ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOURGET

Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une corde formée de plusieurs parties diverses de nature

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 4 (1867), p. 37-79
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1867_1_4__37_0>

MÉMOIRE

SUR LE

MOUVEMENT VIBRATOIRE D'UNE CORDE

FORMÉE DE PLUSIEURS PARTIES DIVERSES DE NATURE,

PAR M. J. BOURGET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND.

INTRODUCTION.

J'ai démontré, dans un travail précédent (*), que les figures nodales des membranes circulaires vibrantes ne se produisent pas aux intervalles musicaux assignés par la théorie. Cette différence entre l'expérience et le calcul ne tient pas à la forme des membranes; elle ne tient pas non plus à la forme ni à la nature des cadres employés; nous l'avons démontré, M. Félix Bernard et moi, dans un Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes carrées (**). En étudiant depuis cette anomalie, j'ai reconnu qu'on peut en formuler les lois expérimentales en supposant que les nombres théoriques de vibrations, correspondants aux figures nodales diverses, éprouvent tous une diminution.

Comment expliquer cet abaissement des sons? On pourrait croire qu'il tient à la mobilité des points d'attache de la membrane. La théorie suppose les bords du cadre parfaitement immobiles; or, on démontre par expérience que cette immobilité n'est pas absolue. Si l'on tient

(*) Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes circulaires, *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III; 1866.

(**) Mémoire sur le mouvement vibratoire des membranes carrées, *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LX.

à la main le cadre d'une membrane tendue au-dessus d'un tuyau d'orgue de hauteur convenable, on le sent vibrer avec vivacité au moment de la formation des figures nodales nettes. Les points d'attache du cadre avec la membrane ne sont donc pas des nœuds parfaits; la membrane n'est donc qu'approximativement dans les conditions exigées par la théorie. Je me suis proposé de soumettre au calcul l'influence de la mobilité des points d'attache, afin de savoir si on peut lui attribuer l'anomalie en question; telle est l'origine première du travail que je présente aujourd'hui à l'Académie.

J'ai dû d'abord résoudre un problème analogue plus simple relatif aux cordes vibrantes, car les mêmes causes de perturbations doivent produire sur elles des effets semblables. Supposons une corde formée de trois parties de natures différentes, et cherchons les lois du mouvement vibratoire de cet ensemble. Exprimons ensuite que les deux parties extrêmes se réduisent à des longueurs extrêmement petites, la corde du milieu sera *physiquement* toute la partie vibrante, et ses extrémités seront attachées à deux points mobiles. Tel est le type théorique que j'ai imaginé et qui me semble correspondre assez bien à une corde vibrante dont les points d'attache ne sont pas parfaitement fixes.

En dehors du but spécial de mes recherches, la question des cordes hétérogènes m'a paru intéressante en elle-même, et je lui ai donné tout le degré de généralité qu'elle comporte. Je traite donc ici du mouvement vibratoire d'une corde formée d'un nombre quelconque de parties diverses de nature.

Poisson, et antérieurement Bernoulli et Euler, se sont occupés du problème relatif à une corde formée de deux parties (*). J'en donne une solution plus simple et je rectifie l'expression des coefficients de l'intégrale générale (*Mémoire de Poisson*, p. 462), au dénominateur desquels s'est glissée une erreur, sans influence d'ailleurs sur les conséquences physiques. J'adopte avec Poisson l'hypothèse qu'au point de jonction de deux parties la tangente est la même à toute époque du mouvement pour les deux courbes qu'elles forment chacune. Je regarde comme inexacte la proposition suivante, énoncée par l'illustre géomètre à la page 473 de son Mémoire : *Les nombres de vibrations des*

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XI.

harmoniques de la corde totale étant en général incommensurables, il arrivera que si la corde a été ébranlée au hasard, elle n'exécutera pas de vibrations isochrones et ne fera entendre qu'une sorte de bruit au lieu d'un son régulier. Le calcul montre qu'un ébranlement produit au hasard donne lieu à un nombre infini de mouvements simples, constituant par leur superposition le mouvement général, que les harmoniques soient ou ne soient pas commensurables. Théoriquement les vibrations de la corde totale ne seront pas isochrones s'il y a incommensurabilité; mais l'oreille, qui ne perçoit pas le mouvement général autrement que par le timbre, qui le décompose instinctivement en mouvements simples, n'en distinguera pas moins dans ce cas les divers sons qui leur correspondent, et aussi nettement que s'ils étaient commensurables.

Ajoutons qu'en réalité il n'y a pas, au point de vue physique, de quantités incommensurables; par conséquent les harmoniques irrationnels que le calcul donne sont entre eux sensiblement comme des nombres entiers. Donc le mouvement de la corde est toujours sensiblement périodique, quel que soit l'état initial, et l'expérience montre même que les sons autres que le son fondamental s'éteignent rapidement, en sorte que le mouvement de la corde partant d'un état initial quelconque se réduit bientôt au mouvement simple qui correspond au son le plus bas.

Voici les lois les plus importantes que le calcul donne pour le cas de deux parties :

1° *Les harmoniques ou sons possibles de la corde totale ne forment pas la série 1, 2, 3.... Les nombres de vibrations de ces harmoniques sont en général incommensurables et racines d'une équation transcendante.*

2° *Si l'on connaît les longueurs des deux parties et les sons fondamentaux de chacune, on peut trouver les divers sons de la corde totale au moyen de la résolution d'une équation transcendante.*

3° *Lorsque les deux parties rendent isolément chacune le même son, la corde entière est à l'octave grave. Cette loi renferme, comme cas particulier, l'une des lois connues des cordes homogènes, savoir, qu'une corde est à l'octave grave de sa moitié.*

4° *S'il existe des nœuds de vibration, ils sont équidistants sur chacune des cordes à partir des extrémités fixes, mais la distance de deux nœuds sur l'une n'est pas la même que sur l'autre.*

5° *Si l'on suppose l'une des parties extrêmement petite, l'autre peut être regardée comme la corde vibrante, et l'on a ainsi un type théorique assimilable à une corde vibrant entre deux extrémités dont l'une ne serait pas parfaitement fixe. Dans cette hypothèse on trouve pour les divers harmoniques la série*

$$N - \varepsilon_1, \quad 2N - \varepsilon_2, \quad 3N - \varepsilon_3, \ldots,$$

N *désignant le son fondamental de la corde quand les deux extrémités sont parfaitement fixes;* ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$ *étant des quantités très-petites croissantes. On voit donc que les divers sons de la corde se trouvent un peu abaissés par suite de la mobilité d'un point d'attache. On pouvait facilement le prévoir, car il semble que les choses doivent alors se passer comme si la longueur de la corde était plus grande; toutefois le calcul de mon Mémoire était nécessaire pour la rigueur de la démonstration, parce qu'il faut continuer la corde par un corps mobile d'une autre nature.*

On passe facilement au cas de trois, quatre,... parties hétérogènes. Mais l'équation transcendante qui donne les divers harmoniques et les nœuds devient de plus en plus compliquée et difficile à résoudre. On peut cependant énoncer pour le cas de trois parties quelques lois simples, faciles à vérifier.

1° *Comme précédemment, on peut calculer le son fondamental et les harmoniques successifs irrationnels entre eux, quand on connaît les longueurs et les sons fondamentaux de chacune des parties.*

2° *S'il y a des nœuds, ils sont équidistants sur chacune des cordes; mais la distance de deux nœuds sur l'une n'est pas la même que sur l'autre. Le calcul fait connaître la position des nœuds correspondant à un harmonique donné.*

3° *Si les trois parties, prises isolément, rendent le même son, la théorie fait connaître par un calcul très-simple celui de la corde totale, qui est en général incommensurable avec le premier.*

4° *Dans le cas plus particulier où les points de jonction des parties diviseraient la longueur totale harmoniquement, c'est-à-dire de telle sorte que le produit de la partie moyenne par la corde totale fût égal au produit des cordes extrêmes, le son de la corde totale serait la double octave grave du son de chaque partie. Cette loi assez remarquable offre peut-être la première application physique de la division harmonique d'une droite.*

5° *Si l'on suppose très-petites les parties extrêmes, la corde moyenne peut être regardée physiquement comme seule vibrante, et l'on a un type théorique se rapprochant d'une corde dont les points d'attache seraient mobiles. On trouve alors que les sons de la corde forment la série*

$$N - \varepsilon_1, \quad 2N - \varepsilon_2, \quad 3N - \varepsilon_3, \ldots;$$

N *désignant le son fondamental quand les extrémités sont fixes, et* ε_1, ε_2, ε_3,... *des quantités petites croissantes. Donc la mobilité des points d'attache abaisse tous les sons d'une corde.*

Il semble que l'on tienne la clef des anomalies que les membranes présentent; mais en examinant de plus près on reconnaît que dans le cas des cordes

$$\frac{2N - \varepsilon_2}{N - \varepsilon_1} < 2, \quad \frac{3N - \varepsilon_3}{N - \varepsilon_1} < 3, \ldots;$$

donc, en prenant deux sons correspondants à deux figures nodales, l'intervalle musical est moindre que si les extrémités étaient fixes. Or, dans l'anomalie des membranes, c'est le contraire qui a lieu : l'intervalle musical qui sépare deux figures nodales est toujours plus grand que celui de la théorie. Cette dernière perturbation n'est donc pas due à la mobilité des points d'attache de la membrane.

Mon Mémoire se termine par des expériences destinées à vérifier les lois du calcul. J'indique les précautions que j'ai prises pour l'évaluation des diverses données du calcul, et pour la mesure du nombre de vibrations. J'ai pu effectuer toutes mes déterminations avec une précision assez grande au moyen d'un sonomètre construit par M. König, et mis à ma disposition par la libéralité de l'Association Scientifique.

Le calcul des racines de l'équation transcendante, qui varie dans chaque expérience, est ce qu'il y a de plus pénible dans ces recherches. J'ai fait usage de constructions graphiques pour avoir une première approximation; la règle de Newton peut servir ensuite à compléter la résolution.

Le tableau résumé de toutes mes expériences montre que l'accord avec la théorie est aussi satisfaisant que possible.

