{B}_j}{dx}$, on forme $(2n-2)$ relations où figurent les coefficients de R et leurs dérivées premières, ou, d'une manière plus précise, $(2n+1)$ fonctions de ces coefficients et dérivées de $(2n-2)$ de ces fonctions.

Mais il peut arriver que l'équation (1), formée en partant des équations (4) et (5), soit telle que P et Q aient un ou plusieurs facteurs communs en $y$. (En particulier, P et Q peuvent avoir leurs premiers termes nuls à la fois.) Soit $\lambda$ le nombre de facteurs communs à P et Q. L'équation correspondante est alors de la forme

$$y' = \frac{a_{(2n-\lambda)} y^{(2n-\lambda)} + a_{(2n-\lambda-1)} y^{(2n-\lambda-1)} + \ldots + a_0}{b_{(2n-\lambda-2)} y^{(2n-\lambda-2)} + \ldots + b^0}. \tag{6}$$

Les deux coefficients $a_{(2n-\lambda)}$, $b_{(2n-\lambda-2)}$ ne sont pas nuls à la fois; j'ajoute qu'aucun d'eux n'est nul dans l'équation la plus générale de la classe étudiée. Car, si une équation (6) appartient à cette classe, la nouvelle équation obtenue en faisant le changement de fonction

$$y = \frac{h(x) y_1 + k(x)}{h_1(x) y_1 + k_1(x)}$$

jouit de la même propriété, et les coefficients correspondants $a_{(2n-\lambda)}$, $b_{(2n-\lambda-2)}$ sont différents de zéro.

Les $(4n - 2\lambda - 1)$ coefficients distincts de l'équation (6) s'expriment en fonction des $(2n+1)$ fonctions $A_i$, $B_j$, $m$, $n$, $p$, liées par les $\lambda$ conditions nécessaires pour que P et Q aient $\lambda$ facteurs communs. Ces conditions renferment les dérivées premières $\frac{dA_i}{dx}$, $\frac{dB_j}{dx}$. Il résulte de là que les coefficients de l'équation (6) satisfont à $(2n - \lambda - 2)$ relations, où figurent ces coefficients et leurs dérivées jusqu'à un ordre d'autant plus élevé que $\lambda$ est plus grand.

En définitive, soient une équation (1) donnée, $\mu$ le degré du numérateur de R, $\mu'$ celui du dénominateur. Désignons par $\nu$ le plus grand des nombres $\mu$ et $\mu' + 2$, et mettons l'équation sous la forme

$$(1) \qquad y' = \frac{a_\nu y^\nu + a_{\nu-1} y^{\nu-1} + \ldots + a_0}{b_{\nu-2} y^{\nu-2} + b_{\nu-3} y^{\nu-3} + \ldots + b_0},$$

en introduisant, s'il est nécessaire, des coefficients nuls. Pour que l'intégrale d'une telle équation ne prenne que $n$ valeurs autour des points critiques mobiles, il faut et il suffit que les $(2\nu - 1)$ coefficients $a_i$, $b_j$ satisfassent à un système de $(\nu - 2)$ relations, $(\alpha)_n^\nu$, bien déterminé pour chaque valeur de $n$ et de $\nu$. Le nombre $n$ ne peut être inférieur à $\frac{\nu}{2}$; si $n = \frac{\nu}{2}$, les relations $(\alpha)_n^\nu$ dépendent des coefficients de $y'$ et de leurs dérivées premières; de plus, ces coefficients s'expriment explicitement à l'aide de $(\nu - 1)$ fonctions indépendantes. Si $n$ dépasse $\frac{\nu}{2}$, les dérivées des $a_i$, $b_j$ figurent dans les relations $(\alpha)_n^\nu$ avec un indice d'autant plus élevé que $(2n - \nu)$ est plus grand; les coefficients $a_i$, $b_j$ s'expriment à l'aide de $(2n+1)$ fonctions liées par $(2n - \nu)$ équations différentielles, qu'on ne sait pas intégrer en général.

Si les coefficients d'une équation (1) vérifient le système $(\alpha)_n^\nu$, l'équation se ramène linéairement à une équation de Riccati, par une transformation (3).

Pour appliquer à un exemple simple les remarques générales qui précèdent, étudions les équations (1) dont l'intégrale ne prend que deux valeurs autour des points critiques mobiles. L'intégrale peut s'écrire

$$y^2 + (B - A\gamma)y - \gamma = 0, \tag{7}$$

ou encore

$$\gamma = \frac{y^2 + By}{Ay + 1},$$

$\gamma$ vérifiant l'équation

$$\gamma' = m\gamma^2 + n\gamma + p.$$

Si l'on remplace $\gamma$ et $\gamma'$ en fonction de $y$ et $y'$, il vient

$$y' = \frac{my^4 + (2mB + nA + A')y^3 + [mB^2 + n(1 + AB) + pA^2 + A'B - AB']y^2 + (nB^2 + 2Ap - B')y + p}{Ay^2 + 2y + B}.$$

L'équation sous sa forme la plus générale peut donc s'écrire

$$y' = \frac{a_4 y^4 + 4a_3 y^3 + 6a_2 y^2 + 4a_1 y + a_0}{b_2 y^2 + 2b_1 y + b_0} = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]}. \tag{1)'$$

Considérons d'abord les équations telles que P et Q n'aient pas de facteur commun (en particulier, telles que $a_4$ et $b_2$ ne soient pas nuls à la fois).

