ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ED. COMBESCURE

Sur les déterminants fonctionnels et les coordonnées curvilignes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 4 (1867), p. 93-131

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1867_1_4__93_0>

SUR

LES DÉTERMINANTS FONCTIONNELS

ET

LES COORDONNÉES CURVILIGNES,

PAR M. ED. COMBESCURE,

AGRÉGÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Les recherches suivantes ont principalement pour objet une certaine extension au cas général des coordonnées curvilignes obliques de la grande théorie créée par M. Lamé. J'ajoute néanmoins quelques remarques qui ne sont peut-être pas sans importance, touchant les systèmes orthogonaux. Enfin j'ai cru devoir rattacher toute cette théorie à celle des déterminants fonctionnels, dont je rappelle les propriétés qui me sont utiles, en les déduisant de la considération de formes quadratiques.

§ I. — *Forme quadratique du produit de deux déterminants. — Identités qui en proviennent.*

Soient les deux déterminants, aux éléments tout à fait indépendants,

$$X = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}, \qquad Z = \begin{vmatrix} z_1^{(1)} & z_2^{(1)} & \ldots & z_n^{(1)} \\ z_1^{(2)} & z_2^{(2)} & \ldots & z_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n)} & z_2^{(n)} & \ldots & z_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

et leur produit

$$V = \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \dots & v_{n,n} \end{vmatrix}$$

dans lequel $v_{i,j} = \sum\limits_g x_i^{(g)} z_j^{(g)}$, la sommation s'étendant de $g = 1$ à $g = n$, ainsi que cela sera toujours sous-entendu pour tous les indices sommatoires.

De

$$\frac{dV}{dx_i^{(g)}} = Z\frac{dX}{dx_i^{(g)}}, \quad \frac{dV}{dz_i^{(g)}} = X\frac{dZ}{dz_i^{(g)}},$$

on conclut tout de suite

$$\sum_g x_j^{(g)} \frac{dV}{dx_i^{(g)}} = 0 \text{ ou } V, \quad \sum_g z_j^{(g)} \frac{dV}{dz_i^{(g)}} = 0 \text{ ou } V,$$

les seconds membres étant o ou V, suivant que les indices i, j sont différents ou coïncident. Cela posé, on peut représenter le déterminant V par l'une quelconque des n formes quadratiques

$$F^{(g)} = \sum_{i,j} C_{i,j}\, x_i^{(g)} z_j^{(g)}$$

répondant aux n valeurs de g, et dans lesquelles les *coefficients* $C_{i,j}$ conservent les mêmes valeurs. En effet, dans ces hypothèses et à cause de

$$\frac{dF^{(g)}}{dx_i^{(g)}} = \sum_j C_{i,j} z_j^{(g)}, \quad \frac{dF^{(g)}}{dz_j^{(g)}} = \sum_i C_{i,j}\, x_i^{(g)}$$

on aura, par ce qui précède immédiatement,

$$(\mathrm{a}) \qquad \left\{ \begin{aligned} V \text{ ou } 0 &= \sum_g x_h^{(g)} \frac{dF^{(g)}}{dx_i^{(g)}} = \sum_j C_{i,j} \sum_g x_h^{(g)} z_j^{(g)} = \sum_j C_{i,j}\, v_{h,j}, \\ V \text{ ou } 0 &= \sum_g z_k^{(g)} \frac{dF^{(g)}}{dz_j^{(g)}} = \sum_i C_{i,j} \sum_g x_k^{(g)} x_i^{(g)} = \sum_i C_{i,j}\, v_{k,i}; \end{aligned} \right.$$

et des n^2 égalités formées par les membres extrêmes on tirera, pour le coefficient $C_{i,j}$, la valeur symétrique $\frac{dV}{dv_{i,j}}$. On aura donc

$$F^{(g)} = \sum_{i,j} \frac{dV}{dv_{i,j}} x_i^{(g)} z_j^{(g)} = V.$$

En multipliant par $\frac{dF^{(g)}}{dz_h^{(g)}}$ l'expression ci-dessus de $\frac{dF^{(g)}}{dx_i^{(g)}}$ et prenant ensuite la $\sum_g$, il viendra

$$\sum_g \frac{dF^{(g)}}{dx_i^{(g)}} \frac{dF^{(g)}}{dz_h^{(g)}} = \sum_j C_{i,j} \sum_g z_j^{(g)} \frac{dF^{(g)}}{dz_h^{(g)}};$$

et comme, en vertu de (a), tous les termes du second membre disparaissent, excepté pour $j = h$, il en résulte

$$\text{(b)} \qquad \sum_g \frac{dF^{(g)}}{dx_i^{(g)}} \frac{dF^{(g)}}{dz_j^{(g)}} = VC_{i,j} = V \frac{dV}{dv_{i,j}}.$$

Si l'on suppose, pour un moment, que les deux déterminants X et Z coïncident tour à tour l'un avec l'autre, et que l'on pose

$$X^2 = P = \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & \cdots & \xi_{1,n} \\ \xi_{1,2} & \xi_{2,2} & \cdots & \xi_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1,n} & \xi_{2,n} & \cdots & \xi_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad Z^2 = Q = \begin{vmatrix} \zeta_{1,1} & \zeta_{1,2} & \cdots & \zeta_{1,n} \\ \zeta_{1,2} & \zeta_{2,2} & \cdots & \zeta_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \zeta_{1,n} & \zeta_{2,n} & \cdots & \zeta_{n,n} \end{vmatrix},$$

où

$$\xi_{i,j} = \xi_{j,i} = \sum_g x_i^{(g)} x_j^{(g)}, \quad \zeta_{i,j} = \zeta_{j,i} = \sum_g z_i^{(g)} z_j^{(g)} \quad \text{et} \quad PQ = V^2;$$

on aura, comme cas particulier de ce qui vient d'être dit, ou par des considérations directes tout à fait pareilles à celles qui précèdent,

$$2f^{(g)} = \sum_{i,j} A_{i,j}\, x_i^{(g)} x_j^{(g)} = P, \quad 2\mathrm{f}^{(g)} = \sum_{i,j} B_{i,j}\, z_i^{(g)} z_j^{(g)} = Q,$$

où

$$A_{i,j} = A_{j,i} = \frac{1}{2}\frac{dP}{d\xi_{i,j}}, \quad A_{i,i} = \frac{dP}{d\xi_{i,i}}, \quad B_{i,j} = B_{j,i} = \frac{1}{2}\frac{dQ}{d\zeta_{i,j}}, \quad B_{i,i} = \frac{dQ}{d\zeta_{i,i}},$$

les formes f, f vérifiant les relations

$$(\text{a}^*) \qquad \sum_g x_j^{(g)} \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}} = 0 \text{ ou } P, \quad \sum_g z_j^{(g)} \frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_i^{(g)}} = 0 \text{ ou } Q,$$

et donnant lieu aux identités

$$(\mathrm{b}^*) \qquad \sum_g \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}}\frac{df^{(g)}}{dx_j^{(g)}} = \mathrm{PA}_{i,j}, \quad \sum_g \frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_i^{(g)}}\frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_j^{(g)}} = \mathrm{QB}_{i,j}.$$

Maintenant il est aisé de voir que

$$(\mathrm{c}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_i^{(g)} &= \frac{1}{\mathrm{Q}}\sum_h v_{i,h}\frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_h^{(g)}} = \frac{1}{\mathrm{V}}\sum_h \xi_{i,h}\frac{d\mathrm{F}^{(g)}}{dx_h^{(g)}}, \\ z_i^{(g)} &= \frac{1}{\mathrm{P}}\sum_h v_{h,i}\frac{df^{(g)}}{dx_h^{(g)}} = \frac{1}{\mathrm{V}}\sum_h \zeta_{i,h}\frac{d\mathrm{F}^{(g)}}{dz_h^{(g)}}; \end{aligned} \right.$$

car de la première ligne, par exemple, multipliée tour à tour par $x_j^{(g)}$ et par $z_j^{(g)}$, puis sommée par $\sum\limits_g$, on conclut

$$\xi_{i,j} = \frac{1}{\mathrm{V}}\sum_h \xi_{i,h}\sum_g x_j^{(g)}\frac{d\mathrm{F}^{(g)}}{dx_h^{(g)}}, \quad v_{i,j} = \frac{1}{\mathrm{Q}}\sum_h v_{i,h}\sum_g z_j^{(g)}\frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_h^{(g)}},$$

où l'on voit tous les termes des seconds membres disparaître, en vertu de (a) (a*), excepté celui qui répond à $h = j$.

En multipliant entre elles les deux premières expressions de $x_i^{(g)}$, $z_j^{(g)}$ et sommant par $\sum\limits_g$, il vient

$$\xi_{i,j} = \frac{1}{\mathrm{Q}^2}\sum_h\sum_k v_{i,h}v_{j,k}\sum_g \frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_h^{(g)}}\frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_k^{(g)}},$$

c'est-à-dire, par (b*),

$$(\mathrm{d}) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\xi_{i,j} = \frac{1}{\mathrm{Q}}\sum_{h,k} v_{i,h}v_{j,k}\mathrm{B}_{h,k}, \\ &\text{et semblablement} \\ &\zeta_{i,j} = \frac{1}{\mathrm{P}}\sum_{h,k} v_{h,i}v_{k,j}\mathrm{A}_{h,k}. \end{aligned} \right.$$

La multiplication des deux dernières expressions de $x_i^{(g)}$, $z_j^{(g)}$ donne aussi

$$v_{i,j} = \frac{1}{\mathrm{V}}\sum_{h,k}\xi_{i,h}\zeta_{j,k}\mathrm{C}_{h,k}.$$

Lorsque les x et les z sont liées par les conditions $v_{i,j} = 0$ ou 1

(suivant que j est ou n'est pas différent de i), les formules (c) (d) se réduisent à

$$(\mathrm{c}^*)\left\{\begin{aligned} x_i^{(g)} &= \frac{1}{\mathrm{Q}}\frac{d\mathrm{f}^{(g)}}{dz_i^{(g)}} = \sum_j \xi_{i,j}\, z_j^{(g)},\\ z_i^{(g)} &= \frac{1}{\mathrm{P}}\frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}} = \sum_j \zeta_{i,j}\, x_i^{(g)}; \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{d}^*)\left\{\begin{aligned} \xi_{i,j} &= \frac{1}{\mathrm{Q}}\mathrm{B}_{i,j},\\ \zeta_{i,j} &= \frac{1}{\mathrm{P}}\mathrm{A}_{i,j}, \end{aligned}\right.$$

où $\mathrm{PQ} = \mathrm{V}^2 = 1$. Les formes f, f, de leur côté, reviennent à

$$\frac{2f^{(g)}}{\mathrm{P}} = \sum_{i,j}\zeta_{i,j}\, x_i^{(g)} x_j^{(g)} = 1, \qquad \frac{2\mathrm{f}^{(g)}}{\mathrm{Q}} = \sum_{i,j}\xi_{i,j}\, z_i^{(g)} z_j^{(g)} = 1,$$

et l'expression de $v_{i,j}$ qui fait suite à (d) donne $\sum_h \xi_{i,h}\zeta_{j,h} = 0$ ou 1.

On retombe ainsi, sauf des différences de forme, sur quelques résultats connus de la théorie des déterminants fonctionnels, en supposant

$$x_i^{(g)} = \frac{du_g}{d\alpha_i}, \qquad z_i^{(g)} = \frac{d\alpha_i}{du_g};$$

les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant des fonctions des $u_1, u_2, \ldots, u_n$ pris pour variables indépendantes, ou réciproquement.

§ II. — *Relations différentielles. — Distinction de deux groupes d'éléments.*

En désignant par t une variable indépendante quelconque, et posant généralement

$$(\mathrm{e}) \qquad \sum_g x_i^{(g)} \frac{dx_j^{(g)}}{dt} = \mathrm{R}_{i,j}^{(t)},$$

de sorte que

$$\mathrm{R}_{i,j}^{(t)} + \mathrm{R}_{j,i}^{(t)} = \frac{d\xi_{i,j}}{dt},$$

il est facile de reconnaître que l'on a identiquement

$$(\mathrm{f}) \qquad \mathrm{P}\frac{dx_h^{(g)}}{dt} = \sum_i \mathrm{R}_{i,h}^{(t)} \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}};$$

car on conclut de là, en multipliant par $x_k^{(g)}$ et prenant la $\sum\limits_g$,

$$P\sum_g x_k^{(g)} \frac{dx_h^{(g)}}{dt} = \sum_i R_{i,h}^{(t)} \sum_g x_k^{(g)} \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}},$$

où, en vertu de (a*), tous les termes disparaissent dans le second membre, à l'exception de celui qui répond à $i = k$.

De l'équation (f), multipliée par $\dfrac{df^{(g)}}{dx_j^{(g)}}$, puis sommée par $\sum\limits_g$, on tire, en intervertissant $\sum\limits_g$, $\sum\limits_i$, et ayant égard à (b*),

$$\text{(g)} \qquad \sum_g \frac{df^{(g)}}{dx_j^{(g)}} \frac{dx_h^{(g)}}{dt} = \sum_i A_{i,j} R_{i,h}^{(t)};$$

et dès lors, s étant une autre variable indépendante quelconque, on aura, en multipliant (f) par $\dfrac{dx_k^{(g)}}{ds}$,

$$P\sum_g \frac{dx_h^{(g)}}{dt} \frac{dx_k^{(g)}}{ds} = \sum_i R_{i,h}^{(t)} \sum_g \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}} \frac{dx_k^{(g)}}{ds} = \sum_i R_{i,h}^{(t)} \sum_j A_{i,j} R_{j,k}^{(s)}$$

ou bien

$$\text{(h)} \qquad P\sum_g \frac{dx_h^{(g)}}{dt} \frac{dx_k^{(g)}}{ds} = \sum_{i,j} A_{i,j} R_{i,h}^{(t)} R_{j,k}^{(s)}.$$

Maintenant, de

$$R_{h,k}^{(s)} = \sum_g x_h^{(g)} \frac{dx_k^{(g)}}{ds}$$

résulte

$$\frac{dR_{h,k}^{(s)}}{dt} = \sum_g \frac{dx_h^{(g)}}{dt} \frac{dx_k^{(g)}}{ds} + \sum_g x_h^{(g)} \frac{d^2 x_k^{(g)}}{dt\,ds};$$

d'où, en échangeant t et s et ayant égard à (h), on tire

$$\text{(k)} \qquad \frac{dR_{h,k}^{(s)}}{dt} - \frac{dR_{h,k}^{(t)}}{ds} = \frac{1}{P} \sum_{i,j} A_{i,j} \left(R_{i,h}^{(t)} R_{j,k}^{(s)} - R_{i,h}^{(s)} R_{j,k}^{(t)} \right).$$

Cette équation multiple, qui ne me paraît pas avoir été remarquée généralement, exprime en particulier les conditions d'intégralité des systèmes simultanés d'équations linéaires

$$(\mathrm{f}') \qquad \mathrm{P}\frac{dx_h^{(g)}}{dt} = \sum_i \mathrm{R}_{i,h}^{(t)} \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}}, \quad \mathrm{P}\frac{dx_h^{(g)}}{ds} = \sum_i \mathrm{R}_{i,h}^{(s)} \frac{df^{(g)}}{dx_i^{(g)}},$$

lorsqu'on se propose d'en déduire les x, toutes les autres quantités étant censées connues en t et en s. On aurait de nouvelles conditions, tout à fait pareilles, si l'on introduisait un nombre quelconque de variables indépendantes, $t, s, \ldots$; et l'on peut observer que l'ensemble des systèmes (f′) peut être intégré, sous les conditions analogues à (k), comme une suite de systèmes linéaires séparés aux différentielles ordinaires.