§ Ier. — *Mouvement vibratoire d'une corde formée de deux parties diverses de nature.*

1. *Notations. Équations différentielles.* — Soit AB (*fig.* 1, *Pl. I*) une corde tendue entre les deux points fixes A et B. Supposons qu'elle soit formée de deux parties AA' et A'B différentes, soit par la nature de la matière, soit par le diamètre seulement. Nous admettrons que le mouvement oscillatoire s'exécute dans le plan YAX, qui contient la position AB d'équilibre; cette droite AB est prise pour axe des x. Le mouvement le plus général peut être regardé comme le résultat de la superposition de deux mouvements plans indépendants qui s'exécuteraient dans les deux plans rectangulaires YAX, ZAX. Il suffit donc d'étudier l'un d'eux.

Nommons :

l la longueur AA';
l' la longueur A'B;
x la distance au point A d'un point quelconque de l;
x' la distance au point A' d'un point quelconque de l';
k le poids de l;
k' le poids de l';
P le poids qui représente la tension de l à l'état d'équilibre;
P' le poids qui représente celle de l';
y le déplacement transversal d'un point de l dans le plan YAX;
y' le déplacement transversal d'un point de l'.

Posons

$$a^2 = \frac{Pgl}{k}, \quad a'^2 = \frac{P'gl'}{k'}, \quad g = 9{,}8088; \tag{1}$$

les équations différentielles du mouvement vibratoire seront, comme on sait (*),

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = a'^2\frac{d^2y'}{dx'^2}; \tag{2}$$

(*) Mémoire de POISSON, *Journal de l'École Polytechnique*, t. XI, p. 446. — *Théorie de l'élasticité*, de LAMÉ, 2e édit., p. 102.

la première des équations (2) se rapporte à la première partie l de la corde, la seconde à l'autre partie l'.

Nous admettrons avec Poisson qu'au point de jonction A′ les deux courbes formées par les cordes AA′, A′B ont la même tangente à toute époque du mouvement.

Poisson suppose $P = P'$. Il en serait ainsi dans le cas où les cordes seraient parfaitement flexibles; mais on sait, par les expériences du colonel Savart (*), que les cordes vibrantes ont toujours une rigidité propre indépendamment de celle que donne le poids tenseur, et M. Duhamel a démontré que pour rétablir l'accord entre l'expérience et la théorie, il suffit de supposer le poids tenseur augmenté d'un poids représentant cette rigidité propre. On doit donc regarder comme généralement inégales les tensions P et P′ des deux cordes.

Il s'agit maintenant d'intégrer les équations (2) en tenant compte des conditions aux limites A, A′, B et des conditions initiales.

2. *Conditions aux limites.* — Faisons usage du signe de substitution introduit par Sarrus et posons avec lui

$$\int^{a} F(x) = F(a), \quad \int_{a}^{b} F(x) = F(b) - F(a), \tag{3}$$

les conditions aux limites seront données par le tableau suivant:

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. VI.

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\text{Quel que soit } t:} \\ \text{Au point A....} & \left\{\begin{array}{l} \int^{0} y = 0, \\ \int^{0} \dfrac{dy}{dt} = 0; \end{array}\right. \\ \text{Au point A'...} & \left\{\begin{array}{l} \int^{l} y = \int^{0} y', \\ \int^{l} \dfrac{dy}{dt} = \int^{0} \dfrac{dy'}{dt}, \\ \int^{l} \dfrac{dy}{dx} = \int^{0} \dfrac{dy'}{dx'}; \end{array}\right. \\ \text{Au point B. ..} & \left\{\begin{array}{l} \int^{l'} y' = 0, \\ \int^{l'} \dfrac{dy'}{dt} = 0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Ces conditions expriment l'immobilité des extrémités et le raccordement des deux parties de la corde au point de jonction A'.

3. *Conditions initiales.* — Nous admettrons qu'à l'origine du temps la corde écartée de sa position d'équilibre a reçu une forme quelconque, et que chacun des points a été lancé dans le plan YAX de la courbe avec une vitesse arbitraire. Les conditions initiales seront donc données par le tableau suivant :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\text{pour } t = 0,} \\ y = \mathbf{F}(x), & y' = \mathbf{F}_1(x'), \\ \dfrac{dy}{dt} = f(x), & \dfrac{dy'}{dt} = f_1(x'); \end{array}\right.$$

F, f, F_1, f_1 désignent des fonctions arbitraires satisfaisant pourtant aux conditions aux limites (4).

4. *Solutions simples particulières.* — Ne nous occupons pas d'abord des conditions initiales; nous pourrons satisfaire aux équations (2)

et (4) par des solutions particulières de la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} y = (A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u, \\ y' = (A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u', \end{cases}$$

A, B, λ étant des constantes; u et u' étant respectivement des fonctions de x et de x' satisfaisant aux équations différentielles

$$(7)\qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{a^2}u = 0, \quad \frac{d^2u'}{dx'^2} + \frac{\lambda^2}{a'^2}u' = 0.$$

De ces dernières on déduit

$$(8)\qquad \begin{cases} u = P\sin\dfrac{\lambda x}{a} + Q\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ u' = P'\sin\dfrac{\lambda x'}{a'} + Q'\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}, \end{cases}$$

P, Q, P′, Q′ étant des constantes arbitraires. Si l'on veut maintenant satisfaire aux conditions aux limites, il faudra choisir P, Q, P′, Q′, λ de manière à rendre identiques les relations

$$(9)\qquad \begin{cases} Q = 0, \\ P\sin\dfrac{\lambda l}{a} = Q', \\ \dfrac{P}{a}\cos\dfrac{\lambda l}{a} = \dfrac{P'}{a'}, \\ P'\sin\dfrac{\lambda l'}{a'} + Q'\cos\dfrac{\lambda l'}{a'} = 0. \end{cases}$$

Ces équations montrent que le nombre P reste arbitraire; nous le prendrons égal à $\sin\dfrac{\lambda l'}{a'}$; nous aurons donc

$$\begin{cases} P = \sin\dfrac{\lambda l'}{a'}, \qquad\qquad Q = 0, \\ P' = \dfrac{a'}{a}\sin\dfrac{\lambda l'}{a'}\cos\dfrac{\lambda l}{a}, \quad Q' = \sin\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda l'}{a'}, \\ a\sin\dfrac{\lambda l}{a}\cos\dfrac{\lambda l'}{a'} + a'\cos\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda l'}{a'} = 0; \end{cases}$$

la dernière de ces équations fait connaître la valeur de λ, les autres déterminent les valeurs correspondantes de P, Q, P′, Q′. On voit donc que les intégrales particulières satisfaisant aux conditions aux limites seront en résumé :

$$(10)\qquad \begin{cases} y = (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u, \\ y' = (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u', \\ u = \sin\dfrac{\lambda l'}{a'}\sin\dfrac{\lambda x}{a}, \\ u' = \sin\dfrac{\lambda l}{a}\sin\dfrac{\lambda(l'-x')}{a'}, \end{cases}$$

A et B étant des constantes arbitraires, et λ une des racines en nombre infini de l'équation transcendante

$$(11)\qquad a\sin\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'} + a'\cos\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'} = 0,$$

qu'on peut encore mettre sous la forme

$$(12)\qquad a\,\mathrm{tang}\,\frac{\lambda l}{a} + a'\,\mathrm{tang}\,\frac{\lambda l'}{a'} = 0.$$

Les solutions particulières (10) coïncident avec celles de Poisson, sauf une légère différence de notation. Elles correspondent à des mouvements vibratoires simples et possibles, résultant d'un état initial facile à trouver en y faisant $t = 0$. Mais comme cet état initial particulier serait impossible à réaliser dans la pratique, le mouvement observé est plus complexe que celui que les équations (10) définissent. Nous allons démontrer que le mouvement vibratoire le plus général peut être regardé comme résultant de la superposition d'un nombre fini ou infini de ces mouvements simples; il nous suffira donc ensuite d'étudier les propriétés des équations (10) pour connaître toutes les lois physiques, perceptibles à l'oreille, du mouvement vibratoire des cordes à deux parties hétérogènes ébranlées d'une manière quelconque.

5. *Intégrale générale.* — Pour arriver rapidement à l'intégrale générale, nous établirons un lemme préliminaire.

Lemme. — *Nommons u_1, u'_1 les valeurs des fonctions u, u' pour une* *racine* λ_1 *autre que* λ *de l'équation transcendante* (11): *on a identiquement la relation*

$$\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1\,dx' = 0.$$

En effet, des équations (7), auxquelles satisfont u, u_1, u', u'_1, nous tirons

$$\int_0^l \left(u_1 \frac{d^2u}{dx^2} - u\frac{d^2u_1}{dx^2}\right)dx + \frac{1}{a^2}(\lambda^2 - \lambda_1^2)\int_0^l uu_1\,dx = 0,$$

et en intégrant

$$\Big|_0^l \left(u_1 \frac{du}{dx} - u\frac{du_1}{dx}\right) + \frac{1}{a^2}(\lambda^2 - \lambda_1^2)\int_0^l uu_1\,dx = 0,$$

de même

$$\Big|_0^{l'} \left(u'_1 \frac{du'}{dx'} - u'\frac{du'_1}{dx'}\right) + \frac{1}{a'^2}(\lambda^2 - \lambda_1^2)\int_0^{l'} u'u'_1\,dx' = 0;$$

de là

$$\begin{aligned}(\lambda^2 - \lambda_1^2)&\left(\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1\,dx'\right)\\ &= \Big|_0^l \left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right) + \Big|_0^{l'}\left(u'\frac{du'_1}{dx'} - u'_1\frac{du'}{dx'}\right);\end{aligned}$$

mais les conditions aux limites donnent

$$\Big|^0 \left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right) = 0,$$

$$\Big|^l \left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right) = \Big|^0 \left(u'\frac{du'_1}{dx'} - u'_1\frac{du'}{dx'}\right),$$

$$\Big|^{l'} \left(u'\frac{du'_1}{dx'} - u'_1\frac{du'}{dx'}\right) = 0,$$

donc

$$\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1\,dx' = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, je dis qu'en désignant par $\sum$ la somme des termes tels que (10) correspondants aux diverses racines en nombre infini de l'équation (11), l'intégrale générale satisfaisant aux conditions initiales arbitraires sera donnée par des équations de la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} y = \sum (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u, \\ y' = \sum (\mathrm{A}\sin\lambda t + \mathrm{B}\cos\lambda t)u'. \end{cases}$$