Les sept rapports des coefficients $a_i$, $b_j$ s'expriment en fonction de A, B, $m$, $n$, $p$ de la manière suivante:

$$\frac{b_2}{b_1} = A, \qquad \frac{b_0}{b_1} = B, \qquad \frac{a_4}{b_1} = m, \qquad \frac{a_0}{b_1} = p,$$

$$4a_3 = \frac{2a_4 b_0}{b_1} + nb_2 + \frac{b'_2 b_1 - b_2 b'_1}{b_1},$$

$$6a_2 = \frac{a_4 b_0^2}{b_1^2} + \frac{n}{b_1}(b_1^2 + b_0 b_2) + \frac{a_0 b_2^2}{b_1^2} + \frac{b'_2 b_0 - b'_0 b_2}{b_1},$$

$$4a_1 = \frac{nb_0^2}{b_1} + \frac{2a_0 b_2}{b_1} + \frac{b'_1 b_0 - b'_0 b_1}{b_1}.$$

Si nous égalons les trois valeurs de $n$, déduites de ces dernières équations, nous trouvons les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1)' jouisse de la propriété énoncée. Ces conditions sont les suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} & b_0^2(b_1^2+b_0b_2)(4a_3b_1-2a_4b_0+b_2b_1'-b_1b_2') \\ & = b_0^2 b_2[6a_2b_1^2-a_4b_0^2-a_0b_2^2+b_1(b_0'b_2-b_0b_2')] \\ & = b_1b_2(b_1^2+b_0b_2)(4a_1b_1-2a_0b_2+b_0'b_1-b_1'b_0). \end{aligned}\right.$$

Si les coefficients $a_i$, $b_j$ vérifient ces relations, l'équation $(1)'$ se ramène, par la transformation

$$\gamma = \frac{b_1y^2+b_0}{b_2y+b_1},$$

à l'équation

$$\gamma' = \frac{a_4}{b_1}\gamma^2 + \frac{1}{b_1b_2}(4a_3b_1-2a_4b_0+b_2b_1'-b_2'b_1)\gamma + \frac{a_0}{b_1}.$$

Le calcul précédent suppose que $\gamma$ dépend de la constante d'intégration. Les conditions (9) sont néanmoins générales; il serait aisé de le voir directement en écrivant l'intégrale ainsi

$$y^2+\gamma_1(x)y+\mathrm{C}(x)=0,$$

$\gamma_1$ vérifiant l'équation

$$\gamma_1' = m\gamma_1^2+n\gamma_1+p.$$

Mais, plus simplement, il suffit de remarquer que, si une équation $(1)'$ satisfait aux conditions (9), l'équation obtenue en remplaçant $y$ par $y_1+k$ jouit de la même propriété.

Observons à ce sujet que, dans l'équation (8), le coefficient de $y$ au dénominateur n'est jamais nul. Le cas où $b_1$ serait nul dans $(1)'$ correspond au cas où $\gamma$ ne renfermerait pas de constante. Si, en effet, on exprime $\gamma_1$ et $\gamma_1'$ en $y$ et $y'$, le dénominateur de $\mathrm{R}[y,(x)]$ dans l'équation $(1)'$ ainsi obtenue est $y^2-\mathrm{C}$.

Étudions maintenant les équations $(1)'$, telles que P et Q aient un facteur commun et un seul. (Ils n'en sauraient admettre deux, autrement l'équation serait une équation de Riccati.) Dans cette hypothèse, le numérateur de $y'$ dans l'équation (8) doit s'annuler identiquement, si l'on y remplace $y$ par une des quantités

$$y = \frac{-1\pm\sqrt{1-\mathrm{AB}}}{\mathrm{A}},$$

d'où une condition entre $m$, $n$, $p$, A, B, A', B', et l'équation (1)' s'écrit

$$(1)'' \qquad y' = \frac{a_3 y^3 + 3a_2 y^2 + 3a_1 y + a_0}{b_1 y + b_0},$$

les $a$, $b$ s'exprimant en fonction des quantités $m$, $n$, $p$, A, B, A', B', liées par la condition précédente. Inversement, en tenant compte de cette condition, on peut calculer $m$, $n$, A, B, A', B' à l'aide des cinq rapports $\frac{a_i}{b_j}$ et de $p$. En écrivant que $A' = \frac{dA}{dx}$, $B' = \frac{dB}{dx}$, on forme deux relations où figurent $a_i$, $b_j$, $p$ et leurs dérivées premières. L'élimination de la fonction $p$ conduit à une équation unique portant sur les $a_i$, $b_j$ et leurs dérivées jusqu'au second ordre *au plus*. En réalité, $\frac{dp}{dx}$ n'intervient pas, et la condition finale est du premier ordre par rapport aux $a_i$, $b_j$. Mais on voit que le calcul ainsi conduit serait déjà pénible et deviendrait impraticable pour des équations plus compliquées. En outre, certaines particularités ne se trouveraient pas mises en évidence, celles-ci par exemple que les équations (1)'' de la classe qui nous occupe s'intègrent toujours par quadratures. Pour rendre les calculs plus simples et plus élégants, nous allons introduire ici une transformation dont nous avons déjà dit un mot, et qui permet de ramener les équations (1) à des formes réduites sur lesquelles leurs propriétés se laissent mieux apercevoir.

2. Soit une équation

$$(1) \qquad y' = R[y, (x)] = \frac{P[y, (x)]}{Q[y, (x)]},$$

dans laquelle nous effectuons le changement de variable et de fonction

$$(2) \qquad y = \frac{hy_1 + h_1}{ky_1 + k_1}, \qquad x = \varphi(x_1),$$

$h$, $h_1$, $k$, $k_1$ étant des fonctions de $x_1$. Si l'intégrale de (1) ne prend que $n$ valeurs autour des points critiques mobiles, l'intégrale de la nouvelle équation

$$(1)' \qquad y'_1 = R_1[y_1, (x_1)]$$

jouit de la même propriété, et réciproquement. Nous avons remarqué d'ailleurs, dans le Chapitre précédent, que la substitution (2) est, pour les équations (1), la plus générale qui conserve cette propriété des intégrales.