Dans le cas des déterminants fonctionnels, les R sont soumis à des conditions spéciales qui proviennent de la relation

$$\frac{dx_i^{(g)}}{d\alpha_j} = \frac{dx_j^{(g)}}{d\alpha_i};$$

d'où l'on tire

$$\sum_g x_h^{(g)} \frac{dx_i^{(g)}}{d\alpha_j} = \sum_g x_h^{(g)} \frac{dx_j^{(g)}}{d\alpha_i},$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{l}) \qquad \mathrm{R}_{h,i}^{(\alpha_j)} = \mathrm{R}_{h,j}^{(\alpha_i)}.$$

Cette relation, combinée avec $\mathrm{R}_{i,j}^{(\alpha_h)} + \mathrm{R}_{j,i}^{(\alpha_h)} = \dfrac{d\xi_{i,j}}{d\alpha_h}$, fournit

$$(\mathrm{m}) \qquad \mathrm{R}_{j,i}^{(\alpha_h)} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi_{i,j}}{d\alpha_h} + \frac{d\xi_{j,h}}{d\alpha_i} - \frac{d\xi_{i,h}}{d\alpha_j}\right);$$

ce qui permet, si on le juge à propos, d'introduire partout les ξ au lieu des R.

En vue surtout de la théorie des coordonnées curvilignes, il convient d'opérer une substitution particulière dans les formules précédentes, en se bornant au cas des déterminants fonctionnels. Je poserai

$$\left\{\begin{aligned} x_i^{(g)} &= l_i a_i^{(g)}, \\ \xi_{i,j} &= l_i l_j \lambda_{i,j}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} z_i^{(g)} &= \mathrm{h}_i \mathrm{a}_i^{(g)}, \\ \zeta_{i,j} &= \mathrm{h}_i \mathrm{h}_j \theta_{i,j}, \end{aligned}\right.$$

sous les conditions $\lambda_{i,i} = 1$, $\theta_{i,i} = 1$, de sorte qu'on aura

$$\sum_g a_i^{(g)} a_j^{(g)} = \lambda_{i,j}, \qquad \sum_g \mathrm{a}_i^{(g)} \mathrm{a}_i^{(g)} = \theta_{i,j}.$$

Les deux déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{1,2} & \lambda_{2,2} & \dots & \lambda_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1,n} & \lambda_{2,n} & \dots & \lambda_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad \nabla = \begin{vmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} & \dots & \theta_{1,n} \\ \theta_{1,2} & \theta_{2,2} & \dots & \theta_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta_{1,n} & \theta_{2,n} & \dots & \theta_{n,n} \end{vmatrix}$$

seront liés par la relation

$$\mathrm{h}_1 \mathrm{h}_2 \dots \mathrm{h}_n \sqrt{\nabla} \,.\, l_1 l_2 \dots l_n \sqrt{\Delta} = 1.$$

On pourra prendre pour les formes f, f les suivantes :

$$(\varphi) \quad \begin{cases} 2\varphi^{(g)} = \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{1,1}} a_1^{(g)} a_1^{(g)} + \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{1,2}} a_1^{(g)} a_2^{(g)} + \dots + \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{n,n}} a_n^{(g)} a_n^{(g)} = \Delta, \\ 2\varpi^{(g)} = \dfrac{d\nabla}{d\theta_{1,1}} \mathrm{a}_1^{(g)} \mathrm{a}_1^{(g)} + \dfrac{d\nabla}{d\theta_{1,2}} \mathrm{a}_1^{(g)} \mathrm{a}_2^{(g)} + \dots + \dfrac{d\nabla}{d\theta_{n,n}} \mathrm{a}_n^{(g)} \mathrm{a}_n^{(g)} = \nabla, \end{cases}$$

où il est entendu que les $\lambda_{i,i}$, $\theta_{i,i}$ sont remplacés par l'unité après les différentiations. Elles vérifieront les relations

$$(a^*) \qquad \sum_g a_j^{(g)} \frac{d\varphi^{(g)}}{da_i} = 0 \text{ ou } \Delta, \qquad \sum_g \mathrm{a}_j^{(g)} \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_i^{(g)}} = 0 \text{ ou } \nabla,$$

$$(b^*) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_g \frac{d\varphi^{(g)}}{da_i^{(g)}} \frac{d\varphi^{(g)}}{da_j^{(g)}} = \frac{1}{2} \Delta \frac{d\Delta}{d\lambda_{i,j}}, \\ \displaystyle\sum_g \frac{d\varphi^{(g)}}{da_i^{(g)}} \frac{d\varphi^{(g)}}{da_i^{(g)}} = \Delta \frac{d\Delta}{d\lambda_{i,i}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_g \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_i^{(g)}} \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_j^{(g)}} = \frac{1}{2} \nabla \frac{d\nabla}{d\theta_{i,j}}, \\ \displaystyle\sum_g \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_i^{(g)}} \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_i^{(g)}} = \nabla \frac{d\nabla}{d\theta_{i,i}}. \end{cases}$$

On aura ensuite, d'après ce que deviennent les (d^*),

$$(d^*) \quad \begin{cases} \theta_{i,j} = \dfrac{\dfrac{d\Delta}{d\lambda_{i,j}}}{2\sqrt{\dfrac{d\Delta}{d\lambda_{i,i}} \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{j,j}}}}, \\ \mathrm{h}_i^2 = \dfrac{1}{l_i^2} \cdot \dfrac{1}{\Delta} \cdot \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{i,i}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_{i,j} = \dfrac{\dfrac{d\nabla}{d\theta_{i,j}}}{2\sqrt{\dfrac{d\nabla}{d\theta_{i,i}} \dfrac{d\nabla}{d\theta_{j,j}}}}, \\ l_i^2 = \dfrac{1}{\mathrm{h}_i^2} \cdot \dfrac{1}{\nabla} \cdot \dfrac{d\nabla}{d\theta_{i,i}}. \end{cases}$$

Les (c) seront remplacées par

$$(c^*)\qquad \mathrm{a}_i^{(g)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta \dfrac{d\Delta}{d\lambda_{i,i}}}} \cdot \frac{d\varphi^{(g)}}{da_i^{(g)}}, \qquad a_i^{(g)} = \frac{1}{\sqrt{\nabla \dfrac{d\nabla}{d\theta_{i,i}}}} \cdot \frac{d\varpi^{(g)}}{d\mathrm{a}_i^{(g)}}.$$

Enfin, en posant

$$(e)\qquad \sum_g a_i^{(g)} \frac{da_j^{(g)}}{dt} = \mathfrak{R}_{i,j}^{(t)},$$

de sorte que

$$\mathfrak{R}_{i,j}^{(t)} + \mathfrak{R}_{j,i}^{(t)} = \frac{d\lambda_{i,j}}{dt},$$

on aura ici

$$(f)\qquad \Delta \frac{da_i^{(g)}}{dt} = \sum_h \mathfrak{R}_{h,i}^{(t)} \frac{d\varphi_{(g)}}{da_h^{(g)}},$$

$$(h)\qquad \Delta \sum_g \frac{da_h^{(g)}}{dt} \frac{da_k^{(g)}}{ds} = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{d\Delta}{d\lambda_{i,j}} \mathfrak{R}_{j,h}^{(t)} \mathfrak{R}_{i,k}^{(s)},$$

$$(k)\qquad \Delta\left(\frac{d\mathfrak{R}_{h,k}^{(t)}}{ds} - \frac{d\mathfrak{R}_{h,k}^{(s)}}{dt}\right) = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{d\Delta}{d\lambda_{i,j}} \left(\mathfrak{R}_{j,k}^{(t)} \mathfrak{R}_{i,h}^{(s)} - \mathfrak{R}_{j,k}^{(s)} \mathfrak{R}_{i,h}^{(t)}\right),$$

où $\mathfrak{R}_{i,i} = 0$. Cette dernière condition introduit une simplification dans les groupes (f), (h), (k), par comparaison avec les groupes homologues (f), (h), (k). Par contre, la condition (l) est remplacée par cette autre un peu plus complexe

$$(l)\qquad \frac{dl_i}{d\alpha_j} \lambda_{h,i} + l_i \mathfrak{R}_{h,i}^{(\alpha_j)} = \frac{dl_j}{d\alpha_i} \lambda_{h,j} + l_j \mathfrak{R}_{h,j}^{(\alpha_i)}.$$

Que si l'on voulait se débarrasser partout des $\mathfrak{R}$, il suffirait d'avoir égard à (m), en observant que

$$\mathrm{R}_{i,j}^{(t)} = l_i l_j \mathfrak{R}_{i,j}^{(t)} + \lambda_{i,j} l_i \frac{dl_j}{dt}.$$

Ces préliminaires posés, j'aborde la théorie des coordonnées curvilignes; mais, pour simplifier autant que possible la notation, je représenterai u_1, u_2, u_3 par x, y, z; α_1, α_2, α_3 par α, β, γ; l_1, l_2, l_3 par l, m, n; $\lambda_{2,3}$, $\lambda_{1,3}$, $\lambda_{1,2}$ par λ, μ, ν; h_1, h_2, h_3 par $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$; $\theta_{2,3}$, $\theta_{1,3}$, $\theta_{1,2}$ par ε, η, θ; $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$, $a_1^{(3)}$, $a_2^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, $a_2^{(3)}$, $a_3^{(1)}$, $a_3^{(2)}$, $a_3^{(3)}$ par a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''; enfin $\mathrm{a}_1^{(1)}$, $\mathrm{a}_1^{(2)}$, $\mathrm{a}_1^{(3)}$, ... par a, a', a'', ...

§ III. — *Coordonnées curvilignes. — Développement des formules.*

Les coordonnées rectilignes orthogonales d'un point quelconque de l'espace étant x, y, z, soient

$$F(x, y, z) = \alpha, \quad F_1(x, y, z) = \beta, \quad F_2(x, y, z) = \gamma$$

les équations de trois surfaces où α, β, γ désignent trois paramètres arbitraires qui n'entrent pas dans les premiers membres. Pour chaque système de valeurs attribuées à ces paramètres, l'intersection mutuelle des trois surfaces déterminera, d'après la conception féconde de M. Lamé, un point M de l'espace. Les éléments linéaires des intersections, issus de ce point, étant représentés par $l\,d\alpha$, $m\,d\beta$, $n\,d\gamma$ et λ, μ, ν désignant les cosinus des angles que font entre eux ces éléments, on aura ce premier groupe :

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx^2}{d\alpha^2} + \frac{dy^2}{d\alpha^2} + \frac{dz^2}{d\alpha^2} = l^2, \qquad && \frac{dx}{d\beta}\frac{dx}{d\gamma} + \frac{dy}{d\beta}\frac{dy}{d\gamma} + \frac{dz}{d\beta}\frac{dz}{d\gamma} = mn\lambda, \\ &\frac{dx^2}{d\beta^2} + \frac{dy^2}{d\beta^2} + \frac{dz^2}{d\beta^2} = m^2, && \frac{dx}{d\gamma}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{d\gamma}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{dz}{d\gamma}\frac{dz}{d\alpha} = nl\mu, \\ &\frac{dx^2}{d\gamma^2} + \frac{dy^2}{d\gamma^2} + \frac{dz^2}{d\gamma^2} = n^2, && \frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta} + \frac{dy}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta} + \frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta} = lm\nu, \end{aligned} \right.$$

auquel on adjoindra le groupe réciproque

$$(\mathrm{A}') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\alpha^2}{dx^2} + \frac{d\alpha^2}{dy^2} + \frac{d\alpha^2}{dz^2} = \mathfrak{l}^2, \qquad && \frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\beta}{dz}\frac{d\gamma}{dz} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}\varepsilon, \\ &\frac{d\beta^2}{dx^2} + \frac{d\beta^2}{dy^2} + \frac{d\beta^2}{dz^2} = \mathfrak{m}^2, && \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\gamma}{dz} = \mathfrak{l}\mathfrak{n}\eta, \\ &\frac{d\gamma^2}{dx^2} + \frac{d\gamma^2}{dy^2} + \frac{d\gamma^2}{dz^2} = \mathfrak{n}^2, && \frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\alpha}{dz}\frac{d\beta}{dz} = \mathfrak{l}\mathfrak{m}\theta, \end{aligned} \right.$$

où $\frac{d\alpha}{\mathfrak{l}}$; $\frac{d\beta}{\mathfrak{m}}$, $\frac{d\gamma}{\mathfrak{n}}$ sont respectivement, au point M, les plus courtes distances de deux surfaces successives de la même famille, et ε, η, θ les cosinus des angles que font entre elles ces plus courtes distances. On prendra ici