Il suffit pour cela de démontrer que l'on peut choisir les constantes A et B de chacun des termes de la série, de manière à avoir les identités

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum \mathrm{B}u = \mathrm{F}(x), & \sum \mathrm{B}u' = \mathrm{F}_1(x'), \\ \sum \mathrm{A}\lambda u = f(x), & \sum \mathrm{A}\lambda u' = f_1(x'). \end{cases}$$

Or, multiplions respectivement par $u\,dx$, $u'\,dx'$ les deux équations qui renferment B; intégrons et ajoutons, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a'^2}$, nous aurons, en séparant les divers termes du premier membre,

$$\mathrm{B}\left[\frac{1}{a^2}\int_0^l u^2\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2\,dx'\right] + \mathrm{B}_1\left[\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1\,dx'\right] + \ldots$$
$$= \frac{1}{a^2}\int_0^l u\,\mathrm{F}(x)\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'\,\mathrm{F}_1(x')\,dx'.$$

Mais, en vertu du lemme démontré, tous les termes du premier membre autres que le premier sont identiquement nuls; donc

$$(15)\qquad \mathrm{B} = \frac{\frac{1}{a^2}\int_0^l u\,\mathrm{F}(x)\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'\,\mathrm{F}_1(x')\,dx'}{\frac{1}{a^2}\int_0^l u^2\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2\,dx'};$$

on trouverait de même

$$(16)\qquad \mathrm{A}\lambda = \frac{\frac{1}{a^2}\int_0^l u f(x)\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u' f_1(x')\,dx'}{\frac{1}{a^2}\int_0^l u^2\,dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2\,dx'}.$$

Les formules (15) et (16) déterminent sans impossibilité, au moyen des conditions initiales, les divers coefficients de chacun des termes des séries (13) relatif à chacune des racines λ. Donc le mouvement le plus général résulte bien de la superposition d'une infinité de mouvements simples définis chacun par les équations (10), et comme notre organe d'audition décompose instinctivement le mouvement général en d'autres plus simples ne donnant lieu qu'à un son, on voit qu'au point de vue de l'acoustique physique les intégrales particulières (10) sont seules intéressantes. Il était néanmoins nécessaire d'étudier l'intégrale complète, afin d'être assuré que les mouvements représentés par (10) sont les seuls qui composent le mouvement général.

Nous pourrions effectuer les quadratures des dénominateurs dans les formules (15) et (16), nous verrions alors en quoi consiste l'erreur de celles de Poisson. On remarquera d'ailleurs combien notre analyse est plus simple que celle de l'illustre géomètre, grâce au lemme préliminaire que nous avons démontré ci-dessus.

6. *Propriétés générales des mouvements simples.* — En nous reportant aux équations (10) nous voyons que tout mouvement simple est périodique. Le temps d'une période complète est donné par

$$\lambda\mathfrak{T} = 2\pi, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\lambda};$$

par conséquent le son correspondant à ce mouvement, ou le nombre de vibrations doubles exécutées par seconde, sera

$$\mathfrak{N} = \frac{\lambda}{2\pi}, \tag{17}$$

Ainsi, à chaque λ correspond un état vibratoire simple qui pourrait exister seul, qui existe dans le mouvement général et qui donne lieu à un son unique proportionnel à ce nombre λ. Nous employons ici le mot *son* comme synonyme de *nombre de vibrations*.

Les constantes A et B sont dépendantes de l'état initial; il est facile d'en trouver la signification. Dans un plan perpendiculaire à la corde au point M (*fig.* 2, *Pl. I*) traçons deux droites rectangulaires MH, MK. Sur l'une portons $MB = B.u$, sur l'autre $MA = A.u$. La diagonale MC du rectangle sera

$$MC = u\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Soit t le temps compté à partir du commencement d'une vibration, λt est un certain angle qui varie de 0 à 2π dans le temps d'une vibration complète; soit MG une ligne telle, que GMH soit égal à λt; il est facile de voir que la projection MD de MC est égale à la somme des projections de MA et MB, donc

$$MD = A u \sin\lambda t + B u \cos\lambda t = y.$$

Ainsi MD représente l'écartement de la molécule M relativement à sa position d'équilibre. De là résulte que cet écartement a pour valeur limite $MC = u\sqrt{A^2 + B^2}$. Donc les constantes A et B règlent l'*amplitude* du mouvement vibratoire, et par conséquent l'*intensité* du son correspondant.

Le nombre λ, qui donne la *hauteur* du son (17), est racine de l'équation transcendante (11). On peut la transformer en une autre plus commode pour les applications. On sait, par la théorie des cordes simples, qu'en nommant n le nombre des vibrations complètes exécutées par une corde de longueur l entre deux points fixes, on a

$$n = \frac{a}{2l};$$

donc, en désignant par n et n' les sons fondamentaux des deux parties de la corde en question, on a

$$a = 2nl, \quad a' = 2n'l', \tag{18}$$

et l'équation transcendante (11) devient

$$nl \sin\frac{\lambda}{2n}\cos\frac{\lambda}{2n'} + n'l'\cos\frac{\lambda}{2n}\sin\frac{\lambda}{2n'} = 0 \tag{19}$$

ou

$$nl \operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n} + n'l'\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n'} = 0. \tag{19 bis}$$

L'équation (19) montre que *le son de la corde totale ne dépend que des longueurs des parties et des sons qu'elles rendent chacune.*

De plus, on voit qu'en général les valeurs de λ seront incommensurables entre elles et avec les nombres n et n'; donc *les divers harmoniques ou sons possibles d'une corde formée de deux parties de natures différentes ne sont plus les termes de la série* 1, 2, 3,..., *comme ceux d'une corde simple*.

Pour résoudre facilement l'équation (19) on peut poser

$$\frac{\lambda}{2n} = x; \tag{20}$$

elle devient

$$\operatorname{tang} x + \frac{n'l'}{nl} \operatorname{tang} \frac{nx}{n'} = 0; \tag{21}$$

on trouve une première approximation des diverses valeurs de x en construisant les deux courbes

$$\left\{\begin{aligned} y &= \operatorname{tang} x, \\ y &= -\frac{n'l'}{nl} \operatorname{tang} \frac{nx}{n'}. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

On peut ensuite par divers moyens pousser plus loin l'approximation, si on le juge nécessaire. Quand x est trouvé, on en déduit

$$\mathcal{N} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{nx}{n'}. \tag{23}$$

C'est par cette méthode que j'ai calculé les divers nombres mentionnés dans les expériences qui se trouvent à la fin du Mémoire.

On a les nœuds relatifs à un mouvement simple en posant

$$u = \sin \frac{\lambda l'}{a'} \sin \frac{\lambda x}{a} = 0,$$

$$u' = \sin \frac{\lambda l}{a} \sin \frac{\lambda (l' - x')}{a'} = 0,$$

d'où l'on tire facilement

$$\left\{\begin{aligned} x &= i \frac{n}{\mathcal{N}} l, \\ l' - x' &= i' \frac{n'}{\mathcal{N}} l'. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

i, i' désignent des nombres entiers et positifs qui peuvent être nuls; $\mathfrak{N}$ le son considéré correspondant au λ choisi. La première des équations (24) donne la distance des nœuds de la première corde au point A, la seconde fait connaître la distance des nœuds de l'autre partie au point B. Comme on doit avoir

$$x \leqq l, \quad l' - x' \leqq l',$$

le nombre des nœuds est limité pour chaque valeur de λ ou de $\mathfrak{N}$. On voit aussi que *les nœuds sont équidistants sur chacune des cordes; mais que la distance de deux nœuds sur l'une n'est pas la même que sur l'autre*.

7. *Cas particulier d'une corde simple.* — Nous pouvons supposer que le point A′ sépare les deux parties d'une corde homogène, et nous devons, dans cette hypothèse, retrouver, comme vérification de nos calculs, les formules connues de ce cas simple.

Si les deux parties l et l' sont identiques de nature, on a $a = a'$, et l'équation transcendante (11) donne

$$\sin \frac{\lambda(l + l')}{a} = 0,$$

d'où, en désignant par L la longueur totale,

$$\frac{\lambda L}{a} = i\pi,$$

le nombre i étant l'un des termes de la série 1, 2, 3.... Les diverses valeurs de λ sont dans ce cas

$$\lambda = \frac{a\pi}{L}, \quad 2\frac{a\pi}{L}, \quad 3\frac{a\pi}{L}, \ldots,$$

et les divers sons de la corde

$$(25) \qquad \mathfrak{N} = \frac{a}{2L}, \quad 2\frac{a}{2L}, \quad 3\frac{a}{2L}, \ldots \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

Remarquons en passant que ce résultat suppose seulement $a = a'$, ou

$$\frac{Pl}{k} = \frac{P'l'}{k'}; \tag{26}$$

il subsisterait donc dans le cas où pour deux parties de natures différentes cette relation serait satisfaite, ce qui ne présente aucune impossibilité.

8. *Cas particulier où les deux parties rendraient le même son.* — Il faut supposer dans l'équation (19) $n = n'$. Elle devient

$$\sin\frac{\lambda}{2n}\cos\frac{\lambda}{2n} = 0, \tag{27}$$

d'où

$$\frac{\lambda}{2n} = i\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} = i\frac{n}{2},$$

i étant l'un des termes de la série 1, 2, 3.... Donc les divers sons possibles de la corde sont

$$\mathfrak{N} = \frac{n}{2}, \quad 2\frac{n}{2}, \quad 3\frac{n}{2}, \dots; \tag{28}$$

donc *le son fondamental de la corde totale est à l'octave grave de chacune des parties.*

Pour une corde homogène on sait qu'elle est à l'octave grave de sa moitié. Cette loi est évidemment comprise dans la précédente comme cas particulier.