Si donc les coefficients de l'équation (1) satisfont aux conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale soit de l'espèce indiquée, ces conditions seront encore vérifiées par les coefficients de (1)′, et réciproquement. Autrement dit, ces conditions ne sont pas altérées par la substitution (2). Pour l'objet que nous poursuivons, il nous est donc loisible de nous servir de cette substitution pour ramener à certaines formes particulières toutes les équations (1) qui se déduisent l'une de l'autre par une telle substitution. Une fois connues les propriétés d'une équation ainsi réduite, il est aisé d'en déduire les propriétés des équations qui lui correspondent par la transformation (2) la plus générale. Nous sommes ainsi conduit à étudier les simplifications que peut apporter dans une équation (1) la substitution (2). Écrivons d'abord l'équation (1)′ sans rien supposer sur les coefficients $h, h_1, k, k_1, \varphi$. Si $\mu$ désigne le degré P, $\mu'$ celui de Q, cette équation est de la forme

$$\frac{Ay_1'+By_1^2+Cy_1+D}{(ky_1+k_1)^2}=\frac{(ky_1+k_1)^{\mu'}P'[y_1,(x_2)]}{(ky_1+k_1)^{\mu}Q'[y_1,(x_2)]},$$

P′ et Q′ représentant des polynômes en $y_1$ de degré $\mu$ et $\mu'$; c'est-à-dire qu'on a, en appelant $\nu$ le plus grand des nombres $\mu$ et $\mu'+2$,

$$(1)' \qquad \frac{dy_1}{dx_1}=\frac{a_\nu^1 y_1^\nu+a_{\nu-1}^1 y_1^{\nu-1}+\ldots+a_0}{b_{\nu-2}^1 y^{\nu-2}+b_{\nu-3}^1 y^{\nu-3}+\ldots+b^0}.$$

Les coefficients $a_\nu^1$, $b_{\nu-2}^1$ ne sont nuls que pour des transformations (2) particulières. Ils ne sauraient être nuls à la fois; autrement, P′ et Q′ auraient un facteur commun, par suite, P et Q, et la fraction $\frac{P}{Q}$ ne serait pas irréductible.

Pour abréger, nous appellerons le nombre $\nu$ *degré* du coefficient différentiel de (1), et nous dirons que deux équations (1) sont de la même *classe*, quand elles se correspondent par une substitution (2). Pour que deux équations soient de la même classe, il faut évidemment que leurs coefficients différentiels soient de même *degré*. Écrivons ces deux équations sous leur forme la plus générale

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_\nu y^\nu + a_{\nu-1} y^{\nu-1} + \ldots + a_0}{b_{\nu-2} y^{\nu-2} + \ldots + b_0},$$

$$(1)' \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{a_\nu^1 y_1^\nu + a_{\nu-1}^1 y_1^{\nu-1} + \ldots + a_0^1}{b_{\nu-2}^1 y^{\nu-2} + \ldots + b_0^1}.$$

En effectuant sur (1) une substitution (2) quelconque, et en égalant les coefficients de l'équation ainsi obtenue à ceux de (1)', on a $(2\nu - 1)$ relations entre lesquelles on peut éliminer $\varphi$ et les trois rapports des $h$, $h_1$, $k$, $k_1$; il reste ainsi $(2\nu - 5)$ équations liant les coefficients de (1) et (1)' et qui sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (1) et (1)' soient de la même classe.

Les substitutions (2) forment un groupe : à ce groupe doivent correspondre des invariants, d'après la théorie générale de Sophus Lie. Il est aisé, d'ailleurs, de s'en rendre compte dans ce cas particulier de la manière suivante :

Faisons d'abord $x = x_1$ dans la substitution (2). Pour une valeur donnée de $n$, on peut alors éliminer, entre les $(2\nu - 1)$ relations dont nous venons de parler, les rapports des $h$, $h_1$, $k$, $k_1$. Les $(2\nu - 4)$ relations ainsi obtenues renferment les $a_i$, $b_j$, $a_i^1$, $b_j^1$ et leurs dérivées; écrivons-les de façon que chacune d'elles contienne une des lettres $a_i^1$, $b_i^1$ que ne contienne aucune autre.

Imaginons qu'on ait trouvé pour les équations (1) des formes canoniques telles qu'à toutes les équations d'une classe corresponde une équation canonique et une seule

$$(3) \qquad Y' = \frac{A_\nu Y^\nu + A_{\nu-1} Y^{\nu-1} + \ldots + A_0}{B_{\nu-2} Y^{\nu-2} + \ldots + B_0},$$

les $A_i$, $B_j$ désignant des fonctions de X. Pour cela, nous disposons des quatre éléments arbitraires de la substitution (2), de façon que les $A_i$, $B_j$ vérifient quatre conditions convenablement choisies. Si (3) est l'équation réduite qui correspond à (1), les rapports des $A_i$, $B_j$ s'expriment en fonction des coefficients $a_i$, $b_j$,

$$\frac{A_i(X)}{B_j(X)} = F_{i,j}\left(\ldots, a_i, \ldots, b_j, \ldots, \frac{da_i}{dx}, \ldots\right),$$

et X est liée à $x$ dans ces équations par la formule

$$X = \psi(x),$$

$\psi$ dépendant aussi des $a_i$, $b_j$ et de leurs dérivées. D'autre part, si l'équation (1)' est de la même classe que l'équation (1), on a également