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{d\alpha}=la, && \frac{dx}{d\beta}=mb, && \frac{dx}{d\gamma}=nc,\\ &\frac{dy}{d\alpha}=la'. && \frac{dy}{d\beta}=mb', && \frac{dy}{d\gamma}=nc',\\ &\frac{dz}{d\alpha}=la'', && \frac{dz}{d\beta}=mb'', && \frac{dz}{d\gamma}=nc'', \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dx}=\mathfrak{l}\mathfrak{a}, && \frac{d\beta}{dx}=\mathfrak{m}\mathfrak{b}, && \frac{d\gamma}{dx}=\mathfrak{n}\mathfrak{c},\\ &\frac{d\alpha}{dy}=\mathfrak{l}\mathfrak{a}', && \frac{d\beta}{dy}=\mathfrak{m}\mathfrak{b}', && \frac{d\gamma}{dy}=\mathfrak{n}\mathfrak{c}',\\ &\frac{d\alpha}{dz}=\mathfrak{l}\mathfrak{a}'', && \frac{d\beta}{dz}=\mathfrak{m}\mathfrak{b}'', && \frac{d\gamma}{dz}=\mathfrak{n}\mathfrak{c}''. \end{aligned}\right.$$

Tout ceci posé, on aura

$$\Delta=1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu, \qquad \nabla=1-\varepsilon^2-\eta^2-\theta^2+2\varepsilon\eta\theta,$$
$$lmn\sqrt{\Delta}\,.\,\mathfrak{l}\mathfrak{m}\mathfrak{n}\sqrt{\nabla}=1, \qquad dV=\sqrt{\Delta}\,lmn\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

dV désignant l'élément de volume. Les formes (φ) deviendront

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} 2\varphi\ &=(1-\lambda^2)a^2+(1-\mu^2)b^2+(1-\nu^2)c^2+\Delta_\lambda bc+\Delta_\mu ac+\Delta_\nu ab=\Delta,\\ 2\varphi' &=(1-\lambda^2)a'^2+\ldots,\\ 2\varphi'' &=(1-\lambda^2)a''^2+\ldots, \end{aligned}\right.\\ &\left\{\begin{aligned} 2\varpi\ &=(1-\varepsilon^2)\mathfrak{a}^2+(1-\eta^2)\mathfrak{b}^2+(1-\theta^2)\mathfrak{c}^2+\nabla_\varepsilon\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\nabla_\eta\mathfrak{a}\mathfrak{c}+\nabla_\theta\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\nabla,\\ 2\varpi' &=(1-\varepsilon^2)\mathfrak{a}'^2+\ldots,\\ 2\varpi'' &=(1-\varepsilon^2)\mathfrak{a}''^2+\ldots, \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

les lettres placées en indices indiquent les dérivées partielles, de sorte que, par exemple, $\Delta_\lambda=2(\mu\nu-\lambda)$. Ces formes vérifieront les conditions

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma a\frac{d\varphi}{da}=\Delta,\\ &\Sigma b\frac{d\varphi}{da}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma\mathfrak{a}\frac{d\varpi}{d\mathfrak{a}}=\nabla,\\ &\Sigma\mathfrak{b}\frac{d\varpi}{d\mathfrak{a}}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

les Σ affectant toujours les accents. Les équations (c^*) s'écriront

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{a} = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}}\dfrac{d\varphi}{d\mathrm{a}}, & \mathrm{b} = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta(1-\mu^2)}}\dfrac{d\varphi}{d\mathrm{b}}, & \mathrm{c} = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta(1-\nu^2)}}\dfrac{d\varphi}{d\mathrm{c}}, \\ \mathrm{a}' = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}}\dfrac{d\varphi'}{da'}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{a}'' = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}}\dfrac{d\varphi''}{da''}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{lll} a = \dfrac{1}{\sqrt{\nabla(1-\varepsilon^2)}}\dfrac{d\varpi}{d\mathrm{a}}, & b = \dfrac{1}{\sqrt{\nabla(1-\eta^2)}}\dfrac{d\varpi}{d\mathrm{b}}, & c = \dfrac{1}{\sqrt{\nabla(1-\theta^2)}}\dfrac{d\varpi}{d\mathrm{c}}, \\ a' = \dfrac{1}{\sqrt{\nabla(1-\varepsilon^2)}}\dfrac{d\varpi'}{d\mathrm{a}'}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a'' = \dfrac{1}{\sqrt{\nabla(1-\varepsilon^2)}}\dfrac{d\varpi''}{d\mathrm{a}''}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.\end{array}\right.$$

et les (d^*)

$$(5)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{l}^2 = \dfrac{1}{l^2}\dfrac{1-\lambda^2}{\Delta}, \quad \varepsilon = \dfrac{\frac{1}{2}\Delta_\lambda}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} l^2 = \dfrac{1}{\mathrm{l}^2}\dfrac{1-\varepsilon^2}{\nabla}, \quad \lambda = \dfrac{\frac{1}{2}\nabla_\varepsilon}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\theta^2)}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{array}\right.$$

Ayant posé

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \Sigma b\dfrac{da}{dt} = \mathrm{R}^{(t)}, & \Sigma a\dfrac{dc}{dt} = \mathrm{Q}^{(t)}, & \Sigma c\dfrac{db}{dt} = \mathrm{P}^{(t)}, \\ \Sigma a\dfrac{db}{dt} = \mathfrak{R}^{(t)}, & \Sigma c\dfrac{da}{dt} = \mathfrak{Q}^{(t)}, & \Sigma b\dfrac{dc}{dt} = \mathfrak{P}^{(t)}, \end{array}\right.$$

ce qui entraîne

$$(6^*)\qquad \mathrm{R}^{(t)} + \mathfrak{R}^{(t)} = \frac{d\nu}{dt}, \quad \mathrm{Q}^{(t)} + \mathfrak{Q}^{(t)} = \frac{d\mu}{dt}, \quad \mathrm{P}^{(t)} + \mathfrak{P}^{(t)} = \frac{d\lambda}{dt},$$

où t est une quelconque des variables α, β, γ, les (f) s'écriront

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta\dfrac{da}{dt} = \mathrm{R}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{db} + \mathfrak{Q}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{dc}, \\ \Delta\dfrac{db}{dt} = \mathrm{P}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{dc} + \mathfrak{R}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{da}, \\ \Delta\dfrac{dc}{dt} = \mathrm{Q}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{da} + \mathfrak{P}^{(t)}\dfrac{d\varphi}{db}. \end{array}\right.$$

et l'on aura deux groupes analogues en accentuant une fois et puis deux fois les lettres φ, a, b, c. Le groupe (k) deviendra ici

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{d\mathrm{R}^{(t)}}{ds}-\frac{d\mathrm{R}^{(s)}}{dt}\right) &= (1-\nu^2)(\mathrm{P}^{(s)}\mathfrak{Q}^{(t)}-\mathrm{P}^{(t)}\mathfrak{Q}^{(s)})+\frac{1}{2}\Delta_\lambda(\mathrm{R}^{(t)}\mathrm{P}^{(s)}-\mathrm{P}^{(t)}\mathrm{R}^{(s)})\\
&\quad+\frac{1}{2}\Delta_\mu(\mathfrak{Q}^{(t)}\mathfrak{R}^{(s)}-\mathfrak{Q}^{(s)}\mathfrak{R}^{(t)})+\frac{1}{2}\Delta_\nu(\mathrm{R}^{(t)}\mathfrak{R}^{(s)}-\mathrm{R}^{(s)}\mathfrak{R}^{(t)}),\\
\Delta\left(\frac{d\mathrm{Q}^{(t)}}{ds}-\frac{d\mathrm{Q}^{(s)}}{dt}\right) &= (1-\mu^2)(\mathrm{R}^{(s)}\mathfrak{P}^{(t)}-\mathrm{R}^{(t)}\mathfrak{P}^{(s)})+\frac{1}{2}\Delta_\lambda(\mathfrak{P}^{(t)}\mathfrak{Q}^{(s)}-\mathfrak{P}^{(s)}\mathfrak{Q}^{(t)})\\
&\quad+\frac{1}{2}\Delta_\mu(\mathrm{Q}^{(t)}\mathfrak{Q}^{(s)}-\mathrm{Q}^{(s)}\mathfrak{Q}^{(t)})+\frac{1}{2}\Delta_\nu(\mathrm{Q}^{(t)}\mathrm{R}^{(s)}-\mathrm{Q}^{(s)}\mathrm{R}^{(t)}),\\
\Delta\left(\frac{d\mathrm{P}^{(t)}}{ds}-\frac{d\mathrm{P}^{(s)}}{dt}\right) &= (1-\lambda^2)(\mathrm{Q}^{(s)}\mathfrak{R}^{(t)}-\mathrm{Q}^{(t)}\mathfrak{R}^{(s)})+\frac{1}{2}\Delta_\lambda(\mathrm{P}^{(t)}\mathfrak{P}^{(s)}-\mathrm{P}^{(s)}\mathfrak{P}^{(t)})\\
&\quad+\frac{1}{2}\Delta_\mu(\mathrm{P}^{(t)}\mathrm{Q}^{(s)}-\mathrm{P}^{(s)}\mathrm{Q}^{(t)})+\frac{1}{2}\Delta_\nu(\mathfrak{R}^{(t)}\mathfrak{P}^{(s)}-\mathfrak{R}^{(s)}\mathfrak{P}^{(t)}).
\end{aligned}\right.$$

Enfin on déduira des équations (l), en isolant les dérivées partielles de l, m, n,

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dl}{d\beta} &= \frac{m}{1-\nu^2}\mathfrak{R}^{(\alpha)}+\frac{\nu l}{1-\nu^2}\mathrm{R}^{(\beta)},\\
\frac{dm}{d\gamma} &= \frac{n}{1-\lambda^2}\mathfrak{P}^{(\beta)}+\frac{\lambda m}{1-\lambda^2}\mathrm{P}^{(\gamma)},\\
\frac{dn}{d\alpha} &= \frac{l}{1-\mu^2}\mathfrak{Q}^{(\gamma)}+\frac{\mu n}{1-\mu^2}\mathrm{Q}^{(\alpha)},\\
\frac{dl}{d\gamma} &= \frac{n}{1-\mu^2}\mathrm{Q}^{(\alpha)}+\frac{\mu l}{1-\mu^2}\mathfrak{Q}^{(\gamma)},\\
\frac{dm}{d\alpha} &= \frac{l}{1-\nu^2}\mathrm{R}^{(\beta)}+\frac{\nu m}{1-\nu^2}\mathfrak{R}^{(\alpha)},\\
\frac{dn}{d\beta} &= \frac{m}{1-\lambda^2}\mathrm{P}^{(\gamma)}+\frac{\lambda n}{1-\lambda^2}\mathfrak{P}^{(\beta)},\\
\left[(1-\nu^2)\mathfrak{Q}^{(\beta)}+\frac{1}{2}\Delta_\lambda\mathrm{R}^{(\beta)}\right]l &= \left[(1-\nu^2)\mathrm{P}^{(\alpha)}+\frac{1}{2}\Delta_\mu\mathfrak{R}^{(\alpha)}\right]m,\\
\left[(1-\lambda^2)\mathfrak{R}^{(\gamma)}+\frac{1}{2}\Delta_\mu\mathrm{P}^{(\gamma)}\right]m &= \left[(1-\lambda^2)\mathrm{Q}^{(\beta)}+\frac{1}{2}\Delta_\nu\mathfrak{P}^{(\beta)}\right]n,\\
\left[(1-\mu^2)\mathfrak{P}^{(\alpha)}+\frac{1}{2}\Delta_\nu\mathrm{Q}^{(\alpha)}\right]n &= \left[(1-\mu^2)\mathrm{R}^{(\gamma)}+\frac{1}{2}\Delta_\lambda\mathfrak{Q}^{(\gamma)}\right]l,
\end{aligned}\right.$$

Je joindrai à ceci les équations des lignes de courbure des surfaces coordonnées. Pour un déplacement infiniment petit, effectué sur la surface $\alpha =$ constante, on a

$$\delta x = \frac{dx}{d\beta}\, d\beta + \frac{dx}{d\gamma}\, d\gamma,$$

et par suite

$$(10) \qquad \Sigma b\,\delta x = m\,d\beta + n\lambda\,d\gamma, \quad \Sigma c\,\delta x = m\lambda\,d\beta + n\,d\gamma.$$

Si le déplacement correspond à une ligne de courbure, on doit avoir

$$\delta x = -\Theta\,\delta \mathrm{a}, \quad \delta y = -\Theta\,\delta \mathrm{a}', \quad \delta z = -\Theta\,\delta \mathrm{a}'';$$

d'où l'on conclut facilement

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma b\,\delta x &= \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}} \left[\frac{1}{2} \Delta_\mu \mathrm{P}^{(\beta)} + (1-\lambda^2)\mathfrak{R}^{(\beta)} \right] d\beta \\ &\quad + \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}} \left[\frac{1}{2} \Delta_\mu \mathrm{P}^{(\gamma)} + (1-\lambda^2)\mathfrak{R}^{(\gamma)} \right] d\gamma, \\ \Sigma c\,\delta x &= \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}} \left[\frac{1}{2} \Delta_\nu \mathfrak{P}^{(\beta)} + (1-\lambda^2)\mathrm{Q}^{(\beta)} \right] d\beta \\ &\quad + \frac{\Theta}{\sqrt{\Delta(1-\lambda^2)}} \left[\frac{1}{2} \Delta_\nu \mathfrak{P}^{(\gamma)} + (1-\lambda^2)\mathrm{Q}^{(\gamma)} \right] d\gamma. \end{aligned} \right.$$

En égalant ces expressions de $\Sigma b\delta x$, $\Sigma c\delta x$ aux précédentes et éliminant ensuite Θ, on obtiendra l'équation des lignes de courbure de la surface $\alpha =$ constante. On obtiendra aussi deux valeurs pour Θ, qui seront les expressions des rayons principaux de courbure.

Remarque générale. — Les formules du présent paragraphe correspondent directement à la question différentielle, où, les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point quelconque de l'espace étant arbitrairement exprimées par des fonctions déterminées de trois variables indépendantes de α, β, γ, on se proposerait de calculer les principaux éléments géométriques, soit des courbes d'intersection des surfaces coordonnées, soit de ces surfaces elles-mêmes.