9. *Cas où l'une des parties est très-petite.* — Supposons l' très-petit, et, pour fixer les idées, admettons que $l + l' = L$ soit constant à mesure que nous ferons tendre l' vers zéro. Les produits nl, $n'l'$ resteront constants en vertu des équations (18), le nombre n tendra vers la limite $\frac{a}{2L}$ et le nombre n' croîtra indéfiniment. Donc les valeurs de x fournies par l'équation

$$\operatorname{tang} x + \frac{n'l'}{nl}\operatorname{tang}\frac{nx}{n'} = 0 \tag{29}$$

tendront vers les racines de l'équation

$$\tan x = 0. \tag{30}$$

On se rapprochera donc indéfiniment du cas où une corde unique est tendue entre deux point fixes A et B. Quand l' est très-petit sans être nul, on voit, en construisant les deux courbes

$$y = \tan x, \quad y = -\frac{n'l'}{nl} \tan \frac{nx}{n'}, \tag{31}$$

comment sont modifiées les racines de l'équation (30).

La courbe dont le trait est plein (*fig.* 3, *Pl. I*) représente l'équation $y = \tan x$. La seconde a pour tangente à l'origine OT, dont l'équation est

$$\frac{x}{y} = -\frac{l'}{l},$$

et à la limite cette quantité $\frac{l'}{l}$ est nulle. D'un autre côté, l'ordonnée y de la seconde courbe devient infinie pour

$$x = \frac{n'}{n} \frac{\pi}{2},$$

quantité qui a pour limite ∞. Donc la seconde courbe *on*, donnée par l'équation

$$y = -\frac{n'l'}{nl} \tan \frac{nx}{n'},$$

se confond longtemps avec sa tangente OT, et s'abaisse peu au-dessous de cette ligne pour les premières valeurs de x; donc les racines de l'équation transcendante sont

$$OK_1 = \pi - \delta_1, \quad OK_2 = 2\pi - \delta_2, \quad OK_3 = 3\pi - \delta_3, \ldots,$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ étant de petites quantités. Donc les sons rendus par une corde dont une des extrémités n'est pas immobile sont

$$\mathfrak{N} = N - \varepsilon_1, \quad 2N - \varepsilon_2, \quad 3N - \varepsilon_3, \ldots,$$

N étant le son fondamental quand les deux extrémités sont fixes, et ε_1, ε_2, ε_3, ... de petites quantités.

Remarquons maintenant que

$$\delta_2 > 2\delta_1, \quad \delta_3 > 3\delta_1, \ldots,$$

que par suite

$$\varepsilon_2 > 2\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 > 3\varepsilon_1, \ldots.$$

Il faut en conclure que les harmoniques successifs sont moins distants qu'ils ne le seraient si les deux extrémités étaient absolument fixes.

L'anomalie qui résulterait pour une corde de la mobilité des extrémités serait donc en sens contraire de celle que l'observation a fait connaître pour les membranes. Je pense donc que la mobilité des points d'attache de la membrane ne peut pas en donner la raison.

§ II. — *Mouvement vibratoire d'une corde formée de trois parties diverses de nature.*

10. *Équations différentielles.* — Nous conserverons les notations précédentes et nous marquerons de deux accents les quantités qui se rapportent à la troisième corde. Les longueurs x, x', x'' seront comptées respectivement à partir des points A, A', A'' (*fig.* 4, *Pl. I*). Les deux points A et B sont les extrémités fixes. Les longueurs des parties seront l, l', l'', leurs sons fondamentaux seront n, n', n''.

Les équations différentielles à intégrer sont

$$(32) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = a'^2\frac{d^2y'}{dx'^2}, \quad \frac{d^2y''}{dt^2} = a''^2\frac{d^2y''}{dx''^2},$$

dans lesquelles

$$(33) \qquad a^2 = \frac{Pgl}{k}, \quad a'^2 = \frac{P'gl'}{k'}, \quad a''^2 = \frac{P''gl''}{k''};$$

il faut joindre à ces équations les conditions aux limites et les conditions initiales.

11. *Conditions aux limites.* — Ces conditions expriment que les extrémités A et B sont fixes, et qu'aux points de jonction A′ et A″ les courbes des fils se raccordent à toute époque. On peut les résumer dans le tableau suivant.

Quel que soit t :

$$
(34)\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{Au point A}\ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} \int^{0} y = 0, \\ \int^{0} \dfrac{dy}{dt} = 0; \end{array}\right. \\[3ex]
\text{Au point A}'\ldots & \left\{\begin{array}{l} \int^{l} y = \int^{0} y', \\ \int^{l} \dfrac{dy}{dt} = \int^{0} \dfrac{dy'}{dt}, \\ \int^{l} \dfrac{dy}{dx} = \int^{0} \dfrac{dy'}{dx'}; \end{array}\right. \\[3ex]
\text{Au point A}''\ldots & \left\{\begin{array}{l} \int^{l'} y' = \int^{0} y'', \\ \int^{l'} \dfrac{dy'}{dt} = \int^{0} \dfrac{dy''}{dt}, \\ \int^{l'} \dfrac{dy'}{dx'} = \int^{0} \dfrac{dy''}{dx''}; \end{array}\right. \\[3ex]
\text{Au point B}\ldots\ldots & \left\{\begin{array}{l} \int^{l''} y'' = 0, \\ \int^{l''} \dfrac{dy''}{dt} = 0. \end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

12. *Conditions initiales.* — Nous supposerons qu'à l'origine la corde a reçu un écartement quelconque, et que chacun des points a reçu dans le plan YABX, qui contenait la corde, une vitesse arbitraire. Les conditions initiales sont donc

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{pour } t=0: \\ y=F(x), \qquad y'=F_1(x'), \qquad y''=F_2(x''), \\ \dfrac{dy}{dt}=f(x), \qquad \dfrac{dy'}{dt}=f_1(x'), \qquad \dfrac{dy''}{dt}=f_2(x''), \end{array}\right.$$

F, f, F_1, f_1, F_2, f_2 désignant des fonctions parfaitement arbitraires, mais satisfaisant pourtant aux conditions aux limites.

13. *Intégrales simples particulières*. — On peut satisfaire aux équations différentielles (32) par des solutions de la forme

$$(36)\qquad \left\{\begin{array}{l} y=(A\sin\lambda t+B\cos\lambda t)u, \\ y'=(A\sin\lambda t+B\cos\lambda t)u', \\ y''=(A\sin\lambda t+B\cos\lambda t)u'', \end{array}\right.$$

u, u', u'' étant des fonctions satisfaisant aux équations différentielles

$$(37)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{\lambda^2}{a^2}u=0, \\ \dfrac{d^2u'}{dx'^2}+\dfrac{\lambda^2}{a'^2}u'=0, \\ \dfrac{d^2u''}{dx''^2}+\dfrac{\lambda^2}{a''^2}u''=0, \end{array}\right.$$

et, par conséquent, étant données par les formules suivantes :

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{l} u=P\sin\dfrac{\lambda x}{a}+Q\cos\dfrac{\lambda x}{a}, \\ u'=P'\sin\dfrac{\lambda x'}{a'}+Q'\cos\dfrac{\lambda x'}{a'}, \\ u''=P''\sin\dfrac{\lambda x''}{a''}+Q''\cos\dfrac{\lambda x''}{a''}. \end{array}\right.$$

Les quantités A, B, λ, P, Q, P', Q', P'', Q'' sont encore des constantes arbitraires.

Laissons de côté les conditions initiales (35) et cherchons à déterminer ces constantes de manière à satisfaire aux conditions aux limites.

Il est facile de voir qu'elles doivent vérifier les égalités du tableau suivant :

$$
(39)\quad \left\{
\begin{aligned}
& Q = 0, \\
& P = \text{quant. arbitraire}, \\
& P \sin \frac{\lambda l}{a} = Q', \\
& \frac{P}{a} \cos \frac{\lambda l}{a} = \frac{P'}{a'}, \\
& P' \sin \frac{\lambda l'}{a'} + Q' \cos \frac{\lambda l'}{a'} = Q'', \\
& \frac{P'}{a'} \cos \frac{\lambda l'}{a'} - \frac{Q'}{a'} \sin \frac{\lambda l'}{a'} = \frac{P''}{a''}, \\
& P'' \sin \frac{\lambda l''}{a''} + Q'' \cos \frac{\lambda l''}{a''} = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

de là nous tirons, en choisissant pour P la quantité $\sin \frac{\lambda l''}{a''}$ et après quelques réductions faciles,

$$
(40)\quad \left\{
\begin{aligned}
P &= \sin \frac{\lambda l''}{a''}, \\
Q &= 0, \\
P' &= \frac{a'}{a} \sin \frac{\lambda l''}{a''} \cos \frac{\lambda l}{a}, \\
Q' &= \sin \frac{\lambda l''}{a''} \sin \frac{\lambda l}{a}, \\
P'' &= \frac{a''}{a} \cos \frac{\lambda l}{a} \cos \frac{\lambda l'}{a'} \sin \frac{\lambda l''}{a''} - \frac{a''}{a'} \sin \frac{\lambda l}{a} \sin \frac{\lambda l'}{a'} \sin \frac{\lambda l''}{a''}, \\
&= - \sin \frac{\lambda l}{a} \cos \frac{\lambda l'}{a'} \cos \frac{\lambda l''}{a''} - \frac{a'}{a} \cos \frac{\lambda l}{a} \sin \frac{\lambda l'}{a'} \cos \frac{\lambda l''}{a''}, \\
Q'' &= \sin \frac{\lambda l}{a} \cos \frac{\lambda l'}{a'} \sin \frac{\lambda l''}{a''} + \frac{a'}{a} \cos \frac{\lambda l}{a} \sin \frac{\lambda l'}{a'} \sin \frac{\lambda l''}{a''}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le nombre λ est donné par l'équation transcendante

$$
(41)\quad \left\{
\begin{aligned}
0 = {} & a \sin \frac{\lambda l}{a} \cos \frac{\lambda l'}{a'} \cos \frac{\lambda l''}{a''} + a' \cos \frac{\lambda l}{a} \sin \frac{\lambda l'}{a'} \cos \frac{\lambda l''}{a''} \\
& + a'' \cos \frac{\lambda l}{a} \cos \frac{\lambda l'}{a'} \sin \frac{\lambda l''}{a''} - \frac{aa''}{a'} \sin \frac{\lambda l}{a} \sin \frac{\lambda l'}{a'} \sin \frac{\lambda l''}{a''}
\end{aligned}
\right.
$$

ou bien

$$(41\ bis)\qquad o = \operatorname{tang}\frac{\lambda l}{a} + a'\operatorname{tang}\frac{\lambda l'}{a'} + a''\operatorname{tang}\frac{\lambda l''}{a''} - \frac{aa''}{a'}\operatorname{tang}\frac{\lambda l}{a}\operatorname{tang}\frac{\lambda l'}{a'}\operatorname{tang}\frac{\lambda l''}{a''}.$$

Si maintenant nous portons, dans les équations (38), les valeurs des constantes P, Q, P′, Q′.... données par les équations (40), nous obtiendrons, après quelques réductions faciles,

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \sin\frac{\lambda l''}{a''}\sin\frac{\lambda x}{a},\\ u' &= \sin\frac{\lambda l''}{a''}\left(\frac{a'}{a}\cos\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda x'}{a'} + \sin\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda x'}{a'}\right),\\ u'' &= \left(\sin\frac{\lambda l}{a}\cos\frac{\lambda l'}{a'} + \frac{a'}{a}\cos\frac{\lambda l}{a}\sin\frac{\lambda l'}{a'}\right)\sin\frac{\lambda(l''-x'')}{a''}. \end{aligned}\right.$$

Les formules (42) unies aux formules (36) donnent des intégrales particulières satisfaisant à toutes les conditions aux limites. Chaque valeur de λ tirée de l'équation (41) fera connaître un système (36), (42), d'intégrales particulières, et les constantes A et B restent encore arbitraires pour chacun de ces mouvements simples.