$$\frac{A_i(X)}{B_j(X)} = F_{i,j}\left(\ldots, a_i^1, \ldots, b_j^1, \ldots, \frac{da_i^1}{dx}, \ldots, \frac{db_j^1}{dx}, \ldots\right)$$

avec

$$X = \psi\left(\ldots. a_i^1, \ldots, b_j^1, \ldots, \frac{da_i^1}{dx}, \ldots, \frac{db_j^1}{dx}, \ldots\right);$$

c'est-à-dire que les expressions $F_{i,j}$ et $\psi$ sont des invariants. Ces $2n$ invariants ne sont pas distincts, puisque les $(2n-1)$ rapports $\frac{A_i}{B_j}$ sont liés par quatre relations. Nous mettons donc ainsi en évidence $(2n-4)$ quantités que n'altère pas le changement des $a_i$, $b_j$, $x$ en $a_i^1$, $b_j^1$, $x_1$. Pour que les équations (1) et (1)' soient de la même classe, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $x = \varphi(x_1)$ vérifiant ces $(2n-4)$ conditions d'invariance. Il en résulte que les $(2n-4)$ invariants ainsi formés sont distincts : sinon il faudrait moins de $(2n-5)$ conditions pour exprimer que (1) et (1)' se correspondent. D'autre part, un invariant quelconque s'exprimera en fonction des précédents et de leurs dérivées : sinon $(2n-4)$ conditions au moins seraient nécessaires pour que (1) et (1)' fussent de la même classe. On le voit d'ailleurs directement en prenant l'équation sous la forme canonique : un invariant quelconque est une fonction des $A_i$, $B_j$, $\frac{dA_i}{dX}$, $\cdots$ et, par suite, une fonction des $(2n-4)$ invariants considérés.

Cherchons donc à déterminer de telles formes canoniques des équations (1). On peut, par exemple, procéder ainsi :

Mettons en évidence dans l'équation (1) les $(\nu-2)$ racines, simples ou confondues, du dénominateur $Q[y, (x)]$,

$$y' = \frac{P[y, (x)]}{(y-\alpha)^\lambda (y-\alpha_1)^{\lambda_1}\ldots} = \frac{P[y, (x)]}{(y-\alpha)^\lambda q[y, (x)]}.$$

Soit $\alpha$ la racine d'ordre de multiplicité le plus élevé de Q; $q$ est un polynôme en $y$ de degré $\nu - \lambda - 2$,

$$q = y^{\nu-\lambda-2} + b'_{(\nu-\lambda-3)} y^{\nu-\lambda-3} + \ldots + b'_0.$$

Posons d'abord

$$y - \alpha = \frac{1}{z}.$$

Il vient

$$z' = \frac{c_\nu z^\nu + c_{\nu-1} z^{\nu-1} + \ldots + c_0}{\gamma_{\nu-\lambda-2} z^{\nu-\lambda-2} + \gamma_{\nu-\lambda-3} z^{\nu-\lambda-3} + \ldots + \gamma_0} = \frac{\mathrm{S}[z, (x)]}{\mathrm{T}[z, (x)]}.$$

Les $c_i$, $\gamma_j$ se calculent sans peine à l'aide des $a_i, b_j$. Si $\mathrm{P}(\alpha)$, $\mathrm{P}'(\alpha), \ldots$, $q(\alpha)$, $q'(\alpha)$, ... représentent les polynômes P et $q$ et leurs dérivées par rapport à $y$, où l'on fait $y = \alpha$, on a

$$c_\nu = -\mathrm{P}(\alpha), \quad c_{\nu-1} = \frac{-\mathrm{P}'(\alpha)}{1}, \quad \ldots, \quad c_{\nu-\lambda+1} = \frac{-1}{1.2\ldots(\lambda-1)} \mathrm{P}^{(\lambda-1)}(\alpha),$$

$$c_{\nu-\lambda} = \alpha' q(\alpha) - \frac{1}{1.2\ldots\lambda} \mathrm{P}^\lambda(\alpha), \quad \ldots,$$

$$c_2 = \frac{\alpha'}{1.2\ldots(\nu-\lambda-2)} q^{\nu-\lambda-2}(\alpha) - \frac{1}{1.2\ldots(\nu-2)} \mathrm{P}^{\nu-2}(\alpha),$$

$$c_1 = -\frac{1}{1.2\ldots(\nu-1)} \mathrm{P}^{\nu-1}(\alpha), \quad c_0 = -\frac{1}{1.2\ldots\nu} \mathrm{P}^\nu(\alpha)$$

et

$$\gamma_{\nu-\lambda-2} = q(\alpha), \quad \gamma_{\nu-\lambda-3} = \frac{q'(\alpha)}{1}, \quad \ldots, \quad \gamma_0 = \frac{1}{1.2\ldots(\nu-\lambda-2)} q^{(\nu-\lambda-2)}(\alpha).$$

On peut remarquer que $c_0 = -a_\nu$, et que $\gamma_0 = 1$ ; les coefficients $c_\nu$, $\gamma_{\nu-\lambda-2}$ sont tous deux différents de zéro.