Mais il se présente la question, autrement difficile, de trouver x, y, z en α, β, γ, lorsqu'on se donne trois conditions distinctes entre ces dernières variables et les $l, \ldots, \nu$, $\mathfrak{l}, \ldots, \theta$ ou d'autres quantités qui peuvent en dépendre. Alors les équations (8), concurremment avec (9) et (6*), semblent jouer le principal rôle. Combinées avec les trois conditions données, elles suffisent à la détermination complète des fonctions $l, m, \ldots, \nu$ ou $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \ldots, \theta$ et des auxiliaires P, Q, ... Une fois ces quantités déterminées, il se présente la question bien plus simple, et que je m'en vais aborder, de déduire les cosinus $a, b, \ldots$ des équations (7) et des analogues, dont les (8) assurent précisément la coexistence. Après cela x, y, z s'obtiendront d'après (1) par l'intégration des différentielles exactes

$$(c)\qquad \left\{ \begin{array}{l} dx = la\,d\alpha + mb\,d\beta + nc\,d\gamma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

§ IV. — *Intégration d'un système particulier d'équations aux différences partielles.*

Les angles du trièdre élémentaire $M.(\alpha)(\beta)(\gamma)$ étant censés déterminés en α, β, γ, on peut concevoir menés par le sommet de ce trièdre trois axes rectangulaires $M.X, Y, Z$ faisant successivement avec $O.xyz$ des angles aux cosinus $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'', \mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'', \mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$. En désignant par ξ, ξ', ξ''; η, η', η''; ζ, ζ', ζ'' les cosinus des angles que font avec ces axes auxiliaires les éléments des axes curvilignes (α), (β), (γ) issus de M, on aura

$$\begin{array}{ll} a = \mathcal{A}\,\xi + \mathcal{B}\,\xi' + \mathcal{C}\,\xi'', & b = \mathcal{A}\eta + \mathcal{B}\eta' + \mathcal{C}\eta'', \ldots, \\ a' = \mathcal{A}'\xi + \mathcal{B}'\xi' + \mathcal{C}'\xi'', & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

avec les six relations

$$\xi^2 + \xi'^2 + \xi''^2 = 1, \ldots, \qquad \xi\eta + \xi'\eta' + \xi''\eta'' = \nu, \ldots;$$

et l'on pourra disposer des quelques $\xi, \eta, \ldots$ que ces relations laissent encore arbitraires, de façon à donner au système auxiliaire la position qu'on jugera la plus convenable relativement au trièdre élémentaire. Cela posé, si l'on fait

$$\Sigma\mathcal{B}\frac{d\mathcal{A}}{dt} = r^{(t)}, \quad \Sigma\mathcal{A}\frac{d\mathcal{C}}{dt} = q^{(t)}, \quad \Sigma\mathcal{C}\frac{d\mathcal{B}}{dt} = p^{(t)},$$
$$\Sigma\eta\,\frac{d\xi}{dt} = \upsilon^{(t)}, \quad \Sigma\xi\,\frac{d\zeta}{dt} = \varkappa^{(t)}, \quad \Sigma\zeta\,\frac{d\eta}{dt} = \pi^{(t)},$$

on déduira des valeurs précédentes de a, b, $c, \ldots$,

$$\Sigma b \frac{da}{dt} = (\xi\eta' - \eta\xi')r^{(t)} + (\eta\xi'' - \xi\eta'')q^{(t)} + (\xi'\eta'' - \eta'\xi'')p^{(t)} + \upsilon^{(t)},$$

$$\Sigma a \frac{dc}{dt} = (\zeta\xi' - \xi\zeta')r^{(t)} + (\xi\zeta'' - \zeta\xi'')q^{(t)} + (\xi''\zeta' - \xi'\zeta'')p^{(t)} + \varkappa^{(t)},$$

$$\Sigma c \frac{db}{dt} = (\eta\zeta' - \zeta\eta')r^{(t)} + (\zeta\eta'' - \eta\zeta'')q^{(t)} + (\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')p^{(t)} + \pi^{(t)},$$

ce qui exprime linéairement les P, Q, R, et par suite les $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, au moyen des p, q, r, ou *vice versâ*, et des quantités censées connues.

Moyennant cette sorte de transformation de coordonnées, on sera amené à considérer, au lieu du système (7), le système canonique

$$(7^*)\;\left\{\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}}{d\alpha} &= \mathcal{B}r^{(\alpha)} - \mathcal{C}q^{(\alpha)},\\ \frac{d\mathcal{B}}{d\alpha} &= \mathcal{C}p^{(\alpha)} - \mathcal{A}r^{(\alpha)},\\ \frac{d\mathcal{C}}{d\alpha} &= \mathcal{A}q^{(\alpha)} - \mathcal{B}p^{(\alpha)}; \end{aligned}\right.\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}}{d\beta} &= \mathcal{B}r^{(\beta)} - \mathcal{C}q^{(\beta)},\\ \frac{d\mathcal{B}}{d\beta} &= \mathcal{C}p^{(\beta)} - \mathcal{A}r^{(\beta)},\\ \frac{d\mathcal{C}}{d\beta} &= \mathcal{A}q^{(\beta)} - \mathcal{B}p^{(\beta)}; \end{aligned}\right.\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}}{d\gamma} &= \mathcal{B}r^{(\gamma)} - \mathcal{C}q^{(\gamma)},\\ \frac{d\mathcal{B}}{d\gamma} &= \mathcal{C}p^{(\gamma)} - \mathcal{A}r^{(\gamma)},\\ \frac{d\mathcal{C}}{d\gamma} &= \mathcal{A}q^{(\gamma)} - \mathcal{B}p^{(\gamma)}; \end{aligned}\right.$$

et deux autres tout à fait pareils en $\mathcal{A}', \ldots, \mathcal{A}'', \ldots$. On aura ici

$$\Sigma \mathcal{B}_t \mathcal{C}_s = -r^{(t)}q^{(s)}, \quad \Sigma \mathcal{A}_t \mathcal{A}_s = r^{(t)}r^{(s)} + q^{(t)}q^{(s)},$$

et les analogues, les lettres placées en indices indiquant des dérivées partielles, de sorte que $\mathcal{A}_t = \frac{d\mathcal{A}}{dt}$. Les p, q, r, censés connus en α, β, γ, sont supposés vérifier identiquement le groupe *fondamental*

$$(8^*)\qquad \left\{\begin{aligned} r_s^{(t)} - r_t^{(s)} + q^{(t)}p^{(s)} - q^{(s)}p^{(t)} &= 0,\\ q_s^{(t)} - q_t^{(s)} + p^{(t)}r^{(s)} - p^{(s)}r^{(t)} &= 0,\\ p_s^{(t)} - p_t^{(s)} + r^{(t)}q^{(s)} - r^{(s)}q^{(t)} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Du premier groupe (7^*) on déduit

$$\mathcal{A} = A\sigma + B\tau + C\upsilon, \quad \mathcal{B} = A\sigma' + B\tau' + C\upsilon', \quad \mathcal{C} = A\sigma'' + B\tau'' + C\upsilon'',$$

A, B, C étant des fonctions arbitraires de β, γ, et les $\sigma, \tau, \ldots$ des fonctions bien déterminées de α, β, γ, qui se déduisent d'une solution complète du premier groupe (7^*) (*voir* ci-après) intégré dans l'hypothèse de α seul variable. Ces fonctions doivent vérifier les relations ordinaires entre cosinus

$$\sigma^2 + \sigma'^2 + \sigma''^2 = 1, \quad \sigma\tau + \sigma'\tau' + \sigma''\tau'' = 0, \ldots,$$

à cause que l'on doit avoir, indépendamment de A, B, C,

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = 1,$$

et par suite

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

En exprimant que les valeurs précédentes de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ vérifient le second groupe (7^*), on en conclut

$$(7^{**}) \qquad A_\beta = Br' - Cq', \quad B_\beta = Cp' - Ar', \quad C_\beta = Aq' - Bp',$$

où

$$\begin{aligned} r' &= \Sigma\tau\sigma_\beta + \upsilon p^{(\beta)} + \upsilon' q^{(\beta)} + \upsilon'' r^{(\beta)}, \\ q' &= \Sigma\sigma\upsilon_\beta + \tau p^{(\beta)} + \tau' q^{(\beta)} + \tau'' r^{(\beta)}, \\ p' &= \Sigma\upsilon\tau_\beta + \sigma p^{(\beta)} + \sigma' q^{(\beta)} + \sigma'' r^{(\beta)}, \end{aligned}$$

ces quantités p', q', r' étant indépendantes de α. Les équations (7^{**}), qui sont de même forme que (7^*), mais ne renferment plus de trace de α, étant intégrées dans l'hypothèse de β seul variable, donneront

$$A = a\varphi + b\psi + c\chi, \quad B = a\varphi' + b\psi' + c\chi', \quad C = a\varphi'' + b\psi'' + c\chi'',$$

φ, ψ, ... étant des fonctions bien déterminées de β, γ qui vérifient les relations ordinaires entre cosinus, et a, b, c trois fonctions arbitraires de γ, telles que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. En substituant dans les expressions ci-dessus de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, on aura des résultats de la forme

$$\mathcal{A} = a\xi + b\eta + c\zeta, \quad \mathcal{B} = a\xi' + b\eta' + c\zeta', \quad \mathcal{C} = a\xi'' + b\eta'' + c\zeta'',$$

aux seules inconnues a, b, c; et la vérification définitive du troisième groupe (7^*) donnera

$$(7^{***}) \qquad a_\gamma = br'' - cq'', \quad b_\gamma = cp'' - ar'', \quad c_\gamma = aq'' - bp'',$$

où

$$r'' = \Sigma\eta\xi_\gamma + \zeta p^{(\gamma)} + \zeta' q^{(\gamma)} + \zeta'' r^{(\gamma)},$$
$$q'' = \Sigma\xi\zeta_\gamma + \eta p^{(\gamma)} + \eta' q^{(\gamma)} + \eta'' r^{(\gamma)},$$
$$p'' = \Sigma\zeta\eta_\gamma + \xi p^{(\gamma)} + \xi' q^{(\gamma)} + \xi'' r^{(\gamma)},$$

les p'', q'', r'' ne dépendant que de γ. L'intégration du groupe (7^{***}), à la seule variable indépendante γ, donnera finalement

$$\mathrm{a} = g\theta + h\varpi + k\omega,\quad \mathrm{b} = g\theta' + h\varpi' + k\omega',\quad \mathrm{c} = g\theta'' + h\varpi'' + k\omega'',$$

g, h, k étant trois constantes arbitraires, telles que $g^2 + h^2 + k^2 = 1$, et les θ, ϖ, ... vérifiant les relations ordinaires entre cosinus. On aura donc en remontant

$$(12)\quad \mathcal{A} = g\mathfrak{A} + h\mathfrak{B} + k\mathfrak{C},\quad \mathcal{B} = g\mathfrak{A}' + h\mathfrak{B}' + k\mathfrak{C}',\quad \mathcal{C} = g\mathfrak{A}'' + h\mathfrak{B}'' + k\mathfrak{C}'',$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... étant des fonctions actuellement connues de α, β, γ.

Quant aux expressions de $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$, $\mathcal{C}''$, on les obtiendra évidemment en remplaçant, dans celles de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ qu'on vient de trouver, les constantes g, h, k par d'autres g', h', k', g'', h'', k'', et établissant entre ces constantes les relations habituelles entre cosinus

$$g^2 + h^2 + k^2 = 1,\quad gg' + hh' + kk' = 0, \ldots.$$

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que les p', q', r' ne doivent dépendre que de β, γ, et les p'', q'', r'' que de γ. Ceci résulte de la marche du calcul et des conditions d'intégrabilité (8^*) qui sont supposées remplies. On peut aussi le démontrer directement. Je me bornerai à prouver que $\dfrac{dr'}{d\alpha} = 0$. Des identités

$$\sigma_\alpha = \sigma' r^{(\alpha)} - \sigma'' q^{(\alpha)},\quad \sigma'_\alpha = \sigma'' p^{(\alpha)} - \sigma r^{(\alpha)},\quad \sigma''_\alpha = \sigma q^{(\alpha)} - \sigma' p^{(\alpha)}$$

et des analogues en τ, ..., υ, ... on conclut

$$\Sigma\tau\sigma_{\alpha\beta} = -\Sigma\upsilon p^{(\alpha)}_\beta + \Sigma(\tau'\sigma''_\beta - \tau''\sigma'_\beta)p^{(\alpha)},\quad \Sigma\tau_\alpha\sigma_\beta = -\Sigma(\tau'\sigma''_\beta - \tau''\sigma'_\beta)p^{(\alpha)};$$

et par suite,

$$(\Sigma\tau\sigma_\beta)_\alpha = -\Sigma\upsilon p^{(\alpha)}_\beta,\quad r'_\alpha = \Sigma\upsilon\left(p^{(\beta)}_\alpha - p^{(\alpha)}_\beta\right) + \Sigma\upsilon_\alpha p^{(\beta)},$$

où l'on voit tous les termes s'entre-détruire quand on a égard à (8^*) et aux équations que les υ vérifient.

Dans ce qui précède on a à intégrer trois fois de suite des systèmes rentrant dans le type classique, que l'on rencontre à propos de la rotation des corps,

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{db}{dt} = cp - ar, \quad \frac{dc}{dt} = aq - bp,$$

où p, q, r sont censées des fonctions connues du temps t. En faisant usage de la substitution imaginaire employée par M. Hoppe (*Journal de Crelle*, t. LXIII, p. 122),

$$b\sin\theta + c\cos\theta = 1, \quad b\cos\theta - c\sin\theta = ia, \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1},$$

substitution qui donne

$$\sin\theta\,\frac{db}{dt} + \cos\theta\,\frac{dc}{dt} + ia\,\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

on a, en ayant égard aux équations différentielles et posant $\operatorname{tang}\dfrac{\theta}{2} = z$,

$$2i\,\frac{dz}{dt} = 2rz + (q + ip)z^2 - (q - ip),$$

ensuite

$$i\,\frac{da}{dt} + (r\cos\theta + q\sin\theta)a + \frac{d\theta}{dt} - p = 0.$$

z étant déterminé par l'avant-dernière équation (de Bernoulli), la dernière donnera a par des quadratures; b et c s'ensuivront. De la connaissance de a, b, c on conclura tout de suite les trois systèmes particuliers qui, pour le premier groupe (7^*) par exemple, étaient désignés par σ, σ', σ''; τ, τ', τ''; υ, υ', υ'' respectivement.

