ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. PAINLEVÉ

Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 8 (1891), p. 201-226

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1891_3_8__201_0>

MÉMOIRE

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

(SUITE),

PAR M. PAUL PAINLEVÉ,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE.

CHAPITRE III.

APPLICATION DES THÉORÈMES PRÉCÉDENTS A L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

1. Nous avons démontré, dans le premier Chapitre, que l'intégrale générale d'une équation (1)

$$F[y, y', (x)] = 0, \tag{1}$$

quand elle ne prend qu'un nombre limité de valeurs autour des points critiques mobiles, peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$R[y, y', (x)] = C, \tag{2}$$

C désignant une constante et R une fonction rationnelle de y, y', dont les coefficients dépendent de x d'une façon quelconque.

On peut, de plus, choisir deux *constantes intégrales* de la forme (2)

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha = R_1[y, y', (x)], \\ \beta = R_2[y, y', (x)], \end{cases}$$

de telle façon que toutes les constantes intégrales (2) s'expriment rationnellement en α, β

$$C = f(\alpha, \beta).$$

Les constantes α, β sont liées par une équation algébrique

$$(4) \qquad f(\alpha, \beta) = 0,$$

que nous avons appelée *relation entre les constantes intégrales*. Cette équation n'est définie qu'à une transformation birationnelle près.

Quand le genre de l'équation (4) est supposé différent de zéro, les théorèmes établis dans le précédent Chapitre trouvent immédiatement leur application dans l'étude de l'intégrale de (1).

Tout d'abord, supposons que ce genre ϖ de l'équation (4) soit plus grand que 1. Les égalités (3) établissent une correspondance rationnelle entre la courbe (4) et la courbe définie par l'équation (1), où l'on donne à x une valeur constante. Or nous savons déterminer algébriquement toutes les courbes

$$(4)' \qquad f(\alpha, \beta) = 0$$

distinctes, de genre ϖ plus grand que 1, et qui correspondent rationnellement à la courbe donnée (1); nous savons aussi calculer algébriquement toutes les transformations (3) qui permettent de passer de (4) à (1).

Nous formons donc ainsi algébriquement un certain nombre de relations

$$(3)' \qquad \begin{cases} \alpha_i = R_1^i[y, y', (x)], \\ \beta_i = R_2^i[y, y', (x)], \end{cases}$$

et il faut qu'un de ces systèmes de relations (3)' définisse l'intégrale de (1), ce qu'on reconnaît également à l'aide d'opérations algébriques.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante : *On reconnaît algébriquement si l'intégrale de* (1) *ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, la relation entre les constantes intégrales étant supposée de genre ϖ plus grand que* 1. *L'intégrale, dans ce cas, s'obtient elle-même algébriquement.*

Si n désigne le nombre de valeurs de y qui se permutent autour des points critiques mobiles, la transformation de (4) en (1) est d'ordre n. On a donc, d'après un théorème établi plus haut,

$$n = \frac{p-1}{\varpi - 1}.$$

Nous voyons que le nombre n est un diviseur de $p-1$, et, par suite, ce nombre ne peut dépasser $(p-1)$, quand la relation (4) est de genre plus grand que 1. De plus, quand $\varpi = p$, la transformation (3) est nécessairement birationnelle, et l'intégrale n'a que des points critiques fixes.

2. Supposons maintenant que le genre ϖ de (4) soit égal à l'unité. Prenons l'équation (4) sous la forme

$$\beta = \sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)}. \tag{5}$$

Dans l'équation

$$F[y, y', (x)] = 0, \tag{1}$$

faisons, pour plus de clarté, $y' = z$, et donnons à x une valeur constante quelconque. Elle devient

$$F[y, z, (x)] = 0. \tag{1)'$$

Par hypothèse, les relations

$$\alpha = R_1[y, z, (x)],$$
$$\beta = R_2[y, z, (x)]$$

permettent de passer de la courbe (5) à la courbe (1)'. On a donc, en conservant la même notation qu'au Chapitre précédent,

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)}} = \frac{\lambda_1 P_1(y, z) + \lambda_2 P_2(y, z) + \ldots + \lambda_p P_p(y, z)}{F'_z}\, dy. \tag{6}$$

Dans cette égalité, les P_i désignent des polynômes en y et y', dont les coefficients dépendent de x ainsi que les λ.

Par conséquent,

$$\int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{(1-\alpha)(1-h^2\alpha^2)}} = h + \int_0^y \frac{\lambda_1 P_1(y, z) + \ldots + \lambda_p P_p(y, z)}{F'_z}\, dy$$

ou enfin

$$J(\alpha) = h + J'[y, z, (x)],$$

h désignant une fonction de x.

En posant $\alpha = \operatorname{sn} C$, on voit qu'en définitive il doit exister une intégrale abélienne de première espèce de la courbe (1)′ telle que l'intégrale de l'équation (1) puisse se mettre sous la forme

$$J'[y, z, (x)] + h(x) = C;$$

z représente, dans cette égalité, la fonction de y et z définie par (1)′.

Pour tenir compte plus aisément de cette condition, supposons l'équation (1) résolue par rapport à y'

$$y' = z = K[y, (x)],$$

et remplaçons z par $K[y, (x)]$. Si nous posons

$$J'_1(y, x) = J'[y, K(y, x), x],$$

la condition précédente devient

$$J'_1(y, x) = -h(x) + C$$

ou bien

$$\frac{dJ'_1}{dx} = \frac{\partial J'_1}{\partial y} K(y, x) + \frac{\partial J'_1}{\partial x} = -h'(x).$$

Cette égalité équivaut à la suivante

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 J'_1}{\partial y^2} K(y, x) + \frac{\partial J'_1}{\partial y} \frac{\partial K(y, x)}{\partial y} + \frac{\partial^2 J'_1}{\partial y\, \partial x} \equiv 0.$$

On a, d'autre part,

$$J'_1(y, x) = \lambda_1 \int_0^y H_1[y, (x)]\, dy + \ldots + \lambda_p \int_0^y H_p[y, (x)]\, dy,$$