Introduisons maintenant le changement de fonction

$$z = t + \mathrm{A},$$

et déterminons A de façon qu'au numérateur de $\dfrac{dt}{dx}$ ne figure pas de terme en $t^{\nu-1}$, il faut pour cela et il suffit que

$$\mathrm{A} = \frac{-c_{(\nu-1)}}{\nu c_\nu},$$

et l'équation en $t$ s'écrit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d_\nu t^\nu + d_{\nu-1} t^{\nu-1} + \ldots + d^0}{\delta_{(\nu-\lambda-2)} t^{(\nu-\lambda-2)} + \ldots + \delta_0};$$

Les $d_i$, $\delta_j$ s'expriment à l'aide des $c_i$, $\gamma_j$ de la façon suivante :

$$d_0 = S(A) - A'T(h), \quad \ldots, \quad d_{(\nu-\lambda-2)} = \frac{S^{\nu-\lambda-2}(A)}{1.2\ldots(\nu-\lambda-2)} - \frac{A'T^{\nu-\lambda-2}(A)}{1.2\ldots(\nu-\lambda-2)},$$

$$d_{\nu-\lambda-1} = \frac{1}{1.2\ldots(\nu-\lambda-1)} S^{\nu-\lambda-1}(A), \quad \ldots, \quad d_\nu = \frac{1}{1.2\ldots\nu} S^\nu(A) = c_\nu,$$

$$\delta_0 = T(A), \quad \delta_1 = \frac{T'(A)}{1}, \quad \ldots, \quad \delta_{\nu-\lambda-2} = \frac{1}{1.2\ldots(\nu-\lambda-2)} T^{\nu-\lambda-2}(A) = \gamma_{\nu-\lambda-2}.$$

Faisons alors le nouveau changement de fonction

$$t = BY,$$

et déterminons B de façon qu'au numérateur de l'équation en Y, Y' ne figure pas de terme en $Y^{\nu-\lambda-1}$, c'est-à-dire, prenons

$$\frac{B'}{B} = \frac{d_{\nu-\lambda-1}}{\delta_{\nu-\lambda-2}}$$

ou

$$B = B_0 e^{\int \frac{d_{\nu-\lambda-1}}{\delta_{\nu-\lambda-2}} dx};$$

on a

$$\frac{dY}{dx} = \frac{D_\nu Y^\nu + D_{\nu-2} Y^{\nu-2} + \ldots + D_{\nu-\lambda} Y^{\nu-\lambda} + D_{\nu-\lambda-2} Y^{\nu-\lambda-2} + \ldots + D_0}{\Delta_{\nu-\lambda-2} Y^{\nu-\lambda-2} + \ldots + \Delta_0},$$

avec

$$D_\nu = B^\nu d_\nu, \quad \ldots, \quad D_{\nu-\lambda} = B^{\nu-\lambda} d_{(\nu-\lambda)},$$
$$D_{\nu-\lambda-2} = B^{\nu-\lambda-3}(B d_{\nu-\lambda-2} - B'\delta_{\nu-\lambda-3}), \quad \ldots,$$
$$D_1 = B d_1 - A'\delta_0, \quad D_0 = d_0$$

et

$$\Delta_{\nu-\lambda-2} = \delta_{\nu-\lambda-2} . B^{\nu-\lambda-1}, \quad \ldots, \quad \Delta_0 = \delta_0 . B.$$

Introduisons enfin le changement de variable $x = \varphi(X)$, et cherchons à rendre égaux les coefficients des termes de degré le plus élevé au numérateur et au dénominateur de $\frac{dY}{dX}$; il faut pour cela et il suffit que

$$dX = \frac{D_\nu(x)}{\Delta_{\nu-\lambda-2}(x)} dx;$$

cette relation peut encore s'écrire

$$dX = \frac{c_\nu}{\gamma_{\nu-\lambda-2}} B^{\lambda+1} dx = -\frac{P(\alpha)}{q(\alpha)} B_0^{\lambda+1} e^{\int_{x_0}^{x} \frac{d_{\nu-\lambda-1}}{d_{\nu-\lambda-2}} dx} dx.$$

Ce changement de variable ramène l'équation à la forme

$$(5) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{J_\nu Y^\nu + J_{\nu-2} Y^{\nu-2} + \ldots + J_{\nu-\lambda} Y^{\nu-\lambda} + J_{\nu-\lambda-2} Y^{\nu-\lambda-2} + \ldots + J_0}{I_{\nu-\lambda-2} Y^{\nu-\lambda-2} + \ldots + I_0} = \frac{\sigma[Y,(X)]}{\tau[Y,(X)]}.$$

Dans cette équation, le dénominateur est d'un degré inférieur au moins de trois unités au degré du numérateur; il ne renferme aucune racine de multiplicité supérieure à $\lambda$. Au numérateur, les termes de degré $\nu - 1$ et $\nu - \lambda - 1$ sont déficients. Enfin les coefficients des termes de degré le plus élevé, au numérateur et au dénominateur, sont égaux.

Toutes les équations de la même classe sont susceptibles d'être ramenées à la même équation canonique (5); mais cette réduction est possible d'une infinité de manières; autrement dit, une infinité d'équations (5) appartiennent à la même classe. Tout d'abord, la racine $\alpha$ une fois choisie, les transformations mêmes que nous avons employées montrent qu'on peut remplacer Y par $\frac{Y_1}{B_0}$ et X par $B_0^{\lambda+1}(X_1 + h)$, sans changer la forme de l'équation (5); $B_0$ et $h$ sont des constantes. Cette substitution est d'ailleurs, parmi les substitutions

$$(2)' \qquad Y = KY_1 + K_1, \qquad X = \varphi(X_1),$$

la plus générale qui jouisse de cette propriété. Pour le voir, il suffit d'opérer cette substitution et d'exprimer que $J_{\nu-1}^1$ est nul (ce qui donne $k_1 = 0$), que $J_{\nu-\lambda-1}^1$ est nul $\left(\text{ce qui donne } k = \text{const.} = \frac{1}{B_0}\right)$, enfin que $\frac{J_\nu^1}{I_{\nu-\lambda-2}^1} = 1$ [ce qui donne $X = B_0^{\lambda+1}(X_1 + h)$].

