ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Note sur une classe de courbes du quatrième ordre et sur l'addition des fonctions elliptiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 4 (1867), p. 81-91
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1867_1_4__81_0>

NOTE

SUR UNE

CLASSE DE COURBES DU QUATRIÈME ORDRE

ET SUR

L'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. G. DARBOUX,

AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Dans un article inséré au tome II de ce Recueil, j'ai avancé que l'on pouvait déduire de l'étude d'une classe remarquable de courbes une démonstration géométrique nouvelle du théorème d'Euler relatif à l'addition des fonctions elliptiques. Je me propose, dans cette Note, de développer cette démonstration, et d'y ajouter une démonstration analytique que je crois nouvelle aussi ; j'établirai en même temps un théorème relatif aux courbes étudiées. Ce théorème est la généralisation du théorème de M. Dupin sur les coniques focales, et est aussi énoncé dans mon précédent travail.

I.

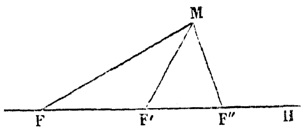
Les courbes que nous allons étudier sont les courbes du quatrième degré ayant pour points doubles les deux points à l'infini sur le cercle. Nous les appellerons, avec M. Moutard, *anallagmatiques*. Cette classe de courbes, qui jouissent de belles propriétés, comprend, en particulier, les ovales de Descartes, dont l'équation en coordonnées bipolaires est

$$nr + r' = h.$$

M. Chasles a montré (voir *Aperçu historique*) que ces courbes ont un troisième foyer F″ situé sur la ligne qui joint les deux premiers F, F′ (*fig.* 1). Déterminons ce troisième foyer : soient

$$FF' = c, \quad F'F'' = x.$$

Fig. 1.



On a, d'après un théorème peu connu de Géométrie, la relation suivante entre les trois lignes MF, MF′, MF″ :

$$\overline{MF}^2 . F'F'' + \overline{MF''}^2 FF' - \overline{MF'}^2 FF'' = \overline{FF'} . \overline{FF''} . \overline{F'F''}$$

ou bien

$$xr^2 + cr''^2 - (c + x)r'^2 = cx(c + x).$$

Si on remplace r' par sa valeur en fonction de r déduite de l'équation des ovales, r''^2 sera égal à une fonction du second degré en r. Exprimons que ce polynôme est un carré parfait, et nous aurons

$$c^2 n^2 - h^2 + cx(n^2 - 1) = 0,$$

équation qui détermine x, et, en extrayant la racine carrée,

$$cr'' = hr - \frac{n(h^2 - c^2)}{n^2 - 1}.$$

Nous allons prouver maintenant que toutes les ovales de Descartes ayant les trois mêmes foyers forment un système double orthogonal, c'est-à-dire que par chaque point du plan il passe deux ovales se coupant à angle droit.

Pour toutes nos ovales c et x doivent rester les mêmes, et, par suite, si l'on pose

$$c + x = \frac{c}{k^2}, \quad h = \frac{c}{\sqrt{1 - \alpha^2}},$$

on aura, d'après l'équation de condition,

$$n = \sqrt{1 - k^2 \alpha^2}.$$

L'équation générale de nos ovales sera donc

$$r\sqrt{1-k^2\alpha^2}+r'=c\sqrt{1-\alpha^2}. \tag{1}$$

Ou bien, en désignant par r'' la distance au troisième foyer,

$$r\sqrt{1-\alpha^2}-r''=\frac{c}{k^2}\sqrt{1-\alpha^2k^2}. \tag{2}$$

Lorsque α varie, on a un système de courbes dont nous allons chercher l'équation différentielle.

Pour cela, différentions les équations (1) et (2); nous trouverons

$$\begin{aligned} dr\sqrt{1-\alpha^2k^2}+dr'&=0,\\ dr\sqrt{1-\alpha^2}-dr''&=0. \end{aligned}$$

Au moyen de ces équations nous éliminerons α sans difficulté, et notre équation différentielle sera

$$r'dr-rdr'=c\,dr''.$$

Prenons pour axes l'axe des ovales et la perpendiculaire au point F, nous aurons

$$\begin{aligned} r^2&=x^2+y^2,\\ r'^2&=(x-c)^2+y^2,\\ r''^2&=\left(x-\frac{c}{k^2}\right)^2+y^2. \end{aligned}$$

Au lieu des variables x, y prenons les variables

$$\begin{aligned} u&=x+yi,\\ v&=x-yi, \end{aligned}$$

les expressions de r^2, r'^2, r''^2 deviendront

$$r^2=uv,\quad r'^2=(u-c)(v-c),\quad r''^2=\left(u-\frac{c}{k^2}\right)\left(v-\frac{c}{k^2}\right).$$