$H_i[y, (x)]$ représentant l'expression

$$\frac{P_i[y, z, (x)]}{F'_z},$$

où l'on fait

$$z = K[y, (x)].$$

L'égalité (7) peut alors s'écrire

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_1\left(K\frac{\partial H_1}{\partial y}+H_1\frac{\partial K}{\partial y}+\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)+H_1\frac{d\lambda_1}{dx}\\ &+\lambda_2\left(K\frac{\partial H_2}{\partial y}+H_2\frac{\partial K}{\partial y}+\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)+H_2\frac{d\lambda_2}{dx}\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &+\lambda_p\left(K\frac{\partial H_p}{\partial y}+H_p\frac{\partial K}{\partial y}+\frac{\partial H_p}{\partial x}\right)+H_p\frac{d\lambda_h}{dx}=0. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients des λ_i, $\frac{d\lambda_i}{dx}$ dans cette égalité sont des fonctions de y (et de x), qui s'expriment rationnellement en y, z.

Écrivons que l'équation (8) a lieu identiquement pour tous les systèmes de valeurs y, z, x, qui vérifient la relation

$$F[y, z, (x)]=0.$$

Nous obtenons ainsi un certain nombre ν d'équations linéaires et homogènes en λ_i et $\frac{d\lambda_i}{dx}$:

$$(9)\qquad A_1\lambda_1+A_2\lambda_2+\ldots+A_p\lambda_p+B_1\frac{d\lambda_1}{dx}+B_2\frac{d\lambda_2}{dx}+\ldots+B_p\frac{d\lambda_p}{dx}=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Les quantités A_i, B_i représentent des fonctions de x qui s'expriment rationnellement à l'aide des coefficients de y, z dans l'équation (1').

Si l'intégrale de (1) est de la forme indiquée, ces équations doivent être compatibles. Peuvent-elles être indéterminées? Tout d'abord l'égalité

$$\frac{\partial J'_1}{\partial y}K(y,x)+\frac{\partial J'_1}{\partial x}=-h'(x),$$

qu'on peut écrire

$$H(y,x)K(y,x)+\int_0^y\frac{\partial H(y,x)}{\partial x}dy=-h'(x),$$

nous montre que l'intégrale abélienne

$$\frac{\partial J'_i}{\partial x}=\int_0^y\frac{\partial H(y,x)}{\partial x}dy$$

est une fonction algébrique de y; elle n'a donc pas de périodes, et, par suite, les périodes de l'intégrale abélienne J' sont indépendantes de x.

Donc, quand une intégrale abélienne J' de la courbe (1) satisfait à l'égalité (7), ses périodes sont indépendantes de x.

D'autre part, si J' satisfait à cette égalité, il en est de même de $\mu J'$, μ désignant une constante. Plus généralement, si les intégrales indépendantes J', J'', J''', ... vérifient cette condition (7), l'intégrale

$$\mu J' + \mu' J'' + \mu'' J''' + \ldots$$

jouit de la même propriété.

Mais, si les systèmes de solutions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ de (9) peuvent dépendre de constantes $\mu, \mu', \ldots$, ils ne sauraient renfermer de fonctions arbitraires de x. On s'en rend compte de la manière suivante : appelons $J_1, J_2, \ldots, J_p$ les p intégrales abéliennes normales de première espèce, c'est-à-dire celles qui ont pour Tableau des périodes le Tableau

$$\begin{array}{cccccccc}
1, & 0, & 0, & \ldots, & \omega_1^1, & \omega_1^2, & \ldots, & \omega_1^p, \\
0, & 1, & 0, & \ldots, & \omega_2^1, & \omega_2^2, & \ldots, & \omega_2^p, \\
.., & .., & .., & \ldots, & .., & .., & \ldots, & .., \\
0, & 0, & 0, & ..1, & \omega_p^1, & \omega_p^2, & \ldots, & \omega_p^p,
\end{array}$$

avec les conditions $\omega_i^j = \omega_j^i$.

Si une intégrale quelconque

$$J = \lambda_1 J_2 + \lambda_2 J_2 + \ldots = \lambda_p J_p$$

a ses périodes constantes, les $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont eux-mêmes des constantes.

D'après cela, le système des λ_i le plus général qui satisfait aux équations (9) ne peut dépendre que de constantes : ces constantes, en nombre q au plus égal à p, y figurent d'une façon linéaire et homogène.

Quand $q = p$, toutes les périodes ω_j^i sont des constantes, la courbe (1) a ses modules indépendants de x.

Ce cas particulier, que nous traiterons plus loin, mis à part, q est égal au plus à $(p - 1)$, c'est-à-dire que les λ_i sont déterminées par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre $(p-1)$ au plus.

On peut se demander si certaines courbes

$$F[y, z, (x)] = 0$$

admettent effectivement plusieurs intégrales J dont les périodes sont indépendantes de x, quand les modules de la courbe dépendent eux-mêmes de x. Les travaux de M. Picard permettent de répondre affirmativement à cette question. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer une surface algébrique

$$F_1(y, z, x) = 0,$$

ayant q différentielles totales de première espèce. Si on laisse x constant dans cette équation, les courbes

$$F_1(y, z, x_0) = 0$$

ont des modules variables avec x_0 (sauf pour des surfaces exceptionnelles), et ces courbes admettent q intégrales abéliennes de première espèce, dont les périodes ne dépendent pas de x (¹).