Cherchons maintenant les substitutions (2) les plus générales

$$Y = \frac{ky + k_1}{y - C}, \qquad X = \varphi(x),$$

susceptibles de faire correspondre l'équation (1) à une équation (5). Ceci ne peut avoir lieu, comme on l'aperçoit aussitôt, que si C est racine d'ordre $\lambda$ de l'équation $Q[y(x)] = 0$. Une fois cette racine choisie, soit $C = \alpha$, si l'on pose

$$z = \frac{1}{y-\alpha} \qquad \text{ou} \qquad y = \alpha + \frac{1}{z},$$

il vient

$$Y = \frac{ky + k_1}{y-\alpha} = k'z + k'_1,$$

et la réduction n'est plus possible que de la manière que nous avons indiquée.

Si donc $m$ désigne le nombre des racines $\alpha$ d'ordre $\lambda$ que renferme Q, il existera $m$ formes distinctes de l'équation (5), correspondant à l'équation (1), et chacune d'elles dépend de deux constantes arbitraires, $B_0$ et $h$. Les coefficients J et I sont des fonctions à $m$ valeurs des coefficients $a_i$, $b_j$ de leurs dérivées et de deux constantes, et ces fonctions, ainsi que $\frac{dX}{dx}$, sont des invariants de la substitution (2). D'une manière plus précise, ces quantités sont racines d'une équation d'ordre $m$, dont les coefficients dépendent rationnellement des $a_i$, $b_j$, $\frac{da_i}{dx}$, etc., et aussi de deux constantes $B_0$ et $h$. Si l'on donne aux constantes $B_0$ et $h$ des valeurs particulières, et qu'on remplace les $a_i$, $b_j$ et $x$ par les $a_i^1$, $b_j^1$ et $x_1$, ces coefficients gardent la même valeur, à condition de donner aux constantes des valeurs convenables.

Pour que deux équations (1) et (1)′ soient de la même classe, il faut et il suffit que toutes leurs formes réduites coïncident. Il suffit, pour cela, qu'une des formes réduites de (1) coïncide avec une des formes réduites de (1)′. Ceci revient à dire que les relations

$$J_k\left(\ldots, a_i, \ldots, b_j, \ldots, \frac{da_i}{dx}, \ldots\right) = J_k\left(\ldots, a_i^1, \ldots, b_j^1, \ldots, \frac{da_i^1}{dx_1}, \ldots\right),$$

$$I_l\left(\ldots, a_i, \ldots, b_j, \ldots, \frac{da_i}{dx}, \ldots\right) = I_l\left(\ldots, a_i^1, \ldots, b_j^1, \ldots, \frac{da_i^1}{dx_1}, \ldots\right),$$

$$\frac{P(\alpha)}{q(\alpha)} B^{\lambda+1} = \frac{P_1(\alpha_1)}{q_1(\alpha_1)} B_1^{\lambda+1}$$

sont vérifiées identiquement par une certaine fonction

$$x = \varphi(x_1).$$

[Ces relations sont au nombre de $2n-4$ dans le cas le plus général où $\lambda = 1$; si $\lambda$ est quelconque, il faut ajouter à ces $(2\nu - 3 - \lambda)$ conditions les $(\lambda - 1)$ conditions exprimant que $Q'$ a une racine d'ordre $\lambda$, comme $Q$].

Nous obtenons ainsi pour les équations (1) des formes canoniques absolument analogues à celles qu'a introduites M. Appell dans l'étude de la transformation

$$y = h(x_1)\,y_1 + h_1(x_1), \qquad x = \varphi(x_1). \tag{6}$$

L'équation de Riccati est la seule qui ne soit pas susceptible d'être ramenée à une forme telle que (5). On peut, et d'une infinité de manières, la réduire par une substitution (2) à l'équation

$$Y' = 0;$$

mais la détermination d'une quelconque de ces substitutions nécessite la connaissance d'une intégrale particulière de l'équation. Pour s'en rendre compte, il suffit de se rappeler que l'intégrale générale est donnée par la formule

$$\frac{hy + h_1}{ky + k_1} = \text{const.}$$

Pour toutes les valeurs de $\nu$ supérieures à 2, le procédé de réduction que nous avons indiqué s'applique. Soit $\nu = 3$, par exemple. L'équation la plus générale est

$$y' = \frac{a_3 y^3 + a_2 y^2 + \ldots + a_0}{b_1 y + b_0}; \tag{7}$$

si $b_1$ n'est pas nul, on l'écrit

$$y' = \frac{a_3 y^3 + a_2 y^2 + \ldots + a_0}{y - \alpha},$$

et, en posant

$$y - \alpha = \frac{1}{z},$$

il vient

$$z' = c_3 z^3 + 3c_2 z^2 + 3c_1 z + c_0,$$

avec

$$\begin{aligned}
c_3 &= -(a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0),\\
3c_2 &= \quad \alpha' - 3a_3\alpha^2 - 2a_2\alpha - a_1,\\
3c_1 &= -3a_3\alpha - 2a_2,\\
c_0 &= -a_3.
\end{aligned}$$