On peut varier de diverses manières l'intégration du système des neuf équations (7^*). Je me bornerai à l'indication suivante : on tire de la première ligne horizontale (7^*)

$$(13) \qquad \mathcal{B} = \frac{\mathcal{A}_\beta q^{(\gamma)} - \mathcal{A}_\gamma q^{(\beta)}}{r^{(\beta)} q^{(\gamma)} - r^{(\gamma)} q^{(\beta)}}, \quad \mathcal{C} = \frac{\mathcal{A}_\beta r^{(\gamma)} - \mathcal{A}_\gamma r^{(\beta)}}{r^{(\beta)} q^{(\gamma)} - r^{(\gamma)} q^{(\beta)}},$$

ce qui, en tenant compte de $\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2=1$, transforme le premier groupe vertical (7^*) dans

$$
(14)\quad\left\{\begin{aligned}
&\left(q^{(\beta)}r^{(\gamma)}-q^{(\gamma)}r^{(\beta)}\right)\mathcal{A}_\alpha+\left(r^{(\alpha)}q^{(\gamma)}-r^{(\gamma)}q^{(\alpha)}\right)\mathcal{A}_\beta+\left(r^{(\beta)}q^{(\alpha)}-r^{(\alpha)}q^{(\beta)}\right)\mathcal{A}_\gamma=0,\\
&\left(q^{(\gamma)^2}+r^{(\gamma)^2}\right)\mathcal{A}_\beta^2+\left(q^{(\beta)^2}+r^{(\beta)^2}\right)\mathcal{A}_\gamma^2-2\left(q^{(\beta)}q^{(\gamma)}+r^{(\beta)}r^{(\gamma)}\right)\mathcal{A}_\beta\mathcal{A}_\gamma\\
&\qquad\qquad\qquad-(1-\mathcal{A}^2)\left(r^{(\beta)}q^{(\gamma)}-r^{(\gamma)}q^{(\beta)}\right)^2=0,\\
&\mathcal{B}_\alpha=\mathcal{C}p^{(\alpha)}-\mathcal{A}r^{(\alpha)},\qquad \mathcal{C}_\alpha=\mathcal{A}q^{(\alpha)}-\mathcal{B}p^{(\alpha)},
\end{aligned}\right.
$$

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ étant censés remplacés par leurs valeurs précédentes dans les deux dernières, dont l'une est superflue en vertu des trois autres et des relations (8^*). La première des équations précédentes fera dépendre $\mathcal{A}$ arbitrairement de deux fonctions ϖ et ω bien déterminées. Considérant $\mathcal{A}$ comme dépendant immédiatement de ϖ et ω, la substitution dans les deux suivantes conduira à une équation du premier ordre et à une du second entre $\mathcal{A}$, ϖ et ω, quand on aura éliminé β et γ par exemple, au moyen des formes mêmes ϖ et ω, ce qui devra faire disparaître α. Il est facile de voir qu'on déduira de ces équations une équation du second ordre qu'on peut considérer comme aux différentielles ordinaires, en $d\omega$ par exemple. Les constantes introduites par son intégration étant considérées comme des fonctions arbitraires de ϖ, les équations déjà employées et la condition d'intégrabilité conduiront aisément à deux équations du premier ordre entre ces constantes, d'où ω devra finalement disparaître.

§ V. — *Systèmes triplement orthogonaux.*

Les cosinus λ, μ, ν étant égaux à zéro, les relations (9) se réduisent à

$$
(15)\qquad\left\{\begin{aligned}
&l_\beta=-m\mathrm{R}^{(\alpha)}; &&m_\gamma=-n\mathrm{P}^{(\beta)}; &&n_\alpha=-l\mathrm{Q}^{(\gamma)};\\
&l_\gamma=n\mathrm{Q}^{(\alpha)}; &&m_\alpha=l\mathrm{R}^{(\beta)}; &&n_\beta=m\mathrm{P}^{(\gamma)};
\end{aligned}\right.
$$

$$
(15^*)\qquad -l\mathrm{Q}^{(\beta)}=m\mathrm{P}^{(\alpha)},\quad -m\mathrm{R}^{(\gamma)}=n\mathrm{Q}^{(\beta)},\quad -n\mathrm{P}^{(\alpha)}=l\mathrm{R}^{(\gamma)}.
$$

La multiplication des (15^*) montre que l'on doit avoir

$$
(16)\qquad \mathrm{P}^{(\alpha)}=0,\quad \mathrm{Q}^{(\beta)}=0,\quad \mathrm{R}^{(\gamma)}=0,
$$

l, m, n étant supposés différents de zéro.

Les identités (8) se réduisent, en vertu de (16), à

$$
(17)\qquad \left\{\begin{array}{lll}
R_\gamma^{(\alpha)} = -\,Q^{(\alpha)}P^{(\gamma)}, & Q_\beta^{(\alpha)} = R^{(\alpha)}P^{(\beta)}, & P_\alpha^{(\beta)} = -\,R^{(\beta)}Q^{(\alpha)},\\
R_\gamma^{(\beta)} = P^{(\beta)}Q^{(\gamma)}, & Q_\beta^{(\gamma)} = -\,R^{(\beta)}P^{(\gamma)}, & P_\alpha^{(\gamma)} = R^{(\alpha)}Q^{(\gamma)},
\end{array}\right.
$$

$$
(18)\qquad \left\{\begin{array}{l}
R_\beta^{(\alpha)} - R_\alpha^{(\beta)} + Q^{(\alpha)}P^{(\beta)} = 0,\\
Q_\alpha^{(\gamma)} - Q_\gamma^{(\alpha)} + R^{(\alpha)}P^{(\gamma)} = 0,\\
P_\gamma^{(\beta)} - P_\beta^{(\gamma)} + R^{(\beta)}Q^{(\gamma)} = 0,
\end{array}\right.
$$

et n'équivalent qu'à six distinctes, comme on peut s'en convaincre en différentiant chacune des trois dernières par la variable qui n'y figure pas extérieurement.

D'un autre côté, en ayant égard à (17), (18), on tire de (15)

$$
l_{\beta\gamma} = -\,mR_\gamma^{(\alpha)} - m_\gamma R^{(\alpha)} = mQ^{(\alpha)}P^{(\gamma)} + nP^{(\beta)}R^{(\alpha)},
$$
$$
l_{\gamma\beta} = nQ_\beta^{(\alpha)} + n_\beta Q^{(\alpha)} = nR^{(\alpha)}P^{(\beta)} + mQ^{(\alpha)}P^{(\gamma)},
$$

de sorte que ces équations (15), comme on pouvait le prévoir, ne conduisent à aucune relation nouvelle entre les P, Q, R. Donc les seules relations non identiques que doivent vérifier ces dernières fonctions sont exprimées par les équations (16).

Actuellement les neuf cosinus a, b, c,... peuvent s'exprimer d'une infinité de manières au moyen de trois fonctions indépendantes. Si, par exemple, on prend les formules d'Euler (Duhamel, *Mécanique*, t. I, 2e édit., p. 267), qui donnent

$$
P^{(t)} = \cos\varphi\,\frac{d\theta}{dt} + \sin\varphi\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt},
$$
$$
Q^{(t)} = -\sin\varphi\,\frac{d\theta}{dt} + \cos\varphi\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt},
$$
$$
R^{(t)} = \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt},
$$

il résulte de ce qui vient d'être dit que la détermination des systèmes triplement orthogonaux peut se ramener : 1° à l'intégration des trois équations

$$(19)\quad \frac{d\psi}{d\alpha}+\cot\varphi\frac{du}{d\alpha}=0,\quad \frac{d\psi}{d\beta}-\operatorname{tang}\varphi\frac{du}{d\beta}=0,\quad \frac{d\psi}{d\gamma}-\operatorname{Cot}u\frac{d\varphi}{d\gamma}=0,$$

où

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}=e^u,\quad \operatorname{Cot}u=\frac{\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})}{\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})};$$

2° à la détermination de l, m, n par les équations linéaires (15); 3° aux quadratures (c) (fin du § III).

Quant à l, m, n, qui doivent vérifier les équations (15), si l'on s'attache à l, par exemple, l'élimination de m, n montre que cette fonction doit satisfaire aux deux équations simultanées et compatibles

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2l}{d\alpha\,d\beta}-\frac{R^{(\alpha)}_\alpha}{R^{(\alpha)}}\frac{dl}{d\beta}+R^{(\alpha)}R^{(\beta)}l=0,\\&\frac{d^2l}{d\alpha\,d\gamma}-\frac{Q^{(\alpha)}_\alpha}{Q^{(\alpha)}}\frac{dl}{d\gamma}+Q^{(\alpha)}Q^{(\gamma)}l=0.\end{aligned}\right.$$

l étant connu, les équations (15) donneront m et n sans autre intégration.

» Cette méthode, que je croyais nouvelle lors de l'envoi de la partie théorique du présent travail à l'Institut (juin 1864), avait été l'objet d'une communication antérieure de M. Bonnet (mars 1862). Ce géomètre avait fait la remarque que l'intégration des équations (19) peut se ramener à celle d'une équation unique du troisième ordre, que l'on obtient en éliminant u entre ces trois équations, et considérant ensuite φ comme une fonction de ψ, α, β. On peut obtenir une équation unique du troisième ordre par un choix un peu différent de variables. Si entre les trois (19) on élimine φ, ce qui donne

$$0=\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\psi}{d\beta}+\frac{du}{d\alpha}\frac{du}{d\beta},\quad \frac{d\psi}{d\gamma}=-\operatorname{Cot}u\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\psi_\alpha}{u_\alpha}\right):\left(1+\frac{\psi_\alpha^2}{u_\alpha^2}\right),$$

et que l'on considère α, β comme des fonctions de u, ψ, γ prises pour les variables indépendantes, on trouve par les formules relatives au changement de variables que $\frac{d\alpha}{d\psi}$, $\frac{d\alpha}{du}$, $\frac{d\alpha}{d\gamma}$ sont proportionnelles à des expressions qui ne dépendent que de u et des dérivées de β relatives à ψ, u, γ jusqu'au second ordre inclusivement. En exprimant que ces quantités proportionnelles satisfont à la condition habituelle d'intégrabilité, on obtient l'équation du troisième ordre annoncée. Cette équation, d'une complication moyenne, peut remplacer celle de M. Bonnet, ou *vice versâ*, suivant les points de vue où l'on se place (*). «

Méthode de M. Lamé. — En vertu de (15) et de ce qui est dit sur le mouvement d'un point matériel (coordonnées curvilignes), les identités (17), (18) reviennent à celles de l'illustre auteur relatives aux courbures des arcs et à leurs variations; et, en éliminant les P, Q, R, on est ramené naturellement aux groupes *fondamentaux* [8], [9] des coordonnées curvilignes (p. 76, 78) :

$$\left(\frac{l_\beta}{m}\right)_\gamma = \frac{l_\gamma}{n}\,\frac{n_\beta}{m}, \ldots, \tag{17*}$$

$$\left(\frac{l_\beta}{m}\right)_\beta + \left(\frac{m_\alpha}{l}\right)_\alpha + \frac{l_\gamma}{n}\,\frac{m_\gamma}{n} = 0, \ \ldots \tag{18*}$$

Les équations (7) deviennent ici

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{da}{d\alpha} = b\mathrm{R}^{(\alpha)} - c\mathrm{Q}^{(\alpha)}, & \dfrac{da}{d\beta} = b\mathrm{R}^{(\beta)}, & \dfrac{da}{d\gamma} = -c\mathrm{Q}^{(\gamma)}, \\ \dfrac{db}{d\beta} = -a\mathrm{R}^{(\alpha)}, & \dfrac{db}{d\beta} = c\mathrm{P}^{(\beta)} - a\mathrm{R}^{(\beta)}, & \dfrac{db}{d\gamma} = c\mathrm{P}^{(\gamma)}, \\ \dfrac{dc}{d\alpha} = a\mathrm{Q}^{(\alpha)}, & \dfrac{dc}{d\beta} = -b\mathrm{P}^{(\beta)}, & \dfrac{dc}{d\gamma} = a\mathrm{Q}^{(\gamma)} - b\mathrm{P}^{(\gamma)}, \end{array}\right. \tag{21}$$

et, en y introduisant $\frac{1}{l}\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{1}{m}\frac{dx}{d\beta}$, $\frac{1}{n}\frac{dx}{d\gamma}$ au lieu de a, b, c respectivement, elles deviennent

$$\frac{d^2x}{d\alpha\, d\beta} = \frac{l_\beta}{l}\,\frac{dx}{d\alpha} + \frac{m_\alpha}{m}\,\frac{dx}{d\beta}, \ldots, \tag{22}$$

$$\frac{d^2x}{d\alpha^2} = \frac{l_\alpha}{l}\,\frac{dx}{d\alpha} - \frac{ll_\beta}{m^2}\,\frac{dx}{d\beta} - \frac{ll_\gamma}{n^2}\,\frac{dx}{d\gamma}, \ldots, \tag{22*}$$

(*) Je marque de guillemets retournés toutes les parties introduites postérieurement à une rédaction que M. Hermite voulut bien accepter en mars 1865, et qui ne diffère de celle envoyée à l'Institut que par les considérations préliminaires sur les déterminants et l'adjonction des exemples des §§ VI et VIII.

c'est-à-dire les [28], [30] des *coordonnées curvilignes*. A quoi il faut joindre

$$\frac{1}{l^2}\frac{dx^2}{d\alpha^2}+\frac{1}{m^2}\frac{dx^2}{d\beta^2}+\frac{1}{n^2}\frac{dx^2}{d\gamma^2}=1. \tag{23}$$

Conformément à la méthode de M. Lamé, après avoir trouvé l, m, n au moyen des six équations (17^*), (18^*), on détermine x (et pareillement y, z) au moyen des trois (22) et de (23). Cette méthode étant loin de devoir être tout à fait abandonnée, soit que l'on prenne pour inconnues les rotations ou l, m, n [passage aisé au moyen de (15)], j'y joindrai les remarques suivantes : 1° une des trois (22) est une conséquence des deux autres et de (23), comme il est facile de s'en convaincre en tenant compte de (17^*) et de (18^*); 2° l'intégration des (22), (23) se ramène à celle d'équations (21), qu'on peut traiter successivement comme aux différentielles ordinaires, ainsi que cela a été développé plus généralement au § IV; 3° il résulte de la première méthode exposée dans ce paragraphe que les équations (22), (23) admettent trois solutions uniques et bien déterminées (en mettant de côté ce qui tient à une transformation de coordonnées rectangulaires) qu'il peut être plus aisé de trouver directement par la considération immédiate de (22), (23), ce qui arrive, en particulier, pour les systèmes isothermes.