14. *Intégrale générale.* — Ajoutons un nombre indéfini de solutions simples, correspondant chacune à une valeur λ différente, nous aurons encore une solution des équations différentielles (32), sous la forme

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \sum(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u,\\ y' &= \sum(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u',\\ y'' &= \sum(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u''. \end{aligned}\right.$$

Nous allons démontrer qu'on peut choisir les constantes A, B, A_1, B_1, A_2, B_2, ... des divers termes, de manière à satisfaire à l'état initial arbitrairement donné, c'est-à-dire de façon à avoir identiquement

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum Bu = F(x), &&\sum A\lambda u = f(x);\\ &\sum Bu' = F_1(x'), &&\sum A\lambda u' = f_1(x');\\ &\sum Bu'' = F_2(x''), &&\sum A\lambda u'' = f_2(x''). \end{aligned}\right.$$

En effet, multiplions respectivement les trois équations en B par

$$\frac{1}{a^2}u\,dx, \quad \frac{1}{a'^2}u'\,dx', \quad \frac{1}{a''^2}u''\,dx'',$$

intégrons respectivement de o à l, de o à l', de o à l'', et ajoutons membre à membre, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{B}\left(\frac{1}{a^2}\int_0^l u^2dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx' + \frac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''^2dx''\right)\\
&+\mathrm{B}_1\left(\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1dx' + \frac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''u''_1dx''\right)\\
&+\mathrm{B}_2\left(\frac{1}{a^2}\int_0^l uu_2dx + \frac{1}{a'^3}\int_0^{l'} u'u'_2dx' + \frac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''u''_2dx''\right)\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&=\frac{1}{a^2}\int_0^l u\mathrm{F}(x)dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'\mathrm{F}_1(x')dx + \frac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''\mathrm{F}_2(x'')dx''.
\end{aligned}\right.$$

Mais, en raisonnant comme au § V, nous démontrerions que, si u_1, u'_1, u''_1 désignent les valeurs des fonctions u, u', u'', quand λ se change en une autre racine λ_1, on a identiquement

$$\mathrm{o} = \frac{1}{a^2}\int_0^l uu_1dx + \frac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'u'_1dx' + \frac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''u''_1dx'',$$

donc

$$(45)\quad \mathrm{B} = \frac{\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^l u\mathrm{F}(x)dx + \dfrac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'\mathrm{F}_1(x')dx' + \dfrac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''\mathrm{F}_2(x'')dx''}{\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^l u^2dx + \dfrac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx' + \dfrac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''^2dx''},$$

et de même

$$(46)\quad \mathrm{A}\lambda = \frac{\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^l uf(x)dx + \dfrac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'f_1(x')dx' + \dfrac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''f_2(x'')dx''}{\dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_0^l u^2dx + \dfrac{1}{a'^2}\int_0^{l'} u'^2dx' + \dfrac{1}{a''^2}\int_0^{l''} u''^2dx''}.$$

Les équations (45) et (46) font connaître sans impossibilité les coefficients de chacun des termes des séries (43) qui donnent l'intégrale générale. On conclut de là que le mouvement le plus général, qui résulte d'un état initial quelconque, peut être regardé comme la superposition d'un nombre fini ou infini de mouvements simples de la forme (36), correspondants à des amplitudes diverses que l'état initial fait connaître au moyen des formules (45) et (46). On voit en même temps que l'état initial arbitrairement donné peut être regardé comme résultant de la superposition des états initiaux qui correspondent à chacun des mouvements simples (36).

15. *Propriétés générales des mouvements simples.* — Le mouvement défini par les équations (36) est périodique, et le son auquel il correspond est

$$\mathfrak{N} = \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{47}$$

Les divers harmoniques d'une corde à trois parties sont donc proportionnels à λ, et par suite en général incommensurables.

Les valeurs de λ s'obtiennent en résolvant l'équation (41), qui, en posant

$$a = 2nl, \quad a' = 2n'l', \quad a'' = 2n''l'',$$

devient

$$\left\{\begin{aligned} 0 = nl \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2n} + n'l' \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2n'} + n''l'' \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2n''} \\ - \frac{nn''}{n'} \frac{ll''}{l'} \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2n} \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2n'} \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2n''}. \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Cette équation montre que les divers sons de la corde totale ne dépendent que des longueurs et des sons des parties; mais la loi de dépendance est si complexe, que jamais l'expérience ne pourrait à elle seule la découvrir.

Pour avoir les nœuds de vibration, on égalera à zéro les seconds membres des équations (42), et l'on trouvera

$$\left\{\begin{array}{ll} \sin \dfrac{\lambda x}{a} = 0, & \text{d'où} \quad x = i \dfrac{n}{\mathfrak{N}} l; \\ \operatorname{tang} \dfrac{\lambda x'}{a'} = -\dfrac{a}{a'} \operatorname{tang} \dfrac{\lambda l}{a}, & \text{d'où} \quad x' = \dfrac{n'}{\mathfrak{N}} \dfrac{\alpha}{\pi} l' + i' \dfrac{n'}{\mathfrak{N}} l'; \\ \sin \dfrac{\lambda(l'' - x'')}{a''} = 0, & \text{d'où} \quad l'' - x'' = i'' \dfrac{n''}{\mathfrak{N}} l''. \end{array}\right. \tag{49}$$

Dans ces formules, i, i', i'' désignent l'un des nombres entiers 0, 1, 2, ..., et α le plus petit arc, dont la tangente est $-\frac{nl}{n'l'}\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n}$.

On voit donc que les nœuds sont équidistants sur chacune des cordes, mais que la distance de deux nœuds sur l'une n'est pas la même que sur l'autre. Le nombre de ces nœuds se limite de lui-même pour chaque valeur de $\mathfrak{N}$, car on a toujours

$$x < l, \quad x' < l', \quad l'' - x'' < l''.$$

16. *Cas particulier où les trois parties rendraient le même son.* — Faisons dans l'équation transcendante (41) ou (48)

$$n = n' = n'',$$

elle donnera

$$\sin\frac{\lambda}{2n}\cos^2\frac{\lambda}{2n} - \frac{ll''}{l'L}\sin^3\frac{\lambda}{2n} = 0,$$

d'où l'on tire

$$(50) \quad \left\{\begin{aligned} &\sin\frac{\lambda}{2n} = 0, \\ &\operatorname{tang}\frac{\lambda}{2n} = \pm\sqrt{\frac{l'L}{ll''}}. \end{aligned}\right.$$

La première de ces équations donne la série des sons

$$\mathfrak{N} = n, \quad 2n, \quad 3n, \dots$$

que chacune des parties ferait entendre seule; il est clair en effet que ces divers sons font partie de la série des harmoniques de la corde totale. Si maintenant nous désignons par α le plus petit des arcs positifs ayant pour tangente

$$\sqrt{\frac{l'L}{ll''}},$$

nous déduirons de la seconde des équations (50) deux nouvelles séries d'harmoniques

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{N} = \frac{\alpha n}{\pi}, \quad \frac{\alpha n}{\pi} + n, \quad \frac{\alpha n}{\pi} + 2n, \quad \frac{\alpha n}{\pi} + 3n, \dots, \\ &\mathfrak{N} = \frac{(\pi - \alpha)n}{\pi}, \quad \frac{(\pi - \alpha)n}{\pi} + n, \quad \frac{(\pi - \alpha)n}{\pi} + 2n, \dots \end{aligned}\right.$$

en progression arithmétique.

Dans le cas plus particulier où l'on aurait en même temps

$$l'L = ll'', \tag{51}$$

c'est-à-dire où la droite L serait divisée *harmoniquement* par les points de séparation A′ et A″, on devrait poser

$$\alpha = \frac{\pi}{4};$$

par suite les deux séries deviennent

$$\frac{n}{4},\quad \frac{5n}{4},\quad \frac{9n}{4},\ldots,$$
$$\frac{3n}{4},\quad \frac{7n}{4},\quad \frac{11n}{4},\ldots,$$

et constituent la série unique

$$\mathfrak{N} = \frac{n}{4},\quad \frac{3n}{4},\quad \frac{5n}{4},\quad \frac{7n}{4},\ldots, \tag{52}$$

dont les divers termes sont entre eux comme les nombres impairs. Ainsi, dans ce cas très-particulier, *le son fondamental de la corde à trois parties est à la double octave grave du son rendu par chacune des parties.*

On peut facilement s'arranger de manière à faire rendre le même son aux trois parties d'une corde; mais il semble assez difficile de satisfaire en même temps à la relation (51). Par conséquent il est difficile de vérifier la loi précédente par expérience.