Le plus fréquemment, il n'existe qu'une intégrale J distincte répondant à la question. Cette intégrale J s'obtient alors à l'aide d'une quadrature

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = g(x).$$

Une fois λ calculé, en posant

$$Y = J(y, z, x) = \int_0^y H(y, x)\, dy = J_1(y, x),$$

la dérivée

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\partial J_1}{\partial y} K + \frac{\partial J_1}{\partial x} = \varphi(y, z, x)$$

se réduit d'elle-même à une simple fonction de x, $-h'(x)$, quand on tient compte de

$$F(y, z, x) = 0,$$

(¹) E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*loc. cit.*). — *Voir* aussi les deux Mémoires du même Auteur *Sur les surfaces algébriques* (*Journal de Mathématiques*, années 1885, 1886).

et l'équation s'intègre à l'aide de la quadrature

$$\frac{dY}{dx} = -h'(x).$$

Mais, dans certains cas particuliers, la recherche des λ_i exigera la connaissance d'une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre q ($q \leqq p - 1$). Une telle intégrale une fois connue, l'équation s'intégrera en posant encore

$$Y = J(y, z, x),$$

à l'aide d'une quadrature

$$\frac{dY}{dx} = -h'(x).$$

Remarquons que ces facteurs λ_i sont liés par certaines relations à des fonctions connues de x.

En effet, écrivons les périodes des p intégrales abéliennes distinctes de la courbe (1) :

$$\begin{array}{cccc}
\omega_2^1, & \omega_1^2, & \ldots, & \omega_1^{2p}, \\
\omega_2^1, & \omega_2^2, & \ldots, & \omega_2^{2p}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\omega_p^1, & \omega_p^2, & \ldots, & \omega_p^{2p}.
\end{array}$$

Les coefficients λ_i doivent vérifier les $2p$ égalités

$$(\alpha) \qquad \lambda_1 \omega_1^i + \lambda_2 \omega_2^i + \ldots + \lambda_p \omega_p^i = C_i$$

C_i désignant une constante. Les quantités ω_j^i sont des fonctions de x données par des intégrales définies

$$\omega_i^j = \int_{a_{ij}(x)}^{b_{ij}(x)} \frac{P_i[y, z, (x)]}{F'_z} dy.$$

Si même J vérifie l'équation (6), les C_i doivent s'exprimer en fonction de deux nombres α, β, ainsi

$$C_i = m_i \alpha + n_i \beta.$$

Mais on ne peut, en général, tirer parti de ces égalités, car il resterait à vérifier que les combinaisons des ω_j^i qui donnent les λ satisfont aux équations différentielles (9), ce qu'on ne sait pas faire.

Il est un cas pourtant où la recherche des λ s'effectue sans difficulté, c'est le cas signalé plus haut, où les modules de la courbe (1) sont indépendants de x.

On peut alors établir une correspondance birationnelle

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{array}{ll} y=\varphi[t,\mathrm{T},(x)], & t=\varphi_1[y,z,(x)],\\ z=\psi[t,\mathrm{T},(x)], & \mathrm{T}=\psi_1[y,z,(x)]\end{array}\right.$$

entre la courbe

$$(1)\qquad \mathrm{F}[y,z,(x)]$$

et la courbe

$$(10)\qquad \mathrm{F}_1(t,\mathrm{T})=0,$$

F_1 étant une courbe qui ne dépend pas de x et dont les modules sont égaux à ceux de (1).

Soient $j_1(t,\mathrm{T}), j_2(t,\mathrm{T}), \ldots, j_p(t,\mathrm{T})$ p intégrales distinctes de première espèce de la courbe (10), intégrales où ne figure pas x et dont les périodes sont, par suite, des constantes. Soient, d'autre part, $\mathrm{J}_1[y,y',(x)]$, $\mathrm{J}_2[y,y',(x)]$, ..., $\mathrm{J}_p[y,y',(x)]$ les p intégrales abéliennes de (1) qui correspondent birationnellement aux p intégrales de (10). Leurs périodes sont des constantes, et on en déduit aussitôt que toute intégrale

$$\mathrm{J}=\lambda_1\mathrm{J}_1+\lambda_2\mathrm{J}_2+\ldots+\lambda_p\mathrm{J}_p,$$

dont les périodes sont aussi des constantes, s'obtient en donnant aux λ des valeurs constantes.

Le problème revient donc à déterminer ces p constantes de façon que $\frac{d\mathrm{J}}{dx}$ soit une simple fonction de x, quand on tient compte de l'équation (1). Si la chose est possible (ce qu'on reconnaît algébriquement), l'équation (1) s'intègre par quadratures.

Appliquons ce qui précède à l'équation la plus générale de genre 1. Soient

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha=\mathrm{R}\,[y,y',(x)],\\ \beta=\mathrm{R}_1[y,y',(x)]\end{array}\right.$$

deux formes de l'intégrale générale de l'équation

$$F[y, y', (x)] = 0,$$

de genre 1. La relation entre α, β est de genre ϖ, au plus égal à 1. Supposons qu'elle soit effectivement de genre 1 et qu'on l'ait ramenée à la forme

$$\beta^2 = (1 - \alpha^2)(1 - k_0'' \alpha^2).$$

Nous pouvons, par une substitution birationnelle,

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} y = \varphi[t, T, (x)], & t = \varphi_1[y, z, (x)], \\ z = \psi[t, T, (x)], & T = \psi_1[y, z, (x)] \end{cases}$$

faire correspondre à la courbe

$$\text{(1)} \qquad F[y, z, (x)] = 0$$

la courbe

$$\text{(10)} \qquad T^2 = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2).$$

Dans cette équation, k^2 est une fonction de x.

La fonction $t(x)$, définie par la substitution (A), vérifie une équation différentielle transformée de l'équation (1) et qu'on obtient en écrivant l'égalité

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial T}\frac{dT}{dt}\right)\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = z = \psi[t, T, (x)],$$

T désignant la fonction de t définie par l'équation (10). On a d'ailleurs

$$\alpha = R'[t, T, (x)],$$
$$\beta = R'_1[t, T, (x)],$$

R' et R'_1 étant rationnels en t, T; par suite,

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - k_0'' \alpha^2)}} = \frac{\lambda\, dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}.$$

Cette égalité ne peut avoir lieu que si k vérifie une des équations modulaires relatives à k_0; k ne peut donc varier d'une façon continue tandis que k_0 reste constant, et, par suite, k est indépendant de x. L'égalité exige alors que λ soit lui-même constant, et l'équation différentielle en t doit être de la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = G(x)\,dx,$$

Si l'on pose alors

$$h(x) = \int G(x)\,dx,$$

on a

$$t(x) = \operatorname{sn}[h(x) + C];$$

l'intégrale générale $t(x)$ n'a que des points critiques fixes, et il en est de même de l'intégrale générale de l'équation (1). Nous savons d'ailleurs que, réciproquement, quand l'intégrale de l'équation (1) n'a que des points critiques fixes, le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales est égal au genre de (1), ici à l'unité, de sorte que nous sommes conduits, en définitive, aux théorèmes suivants :

Les seules équations différentielles de genre 1 pour lesquelles le genre ϖ de la relation entre des constantes intégrales est égal à l'unité sont les équations dont l'intégrale générale n'a que des points critiques fixes.