§ VI. — *Exemple relatif au précédent paragraphe.*

Les formules d'Euler peuvent être remplacées par celles de M. O. Rodrigues

$$\Theta a=1+\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2-\mathrm{z}^2,\quad \Theta b=2(\mathrm{xy}+\mathrm{z}),\quad \Theta c=2(\mathrm{xz}-\mathrm{y}),\ldots,$$

$$\Theta \mathrm{P}^{(t)}=2\left(\mathrm{z}\frac{d\mathrm{y}}{dt}-\mathrm{y}\frac{d\mathrm{z}}{dt}-\frac{d\mathrm{x}}{dt}\right),$$

$$\Theta \mathrm{Q}^{(t)}=2\left(\mathrm{x}\frac{d\mathrm{z}}{dt}-\mathrm{z}\frac{d\mathrm{x}}{dt}-\frac{d\mathrm{y}}{dt}\right),$$

$$\Theta \mathrm{R}^{(t)}=2\left(\mathrm{y}\frac{d\mathrm{x}}{dt}-\mathrm{x}\frac{d\mathrm{y}}{dt}-\frac{d\mathrm{z}}{dt}\right),$$

où $\Theta = 1 + x^2 + y^2 + z^2$. Si, pour rétablir l'homogénéité, on pose

$$x = \frac{\xi}{H}, \quad y = \frac{\eta}{H}, \quad z = \frac{\zeta}{H};$$

les équations (16) pourront s'écrire

$$(19^*) \qquad \left\{ \begin{aligned} H\frac{d\xi}{d\alpha} - \xi\frac{dH}{d\alpha} &= \zeta\frac{d\eta}{d\alpha} - \eta\frac{d\zeta}{d\alpha}, \\ H\frac{d\eta}{d\beta} - \eta\frac{dH}{d\beta} &= \xi\frac{d\zeta}{d\beta} - \zeta\frac{d\xi}{d\beta}, \\ H\frac{d\zeta}{d\gamma} - \zeta\frac{dH}{d\gamma} &= \eta\frac{d\xi}{d\gamma} - \xi\frac{d\eta}{d\gamma}. \end{aligned} \right.$$

» On peut disposer du dénominateur arbitraire H de façon à remplir quelque condition particulière. Si l'on fait par exemple la triple supposition que ξ ne contient point α, η point β, ζ point γ, ce qui fait disparaître les termes extrêmes de gauche, l'élimination de H entre les équations réduites donne les trois

$$\begin{aligned} -w_{\alpha\beta} &= (w_\alpha - v_\alpha)(w_\beta - u_\beta), \\ -v_{\alpha\gamma} &= (v_\alpha - w_\alpha)(v_\gamma - u_\gamma), \\ -u_{\beta\gamma} &= (u_\beta - w_\beta)(u_\gamma - v_\gamma), \end{aligned}$$

où l'on a fait $u = \log\xi$, $v = \log\eta$, $w = \log\zeta$, et qui n'introduisent aucune condition nouvelle, comme on le reconnaît en les différentiant par γ, β, α respectivement. On tire, par exemple, de la première

$$\left(\frac{w_{\alpha\beta}}{v_\alpha - w_\alpha}\right)_\alpha = w_{\alpha\beta},$$

c'est-à-dire

$$\frac{w_{\alpha\alpha\beta}}{w_{\alpha\beta}} = v_\alpha - w_\alpha + \frac{v_{\alpha\alpha} - w_{\alpha\alpha}}{v_\alpha - w_\alpha}.$$

En différentiant par β et ayant égard à cette même équation, on en conclut

$$(\log\varpi)_{\alpha\beta} = -2\varpi, \quad \text{où} \quad \varpi = w_{\alpha\beta}.$$

De là, d'après M. Liouville,

$$\varpi = \frac{\mathcal{A}'\mathcal{B}'}{(\mathcal{A} - \mathcal{B})^2}.$$

Il en résulte

$$\zeta = \mathcal{A}_1\mathcal{B}_1(\mathcal{A} - \mathcal{B}),\quad \eta = \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1(\mathcal{C} - \mathcal{A}),\quad \xi = \mathcal{B}_1\mathcal{C}_1(\mathcal{B} - \mathcal{C}),$$
$$\mathrm{H} = \mathrm{k} - \int \mathcal{A}_1^2\mathcal{A}'\,d\alpha - \int \mathcal{B}_1^2\mathcal{B}'\,d\beta - \int \mathcal{C}_1^2\mathcal{C}'\,d\gamma;$$

k est une constante arbitraire, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ des fonctions arbitraires de α, β, γ respectivement, et les accents marquent les dérivées. De ces six fonctions arbitraires trois peuvent être prises pour α, β, γ.

En supposant $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ constantes, on a la solution très-particulière

$$\mathrm{x} = \beta\gamma,\quad \mathrm{y} = \alpha\gamma,\quad \mathrm{z} = \alpha\beta,$$

qui donne

$$\Theta \mathrm{P}^{(\beta)} = -2\gamma(\alpha^2+1),\quad \Theta \mathrm{Q}^{(\alpha)} = 2\gamma(\beta^2-1),\quad \Theta \mathrm{R}^{(\alpha)} = -2\beta(\gamma^2+1),$$
$$\Theta \mathrm{P}^{(\gamma)} = 2\beta(\alpha^2-1),\quad \Theta \mathrm{Q}^{(\gamma)} = -2\alpha(\beta^2+1),\quad \Theta \mathrm{R}^{(\beta)} = 2\alpha(\gamma^2-1),$$

où

$$\Theta = 1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2.$$

Les équations (15) fournissent généralement les trois combinaisons $\mathrm{P}^{(\gamma)}\dfrac{dl}{d\beta} + \mathrm{R}^{(\alpha)}\dfrac{dn}{d\beta} = 0, \ldots$, lesquelles deviennent ici, par la suppression d'un facteur commun, immédiatement intégrables, et d'où l'on conclut

$$(\beta^2+1)m - (\gamma^2-1)n = \varphi(\beta,\gamma),$$
$$(\gamma^2+1)n - (\alpha^2-1)l = \psi(\alpha,\gamma),$$
$$(\alpha^2+1)l - (\beta^2-1)m = \chi(\alpha,\beta).$$

Tirant de là les valeurs de l, m, n et substituant dans les (15), on obtient

$$(\alpha^2-1)\frac{d\chi}{d\alpha} + (\alpha^2+1)\frac{d\psi}{d\alpha} = 0,$$
$$(\beta^2-1)\frac{d\varphi}{d\beta} + (\beta^2+1)\frac{d\chi}{d\beta} = 0,$$
$$(\gamma^2-1)\frac{d\psi}{d\gamma} + (\gamma^2+1)\frac{d\varphi}{d\gamma} = 0,$$

d'où, par la différentiation immédiate,

$$\frac{d^2\chi}{d\alpha\,d\beta} = 0,\quad \frac{d^2\psi}{d\alpha\,d\gamma} = 0,\quad \frac{d^2\varphi}{d\beta\,d\gamma} = 0.$$

Intégrant et substituant dans les équations précédentes, on en conclura les expressions définitives de φ, ψ, χ, et par suite

$$\Theta l = \frac{\Theta^2}{2\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\lambda(\alpha)}{\Theta}\right) + (\gamma^2+1)\mu(\beta) + (\beta^2-1)\nu(\gamma),$$

$$\Theta m = \frac{\Theta^2}{2\beta}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\mu(\beta)}{\Theta^2}\right) + (\alpha^2+1)\nu(\gamma) + (\gamma^2-1)\lambda(\alpha),$$

$$\Theta n = \frac{\Theta^2}{2\gamma}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\nu(\gamma)}{\Theta^2}\right) + (\beta^2+1)\lambda(\alpha) + (\alpha^2-1)\mu(\beta),$$

λ, μ, ν étant trois fonctions arbitraires. Les cosinus a, b,... étant d'ailleurs exprimés en α, β, γ, on aura, par l'intégration de différentielles exactes,

$$x = \frac{\alpha}{\Theta}[(\gamma^2+1)\mu(\beta) + (\beta^2-1)\nu(\gamma) - (\gamma^2+\beta^2)\lambda(\alpha)] + \int \frac{\lambda'(\alpha)}{2\alpha}d\alpha,$$

$$y = \frac{\beta}{\Theta}[(\alpha^2+1)\nu(\gamma) + (\gamma^2-1)\lambda(\alpha) - (\alpha^2+\gamma^2)\mu(\beta)] + \int \frac{\mu'(\beta)}{2\beta}d\beta,$$

$$z = \frac{\gamma}{\Theta}[(\beta^2+1)\lambda(\alpha) + (\alpha^2-1)\mu(\beta) - (\alpha^2+\beta^2)\nu(\gamma)] + \int \frac{\nu'(\gamma)}{2\gamma}d\gamma.$$

Par exemple, si l'on prend pour λ, μ, ν des fonctions linéaires de α^2, β^2, γ^2 respectivement, on conclura facilement des équations obtenues les combinaisons suivantes :

$$\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)y - \left(\gamma-\frac{1}{\gamma}\right)z = g,$$

$$\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)z - \left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)x = h,$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)x - \left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)y = k,$$

et par suite

$$\pm\sqrt{\left[\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)x - k\right]^2 + 4y^2} \pm \sqrt{\left[\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)x + h\right]^2 - 4z^2} = g,$$

$$\pm\sqrt{\left[\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)y - g\right]^2 + 4z^2} \pm \sqrt{\left[\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right)y + k\right]^2 - 4x^2} = h,$$

$$\pm\sqrt{\left[\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)z - h\right]^2 + 4x^2} \pm \sqrt{\left[\left(\gamma-\frac{1}{\gamma}\right)z + g\right]^2 - 4y^2} = k,$$

g, h, k étant des constantes. La première de ces surfaces orthogonales se réduit à une famille de sphères si $g=0$. Si, en même temps, $h=0$, la seconde se transforme aussi en famille sphérique, la troisième restant toujours du quatrième ordre.

» Cet exemple présente cette circonstance que l, m, n renferment trois fonctions arbitraires d'une variable différente et leurs dérivées premières. Il m'a paru au moins curieux de savoir si d'autres systèmes orthogonaux ne jouiraient pas de la même propriété. Par l'emploi des coefficients indéterminés, on reconnaît, en ayant égard à (15), (17), (18), que les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont

$$\frac{R^{(\beta)}}{Q^{(\gamma)}}=a, \quad \frac{P^{(\gamma)}}{R^{(\alpha)}}=b, \quad \frac{Q^{(\alpha)}}{P^{(\beta)}}=c,$$

a, b, c étant trois fonctions arbitraires qui manquent de α, β, γ respectivement.

Ces relations donnent, en ayant égard à (17) dans l'intervalle des transformations,

$$\left(\frac{R^{(\alpha)}_{\beta}}{R^{(\alpha)}}\right)_{\alpha}=\left(\frac{P^{(\gamma)}_{\alpha}}{P^{(\gamma)}}\right)_{\beta}=\left(\frac{R^{(\alpha)}Q^{(\gamma)}}{P^{(\gamma)}}\right)_{\beta}=-R^{(\alpha)}R^{(\beta)},\ldots.$$

On forme ainsi le triple groupe

$$(\alpha)\quad\left\{\begin{array}{l} -R^{(\alpha)}R^{(\beta)}=(\log R^{(\alpha)})_{\alpha\beta}=(\log R^{(\beta)})_{\alpha\beta}=(\log P^{(\gamma)})_{\alpha\beta}=(\log Q^{(\gamma)})_{\alpha\beta},\\ -Q^{(\alpha)}Q^{(\gamma)}=(\log Q^{(\gamma)})_{\alpha\gamma}=\ldots,\\ -P^{(\beta)}P^{(\gamma)}=(\log P^{(\beta)})_{\beta\gamma}=\ldots.\end{array}\right.$$

De la comparaison des membres logarithmiques on conclut, avec un peu d'attention, que l'on peut adopter, sous la forme la plus générale possible,

$$(\alpha')\quad P^{(\beta)}=\theta C,\ \ P^{(\gamma)}=\theta B',\ \ Q^{(\gamma)}=\theta A,\ \ Q^{(\alpha)}=\theta C';\ \ R^{(\alpha)}=\theta B,\ \ R^{(\beta)}=\theta A',$$

θ étant une fonction tout à fait indéterminée, et A, A′,... des fonctions arbitraires de l'espèce a, b, c.

Maintenant les (17), (18) fournissent généralement les combinaisons visibles

$$(\beta) \qquad P^{(\gamma)}R^{(\beta)}_{\alpha} - R^{(\beta)}P^{(\gamma)}_{\alpha} + R^{(\alpha)}P^{(\gamma)}_{\beta} - P^{(\gamma)}R^{(\alpha)}_{\beta} + P^{(\beta)}R^{(\alpha)}_{\gamma} - R^{(\alpha)}P^{(\beta)}_{\gamma} = 0,$$

et deux autres analogues,

$$(\gamma) \qquad \left\{ \begin{aligned} & P^{(\beta)}P^{(\gamma)}_{\alpha} - P^{(\gamma)}P^{(\beta)}_{\alpha} = Q^{(\gamma)}Q^{(\alpha)}_{\beta} - Q^{(\alpha)}Q^{(\gamma)}_{\beta} \\ & \quad = R^{(\alpha)}R^{(\beta)}_{\gamma} - R^{(\beta)}R^{(\alpha)}_{\gamma} = P^{(\beta)}Q^{(\gamma)}R^{(\alpha)} + P^{(\gamma)}Q^{(\alpha)}R^{(\beta)}, \end{aligned} \right.$$

qui, abstraction faite du dernier membre de (γ), présentent cette propriété de rester absolument les mêmes lorsque les lettres qui y figurent sont multipliées par un même facteur quelconque.