17. *Cas particulier où $a = a' = a''$.* — Dans ce cas, qui comprend celui où A′ et A″ désigneraient les points géométriques de division d'une corde homogène, l'équation transcendante (41) donne

$$\sin\frac{\lambda L}{a} = 0,$$

d'où

$$\frac{\lambda L}{a} = i\pi, \qquad \lambda = i\frac{\pi a}{L};$$

les harmoniques de la corde totale sont donc

$$\mathcal{N} = \frac{a}{2L}, \quad 2\frac{a}{2L}, \quad 3\frac{a}{2L}. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

18. *Cas particulier où les parties extrêmes sont très-petites.* — Dans ce cas les nombres n et n'' sont très-grands; posons

$$\frac{\mathfrak{N}\lambda}{2n'} = \varphi,$$

l'équation transcendante (41) deviendra

$$0 = \frac{a}{a'}\tang\frac{n'\varphi}{n} + \tang\varphi + \frac{a''}{a'}\tang\frac{n'\varphi}{n''} - \frac{aa''}{a'^2}\tang\frac{n'\varphi}{n}\tang\varphi\tang\frac{n'\varphi}{n''}.$$

Le dernier terme est du second ordre de petitesse; le premier et le troisième forment ensemble une quantité très-petite positive, donc cette équation est de la forme

$$\tang\varphi + \omega = 0;$$

ω tendant vers zéro quand les parties extrêmes de la corde totale tendent vers zéro, cette quantité n'est pas constante et augmente avec φ. Si elle était constante, les divers harmoniques seraient

$$\mathcal{N} = n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \quad 2n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \quad 3n' - \frac{\alpha n'}{\pi}, \dots.$$

En réalité on a

$$\mathcal{N} = n' - \varepsilon_1, \quad 2n' - \varepsilon_2, \quad 3n' - \varepsilon_3, \dots,$$

les quantités ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \dots$ étant croissantes et telles que

$$\varepsilon_2 > 2\varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 > 3\varepsilon_1, \dots,$$

de sorte que la perturbation apportée par la mobilité des points d'attache consiste dans le rapprochement de deux harmoniques de la corde. Cette perturbation est en sens inverse de celle que j'ai fait connaître dans le mouvement vibratoire des membranes.

§ III. — *Mouvement vibratoire d'une corde formée d'un nombre quelconque de parties diverses de nature.*

19. *Mouvements simples.* — Par une analyse entièrement semblable à celle du paragraphe précédent, nous prouverions que le mouvement le plus général peut être regardé comme le résultat de la superposition d'une infinité de mouvements simples, donnant chacun un son unique, et déterminés chacun par l'ensemble des équations

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= (A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u,\\ y' &= (A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u',\\ y'' &= (A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u'',\\ y''' &= (A\sin\lambda t + B\cos\lambda t)u''',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

en même nombre que les parties de la corde. Les fonctions u, u',... sont déterminées par les équations différentielles du second ordre que voici :

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{a^2}u = 0,\\ &\frac{d^2u'}{dx'^2} + \frac{\lambda^2}{a'^2}u' = 0,\\ &\frac{d^2u''}{dx''^2} + \frac{\lambda^2}{a''^2}u'' = 0,\\ &\frac{d^2u'''}{dx'''^2} + \frac{\lambda^2}{a'''^2}u''' = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Par conséquent

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= P\sin\frac{\lambda x}{a} + Q\cos\frac{\lambda x}{a},\\ u' &= P'\sin\frac{\lambda x'}{a'} + Q'\cos\frac{\lambda x'}{a'},\\ u'' &= P''\sin\frac{\lambda x''}{a''} + Q''\cos\frac{\lambda x''}{a''},\\ u''' &= P'''\sin\frac{\lambda x'''}{a'''} + Q'''\cos\frac{\lambda x'''}{a'''},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Les constantes P, Q, P′, Q′,... et λ se trouvent au moyen des conditions aux limites, comme nous l'avons vu précédemment. Cette détermination n'offrant aucune difficulté nouvelle, nous en supprimons le détail. La partie la plus importante c'est l'équation transcendante en λ qui fait connaître les divers sons de la corde totale. Nous allons apprendre à la former.

Pour éviter des écritures trop longues, il est bon d'employer le système des notations abrégées que voici :

$$(56)\quad \begin{cases} S = \sin\dfrac{\lambda l}{a}, & C = \cos\dfrac{\lambda l}{a}, & T = \operatorname{tang}\dfrac{\lambda l}{a}, \\ S' = \sin\dfrac{\lambda l'}{a'}, & C' = \cos\dfrac{\lambda l'}{a'}, & T' = \operatorname{tang}\dfrac{\lambda l'}{a'}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

20. *Équation transcendante qui donne les divers harmoniques de la corde totale.* — Cette équation devient de plus en plus compliquée à mesure que le nombre des parties de la corde augmente; voici cependant une règle très-simple pour la former dans tous les cas.

Posons

$$(57)\quad \begin{cases} \sigma_1 = T + T' + T'' + \ldots, & \text{somme des produits un à un,} \\ \sigma_2 = TT' + TT'' + T'T'' + \ldots, & \text{somme des produits deux à deux,} \\ \sigma_3 = TT'T'' + TT'T''' + \ldots, & \text{somme des produits trois à trois.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nous savons que

$$(58)\qquad \operatorname{tang}\left(\frac{\lambda l}{a} + \frac{\lambda l'}{a'} + \frac{\lambda l''}{a''} + \ldots\right) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_5 - \ldots}{1 - \sigma_2 + \sigma_4 - \ldots}.$$

Pour écrire l'équation transcendante qui fait connaître λ :

1° On prend le numérateur de la fraction (58)

$$\sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_5 - \ldots.$$

2° On multiplie chacun des termes de σ_1 par la lettre a affectée de l'accent qui correspond à ce terme.

3° On multiplie chacun des termes de σ_3 par $\frac{a^i a^j}{a^p}$, l'accent i correspondant à la première tangente, l'accent j à la troisième, l'accent p à la seconde, ces tangentes étant rangées par ordre d'accentuation.

4° On multiplie chacun des termes de σ_5 par $\frac{a^i a^j a^k}{a^p a^q}$, les accents i, j, k correspondant respectivement à la première, à la troisième, à la cinquième tangente, les accents p et q correspondant à la seconde et à la quatrième. La loi est évidente, et on la continue pour σ_7, σ_9.

5° On égale à zéro le numérateur de la fraction (58) ainsi modifié, et on a l'équation transcendante demandée.

EXEMPLES.

1° *Cas de deux parties.* — Le numérateur de la fraction (58) se réduit à

$$\sigma_1 = \mathrm{T} + \mathrm{T}'.$$

Modifions-le suivant la règle indiquée, et nous trouvons l'équation transcendante du § I^{er} :

$$a\mathrm{T} + a'\mathrm{T}' = 0.$$

2° *Cas de trois parties.* — Le numérateur de la fraction (58) devient

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' - \mathrm{T}\mathrm{T}'\mathrm{T}''.$$

Modifions-le suivant la règle, et nous retrouvons l'équation transcendante du § II de notre Mémoire

$$a\mathrm{T} + a'\mathrm{T}' + a''\mathrm{T}'' - \frac{aa''}{a'}\mathrm{T}\mathrm{T}'\mathrm{T}'' = 0.$$

3° *Cas de quatre parties.* — Le numérateur de la fraction (58) devient

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \mathrm{T} + \mathrm{T}' + \mathrm{T}'' + \mathrm{T}''' - \mathrm{T}'\mathrm{T}''\mathrm{T}''' - \mathrm{T}\mathrm{T}''\mathrm{T}''' - \mathrm{T}\mathrm{T}'\mathrm{T}''' - \mathrm{T}\mathrm{T}'\mathrm{T}''.$$

En le modifiant suivant la règle ci-dessus, nous obtenons l'équation transcendante en λ

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} &aT + a'T' + a''T'' + a'''T''' - \frac{a'a'''}{a''}T'T''T''' - \frac{aa'''}{a''}TT''T''' \\ &\qquad - \frac{aa'''}{a'}TT'T''' - \frac{aa''}{a'}TT'T'' = 0. \end{aligned}\right.$$

4° *Cas de cinq parties.* — Le numérateur de la fraction (58) devient

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_5 = T + T' + T'' + T''' + T^{\text{iv}} &- T'T''T''' - TT''T''' \\ &- TT'T''' - TT'T'' - TT'T^{\text{iv}} - TT''T^{\text{iv}} - TT'''T^{\text{iv}} \\ &- T'T''T^{\text{iv}} - T'T'''T^{\text{iv}} - T''T'''T^{\text{iv}} + TT'T''T'''T^{\text{iv}}. \end{aligned}$$

Modifions-le suivant la règle ci-dessus, et nous aurons pour l'équation transcendante en λ

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} &aT + a'T' + a''T'' + a'''T''' + a^{\text{iv}}T^{\text{iv}} - \frac{a'a'''}{a''}T'T''T''' \\ &- \frac{aa'''}{a''}TT''T''' - \frac{aa'''}{a'}TT'T''' - \frac{aa''}{a'}TT'T'' - \frac{aa^{\text{iv}}}{a'}TT'T^{\text{iv}} \\ &- \frac{aa^{\text{iv}}}{a''}TT''T^{\text{iv}} - \frac{aa^{\text{iv}}}{a'''}TT'''T^{\text{iv}} - \frac{a'a^{\text{iv}}}{a''}T'T''T^{\text{iv}} \\ &- \frac{a'a^{\text{iv}}}{a'''}T'T'''T^{\text{iv}} - \frac{a''a^{\text{iv}}}{a'''}T''T'''T^{\text{iv}} + \frac{aa''a^{\text{iv}}}{a'a'''}TT'T''T'''T^{\text{iv}} = 0, \end{aligned}\right.$$

et l'on continuerait de même.

On voit, par la complication des équations (59) et (60), que les calculs numériques relatifs aux cas de plus de trois parties sont, sinon impossibles, du moins rebutants par leur longueur. Mais au point de vue physique il suffit de constater l'accord entre l'expérience et la théorie pour les cas les plus simples.

La démonstration de la généralité de notre règle est facile; on en trouve d'ailleurs une vérification en ceci que l'on doit avoir

$$\operatorname{tang}\frac{\lambda(l + l' + l'' \ldots)}{a} = \operatorname{tang}\left(\frac{\lambda l}{a} + \frac{\lambda l'}{a} + \frac{\lambda l''}{a} + \ldots\right) = 0,$$

quand on suppose

$$a = a' = a'', \ldots,$$

hypothèse qui comprend le cas où l, l', l'', ... ne sont plus que les diverses parties d'une corde homogène.