Substituons ces valeurs dans l'équation différentielle, et élevons au carré pour faire disparaître les radicaux, nous trouvons

$$\frac{du^2}{u(u-c)\left(u-\frac{c}{k^2}\right)}=\frac{dv^2}{v(v-c)\left(v-\frac{c}{k^2}\right)}. \tag{3}$$

Cette équation différentielle, convenablement interprétée, donne un moyen géométrique simple de mener la tangente aux ovales, quand on connaît les trois foyers. On a, en effet,

$$\frac{du}{dv} = \frac{dx + i\,dy}{dx - i\,dy} = e^{2i\mathrm{V}},$$

V désignant l'angle que fait la tangente avec l'axe des x. De même

$$\frac{u}{v} = e^{2i\widehat{\mathrm{MFH}}}, \quad \frac{u-c}{v-c} = e^{2i\widehat{\mathrm{MF'H}}},$$

$$\frac{u - \frac{c}{k^2}}{v - \frac{c}{k^2}} = e^{2i\widehat{\mathrm{MF''H}}}.$$

Notre équation différentielle peut donc s'écrire

$$e^{4i\mathrm{V}} = e^{2i(\widehat{\mathrm{MFH}} + \widehat{\mathrm{MF'H}} + \widehat{\mathrm{MF''H}})},$$

$$\mathrm{V} = \frac{\widehat{\mathrm{MFH}} + \widehat{\mathrm{MF'H}} + \widehat{\mathrm{MF''H}}}{2} + k\frac{\pi}{2},$$

formule qui donne pour l'angle V deux valeurs distinctes différant de $\frac{\pi}{2}$, et par suite deux directions rectangulaires. L'angle V se construira sans difficulté.

Il résulte de ce qui précède que l'une quelconque des deux équations

$$\sqrt{1 - \alpha^2 k^2}\sqrt{uv} + \sqrt{(u-c)(v-c)} = c\sqrt{1-\alpha^2},$$

$$\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{uv} - \sqrt{\left(u - \frac{c}{k^2}\right)\left(v - \frac{c}{k^2}\right)} = \frac{c}{k^2}\sqrt{1 - \alpha^2 k^2}$$

est l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{du}{\sqrt{u(u-c)\left(u - \frac{c}{k^2}\right)}} = \frac{dv}{\sqrt{v(v-c)\left(v - \frac{c}{k^2}\right)}}.$$

Posons

$$u = cx^2, \quad v = cy^2,$$

l'équation différentielle devient

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

et son intégrale générale sera donnée par l'une des deux équations

$$\sqrt{1-\alpha^2 k^2}\,xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = \sqrt{1-\alpha^2},$$

$$\sqrt{1-\alpha^2}\,xy - \frac{1}{k^2}\sqrt{(1-k^2x^2)(1-k^2y^2)} = \frac{1}{k^2}\sqrt{1-\alpha^2 k^2}.$$

C'est le théorème d'Euler. On voit que si l'on pose

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(u-c)\left(u-\frac{c}{k^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{\alpha+\beta i}{\sqrt{c}},$$

on aura

$$u = c\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\beta i) = x + yi,$$

d'où

$$x = \frac{c}{2}\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\beta i) + \frac{c}{2}\sin^2\mathrm{am}(\alpha-\beta i),$$

$$y = \frac{c}{2i}\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\beta i) - \frac{c}{2i}\sin^2\mathrm{am}(\alpha-\beta i).$$

Si on laisse β constant, et qu'on fasse varier α, on aura toutes les courbes d'un système. Si, au contraire, on fait varier β, on aura les courbes orthogonales aux premières.

II.

Voici une démonstration analytique du même théorème.

Soit l'équation

$$(4) \qquad \frac{du}{dt} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} = \Delta u.$$

On en déduit par la différentiation

$$(5) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = -(1+k^2)u + 2k^2u^3.$$

Supposons que l'on ait trouvé deux intégrales particulières de l'équation du premier ordre, et par suite de celle du second ordre. Cherchons si ces deux intégrales ne seraient pas liées par une relation finie, comme dans le cas de l'équation linéaire du second ordre. Soit u' la seconde intégrale particulière, on aura

$$u' \frac{d^2 u}{dt^2} - u \frac{d^2 u'}{dt^2} = 2k^2 uu'(u^2 - u'^2).$$

Des deux équations du premier ordre on déduit

$$u'^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - u^2 \left(\frac{du'}{dt}\right)^2 = (u'^2 - u^2)(1 - k^2 u^2 u'^2).$$

On a donc, en remplaçant $u'^2 - u^2$ dans l'équation précédente par sa valeur tirée de cette dernière relation,

$$(6) \qquad \frac{u' \frac{d^2 u}{dt^2} - u \frac{d^2 u'}{dt^2}}{u' \frac{du}{dt} - u \frac{du'}{dt}} = - \frac{2k^2 uu'\left(u' \frac{du}{dt} + u \frac{du'}{dt}\right)}{1 - k^2 u^2 u'^2}.$$

Intégrons les deux membres, nous trouverons

$$\mathrm{L}\left(u' \frac{du}{dt} - u \frac{du'}{dt}\right) = \mathrm{L}c(1 - k^2 u^2 u'^2),$$

$$(7) \qquad \frac{u' \frac{du}{dt} - u \frac{du'}{dt}}{1 - k^2 u^2 u'^2} = c = \frac{u' \Delta u - u \Delta u'}{1 - k^2 u^2 u'^2}.$$

On peut interpréter cette équation de deux manières.