Si $b_1$ est nul, cette première réduction se trouve faite d'elle-même. En suivant alors la même marche que plus haut, on ramène l'équation à la forme canonique

$$\mathrm{Y}' = \mathrm{Y}^3 + \mathrm{J}(\mathrm{X}),$$

J ayant la valeur suivante, déjà calculée par M. Appell,

$$\mathrm{J} = \frac{c_0c_3^2 - 3c_1c_2c_3 + 2c_2^3 + c_3\dfrac{dc_2}{dx} - c_2\dfrac{dc_3}{dx}}{c_3^3}\, e^{-9\int\frac{c_1c_3 - c_2^2}{c_3}dx} \tag{8}$$

et X est liée à $x$ par la formule

$$\mathrm{X} = \int c_3\, e^{6\int\frac{c_1c_3 - c_2^2}{c_3}dx}\, dx.$$

J et X sont deux invariants de l'équation (7). On voit qu'ils s'expriment en fonction des $a_i$, $b_j$ et de leurs dérivées premières et secondes. Si l'on désigne par $\mathrm{J}_1$, $\mathrm{X}_1$ ce que deviennent ces invariants quand on y remplace $a_i$, $b_j$, $x$ par $a_i^1$, $b_j^1$, $x_1$, la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations (7) soient de la même classe est qu'il existe une fonction $x = \varphi(x_1)$ vérifiant les deux identités

$$\mathrm{J} = \mathrm{J}_1,$$
$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_1.$$

Cet invariant J a été déjà rencontré par M. Robert Liouville dans ses travaux sur l'équation (7).

Considérons de même le cas de $\nu = 4$,

$$y' = \frac{a_4y^4 + a_3y^3 + a^3y^2 + \ldots + a_0}{b_2y^2 + b_1y + b_0}.$$

Les formes de réduction seront différentes suivant que le dénominateur a, ou non, ses racines distinctes. Dans la première hypothèse, l'équation canonique s'écrit

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y^4 + J_1 Y + J_0}{Y + I_0};$$

dans la seconde

$$\frac{dY}{dX} = Y^4 + J_2 Y^2 + J_0.$$

Les invariants J et I se calculent aussitôt à l'aide des formules générales que nous avons établies précédemment. Nous nous dispenserons d'écrire ces égalités, dont l'établissement ne présente ni difficulté ni intérêt. Le plus simple est, dans chaque exemple particulier, de former directement ces invariants, en suivant la marche ordinaire de la réduction.

Citons encore les équations canoniques, qui correspondent aux valeurs de $\nu$,

$$\nu = 5, \qquad \nu = 6.$$

Pour $\nu = 5$, il existe trois types d'équations canoniques, suivant que le dénominateur de $y'$ n'a que des racines simples, ou admet soit une racine double, soit une racine triple. Ces trois types sont

$$Y' = \frac{Y^5 + J_2 Y^2 + J_1 Y + J_0}{Y^2 + I_1 Y + I_0},$$

$$Y' = \frac{Y^5 + J_3 Y^3 + J_1 Y + J_0}{Y + I_0},$$

$$Y' = Y^5 + J_3 Y^3 + J_2 Y^2 + J_0.$$

Pour $\nu = 6$, les formes réduites sont les suivantes :

$$Y' = \frac{Y^6 + J_3 Y^3 + J_2 Y^2 + J_1 Y + J_0}{Y^3 + I_2 Y^2 + I_1 Y + I_0},$$

$$Y' = \frac{Y^6 + J_4 Y^4 + J_2 Y^2 + J_1 Y + J_0}{Y^2 + I_1 Y + I_c},$$

$$Y' = \frac{Y^6 + J_4 Y^4 + J_3 Y^3 + J_1 Y + J_0}{Y + I_0},$$

$$Y' = Y^6 + J_4 Y^4 + J_3 Y^3 + J_2 Y^2 + J_0.$$

3. On peut se servir de ces équations canoniques et des invariants I

et J pour reconnaître les équations (1), qu'une substitution (2) ramène à des formes intégrables. Mais ceci nous entraînerait hors du sujet. Remarquons d'ailleurs que, la substitution $y = \alpha + \frac{1}{z}$ une fois effectuée, nous ne faisons plus subir à $y$ que des transformations linéaires, et je renvoie au Mémoire déjà cité de M. Appell pour le développement des propriétés de cette transformation.

Il convient de signaler toutefois une classe d'équations qui joue un rôle particulier vis-à-vis de la transformation (2) : je veux parler des équations (1) qui admettent un groupe infinitésimal de transformations (2).

On connaît un grand nombre de telles équations : les équations homogènes, les équations à coefficients constants, l'équation de Riccati. Pour cette dernière, en effet, l'intégrale générale $y$ est donnée en fonction d'une intégrale particulière par l'égalité

$$y = \frac{h(x, C)\,y_1 + h_1(x, C)}{k(x, C)\,y_1 + k_1(x, C)},$$

et cette égalité définit une transformation (2) infinitésimale de l'équation en elle-même.

Nous allons nous servir des formes réduites (5) pour déterminer toutes les classes d'équations qui admettent un tel groupe de transformations. Il nous suffit, pour cela, de trouver toutes les équations canoniques qui jouissent de cette propriété. Soit donc

$$Y_1 = \frac{h(X)\,Y + h_1(X)}{k(X)\,Y + k_1(X)}, \qquad X_1 = \psi(X),$$

$$Y_2 = \frac{h^1(X)\,Y + h_1^1(X)}{k^1(X)\,Y + k_1^1(X)}, \qquad X_2 = \psi^1(X)$$

deux substitutions du groupe qui transforme une équation (5) en elle-même. Ceci n'est possible, comme nous l'avons remarqué, que si $-\frac{k_1}{k}$, $-\frac{k_1^1}{k^1}$ sont racines d'ordre $\lambda$ de $\tau[Y, (X)]$. Si les deux substitutions sont deux substitutions voisines, $\frac{k_1}{k}$ doit être égal à $\frac{k_1^1}{k^1}$, et $Y_1$ est lié à $Y_2$ par la formule