§ IV. — *Vérification expérimentale.*

21. La théorie de l'élasticité n'est pas encore arrivée à l'état de la mécanique céleste; ses équations fondamentales ne reposent pas sur un principe unique vérifié par de si nombreuses observations, qu'il n'y ait plus à douter de son exactitude absolue. Dans chacun des problèmes qu'elle traite il s'introduit non-seulement les hypothèses fondamentales qui conduisent aux équations différentielles des phénomènes étudiés, mais encore des conditions aux limites simples et idéales dont le physicien peut approcher, mais qu'il ne peut jamais complétement réaliser; enfin le calculateur fait abstraction des forces perturbatrices qu'il croit petites, et qui compliqueraient ses équations. Il y a donc toujours un intérêt très-grand à comparer les résultats de la théorie avec ceux de l'expérience; et c'est le seul moyen de justifier toutes les hypothèses faites dans le cours de l'analyse. Ainsi, en particulier, nous avons admis au début de notre Mémoire que les deux parties de la corde ont une tangente commune au point de jonction pendant tout le mouvement; toute notre théorie est fondée sur cette hypothèse : c'est la vérification expérimentale des lois trouvées qui en montrera la légitimité.

Mes études n'ont porté que sur des cordes formées de deux ou trois parties. Les calculs numériques auxquels chaque expérience entraîne pour le cas de trois sont déjà très-considérables, à cause de la complication de l'équation transcendante à résoudre.

22. *Procédés d'expérience.* — Il est nécessaire de déterminer avec précision le nombre de vibrations d'une corde tendue et sa longueur; ce sont les seuls éléments qui entrent dans le calcul, comme on le voit au § VI du Mémoire. Grâce aux libéralités de l'Association Scientifique, j'ai pu faire usage d'un sonomètre construit par M. König et disposé de façon à fournir rapidement ces deux quantités.

Ce sonomètre porte, l'une à côté de l'autre, la corde d'expérience formée de deux ou trois parties et une corde *normale* de comparaison dont je vais indiquer l'usage. A l'une des extrémités de la table du sonomètre se trouve fixé un diapason étalon donnant l'*ut* de 256 vibrations simples ou 128 vibrations doubles.

On peut facilement mettre la corde normale à l'unisson du diapason. On le fait à peu près à l'oreille au moyen d'une vis à petit pas qui tend la corde lentement quand elle est presque arrivée à l'accord. Les battements qui se produisent indiquent par leur plus ou moins de fréquence dans quel sens il faut tourner pour atteindre l'accord parfait. On reconnaît qu'on y est arrivé lorsque la corde se met en vibration spontanément aussitôt que le diapason vibre lui-même. Dans cet état la corde fait 128 vibrations complètes par secondes, et sa longueur est de 1000 millimètres. En la raccourcissant au moyen d'un curseur mobile on trouvera la longueur b à l'unisson de l'une des parties de la corde en expérience; une simple proportion donnera le nombre des vibrations n :

$$\frac{n}{128} = \frac{1000}{b},$$

d'où

$$n = \frac{128\,000}{b}.$$

On voit que ce procédé exige que l'on mette à l'accord d'unisson deux cordes voisines. Les battements rendent cette opération facile; d'ailleurs on a toujours une vérification en cherchant si le mouvement de l'une entraîne le mouvement spontané de l'autre.

Un moyen connu, très-simple, m'a servi à trouver les divers harmoniques des cordes expérimentées; j'entends par là les sons successifs qu'elle peut donner au-dessus du son fondamental, en se divisant en un certain nombre de parties. Si l'on promène légèrement l'archet sur la corde en la touchant du doigt en divers points, on arrive à trouver par tâtonnements les nœuds, et alors la corde vibre sous l'archet sans difficulté, en donnant un des harmoniques. On trouve la position exacte des nœuds, soit au moyen de petits chevalets de fil léger qui s'arrêtent en ces points, soit au moyen de curseurs qui, placés aux nœuds, divisent la corde expérimentée en parties donnant chacune l'harmonique qu'on vient de trouver.

Pour avoir une corde composée de plusieurs parties hétérogènes on peut employer plusieurs moyens : 1° relier par des nœuds des cordes différentes; 2° étirer et amincir à la filière une partie d'un fil plus gros; 3° souder deux fils de métaux différents et passer le tout à la filière. Le premier procédé, de beaucoup le plus commode, est un peu grossier; mais les perturbations que le nœud produit sont à peine sensibles, comme on le voit dans mes tableaux d'expérience, et il est le seul qu'on puisse employer si l'on opère sur des cordes à boyau.

23. *Notations.* — J'appellerai :

l, l' les longueurs des diverses parties;

L la longueur totale;

n, n' les nombres de vibrations doubles des sons fondamentaux des parties l, l';

$\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ les nombres de vibrations doubles du son fondamental et des harmoniques de la corde totale : ces lettres $\mathfrak{N}^{(t)}$, $\mathfrak{N}^{(o)}$, affectées des indices t et o, indiqueront les sons théoriques et les sons observés;

z la distance au zéro des divers nœuds;

b, b' les longueurs de corde normale à l'unisson de l, l', ...;

B_1, B_2 les longueurs de corde normale à l'unisson de L et de ses harmoniques.

Toutes les longueurs seront exprimées en millimètres.

24. *Tableau des résultats donnés par l'expérience.*

Première expérience.

Les deux cordes liées par un nœud sont l'une d'acier l, l'autre à boyau l'.

$l = 420$	$b = 544$	$n = 235$	$B^{(o)} = 1335$
$l' = 580$	$b' = 767$	$n' = 167$	$\mathfrak{N}^{(o)} = 96$

Équation transcendante à résoudre :

$$\operatorname{tang} x + 0,912 \operatorname{tang} 1,410\, x = 0.$$

Première racine :

$$x = \frac{\lambda}{2n} = 1,294, \quad \text{d'où} \quad \frac{nx}{\pi} = \mathfrak{N}^{(t)} = 96,8.$$

Deuxième expérience.

Mêmes cordes. Tension différente.

$$\begin{array}{llll} l = 420 & b = 535 & n = 240 & \mathrm{B}^{(0)} = 1312 \\ l' = 580 & b' = 753 & n' = 170 & \mathfrak{N}^{(0)} = 99,6 \end{array}$$

Équation transcendante à résoudre :

$$\operatorname{tang} x + 0,980 \operatorname{tang} 1,410\, x = 0.$$

Première racine :

$$x = 1,303, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{N}^{(1)} = 99,7.$$

Troisième expérience.

Mêmes cordes. Tension différente.

$$\begin{array}{llll} l = 420 & b = 565 & n = 227 & \mathrm{B}^{(0)} = 1396 \\ l' = 580 & b' = 809 & n' = 158 & \mathfrak{N}^{(0)} = 91,8 \end{array}$$

Équation transcendante à résoudre :

$$\operatorname{tang} x + 0,968 \operatorname{tang} 1,432\, x = 0.$$

Première racine :

$$x = \frac{\lambda}{2n} = 1,288, \quad \text{d'où} \quad \frac{nx}{\pi} = \mathfrak{N}^{(1)} = 93,2.$$

Quatrième expérience.

Mêmes cordes. Tension différente.

$$\begin{array}{llll} l = 420 & b = 574 & n = 223 & \mathrm{B}^{(0)} = 1414 \\ l' = 580 & b' = 813,5 & n' = 157 & \mathfrak{N}^{(0)} = 90,6 \end{array}$$

Équation transcendante à résoudre :

$$\operatorname{tang} x + 0,979 \operatorname{tang} 1,416\, x = 0.$$

Première racine :

$$x = \frac{\lambda}{2n} = 1,298, \quad \text{d'où} \quad \frac{nx}{\pi} = \mathfrak{N}^{(t)} = 92,2.$$

Remarque. — Ces quatre expériences faites dans des conditions voisines sur deux parties bien différentes de cordes réunies par un nœud montrent un accord presque parfait avec la théorie. Il faut en conclure que le mode grossier de liaison n'a pas d'influence sensible.

Cinquième expérience.

La corde à boyau des expériences précédentes est raccourcie au moyen d'un curseur jusqu'à ce qu'elle donne le même son que la corde d'acier; alors

$$\begin{array}{llll} l = 420 & b = 565 & n = 227 & \mathrm{B}^{(o)} = 1139 \\ l' = 408 & & & \mathfrak{N}^{(o)} = 112 \end{array}$$

La corde totale L doit donner, d'après la théorie, l'octave grave du son de chacune des parties, savoir

$$\mathfrak{N}^{(t)} = 113,5.$$

J'ai multiplié les vérifications de la loi démontrée par cette expérience; j'ai toujours trouvé un accord presque parfait avec la théorie. Cette vérification, n'exigeant pas la résolution d'une équation transcendante, peut être faite très-facilement dans des conditions très-diverses.

Sixième expérience.

Les deux parties reliées par un nœud sont l'une l d'acier, l'autre l' de laiton.

$$\begin{array}{llll} \text{Acier...} & l = 445 & b = 412 & n = 311 \\ \text{Laiton..} & l' = 555 & b' = 906 & n' = 142 \end{array}$$

Équation transcendante à résoudre :

$$\operatorname{tang} x + 0,567 \operatorname{tang} 2,20x = 0.$$

Racines successives et sons correspondants :

$x_1 = 0,904$	$\mathfrak{N}_1^{(t)} = 89,5$	
$x_2 = 2,021$	$\mathfrak{N}_2^{(t)} = 200$	1 nœud ;
$x_3 = 2,982$	$\mathfrak{N}_3^{(t)} = 295$	2 nœuds ;
$x_4 = 3,840$	$\mathfrak{N}_4^{(t)} = 380$	3 nœuds ;
$x_5 = 4,939$	$\mathfrak{N}_5^{(t)} = 489$	4 nœuds ;
$x_6 = 5,957$	$\mathfrak{N}_6^{(t)} = 590$	5 nœuds.