On a d'abord

$$\frac{du}{\Delta u} = \frac{du'}{\Delta u'} = dt,$$

donc l'équation (7) donne l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{du}{\Delta u} = \frac{du'}{\Delta u'}.$$

Autrement, si l'on considère u comme une fonction de t,

$$u = \varphi(t),$$

u' ne peut être que $\varphi(t+a)$; on a donc

$$\frac{\varphi(t+a)\Delta\varphi(t)-\varphi(t)\Delta\varphi(t+a)}{1-k^2\varphi^2(t)\varphi^2(t+a)}=c=\varphi(a). \tag{8}$$

C'est la formule dont dépend l'addition des fonctions elliptiques.

Le succès de notre méthode est fondé sur ce fait que dans l'équation (6) le coefficient de la dérivée de uu' est une fonction de uu'. On peut se proposer de rechercher toutes les fonctions Δu jouissant de cette propriété, car on pourrait leur étendre la méthode précédente; mais, dans cette recherche, qui n'offre pas de grandes difficultés, on ne trouve que le cas déjà connu des fonctions elliptiques.

III.

Je passe maintenant à la démonstration du théorème que j'ai donné, et qui est la généralisation de l'élégant théorème de M. Dupin sur les sections coniques.

Les courbes que nous avons à étudier sont des courbes planes ou sphériques dont l'équation est

$$ar+br'+cr''=0,$$

r, r', r'' désignant les distances à trois points pris dans le plan ou sur la sphère qui contient la courbe. Les courbes planes étant les projections stéréographiques des courbes sphériques, leurs propriétés se déduiront des propriétés de celles-ci.

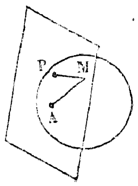
J'ai montré, dans un article inséré dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864, que les propriétés des courbes sphériques s'obtiennent sans difficulté si on les étudie comme courbes d'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré.

Considérons d'une manière générale la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré. Par cette courbe, passent quatre cônes du second degré dont les sommets forment un tétraèdre conjugué commun à la sphère et à la surface du second degré. Prenons un de ces cônes et trois quelconques des quatre plans tangents communs à la sphère et au cône. Soient $P=0$, $P'=0$, $P''=0$ les équations de ces plans tangents. Celle du cône pourra être mise sous la forme

$$\lambda\sqrt{P} + \mu\sqrt{P'} + \sqrt{P''} = 0.$$

Soit un plan tangent quelconque à la sphère (*fig.* 2). La distance MA

Fig. 2.



d'un point quelconque de la sphère au point de contact, et la distance MP au plan tangent, sont liées par la relation très-simple

$$\overline{MA}^2 = 2R.MP.$$

Par suite, si on désigne par r, r', r'' les distances d'un point de la sphère aux points de contact des plans P, P', P'' on aura

$$r^2 = 2R.P, \quad r'^2 = 2R.P', \quad r''^2 = 2R.P'',$$

donc r, r', r'' seront liés par la relation

$$(9) \qquad \lambda r + \mu r' + r'' = 0,$$

c'est-à-dire qu'il y a une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la courbe d'intersection à trois points fixes qui sont des foyers.

La réciproque est évidemment vraie.

On peut prendre trois quelconques des quatre plans tangents communs au cône et à la sphère. Donc, à nos trois foyers on peut en adjoindre un quatrième jouissant des mêmes propriétés, et nos quatre foyers sont situés sur le cercle de contact du cône tangent à la sphère mené par le sommet du cône donné.

Comme on a quatre cônes du second degré, on aura quatre groupes de quatre foyers, et les quatre cercles ainsi obtenus se couperont à angle droit, d'après une propriété connue du tétraèdre conjugué dans la sphère.