La substitution, dans (β), des valeurs précédentes de $P^{(\beta)}$, $P^{(\gamma)}, \ldots$, fournit

$$\frac{A'_{\gamma}}{A_{\beta}} = \frac{B}{C'}, \quad \frac{B'_{\alpha}}{B_{\gamma}} = \frac{C}{A'}, \quad \frac{C'_{\beta}}{C_{\alpha}} = \frac{A}{B'},$$

d'où, en différentiant par α, β, γ respectivement, on conclut ces formes plus circonscrites

$$\begin{aligned} A &= \mathcal{C}_2\mathcal{B}, & B &= \mathcal{A}_2\mathcal{C}, & C &= \mathcal{B}_2\mathcal{A}, \\ B' &= \mathcal{C}_2\mathcal{A}_1, & C' &= \mathcal{A}_2\mathcal{B}_1, & A' &= \mathcal{B}_2\mathcal{C}_1, \end{aligned}$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ étant des fonctions arbitraires de α seul, etc.; mais la vérification complète des équations non différentiées exige que

$$\frac{\mathcal{B}'}{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \frac{\mathcal{C}'_1}{\mathcal{C}\mathcal{C}_2} = g, \quad \frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{C}_1\mathcal{C}_2} = \frac{\mathcal{A}'_1}{\mathcal{A}\mathcal{A}_2} = h, \quad \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2} = \frac{\mathcal{B}'_1}{\mathcal{B}\mathcal{B}_2} = k,$$

g, h, k étant des constantes qu'on peut évidemment supposer égales à l'unité. Ces équations fournissent $\mathcal{A}\mathcal{A}' - \mathcal{A}_1\mathcal{A}'_1 = 0, \ldots$. Les trois constantes qu'introduisait l'intégration de ces dernières doivent être égales pour la coïncidence des trois valeurs de θ déduites de (γ). D'après cela, il est visible qu'on peut prendre

$$\mathcal{A} = \alpha + \frac{1}{\alpha}, \quad \mathcal{A}_1 = -\alpha + \frac{1}{\alpha}, \quad \mathcal{A}_2 = -\frac{1}{\alpha}, \ldots,$$

et, par suite,

$$\theta = \frac{2\alpha\beta\gamma}{1 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2}.$$

On retombe ainsi sur l'exemple précédent.

Si des expressions de x, y, z relatives à cet exemple, considérées deux à deux, on élimine les fonctions arbitraires dont la dérivée manque, on reconnaît que toutes les lignes de courbure des surfaces orthogonales sont planes. Si l'on voulait chercher, en partant des équations aux rotations (17), (18), tous les pareils systèmes, on aurait d'abord, pour exprimer que toutes les lignes de courbure sont planes,

$$\frac{R^{(\alpha)}}{Q^{(\alpha)}} = a, \quad \frac{P^{(\beta)}}{R^{(\beta)}} = b, \quad \frac{Q^{(\gamma)}}{P^{(\gamma)}} = c \quad (\textit{voir}\ \text{le § IX});$$

on trouverait deux groupes analogues à (α) et (α'), sauf qu'il faut échanger les indices supérieurs de $P^{(\beta)}$, $P^{(\gamma)}$; .... Alors il faut commencer de particulariser les fonctions arbitraires A, A',..., autant que possible, au moyen des deux premières (γ). Par la considération d'équations linéaires du troisième ordre et aux différentielles ordinaires, on obtient des formes comparativement très-réduites pour les A, A',.... On continue de les circonscrire par le groupe (β); mais je supprime cette analyse, qui exige des détails un peu minutieux.

§ VII. — *Système triplement orthogonal et isotherme.*

Plusieurs éminents géomètres ont cherché à simplifier, par des considérations empruntées principalement à la Géométrie infinitésimale, la méthode au moyen de laquelle l'illustre auteur des *Coordonnées curvilignes* a montré que le système ellipsoïdal était le seul triplement orthogonal et isotherme. L'importance du sujet me détermine à indiquer quelques modifications qui me paraissent donner à cette méthode toute la rigueur et la simplicité analytique que l'on peut désirer.

La condition d'isothermie donnant (*Coordonnées curvilignes*, p. 95)

$$l = BC, \quad m = AC, \quad n = AB,$$

A, B, C étant des fonctions arbitraires qui manquent de α, β, γ respectivement, les relations (17^*) deviennent

$$A = \frac{B}{B_\gamma} A_\gamma + \frac{C}{C_\gamma} A_\beta, \quad B = \frac{A}{A_\gamma} B_\gamma + \frac{C}{C_\alpha} A_\alpha, \quad C = \frac{A}{A_\beta} C_\beta + \frac{B}{B_\alpha} C_\alpha,$$

les variables placées en indices indiquant toujours les dérivations partielles relatives à ces variables.

De la première on déduit, en différentiant deux fois par α,

$$0 = \left(\frac{B}{B_\gamma}\right)_\alpha A_\gamma + \left(\frac{C}{C_\beta}\right)_\alpha A_\beta, \quad 0 = \left(\frac{B}{B_\gamma}\right)_{\alpha\alpha} A_\gamma + \left(\frac{C}{C_\beta}\right)_{\alpha\alpha} A_\beta,$$

d'où, en excluant tout à fait l'hypothèse de A_β ou A_γ nul,

$$\frac{\left(\frac{B}{B_\gamma}\right)_{\alpha\alpha}}{\left(\frac{B}{B_\gamma}\right)_\alpha} = \frac{\left(\frac{C}{C_\beta}\right)_{\alpha\alpha}}{\left(\frac{C}{C_\beta}\right)_\alpha} = \frac{d \log \chi'(\alpha)}{d\alpha},$$

les deux premiers rapports devant être respectivement indépendants de β et de γ. De là

$$\frac{B}{B_\gamma} = f(\gamma)\chi(\alpha) + f_1(\gamma), \quad \frac{C}{C_\beta} = \mathrm{f}(\beta)\chi(\alpha) + \mathrm{f}_1(\beta),$$

les f et χ étant des fonctions arbitraires. Il en résulte, en remontant,

$$0 = A_\gamma f(\gamma) + A_\beta \mathrm{f}(\beta), \quad A = A_\gamma f_1(\gamma) + A_\beta \mathrm{f}_1(\beta).$$

La première, en posant

$$\int \frac{d\gamma}{f(\gamma)} = \varpi(\gamma), \quad \int \frac{d\beta}{\mathrm{f}(\beta)} = \omega(\beta), \quad \varpi - \omega = v,$$

et désignant par Φ une fonction arbitraire, donne

$$A = \Phi(v), \quad A_\gamma = \Phi'(v)\varpi'(\gamma), \quad A_\beta = -\Phi'(v)\omega'(\beta).$$

Donc, en vertu de la seconde,

$$\Psi(v) = \frac{\Phi}{\Phi'} = \varpi'(\gamma) f_1(\gamma) - \omega'(\beta)\mathrm{f}_1(\beta),$$

et, en différentiant tour à tour par γ et β,

$$\Psi'(\mathrm{v})\varpi'(\gamma)=[\varpi'(\gamma)f_1(\gamma)]', \quad \Psi'(\mathrm{v})\omega'(\beta)=[\omega'(\beta)\mathrm{f}_1(\beta)]'.$$

Par suite,

$$\Psi'(\mathrm{v})=\frac{[\varpi'(\gamma)f_1(\gamma)]'}{\varpi'(\gamma)}=\frac{[\omega'(\beta)\mathrm{f}_1(\beta)]'}{\omega'(\beta)}=\frac{1}{k},$$

$$\Psi=\frac{\mathrm{v}}{k}+\mathrm{K}, \quad \Phi=h(\mathrm{v}+\mathrm{H})^k,$$

k, K, h, H étant des constantes arbitraires. La forme nécessaire de A étant reconnue, et par suite aussi celle de B, C, la vérification simultanée de (17*) donne sous la forme la plus générale possible

$$\mathrm{A}^2=g(\mathcal{B}-\mathcal{C})^p, \quad \mathrm{B}^2=g_1(\mathcal{C}-\mathcal{A})^p, \quad \mathrm{C}^2=g_2(\mathcal{A}-\mathcal{B})^p,$$

où g, g_1, g_2, p sont des constantes quelconques. Il y a une deuxième forme, exponentielle, qui correspond à k infini, mais on reconnaîtra sans peine qu'elle ne peut vérifier les (18*).

D'après ces valeurs, la première (18*) devient

$$(\mathcal{A})\quad \left\{\begin{aligned} &2(\mathcal{B}-\mathcal{C})^p g\mathcal{A}''-2(\mathcal{C}-\mathcal{A})^p g_1\mathcal{B}''=\left(\frac{2}{\mathcal{A}-\mathcal{B}}-\frac{p}{\mathcal{C}-\mathcal{A}}\right)(\mathcal{B}-\mathcal{C})^p g\mathcal{A}'^2\\ &+\left(\frac{2}{\mathcal{A}-\mathcal{B}}-\frac{p}{\mathcal{B}-\mathcal{C}}\right)(\mathcal{C}-\mathcal{A})^p g_1\mathcal{B}'^2+\frac{p(\mathcal{A}-\mathcal{B})}{(\mathcal{B}-\mathcal{C})(\mathcal{C}-\mathcal{A})}(\mathcal{A}-\mathcal{B})^p g_2\mathcal{C}'^2;\end{aligned}\right.$$

si on l'ajoute aux deux autres, obtenues par une permutation circulaire des lettres, il vient

$$(\mathcal{B})\quad (p-1)[(\mathcal{B}-\mathcal{C})^{p+2}g\mathcal{A}'^2+(\mathcal{C}-\mathcal{A})^{p+2}g_1\mathcal{B}'^2+(\mathcal{A}-\mathcal{B})^{p+2}g_2\mathcal{C}'^2]=0.$$

L'hypothèse du second facteur nul, lorsqu'on pose

$$g\mathcal{A}'^2=\mathrm{u}, \quad g_1\mathcal{B}'^2=\mathrm{v}, \quad g_2\mathcal{C}'^2=\mathrm{w},$$

et que l'on prend $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ pour les variables indépendantes, donne, par deux différentiations relatives à $\mathcal{A}$,

$$(\mathcal{B}-\mathcal{C})^{p+2}\mathrm{u}+(\mathcal{C}-\mathcal{A})^{p+2}\mathrm{v}+(\mathcal{A}-\mathcal{B})^{p+2}\mathrm{w}=0,$$

$$(\mathcal{B}-\mathcal{C})^{p+2}\frac{d\mathrm{u}}{d\mathcal{A}}-(p+2)(\mathcal{C}-\mathcal{A})^{p+1}\mathrm{v}+(p+2)(\mathcal{A}-\mathcal{B})^{p+1}\mathrm{w}=0,$$

$$(\mathcal{B}-\mathcal{C})^{p+2}\frac{d^2\mathrm{u}}{d\mathcal{A}^2}+(p+2)(p+1)(\mathcal{C}-\mathcal{A})^p\mathrm{v}+(p+2)(p+1)(\mathcal{A}-\mathcal{B})^p\mathrm{w}=0.$$

Si l'on suppose $p = -2$, la première de ces équations fournit pour u, v, w des valeurs constantes qui vérifient les équations $(\mathcal{A})$, mais correspondent à un système isotherme imaginaire, qu'on peut en conséquence rejeter. On reconnaît d'un autre côté que la supposition $p = -1$, qui donnerait $\dfrac{d^2\mathrm{u}}{d\mathcal{A}^2} = 0$, ne peut s'accorder avec $(\mathcal{A})$. $(p+1)$ et $(p+2)$ étant différents de zéro, l'élimination de v, w entre les trois équations précédentes donne une équation du second ordre en u qui conduit à la valeur inadmissible $\mathrm{u} = 0$. L'équation $(\mathcal{B})$ exige donc forcément que l'on prenne $p = 1$. En se rappelant que

$$g\mathcal{A}'^2 = \mathrm{u}, \quad 2g\mathcal{A}'\mathcal{A}'' = \frac{d\mathrm{u}}{d\alpha}, \quad \text{d'où} \quad 2g\mathcal{A}'' = \frac{d\mathrm{u}}{d\mathcal{A}},$$

l'équation $(\mathcal{A})$ devient alors

$$(\mathcal{B}-\mathcal{C})\frac{d\mathrm{u}}{d\mathcal{A}} - (\mathcal{C}-\mathcal{A})\frac{d\mathrm{v}}{d\mathcal{B}} = \left(\frac{2}{\mathcal{A}-\mathcal{B}} - \frac{1}{\mathcal{C}-\mathcal{A}}\right)(\mathcal{B}-\mathcal{C})\mathrm{u}$$
$$+ \left(\frac{2}{\mathcal{A}-\mathcal{B}} - \frac{1}{\mathcal{B}-\mathcal{C}}\right)(\mathcal{C}-\mathcal{A})\mathrm{v} + \frac{(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2}{(\mathcal{B}-\mathcal{C})(\mathcal{C}-\mathcal{A})}\mathrm{w}.$$

Isolant w et différentiant trois fois de suite par $\mathcal{A}$, on obtient, après la suppression du facteur $(\mathcal{B}-\mathcal{C})$, que la première différentiation introduit,

$$(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2\frac{d^2\mathrm{u}}{d\mathcal{A}^2} - 4(\mathcal{A}-\mathcal{B})\frac{d\mathrm{u}}{d\mathcal{A}} + 6\mathrm{u} = 2(\mathcal{A}-\mathcal{B})\frac{d\mathrm{v}}{d\mathcal{B}} + 6\mathrm{v},$$
$$(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2\frac{d^3\mathrm{u}}{d\mathcal{A}^3} - 2(\mathcal{A}-\mathcal{B})\frac{d^2\mathrm{u}}{d\mathcal{A}^2} + 2\frac{d\mathrm{u}}{d\mathcal{A}} = 2\frac{d\mathrm{v}}{d\mathcal{B}},$$
$$(\mathcal{A}-\mathcal{B})^2\frac{d^4\mathrm{u}}{d\mathcal{A}^4} = 0.$$

Donc λ, λ_1, λ_2 étant des constantes arbitraires, on aura, en remontant ou par symétrie,

$$\mathrm{u} = \mathcal{A}^3 + \lambda\mathcal{A}^2 + \lambda_1\mathcal{A} + \lambda_2,$$
$$\mathrm{v} = \mathcal{B}^3 + \lambda\mathcal{B}^2 + \lambda_1\mathcal{B} + \lambda_2,$$
$$\mathrm{w} = \mathcal{C}^3 + \lambda\mathcal{C}^2 + \lambda_1\mathcal{C} + \lambda_2,$$

et par suite, U, V, W ayant ces valeurs,

$$d\alpha = \frac{d\mathcal{A}}{\sqrt{\frac{U}{g}}}, \quad d\beta = \frac{d\mathcal{B}}{\sqrt{\frac{V}{g_1}}}, \quad d\gamma = \frac{d\mathcal{C}}{\sqrt{\frac{W}{g_2}}}.$$

Quant à la détermination finale de x, y, z, il n'y a rien à substituer au calcul de M. Lamé.