Position théorique des nœuds :

1 nœud.	2 nœuds.	3 nœuds.	4 nœuds.	5 nœuds.
$z = 607,4$	$z_1 = 468$	$z_1 = 364$	$z_1 = 283$	$z_1 = 235$
	$z_2 = 734$	$z_2 = 587$	$z_2 = 518,5$	$z_2 = 456$
		$z_3 = 794$	$z_3 = 679$	$z_3 = 592$
			$z_4 = 839,5$	$z_4 = 728$
				$z_5 = 864$

L'expérience a donné :

$\mathfrak{N}_1^{(o)} = 86,2$	$\mathfrak{N}_3^{(o)} = 293$	$\mathfrak{N}_5^{(o)} = 487$
$\mathfrak{N}_2^{(o)} = 193$	$\mathfrak{N}_4^{(o)} = 380$	$\mathfrak{N}_6^{(o)} = 591$

Les nœuds sont sensiblement à leur place. Je l'ai constaté en marquant à l'encre les points théoriques, en y plaçant de petits chevalets de fil et en faisant vibrer à côté la corde normale, de manière à rendre l'harmonique correspondant. Les chevalets restaient immobiles aux nœuds marqués, et remuaient dans les positions intermédiaires.

Remarque I. — Les deux premiers sons rendus par la corde paraissent différer des sons théoriques plus que les autres; mais on peut attribuer cette divergence à des erreurs d'expérience. La détermination des sons graves par le procédé que j'ai suivi présente toujours quelque incertitude.

Remarque II. — J'ai vu dans cette expérience que le nœud qui réunit les deux parties apporte des perturbations notables quand la corde sur laquelle il se trouve est très-petite. Dans le cas, par exemple, où la corde présente 5 nœuds de vibration, si l'on place 4 curseurs mobiles aux points marqués, les diverses parties de la corde doivent toutes rendre le même son $\mathcal{N}_6$. Or on observe que la portion assez courte qui contient le point de jonction des deux parties vibre difficilement et rend un son un peu plus bas.

Septième expérience.

La corde est en laiton, d'une seule pièce, amincie à la filière dans l'une de ses parties. Le nœud de jonction ne peut plus avoir d'influence. La partie l la plus longue est la plus fine.

$$l = 642 \qquad b = 947 \qquad n = 135$$
$$l' = 358 \qquad b' = 582 \qquad n' = 220$$

Équation transcendante à résoudre :

$$\operatorname{tang} x + 0{,}906 \operatorname{tang} 0{,}615\, x = 0.$$

Racines successives et sons théoriques correspondants :

$x_1 = 1{,}966$	$\mathcal{N}_1^{(l)} = 84{,}5$	
$x_2 = 3{,}860$	$\mathcal{N}_2^{(l)} = 165{,}5$	1 nœud ;
$x_3 = 5{,}859$	$\mathcal{N}_3^{(l)} = 252$	2 nœuds ;
$x_5 = 9{,}710$	$\mathcal{N}_5^{(\;)} = 417$	4 nœuds.

Position théorique des nœuds :

1 nœud.	2 nœuds.	4 nœuds.
$z = 526$	$z_1 = 344$	$z_1 = 208$
	$z_2 = 687$	$z_2 = 416$
		$z_3 = 624$
		$z_4 = 812$

L'expérience donne :

	1 nœud.	2 nœuds.	4 nœuds.
$\mathcal{N}_1^{(o)} = 83$			
$\mathcal{N}_2^{(o)} = 167$	$z = 520$	$z_1 = 346$	$z_1 = 209$
$\mathcal{N}_3^{(o)} = 251$		$z_2 = 686$	$z_2 = 418$
$\mathcal{N}_5^{(o)} = 415$			$z_3 = 627$
			$z_4 = 810$

Les différences avec la théorie paraissent insignifiantes.

Remarque. — Les sons successifs forment à peu près la série 1, 2, 3, 4, 5, ... On peut s'en rendre compte théoriquement. Nous avons vu que si l'on a

$$a = a' \quad \text{ou} \quad nl = n'l',$$

la corde hétérogène se comporte comme une corde homogène. Or cette condition est ici sensiblement remplie, car

$$\frac{l}{l'} = 1,79 \quad \text{et} \quad \frac{n'}{n} = 1,63.$$

Huitième expérience.

La corde précédente est remplacée par une autre plus fine, d'une seule pièce et amincie à la filière dans l'une de ses parties. La plus fine l est la plus courte :

$l = 332$	$b = 479$	$n = 267$
$l' = 668$	$b' = 1502$	$n' = 85,2$

Équation transcendante à résoudre :

$$\operatorname{tang} x + 0,642 \operatorname{tang} 3,131\, x = 0.$$

Racines successives et sons théoriques correspondants :

$x_1 = 0,708$	$\mathfrak{N}_1^{(t)} = 60$				
$x_2 = 1,516$	$\mathfrak{N}_2^{(t)} = 129$	1 nœud..	$z = 558$		
$x_3 = 2,333$	$\mathfrak{N}_3^{(t)} = 198,5$	2 nœuds.	$z_1 = 426$	$z_2 = 713$	
$x_4 = 3,054$	$\mathfrak{N}_4^{(t)} = 259$	3 nœuds.	$z_1 = 340$	$z_2 = 560$	$z_3 = 780$

Résultats de l'expérience :

$\mathfrak{N}_1^{(o)} = 64$				
$\mathfrak{N}_2^{(o)} = 130$	1 nœud..	$z = 558$		
$\mathfrak{N}_3^{(o)} = 197$	2 nœuds.	$z_1 = 427$	$z_2 = 713$	
$\mathfrak{N}_4^{(o)} = 260$	3 nœuds.	$z_1 = 340$	$z_2 = 561$	$z_3 = 782$

Les différences sont sans importance.

Neuvième expérience.

La corde totale est formée de trois parties de laiton de divers diamètres :

$$l = 357 \qquad b = 564 \qquad n = 227$$
$$l' = 321 \qquad b' = 472 \qquad n' = 271$$
$$l'' = 322 \qquad b'' = 705 \qquad n'' = 182$$

En posant toujours

$$x = \frac{\lambda}{2n},$$

l'équation (48) du Mémoire, réduite en nombre, devient

$$\begin{aligned} 0 = \tan x &+ 1,074 \tan 0,838x + 0,722 \tan 1,250x \\ &- 0,671 \tan x \tan 0,838x \tan 1,250x. \end{aligned}$$

Racines successives et sons théoriques correspondants :

$x_1 = 1,063$ $\quad \mathfrak{N}_1^{(t)} = 77$

$x_2 = 1,967$ $\quad \mathfrak{N}_2^{(t)} = 142,5$ $\quad$ 1 nœud.. $z = 580$

$x_3 = 3,113$ $\quad \mathfrak{N}_3^{(t)} = 225$ $\quad$ 2 nœuds. $z_1 = 360,3$ $\quad z_2 = 740,3$

$x_4 = 4,035$ $\quad \mathfrak{N}_4^{(t)} = 291,6$ $\quad$ 3 nœuds. $z_1 = 277,9$ $\quad z_2 = 573,8$ $\quad z_3 = 799,4$

Résultats de l'expérience :

$\mathfrak{N}_1^{(t)} = 74$

$\mathfrak{N}_2^{(t)} = 141$ $\quad$ 1 nœud.. $z = 575$

$\mathfrak{N}_3^{(t)} = 225$ $\quad$ 2 nœuds. $z_1 = 360$ $\quad z_2 = 740$

$\mathfrak{N}_4^{(t)} = 290$ $\quad$ 3 nœuds. $z_1 = 278$ $\quad z_2 = 574$ $\quad z_3 = 798$

Remarque. — Les sons successifs forment à peu près la série 1, 2, 3, ...; cela tient à ce que les produits nl, $n'l'$, $n''l''$ sont à peu près égaux. Dans ce cas en effet la corde hétérogène se comporte à peu près comme une corde homogène d'après la théorie.

Dixième expérience.

Au moyen de curseurs mobiles les deux cordes extrêmes de l'expérience précédente sont diminuées de longueur, de façon que les trois parties rendent le même son.

$$l = 289 \qquad b = 485 \qquad n = 264$$
$$l' = 321$$
$$l'' = 213$$
$$L = 823$$

La formule (50) du Mémoire donne dans ce cas

$$\operatorname{tang} \frac{\lambda}{2n} = \operatorname{tang} \alpha = \pm \sqrt{\frac{l'L}{ll''}};$$

de là on déduit

$$\alpha = 1{,}121, \quad \pi - \alpha = \alpha' = 2{,}021.$$

Série des harmoniques théoriques :

$$\mathfrak{N}_1^{(t)} = \frac{\alpha n}{\pi} = 90 \qquad \mathfrak{N}_6^{(t)} = 2n = 528$$

$$\mathfrak{N}_2^{(t)} = \frac{\alpha' n}{\pi} = 169{,}5 \qquad \mathfrak{N}_7^{(t)} = \frac{\alpha n}{\pi} + 2n = 622$$

$$\mathfrak{N}_3^{(t)} = n = 264 \qquad \mathfrak{N}_8^{(t)} = \frac{\alpha' n}{\pi} + 2n = 697{,}5$$

$$\mathfrak{N}_4^{(t)} = \frac{\alpha n}{\pi} + n = 358 \qquad \mathfrak{N}_9^{(t)} = 3n = 792$$

$$\mathfrak{N}_5^{(t)} = \frac{\alpha' n}{\pi} + n = 433{,}5 \qquad \mathfrak{N}_{10}^{(t)} = \frac{\alpha n}{\pi} + 3n = 886$$

Résultats de l'expérience :

$$\mathfrak{N}_1^{(o)} = 90 \qquad \mathfrak{N}_6^{(o)} = 530$$
$$\mathfrak{N}_2^{(o)} = 169 \qquad \mathfrak{N}_7^{(o)} = 620$$
$$\mathfrak{N}_3^{(o)} = 264 \qquad \mathfrak{N}_8^{(o)} = 692$$
$$\mathfrak{N}_4^{(o)} = 360 \qquad \mathfrak{N}_9^{(o)} = 795$$
$$\mathfrak{N}_5^{(o)} = 434 \qquad \mathfrak{N}_{10}^{(o)} = 890$$

L'accord est aussi parfait que possible.

25. *Conclusion.* — Les expériences diverses que nous venons de résumer montrent que les lois relatives aux cordes hétérogènes se vérifient aussi parfaitement que celles qui se rapportent aux cordes homogènes. Nous devons par conséquent regarder comme parfaitement exacte notre hypothèse fondamentale sur le raccordement des diverses parties pendant tout le mouvement.