Mais on peut généraliser beaucoup la relation (9) en considérant trois plans tangents quelconques au cône du second degré : soient Q, Q', Q'' ces trois plans tangents; l'équation du cône sera encore de la forme

$$\lambda\sqrt{Q} + \mu\sqrt{Q'} + \sqrt{Q''} = 0.$$

Ces trois plans coupent la sphère suivant trois cercles doublement tangents à la courbe d'intersection du cône et de la sphère. Par ces trois cercles faisons passer trois sphères fixes. Soient t, t', t'' les longueurs des tangentes menées d'un point à nos trois sphères. Pour tout point de la sphère contenant notre courbe on aura

$$t^2 = aQ, \quad t'^2 = a'Q', \quad t''^2 = a''Q''.$$

L'équation du cône du second degré nous conduira donc à la relation

$$(10) \qquad \lambda_1 t + \mu_1 t' + t'' = 0$$

entre les trois tangentes t, t', t''. Dans le cas que nous avions examiné, nos sphères se réduisaient à trois points.

Soit d'une manière générale

$$f(P, P', P'', P''') = 0$$

l'équation d'une surface passant par notre courbe; on pourra remplacer cette équation par une équation de la forme

$$F(at^2, bt'^2, ct''^2, dt'''^2) = 0.$$

Par exemple, on sait que l'équation d'un cône peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$PP' = P''P'''.$$

Donc l'équation de notre courbe pourra s'écrire d'une infinité de manières,

$$tt' = kt''t'''.$$

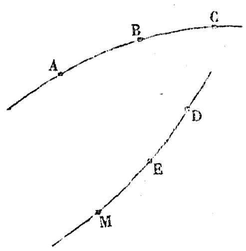
On voit encore que la courbe sur la sphère peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles dont les plans sont tangents aux cônes du second degré. Ces cercles coupent à angle droit le cercle focal, puisque leurs plans vont passer par le pôle du plan focal. De plus, leurs plans enveloppant un cône, leurs pôles sont sur une conique sphérique. Donc nos courbes peuvent être considérées comme enveloppes de cercles orthogonaux à un cercle fixe, et ayant leurs centres sur une conique sphérique, et cela de quatre manières différentes.

Sans insister sur ce mode de recherche, j'arrive au théorème qu'il s'agit d'établir.

Parmi tous les cercles doublement tangents à la courbe, il y en a généralement d'imaginaires. Alors deux des sphères passant par ce cercle se réduiront à deux points réels. On aura donc une courbe formée par ces points réels. Mais le lieu des points sphères coupant la sphère fixe suivant un cercle orthogonal au cercle focal est la sphère orthogonale à la sphère fixe et passant par le cercle focal. Ainsi la courbe lieu des points sphères doublement tangents à la courbe d'intersection est une courbe sphérique située sur une sphère orthogonale à la sphère donnée : cela nous suffit. Nous appelons cette courbe *courbe focale*.

Dans la relation (10) nos sphères se réduisant à des points, les tangentes t, t', t'' doivent être remplacées par des distances aux centres r, r', r''. On voit donc que si l'on prend trois points quelconques de la courbe focale, ils jouissent des propriétés métriques que nous avons reconnues aux foyers.

Fig. 3.



Prenons trois points D, E, M sur la courbe focale (*fig.* 3) et désignons par r, r', r'' les distances à ces trois foyers. On aura pour trois points quelconques A, B, C de la courbe d'intersection

$$r_a = \lambda r'_a + \mu r''_a,$$
$$r_b = \lambda r'_b + \mu r''_b,$$
$$r_c = \lambda r''_c + \mu r''_c.$$

On pourra donc trouver deux coefficients λ_1, μ_1, tels, que l'on ait

$$r_a = \lambda_1 r_b + \mu_1 r_c,$$
$$r'_a = \lambda_1 r'_b + \mu_1 r'_c,$$
$$r''_a = \lambda_1 r''_b + \mu_1 r''_c.$$

Les deux premières équations déterminent λ_1 et μ_1. Si l'on a fixé les points A, B, C, D, E, la troisième sera satisfaite pour tout point M de la courbe focale. C'est donc l'équation de la courbe focale. On voit donc que trois points quelconques A, B, C pris sur la courbe primitive peuvent servir de foyers à la focale. Donc on a deux courbes sphériques de même genre et telles, que chacune est la focale de l'autre.

C'est la généralisation du théorème de M. Dupin sur les coniques focales.

A chaque courbe correspondent quatre focales. Ces quatre focales sont situées sur une même surface développable, dont elles sont lignes doubles. Chacune d'elles peut servir de focale aux trois autres, et elles sont situées sur quatre sphères orthogonales deux à deux.

Je donnerai en terminant une propriété relative à un cas particulier des courbes que nous venons d'étudier.

La courbe d'intersection d'un cylindre et d'une sphère peut être considérée comme le lieu des points tels, que la somme ou la différence des arcs de grand cercle qu'on peut mener tangents à un petit cercle d'un point de la courbe soit constante.

C'est la généralisation de la propriété des coniques sphériques (*).

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864, et *Bulletin de la Société Philomathique*, 1867.