§ VIII. — *Système orthogonal déduit du système elliptique.*

Lorsqu'on connaît un système orthogonal particulier, on peut en déduire les cosinus a, b, c, ... et les $P^{(\beta)}$, $P^{(\gamma)}$, ... en α, β, γ. Si l'on substitue ces valeurs particulières des P, Q, R dans les équations (15), et qu'on intègre ces dernières équations en prenant l, m, n pour inconnues, on obtiendra les expressions de ces inconnues avec trois fonctions arbitraires généralement. Puis, en conservant les valeurs particulières des a, b, c, ... on aura les x, y, z par des quadratures. Voici un exemple propre à montrer l'importance de cette remarque. En posant

$$G = \frac{-4}{(h-k)(k-j)(j-h)},$$

h, k, j étant des constantes, les formules relatives au système elliptique peuvent s'écrire, en supposant $\alpha > \beta > \gamma$,

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{G(k-j)(\alpha-h)(\beta-h)(\gamma-h)},\\ y_1 &= \sqrt{G(j-h)(\alpha-k)(\beta-k)(\gamma-k)},\\ z_1 &= \sqrt{G(h-k)(\alpha-j)(\beta-j)(\gamma-j)},\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\\ m_1 &= \sqrt{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},\\ n_1 &= \sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}.\end{aligned}\right.$$

Les valeurs correspondantes des P, Q, R seront, d'après (15),

$$R^{(\alpha)} = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}, \qquad R^{(\beta)} = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}, \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans les mêmes équations (15), (20), où l'on regarde actuellement l, m, n comme trois fonctions inconnues, les (20) donneront, pour déterminer l,

$$\frac{d^2l}{d\alpha\,d\beta}+\frac{\alpha+\beta-2\gamma}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{dl}{d\beta}+\frac{l}{4(\alpha-\beta)^2}=0,$$
$$\frac{d^2l}{d\alpha\,d\gamma}+\frac{\alpha+\gamma-2\beta}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\frac{dl}{d\gamma}+\frac{l}{4(\alpha-\gamma)^2}=0.$$

Si l'on pose $l=l_1 u$, et ultérieurement $m=m_1 v$, $n=n_1 w$, les deux équations précédentes deviendront, en observant que l_1 est une de leurs solutions communes,

$$2(\alpha-\beta)\frac{d^2u}{d\alpha\,d\beta}+3\frac{du}{d\beta}-\frac{du}{d\alpha}=0,$$
$$2(\alpha-\gamma)\frac{d^2u}{d\alpha\,d\gamma}+3\frac{du}{d\gamma}-\frac{du}{d\alpha}=0.$$

Ces équations admettent la solution simple

$$\frac{T}{(\alpha-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$

T, t étant des constantes quelconques. Les équations (15) fournissent les valeurs simples et correspondantes de v, w, et l'on a la solution très-générale

$$u=\Sigma\frac{T}{(\alpha-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$
$$v=\Sigma\frac{T}{(\beta-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$
$$w=\Sigma\frac{T}{(\gamma-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$

le Σ s'étendant à toutes les valeurs qu'on voudra de T, t. Pour trouver x, y, z on prendra

$$a=\frac{1}{l_1}\frac{dx_1}{d\alpha}=\frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{G(k-j)(\beta-h)(\gamma-h)}{(\alpha-h)}},\quad b=\ldots,$$

et par l'intégration des différentielles exactes (c), § III, on trouvera

$$x=\sqrt{G(k-j)(\alpha-h)(\beta-h)(\gamma-h)}\,\Sigma\frac{T}{(h-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$

$$y = \sqrt{G(j-h)(\alpha-k)(\beta-k)(\gamma-k)}\,\Sigma\,\frac{T}{(k-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}},$$

$$z = \sqrt{G(h-k)(\alpha-j)(\beta-j)(\gamma-j)}\,\Sigma\,\frac{T}{(j-t)\sqrt{(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t)}}.$$

Les systèmes, en nombre infini, compris dans ces formules, ont évidemment la même image sphérique que le système elliptique.

§ IX. — *Des surfaces applicables.*

J'introduis ce dernier paragraphe pour rattacher à la théorie générale des coordonnées curvilignes la théorie partielle de la déformation des surfaces, qu'il est impossible de déduire des formules de M. Lamé. Si dans les équations (15), § V, on introduit l'hypothèse $n = 0$, elles deviennent $l_\gamma = 0$, $m_\gamma = 0$, $P^{(\gamma)} = 0$, $Q^{(\gamma)} = 0$, $R^{(\gamma)} = 0$, et

$$(24) \qquad R^{(\alpha)} = -\frac{l_\beta}{m}, \quad R^{(\beta)} = \frac{m_\alpha}{l}, \quad m\,P^{(\alpha)} + l\,Q^{(\beta)} = 0.$$

On ne peut plus faire usage des relations (17), (18) ou (17*), (18*), établies sous la condition expresse de $P^{(\alpha)}$, $Q^{(\beta)}$, $R^{(\gamma)}$ égaux à zéro. Mais en revenant aux identités (8), où cette supposition n'a pas été introduite, et où l'on fera $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, on aura ici, en ayant égard à (24),

$$(25) \qquad \left\{\begin{aligned} &Q^{(\alpha)}P^{(\beta)} - P^{(\alpha)}Q^{(\beta)} = \left(\frac{l_\beta}{m}\right)_\beta + \left(\frac{m_\alpha}{l}\right)_\alpha, \\ &Q^{(\alpha)}_\beta - Q^{(\beta)}_\alpha + \frac{m_\alpha}{l}P^{(\alpha)} + \frac{l_\beta}{m}P^{(\beta)} = 0, \\ &P^{(\alpha)}_\beta - P^{(\beta)}_\alpha - \frac{l_\beta}{m}Q^{(\beta)} - \frac{m_\alpha}{l}Q^{(\alpha)} = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (24), (25) correspondent au problème de l'*application* des surfaces quand l et m sont donnés en α, β. Dans le cas particulier de $l = 1$, on retombe, en éliminant $Q^{(\beta)}$, sur les équations *fondamentales* de M. Bour (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIXe Cahier).

Lorsqu'on aura tiré de ces équations les valeurs de $P^{(\alpha)}$, $P^{(\beta)}$, $Q^{(\alpha)}$, $Q^{(\beta)}$, on obtiendra les cosinus par l'intégration des équations (7), qui sont ici

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{da}{d\alpha} &= -b\frac{l_\beta}{m} - c\mathrm{Q}^{(\alpha)}, & \frac{da}{d\beta} &= b\frac{m_\alpha}{l} - c\mathrm{Q}^{(\beta)},\\ \frac{db}{d\alpha} &= c\mathrm{P}^{(\alpha)} + a\frac{l_\beta}{m}, & \frac{db}{d\beta} &= c\mathrm{P}^{(\beta)} - a\frac{m_\alpha}{l},\\ \frac{dc}{d\alpha} &= a\mathrm{Q}^{(\alpha)} - b\mathrm{P}^{(\alpha)}, & \frac{dc}{d\beta} &= a\mathrm{Q}^{(\beta)} - b\mathrm{P}^{(\beta)}, \end{aligned}\right.$$

et qui ont été considérées plus généralement au § IV. On aura ensuite x, y, z par les équations (c), § III.

Si l'on veut se débarrasser de toute espèce d'auxiliaires et déterminer *directement* x, par exemple, il n'y aura qu'à éliminer $\mathrm{P}^{(\alpha)}$, $\mathrm{P}^{(\beta)}$, $\mathrm{Q}^{(\alpha)}$, $\mathrm{Q}^{(\beta)}$ entre (26) et la première (25). On obtiendra ainsi

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &c^2\left[\left(\frac{l_\beta}{m}\right)_\beta + \left(\frac{m_\alpha}{l}\right)_\alpha\right] + \frac{da}{d\alpha}\frac{db}{d\beta} - \frac{da}{d\beta}\frac{db}{d\alpha}\\ &\quad + \frac{m_\alpha}{l}\left(a\frac{da}{d\alpha} + b\frac{db}{d\alpha}\right) + \frac{l_\beta}{m}\left(a\frac{da}{d\beta} + b\frac{db}{d\beta}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

où l'on remplacera c^2 par $1 - a^2 - b^2$, a et b par $\frac{1}{l}\frac{dx}{d\alpha}$ et $\frac{1}{m}\frac{dx}{d\beta}$, ce qui fournit l'équation du second ordre que doit vérifier une quelconque des coordonnées x, y, z.

Un autre mode de solution résulte de l'emploi des formules d'Euler, lesquelles transforment (24) dans

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} + \cos\theta\frac{d\psi}{d\alpha} = -\frac{l_\beta}{m},$$

$$\frac{d\varphi}{d\beta} + \cos\theta\frac{d\psi}{d\beta} = \frac{m_\alpha}{l},$$

$$m\left(\cos\varphi\frac{d\theta}{d\alpha} + \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{d\alpha}\right) = l\left(\sin\varphi\frac{d\theta}{d\beta} - \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{d\beta}\right).$$

Les équations (25) sont alors de simples identités. Lorsque φ, ψ, θ ont été déterminées en α, β par ces trois équations, les formules d'Euler donnent tout de suite les cosinus, et les quadratures (c), § III, fournissent enfin x, y, z (*).

» Des équations des lignes de courbure d'une quelconque des surfaces considérées, savoir

$$\begin{gathered}\left(l+\Theta Q^{(\alpha)}\right) d\alpha+\Theta Q^{(\beta)} d\beta=0, \\ \left(m-\Theta P^{(\beta)}\right) d\beta-\Theta P^{(\alpha)} d\alpha=0,\end{gathered}$$

d'où

$$\left(P^{(\alpha)} Q^{(\beta)}-P^{(\beta)} Q^{(\alpha)}\right) \Theta^2+\left(m Q^{(\alpha)}-l P^{(\beta)}\right) \Theta+m l=0 .$$

On conclut, en comparant avec la première (25), que le produit des inverses des rayons principaux de courbure est

$$\frac{1}{ml}\left[\left(\frac{l_\beta}{m}\right)_\beta+\left(\frac{m_\alpha}{l}\right)_\alpha\right].$$

En désignant par $\omega^{(\alpha)} d\alpha$, $\upsilon^{(\alpha)} d\alpha$, $\varepsilon^{(\alpha)}$ les angles de contingence, de torsion, et l'inclinaison, sur le plan tangent, de la courbe $\beta=$ const., en appelant $\omega^{(\beta)} d\beta$, $\upsilon^{(\beta)} d\beta$, $\varepsilon^{(\beta)}$ les quantités analogues pour la courbe $\alpha=$ const. ($\varepsilon^{(\alpha)}$, $\varepsilon^{(\beta)}$ sont comptés à partir du plan osculateur correspondant, en supposant que celui-ci tourne autour de la tangente dans le sens direct) il est facile de voir géométriquement ou analytiquement que

$$\begin{aligned} P^{(\alpha)} &= \upsilon^{(\alpha)}+\varepsilon_\alpha^{(\alpha)}, & P^{(\beta)} &= \omega^{(\beta)} \sin \varepsilon^{(\beta)}, \\ Q^{(\alpha)} &= \omega^{(\alpha)} \sin \varepsilon^{(\alpha)}, & Q^{(\beta)} &= \upsilon^{(\beta)}+\varepsilon_\beta^{(\beta)}, \\ R^{(\alpha)} &= \omega^{(\alpha)} \cos \varepsilon^{(\alpha)}, & R^{(\beta)} &= \omega^{(\beta)} \cos \varepsilon^{(\beta)}. \end{aligned}$$

Lorsque, pour une surface individuelle, $\alpha=$ const., $\beta=$ const. correspondent aux lignes de courbure, il résulte des équations ci-dessus, relatives à ces lignes, $P^{(\alpha)}=0$, $Q^{(\beta)}=0$. Dans ce cas $\upsilon^{(\alpha)}+\varepsilon_\alpha^{(\alpha)}=0$, de façon que, si la ligne est plane, le rapport $\dfrac{R^{(\alpha)}}{Q^{(\alpha)}}$ ne dépend point de α.

(*) J'ai appris que les résultats ci-dessus avaient été établis par M. Codani, mais je ne sais à quelle époque précise.

Remarque finale. — S'il s'agissait d'établir le plus simplement possible les diverses formules relatives, soit aux surfaces applicables, soit aux systèmes triplement orthogonaux, il suffirait évidemment de prendre les formules classiques de la Mécanique qui donnent les variations des cosinus au moyen des composantes des rotations. On écrirait deux fois ces équations dans le premier cas, trois dans le second, avec des composantes de rotations différentes (les deux ou trois groupes (7*), § IV, par exemple), on écrirait le groupe (8*) (même paragraphe), que je présume avoir établi, le premier, dans sa généralité; puis, en faisant coïncider les axes rectangulaires mobiles avec les tangentes aux trajectoires orthogonales de la surface (le troisième avec la normale), on retrouverait les formules du présent paragraphe, tandis qu'en les faisant coïncider avec les tangentes aux courbes d'intersection des trois surfaces orthogonales, on obtiendrait les formules relatives à cette théorie. C'est cette dernière marche qu'a adoptée M. Bonnet en employant tout de suite les formules d'Euler, ce qui lui a dissimulé un peu, ce me semble, le rôle des rotations partielles, dont la composition analytique, négligée par M. Lamé, avait, d'un autre côté, laissé stériles pour cet illustre géomètre les trois conditions géométriquement évidentes $P^{(\alpha)} = 0$, $Q^{(\beta)} = 0$, $R^{(\gamma)} = 0$.