$$Y_1 = HY_2 + H_1,$$

avec

$$X_1 = \chi(X_2).$$

Il en résulte que l'équation (5) reste inaltérée pour un tel groupe de transformations. Mais les seules substitutions (2)′ qui conservent à (5) sa forme sont, comme nous l'avons démontré,

$$Y = \frac{Y_1}{B_0}, \qquad X = B_0^{\lambda+1}(X_1 + h).$$

Les coefficients $I_k$, $J_l$ deviennent, après cette substitution,

$$\begin{gathered} J^1_{\nu-2}(X_1) = B_0^2 J_{\nu-2}[B_0^{\lambda+1}(X_1+h)], \\ \dots\dots\dots\dots, \\ J^1_0(X_1) = B_0^\nu J_0[B_0^{\lambda+1}(X_1+h)], \\ I^1_{\nu-\lambda-3}(X_1) = B_0 I_{\nu-\lambda-3}[B_0^{\lambda+1}(X_1+h)], \\ \dots\dots\dots\dots, \\ I^1_0 = B_0^{\nu-\lambda-2} I_0[B_0^{\lambda+1}(X_1+h)]. \end{gathered}$$

Par hypothèse, ces coefficients doivent rester les mêmes quand on remplace $B_0$ et $h$ par des constantes qui satisfont à une certaine relation. Cette relation peut être résolue, par rapport à $h$,

$$h = G(B_0).$$

Autrement, les I, J ne changeraient pas quand on remplace X par $X + h$, $h$ étant quelconque, et l'équation serait à coefficients constants. Nous sommes conduit ainsi à chercher des fonctions I, J qui satisfont à une relation fonctionnelle telle que

$$f(X) \equiv B_0^p f[B_0^{\lambda+1}(X+h)],$$

ou encore, en posant $B_0^{\lambda+1} = C$, $\dfrac{p}{\lambda+1} = q$,

$$f(X) = C^q f[C(X+h)].$$

Soit

$$f(X) = u, \qquad X = F(u).$$

L'équation fonctionnelle équivaut à la suivante :

$$C(X+h) = F\left(\frac{u}{C^q}\right),$$

d'où, en différentiant par rapport à $u$,

$$C \frac{dX}{du} = F'\left(\frac{u}{C^q}\right)\frac{1}{C^q},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dX}{du} = F'\left(\frac{u}{C^q}\right)\frac{1}{C^{q+1}},$$

quel que soit C.

Laissons $u$ constant ($u = 1$ par exemple) et faisons varier C; on voit que

$$F'\left(\frac{1}{C^q}\right)\frac{1}{C^{q+1}} = \text{const.} = \alpha.$$

Nous tirons de là

$$F'(u) = \alpha u^{-\frac{q+1}{q}},$$

$$F(u) = \alpha u^{-\frac{1}{q}} + \alpha'$$

et enfin

$$u = \frac{1}{\alpha(X-\beta)^q},$$

$\alpha$ et $\beta$ étant des constantes arbitraires. Cette fonction $u$ satisfait en effet à l'équation

$$u(X) = C^q u[C(X+h)],$$

quel que soit C, si $h$ vérifie la condition

$$h = \frac{\beta(1-C)}{C}.$$

Il en résulte, pour les fonctions I et J, les valeurs

$$\begin{aligned}
J_{\nu-2} &= (X-\beta)^{-\frac{2}{\lambda+1}}\alpha_{\nu-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J_0 &= (X-\beta)^{-\frac{\nu}{\lambda+1}}\alpha_0,\\
I_{\nu-\lambda-3} &= (X-\beta)^{-\frac{1}{\lambda+1}}\alpha'_{(\nu-\lambda-3)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
I_0 &= (X-\beta)^{\nu-\lambda=2}\alpha'_0.
\end{aligned}$$

Les $\alpha$, $\alpha'$ désignent des constantes, ainsi que $\beta$, qui est le même pour tous les I, J, puisque ceux-ci doivent rester invariants pour les mêmes transformations.

Dans ces conditions, l'équation (5) admet le groupe des substitutions

$$Y = \frac{Y_1}{B_0}, \qquad X = B_0^{\lambda+1} X_1 + \beta(1 - B_0^{\lambda+1}).$$

Si nous posons

$$(X - \beta)^{-\frac{1}{\lambda+1}} = \xi,$$

l'équation

$$\frac{dY}{d\xi} = R[Y, (\xi)]$$

est telle que son coefficient différentiel ne change pas quand on y remplace Y par CY, $\xi$ par C$\xi$ : c'est donc une fonction homogène, de degré zéro. La substitution

$$Y = t\xi, \qquad \xi = e^{\xi_1}$$

ramène l'équation à une équation dont les coefficients sont constants par rapport à $\xi$.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante : les équations (1) qui admettent un groupe infinitésimal de transformations (2) se ramènent, par une telle transformation, aux équations homogènes (ou aux équations à coefficients constants). Cette réduction s'opère à l'aide de quadratures.

L'équation de Riccati fait seule exception à ce théorème : on peut encore la ramener à l'équation homogène

$$\frac{dY}{dX} = 0;$$

mais cette réduction exige la connaissance d'une intégrale particulière de l'équation.

Ce point établi, proposons-nous de reconnaître si une équation (1) donnée numériquement correspond, par une transformation (2), à une équation (1)' également donnée. On vérifie s'il en est ainsi à l'aide d'opérations purement algébriques. Quant aux substitutions (2) elles-mêmes, il n'en saurait exister qu'un nombre fini, et, par suite, elles s'obtiennent algébriquement, à moins que les équations ne rentrent dans la classe exceptionnelle que nous venons d'étudier. Dans ce dernier cas, elles s'intègrent par quadratures si ce ne sont pas des équations de Riccati.

(*A suivre.*)