Il n'y a pas lieu de s'étonner de la simplification qui se produit dans le cas où p est égal à 1. Quand p est quelconque, les périodes ω_i^j des intégrales J doivent satisfaire [pour que les relations (α) entre les λ_i soient compatibles] à p relations, dont les coefficients sont constants; ces périodes dépendent de $(3p-3)$ modules, que ces p relations ne suffisent pas à déterminer, et qui, par suite, peuvent être fonctions de x.

Au contraire, quand $p=1$, le nombre des modules est égal à 1, et ce module, devant satisfaire à une relation dont les coefficients sont constants, est lui-même constant.

Revenons au cas général de p quelconque. S'il existe une ou plusieurs intégrales J de première espèce telles que l'intégrale générale de l'équation (1) soit donnée par la relation

$$(\beta)\qquad J[y, z, (x)] + h(x) = C,$$

on n'en saurait conclure que cette intégrale prend un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles et correspond au cas de $\varpi = 1$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut, de plus, que l'une des intégrales abéliennes qu'on vient de calculer n'ait que deux périodes. Si cette nouvelle condition est accomplie (ce que l'on ne sait pas reconnaître en général) en posant

$$\gamma = \mathrm{sn}(\mathrm{J} + h + c),$$

on voit que γ est une fonction rationnelle de y, z,

$$\gamma = \rho[y, z, (x)],$$

et l'intégrale générale de (1) ne prend autour des points critiques mobiles qu'un nombre fini de valeurs. Cette dernière condition se trouve vérifiée d'elle-même quand $p = 1$.

Nous arrivons donc aux conclusions suivantes :

Quand l'intégrale d'une équation différentielle (1) *ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, le genre* ϖ *de la relation entre les constantes intégrales est compris entre* 0 *et* p (*inclusivement*).

On reconnaît algébriquement si l'intégrale d'une équation donnée est de cette nature et correspond, de plus, à une valeur de ϖ *supérieure à* 1. *L'équation s'intègre alors algébriquement.*

On reconnaît algébriquement si l'intégrale de (1) *est de cette nature et correspond à la valeur* $\varpi = 1$ *de* ϖ (*et l'équation s'intègre alors par quadratures*), *ou bien on ramène l'intégration de l'équation à la recherche d'une intégrale particulière quelconque d'une équation linéaire et homogène d'ordre* $(p - 1)$ *au plus : cette dernière intégrale calculée, l'équation* (1) *s'intègre par quadratures.*

Si $\varpi = p$ (*p étant différent de zéro*), *l'intégrale de l'équation* (1) *n'a que des points critiques fixes.*

La méthode n'indique rien sur le cas où ϖ serait nul. Quand $p = 0$, ϖ est nécessairement nul. Il en est de même lorsque p est égal à 1 et que l'intégrale a des points critiques mobiles. Les équations de genre $p = 0$ et $p = 1$ échappent donc complètement à ce procédé d'intégration.

Avant de nous occuper d'une autre méthode qui s'applique aux équations (1), de genre 0, je ferai quelques remarques sur la manière dont il convient d'employer la méthode précédente.

3. Tout d'abord, on peut se servir de la transformation birationnelle

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} y=\varphi[t,\mathrm{T},(x)], & t=\varphi_1[y,z,(x)],\\ z=\psi[t,\mathrm{T},(x)], & \mathrm{T}=\psi_1[y,z,(x)], \end{cases}$$

pour ramener l'équation (1) à la forme la plus simple. Par exemple, si l'équation (1)

$$(1)\qquad \mathrm{F}(y,y',x)=0$$

est de l'espèce hyperelliptique, on ramène l'équation par une substitution (γ) à la forme

$$\frac{dt}{dx}=\mathrm{M}[t,(x)]+\mathrm{N}[t,(x)\sqrt{\mathrm{P}[t,(x)]}.$$

Quand l'intégrale y de (1) prend un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles (par exemple, quand y n'a que des points critiques fixes), il en est de même de l'intégrale $t(x)$ de l'équation

$$\mathrm{F}'[t,t',(x)]=0,$$

Mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. Soit en effet

$$\mathrm{F}_1[t,\mathrm{T},(x)]=0$$

la relation entre t et T; l'équation en t et t' s'écrit

$$\frac{d}{dx}\varphi[t,\mathrm{T},(x)]=\psi[t,\mathrm{T},(x)]$$

ou

$$(\delta)\qquad t'=h[t,\mathrm{T},(x)],$$

T désignant la fonction de t et de x définie par l'équation $\mathrm{F}_1=0$. L'équation en (t,t',x) s'obtient en éliminant T entre (δ) et $\mathrm{F}_1=0$.

On passe, par une transformation rationnelle de la courbe F' à la courbe F_1, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie : plusieurs valeurs de T peuvent correspondre à chaque système t, t'.

Supposons, par exemple, que T ne figure pas dans $h[t,\mathrm{T},(x)]$. Pour que l'équation (1) ait ses points critiques fixes, il faut d'abord que cette propriété appartienne à l'équation

$$t' = h[t, (x)],$$

et de plus que la fonction $T(x)$, définie par l'équation

$$F_1[t, T, (x)] = 0,$$

quand on y remplace t en x, ait elle-même ses points critiques fixes.

Mais, dans tous les cas, les conditions exprimant que t prend n valeurs autour des points critiques mobiles seront *nécessaires* pour que y jouisse de la même propriété [1].

Une seconde remarque est relative aux substitutions multiples, qui permettent de passer rationnellement d'une courbe algébrique à une autre. Parmi ces substitutions, nous ne regardons comme *distinctes* que celles qui ne se déduisent pas l'une de l'autre par une transformation birationnelle. En voici la raison : supposons que l'intégrale de l'équation (1) vérifie les deux relations

$$\alpha = R_1[y, y', (x)], \qquad \beta = R_2[y, y', (x)],$$

qui transforment rationnellement la courbe

$$f(\alpha, \beta) = 0$$

en la courbe (1).

Toutes les substitutions

$$\alpha' = R'_1[y, y', (x)], \qquad \beta' = R'_1[y, y', (x)],$$

qui se peuvent déduire birationnellement de la première définissent également l'intégrale de (1). Car on a

$$\alpha' = \varphi(\alpha, \beta), \qquad \beta' = \psi(\alpha, \beta),$$

φ et ψ ne pouvant dépendre de x, si ϖ est plus grand que 1. Voici donc comment on dirigera le calcul : on déterminera un type de tou tes les classes de courbes

$$f(\alpha, \beta) = 0 \qquad (\text{de genre } \varpi > 1),$$

(1) Observons d'ailleurs que, si ces conditions sont remplies, y ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles; mais ce nombre peut être, dans certains cas, plus grand que n.

dont la courbe (1) se déduit rationnellement, et l'on déterminera également un type de toutes les substitutions rationnelles distinctes qui transforment la courbe $f = 0$ en la courbe (1). Il suffira de vérifier si une de ces substitutions définit l'intégrale de (1).

4. Cette remarque trouve son application naturelle quand on traite le problème résolu par M. Poincaré : intégrer les équations (1) qui n'ont que des points critiques fixes.

La question revient à reconnaître si, parmi les substitutions birationnelles qui transforment la courbe

$$F[y, y', (x)] = 0$$

en la courbe

$$F_0[y_0, y'_0, (x_0)] = 0,$$

il en est une qui définit l'intégrale de (1). D'après ce qui précède, quand une de ces substitutions jouit de cette propriété, elle appartient aussi à toutes les autres. Quand p est plus grand que 1, le nombre de ces substitutions, qui est fini, peut être très grand : il suffit d'en essayer une seule.

Je renvoie, pour les développements relatifs à ce problème, au Mémoire déjà cité de M. Poincaré. J'ajoute seulement que, dans le cas où $p = 1$, l'équation s'intègre, si elle a ses points critiques fixes, à l'aide d'une quadrature de la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = g(x)\, dx.$$

Ceci résulte de ce que nous avons dit précédemment.

Quant au cas de $p = 0$, il se traite immédiatement en posant

$$y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

avec

$$t = \chi(y, z).$$

L'équation en t

$$t' = R[t, (x)]$$

n'ayant de points critiques, quand x est quelconque, ni pour t fini, ni pour t infini, est une équation de Riccati.

Pour donner un exemple de l'utilité de telles transformations, retrouvons directement les résultats de M. Poincaré dans le cas où l'équation (1) est de genre 1 ou d'espèce hyperelliptique.

Faisons

$$y = \varphi[t, T, (x)], \qquad t = \varphi_1[y, z, (x)],$$
$$z = \psi[t, T, (x)], \qquad T = \psi_1[y, z, (x)],$$

avec

$$T^2 = R[t, (x)].$$

R est un polynôme de degré 4, si le genre p de (1) est l'unité, de degré $2p+2$, si p est quelconque.

Soit d'abord $p = 1$, on a

$$R[t, (x)] = t(1 - t^2)(t - \xi),$$

ξ étant une fonction de x, et t vérifie l'équation

$$t' = A[t, (x)] + B[t(x)]\sqrt{R[t, (x)]}.$$

Deux cas sont à distinguer, suivant que B est nul ou non.

Si B est nul; on doit avoir

$$t' = lt^2 + mt + n;$$

de plus $\sqrt{R[t, (x)]}$ est une fonction de x qui ne doit avoir que des points critiques fixes. On en conclut aussitôt que $t = 0$, $t = 1$, $t = -1$ sont des intégrales de l'équation de Riccati, qui se réduit alors à

$$t' = 0,$$

et comme $t = \xi$ est aussi une intégrale de cette équation, ξ est une constante. L'intégrale y est donnée par l'égalité

$$y = \varphi[t_0, T_0, (x)].$$

Si B n'est pas nul, en exprimant que $\dfrac{dt}{dx}$ ne devient infini quand x est quelconque pour aucune valeur de t $\Big($et qu'il en est de même pour l'équation en $\dfrac{1}{t}\Big)$, on voit d'abord que $A(t, x)$ est un polynôme du second degré en t et que B ne dépend pas de t. D'autre part, les valeurs

$t = 0$, $t = +1$, $t = -1$, $t = \xi$ doivent être des intégrales singulières, ce qui exige que $A[t, (x)]$ soit identiquement nul et que ξ soit une constante. L'équation en t est donc de la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = B(x)\,dx;$$

c'est ce que nous voulions démontrer.

Le cas où p est quelconque ne se traite pas moins facilement. On a

$$R[t, (x)] = t(1 - t^2)(t - \xi)(t - \xi_1)\ldots(t - \xi_{2p-3}).$$

En premier lieu, $\frac{dt}{dx}$ ne devant être infini pour aucune valeur de t quand x est quelconque $\left(\text{et l'équation en } \frac{1}{t} \text{ devant offrir le même caractère}\right)$, B est identiquement nul, et l'équation se réduit à

$$\frac{dt}{dx} = lt^2 + mt + n.$$

D'autre part, pour que $\sqrt{R(t, x)}$ soit une fonction de x à points critiques fixes, il faut que $t = 0$, $t = 1$, $t = -1$ soient des intégrales de l'équation de Riccati, qui se réduit ainsi à

$$\frac{dt}{dx} = 0,$$

et comme $t = \xi$, $t = \xi_1$, ..., $t = \xi_{2p-3}$ sont des intégrales, les modules de $\sqrt{R[t, (x)]}$ sont des constantes.

Nous retrouvons bien ainsi, dans ces cas particuliers, les résultats de M. Poincaré.

5. Indiquons rapidement quelques autres applications. Il est facile de former des équations (1), de genre quelconque, telles que la relation entre les constantes intégrales soit d'un genre aussi élevé qu'on veut. Il suffit, en effet, de partir d'une équation irréductible

$$y^n + R_{n-1}[\alpha, \beta, (x)]\,y^{n-1} + \ldots + R_0[\alpha, \beta, (x)] = 0,$$

où α, β désignent des constantes liées par une relation

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

de genre ϖ. J'entends par équation iréductible une équation telle que les n valeurs de y se permutent autour des points critiques variables x. Si l'on astreint les fonctions rationnelles R_i de (α, β) à la seule condition qu'à tout système de valeurs $\ldots R_{i,\ldots,\ldots} \frac{dR_i}{dx} \cdots$ ne corresponde qu'un système (α, β), la fonction y, définie par l'équation précédente, satisfait à une relation

$$F[y, y', (x)] = 0,$$

dont le genre p est lié à ϖ par la relation

$$\frac{p-1}{\varpi - 1} = n.$$

La méthode que nous venons d'exposer pourra donc permettre d'intégrer aisément un grand nombre d'équations différentielles. Les calculs auxquels elle conduit ne sont pas impraticables. Pour les effectuer plus facilement, il conviendra de prendre l'équation

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

sous la forme de Clebsch : elle est alors de degré $(p+1)$. Parmi les polynômes P_i relatifs à cette courbe, il en existe alors trois tels que

$$\frac{P_2}{P_1} = \alpha, \qquad \frac{P_3}{P_1} = \beta,$$

et l'on a

$$(K) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=p} \mu_i P'_i[y, z, (x)]}{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i P'_i[y, z, (x)]}, \\[2ex] \beta = \dfrac{\sum_{i=1}^{i=p} \nu_i P'_i[y, z, (x)]}{\sum_{i=1}^{i=p} \lambda_i P'_i[y, z, (x)]}. \end{cases}$$

Il faut déterminer les λ_i, μ_i, ν_i de façon que le point (α, β) parcoure $f=0$ quand (y, z) parcourt (1) et que les relations ci-dessus définissent en outre l'intégrale de (1) [1].

Par exemple, si l'équation (1) est du genre 5, le genre ϖ peut être égal à 5 (et l'intégrale a ses points critiques fixes), à 3 (et l'intégrale est à deux valeurs), à 2 (et l'intégrale est à quatre valeurs); enfin à 1 ou à 0. Cherchons, par exemple, si l'intégrale de (1) correspond au genre $\varpi = 3$. Pour cela, nous formons l'équation

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

la plus générale du quatrième degré, et nous écrivons que α et β vérifient les formules (K).

De même, si $p = 3$, ϖ peut être égal à 3, à 2 (et l'intégrale est à deux valeurs), enfin à 1 ou à 0. Pour traiter le cas de $\varpi = 2$, on prend l'équation en (α, β) sous la forme

$$\beta^2 = \rho(\alpha) = A_6\alpha^6 + A_5\alpha^5 + \ldots + A_0,$$

et l'on a

$$\alpha = \frac{\Sigma \mu_i P'_i[y, z, (x)]}{\Sigma \lambda_i P'_i[y, z, (x)]}.$$

On exprime que $\sqrt{\rho(\alpha)}$ est une fonction rationnelle du point (y, z) de (1) et, de plus, que la dernière égalité définit l'intégrale de (1).

Si, en particulier, la courbe (1) est une courbe du quatrième degré sans point double, il vient

$$\alpha = \frac{\mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 z}{\lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_3 z},$$

$$(l) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda_1 + \lambda_2 y + d_3 z)^6 \rho(\alpha) \\ &\quad = A_6(\mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 z)^6 + A_5(\lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_3 z)(\mu_1 + \mu_2 y + \mu_3 z)^5 \\ &\qquad\qquad + \ldots + A_0(\lambda_1 + \lambda_2 y + \lambda_3 z)^6 \\ &\quad = B_2[y, (x)] z^2 + B_1[y, (x)] z + B_0[y, (x)], \end{aligned} \right.$$

en supposant, ce qui est toujours possible, qu'on ait ramené l'équation (1) à être du troisième degré en z.

---

[1] Le cas où la relation $f = 0$ serait hyperelliptique se traite à part sans difficulté.

Il faut que le second membre de (l) soit de la forme

$$\{C_2[y,(x)]z^2+C_1[y,(x)]z+C_0[y,(x)]\}^2$$

quand (y,z) parcourt (1).

Cette dernière quantité peut s'écrire

$$\gamma_2 z^2+\gamma_1 z+\gamma_0,$$

les quantités γ_0, γ_1, γ_2 s'exprimant aisément à l'aide des C_0, C_1, C_2 qui y entrent au second degré et des fonctions g_0, g_1, g_2 de l'équation

$$F[y,z,(x)]\equiv z^3+g_2[y,(x)]z^2+g_1[y,(x)]z+g_0[y,(x)]=0.$$

Si l'on écrit

$$\gamma_2\equiv B_2,$$
$$\gamma_1\equiv B_1,$$
$$\gamma_0\equiv B_0,$$

il faut disposer des fonctions λ_i, μ_i de (x) qui figurent dans B_0, B_1, B_2 de façon que ces égalités définissent pour C_0, C_1, C_2 des fonctions rationnelles de y. On calcule ainsi les λ_i, μ_i algébriquement.

Le cas où la courbe (1) est hyperelliptique présente certaines particularités. Si la courbe est donnée directement sous la forme

$$(1)\qquad y'=A[y,(x)]+B[y,(x)]\sqrt{R[y,(x)]},$$

l'intégrale de (1) ne saurait correspondre à un nombre ϖ plus grand que 1. En effet, la courbe

$$f(\alpha,\beta)=0$$

est alors elle-même hyperelliptique et peut se ramener à la forme suivante :

$$\beta^2=\rho(\alpha).$$

On doit avoir

$$\alpha=\frac{\mu_1+\mu_2 y+\ldots+\mu_{p-1}y^{p-1}}{\lambda_1+\lambda_2 y+\ldots+\lambda_{p-1}y^{p-1}},$$

et l'équation différentielle dont l'intégrale vérifie une telle relation est de la classe

$$y'=H[y,(x)],$$

H désignant une fonction rationnelle de y, ce qui est contre l'hypothèse.

D'après cela, soit une équation (1) quelconque d'espèce hyperelliptique

$$F[y, y', (x)] = 0.$$

L'intégrale d'une telle équation peut correspondre à un nombre ϖ plus grand que 1, comme le montre l'exemple de $p = \varpi$; mais si, dans ce cas, on ramène l'équation à la forme

$$\frac{dt}{dx} = A[t, (x)] + B[t, (x)]T$$

en posant

$$y = \varphi[t, T, (x)], \qquad t = \varphi_1[y, y', (x)],$$
$$z = y' = \psi[t, T, (x)], \qquad T = \psi_1[y, y', (x)]$$

avec

$$T^2 = R[t, (x)],$$

B est nécessairement nul; autrement la correspondance entre (y, y') et (t, t') serait birationnelle, et le nombre ϖ relatif à l'équation en t serait plus grand que 1, ce qui est impossible. Cette singularité, que nous avons rencontrée quand $p = \varpi$, se présente donc encore pour ϖ quelconque et plus grand que 1.

Mais l'intégrale d'une équation

$$y' = A[y, (x)] + B[y, (x)]\sqrt{R[y, (x)]}$$

peut correspondre à la valeur $\varpi = 1$. Cherchons, par exemple, si l'équation

$$y'^2 = A_q y^q + A_{q-1} y^{q-1} + \ldots + A_0$$

admet pour intégrale une fonction qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, le genre ϖ de la relation entre les constantes intégrales étant supposé différent de zéro.

D'après ce qui précède, ϖ n'étant pas nul ne peut être qu'égal à l'unité : l'intégrale doit vérifier la relation

$$\int_0^y \frac{(\lambda_0 + \lambda_1 y + \ldots + \lambda_{p-1} y^{p-1})\,dy}{\sqrt{R}} + h(x) = C.$$

En effectuant le calcul comme il a été indiqué au § II, on trouve que les λ sont astreints à la condition

$$[\lambda_1 + 2\lambda_2 y + \ldots + (p-1)\lambda_{p-1} y^{p-2}] + \frac{\frac{d\lambda_0}{dx} + \frac{d\lambda_1}{dx} y + \ldots + \frac{d\lambda_{p-1}}{dx} y^{p-1}}{\sqrt{R}} - \frac{1}{2}\frac{R'_x}{R\sqrt{R}}(\lambda_0 + \lambda_1 y + \ldots + \lambda_{p-1} y^{p-1}) = 0.$$

Ceci exige d'abord que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0,$$

ensuite que

$$\frac{\frac{d\lambda_0}{dx}}{\lambda_0} = \frac{1}{2}\frac{\frac{dA_q}{dx}}{A_q} = \frac{1}{2}\frac{\frac{dA_{q-1}}{dx}}{A_{q-1}} = \ldots = \frac{1}{2}\frac{\frac{dA_0}{dx}}{A_0},$$

c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$R(y, x) = H(x) R_1(y)$$

et

$$\lambda_0 = H^{\frac{1}{2}}$$

à un facteur constant près. Si l'on pose

$$Y = \int \frac{\lambda_0 \, dy}{\sqrt{R}} = \int \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}},$$

il vient

$$\frac{dY}{dx} = H^{\frac{1}{2}},$$

et l'équation s'intègre par deux quadratures

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}} = \int H^{\frac{1}{2}} dx.$$

Si l'intégrale de (1) est de la forme indiquée, l'équation (1) rentre donc nécessairement dans cette classe d'équations. Mais cette condition n'est pas suffisante. Il faut de plus (et il suffit) que les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R_1(y)}}$$

se réduisent à deux.

Les seules équations

$$y'^2 = R[y, (x)]$$

dont l'intégrale générale ne prend autour des points critiques mobiles que n valeurs, le nombre ϖ n'étant pas nul, se déduisent d'une équation

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = k(x)\,dx,$$

par une transformation

$$u = \varphi(y) + \sqrt{R_1(y)}\,\psi(y),$$

φ, ψ, R_1 dépendant rationnellement de y et ne contenant pas x. Ceci s'applique notamment au cas de $p = 2$.

Remarquons, pour terminer, que le problème traité dans ce Chapitre renferme, comme cas particuliers, d'autres problèmes intéressants. Supposons, par exemple, qu'on veuille *reconnaître si l'intégrale d'une équation* (1) *donnée est une fonction n'admettant qu'un point critique mobile* (y_1, x_1). Quand la relation

$$F[y, y', (x)] = 0$$

est algébrique en y, y', x, le lieu des points critiques des intégrales est une certaine courbe algébrique

$$\varphi(y_1, x_1) = 0,$$

et, comme y_1, x_1 sont bien déterminés pour chaque intégrale particulière, on a

$$y_1 = \rho\,[y, y', (x)],$$
$$x_1 = \rho_1[y, y', (x)],$$

c'est-à-dire qu'il y a une correspondance rationnelle entre la courbe (1) et la courbe $\varphi = 0$. Si donc le genre de cette dernière n'est pas nul, les résultats précédents s'appliquent au problème. Notamment, quand le lieu des points critiques (y_1, x_1) d'une équation (1) est une courbe algébrique de genre plus grand que 1, *on reconnaît algébriquement si l'intégrale n'a qu'un point critique mobile, et l'équation s'intègre alors algébriquement*.

En général, le lieu des points (y_1, x_1) se compose de deux courbes, à savoir le lieu des points où y' devient infinie et le lieu des points où deux valeurs de y' se permutent. Chaque intégrale a au moins un point critique mobile sur chacune de ces deux courbes. Si, par hypothèse, elle n'en possède qu'un, il faut que ces deux courbes se réduisent à une seule, indécomposable.

Quand ces deux courbes sont distinctes, on peut chercher à reconnaître si l'intégrale n'a que deux points critiques mobiles. Plus généralement, quand le lieu des points (y_1, x_1) se compose de q courbes C distinctes, on peut chercher à reconnaître si l'intégrale n'a que q points critiques mobiles. Il suffit qu'une des courbes C ne soit pas du genre o pour que notre théorie trouve son application.

Sous une forme un peu différente, il est loisible de rechercher si l'intégrale n'a qu'un point de rebroussement variable ou qu'un point variable où la tangente soit verticale, ou encore qu'un seul point de contact avec chacune de ses courbes enveloppes, etc.

Il est facile de multiplier les questions de cette nature, où deux quantités α, β liées par une relation algébrique connue sont bien déterminées pour chaque intégrale particulière.

Chaque fois que l'équation entre (α, β) ne sera pas de genre o, les théorèmes démontrés plus haut interviendront d'eux-mêmes.

Par exemple, cherchons si l'équation

$$\left(y - \frac{8}{27} y'^3\right)^2 = \frac{\left(x - \frac{4}{9} y'^2\right)^3 + 1}{\left(x - \frac{4}{9} y'^2\right)^2 + 1} \tag{1}$$

a pour intégrale une fonction dont un seul point critique soit mobile. Le lieu des points critiques (y_1, x_1) se trouve être

$$y_1^2 = \frac{x_1^3 + 1}{x_1^2 + 1}.$$

Si nous formons les substitutions rationnelles qui permettent de passer de la courbe précédente (de genre 2) à la courbe (1), nous voyons que la substitution

$$x_1 = \left[(x) - \frac{4}{9} y'^2\right],$$
$$y_1 = \left[\ y - \frac{8}{27} y'^3\right]$$

définit, quand on y laisse x_1, y_1 constants, une intégrale de (1).

Cette intégrale ainsi calculée algébriquement peut s'écrire

$$y - \beta = (x - \alpha)^{\frac{3}{2}}, \qquad \text{avec} \qquad \beta^2 = \frac{\alpha^3 + 1}{\alpha^2 + 1}.$$

6. Il me reste à dire quelques mots de l'extension de la méthode aux équations différentielles d'ordre supérieur. Quand l'intégrale générale d'une équation

$$F[y'', y', y(x)] = 0$$

ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, on peut mettre, nous l'avons dit, d'une infinité de manières, l'intégrale sous la forme

$$\begin{aligned} \alpha &= R\,[y'', y', y, (x)], \\ \beta &= R'[y'', y', y, (x)], \\ \gamma &= R''[y'', y', y, (x)], \end{aligned}$$

et choisir ces intégrales, liées par la relation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

de telle façon que toute autre intégrale

$$\delta = R'''[y'', y', y, (x)]$$

soit une fonction *uniforme* de α, β, γ. Dans ces égalités, les R, R', ... désignent des fonctions uniformes de y'', y', y, fonctions qui ne sont pas nécessairement des fonctions rationnelles. Pour qu'il en soit ainsi, il faut de plus que l'intégrale y contienne algébriquement les constantes y_0, y'_0, y'_0, ou, ce qui revient au même, que l'intégrale n'ait pas de points essentiels mobiles. Ce sont de telles équations que nous nous bornons à étudier. Nous considérons, en définitive, les équations du second ordre (1), dont l'intégrale y dépend algébriquement de constantes y_0, y'_0.

Si le genre ϖ de la relation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

entre les constantes intégrales est supérieur à l'unité, les théorèmes que nous avons indiqués plus haut sur les transformations rationnelles des surfaces permettent d'intégrer l'équation (1) ou de la ramener à des équations plus simples.

Deux cas sont à distinguer, suivant que S rentre ou non dans le troisième groupe de surfaces défini au Chapitre II.

Quand S est du premier ou du second groupe, l'intégrale de (1) s'obtient algébriquement.

Elle est définie, en effet, par une des transformations rationnelles de S en la surface (1), et l'on sait calculer algébriquement toutes les surfaces S distinctes qui correspondent rationnellement à (1), en même temps que toutes les lois de correspondance.

Quand S est une surface du troisième groupe, une intégrale première est de la forme

$$\frac{\Sigma\mu_i Q'_i[y'', y', y'(x)]}{\Sigma\lambda_i Q'_i[y'', y', y'(x)]} = \text{const.}$$

(les notations étant les mêmes qu'au Chapitre II).

Une fois les $\lambda_i(x)$, $\mu_i(x)$ déterminés par cette condition, il reste à intégrer une équation du premier ordre, pour laquelle la relation entre les constantes intégrales est sûrement de genre 1.

On arrive à démontrer ainsi que l'intégration de l'équation (1) se ramène à la recherche d'une intégrale particulière quelconque d'une équation linéaire et homogène, suivie d'une quadrature. L'ordre de l'équation linéaire (qui le plus souvent est égal à 1) ne peut dépasser $p + p_1 - 1$ [p et p_1 étant les deux genres de (1)] :

En définitive, proposons-nous le problème suivant :

Reconnaître si l'intégrale de (1) *dépend algébriquement des constantes et correspond à une relation entre les constantes intégrales de genre* $\varpi > 1$.

On détermine algébriquement s'il en est ainsi, et l'équation s'intègre alors soit algébriquement, soit par une quadrature, ou bien on ramène l'équation aux équations linéaires.

Cette méthode n'est qu'une extension de celle qu'a employée M. Picard [1], pour étudier les intégrales uniformes ou à points critiques fixes des équations (1), comme notre méthode pour intégrer les équations du premier ordre est une extension de celle de M. Poincaré.

---

[1] E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables* (*loc. cit.*).