Elliot

Sur une équation du premier ordre et l'équation de Jacobi

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 7 (1890), p. 101-134
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1890_3_7__101_0>

SUR UNE

ÉQUATION DU PREMIER ORDRE

ET

L'ÉQUATION DE JACOBI,

PAR M. ELLIOT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BESANÇON.

1. On sait que les équations différentielles, telles que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P_3}{P_1},$$

où P_3 est un polynôme du troisième degré, et P_1 un polynôme du premier degré en y dont les coefficients sont des fonctions quelconques de la variable indépendante x, peuvent être ramenées à la forme

$$\frac{dy}{dx}=Q_3,$$

où Q_3 est un polynôme du troisième degré en y. Ces équations, étudiées par MM. Appell et Roger Liouville, admettent comme forme canonique

$$\frac{dY}{dX}=Y^3+J.$$

Lorsque le polynôme P_3 est seulement du second degré en y, on peut adopter une autre forme canonique.

Considérons l'équation

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{Py^2+Qy+R}{Sy+T},$$

où P, Q, R, S, T sont des fonctions quelconques de x. Si l'on fait le changement de fonction

$$y = a\mathrm{Y} + b,$$

où a et b désignent des fonctions indéterminées de x, l'équation conserve la même forme, et l'on a

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = \frac{\mathrm{P}_1\mathrm{Y}^2 + \mathrm{Q}_1\mathrm{Y} + \mathrm{R}_1}{\mathrm{S}_1\mathrm{Y} + \mathrm{T}_1},$$

en posant

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_1 &= \mathrm{P}a^2 - \mathrm{S}aa',\\
\mathrm{Q}_1 &= 2\mathrm{P}ab + \mathrm{Q}a - \mathrm{S}ab' - (\mathrm{S}b + \mathrm{T})a',\\
\mathrm{R}_1 &= \mathrm{P}b^2 + \mathrm{Q}b + \mathrm{R} - b'(\mathrm{S}b + \mathrm{T}),\\
\mathrm{S}_1 &= \mathrm{S}a^2,\\
\mathrm{T}_1 &= a(\mathrm{S}b + \mathrm{T}).
\end{aligned}$$

Si l'on profite des fonctions a et b pour annuler P_1 et T_1, on aura

$$\frac{a'}{a} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}, \qquad b = -\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{S}},$$

et l'équation (1) se transformera dans l'équation réduite

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \mathrm{I} = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{Y}}, \tag{2}$$

où I et H ont les valeurs suivantes :

$$\mathrm{I} = \frac{2\mathrm{PT} - \mathrm{QS} + \mathrm{TS}' - \mathrm{T}'\mathrm{S}}{\mathrm{S}^2 e^{\int \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}dx}}, \qquad \mathrm{H} = \frac{\mathrm{PT}^2 - \mathrm{QST} + \mathrm{S}^2\mathrm{R}}{\mathrm{S}^3 e^{2\int \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}dx}}.$$

L'exponentielle introduit un facteur constant h dans I, et son carré h^2 dans H. Ces facteurs répondent au simple changement de Y en $h\mathrm{Y}$ dans l'équation réduite.

On pourra ensuite, par un changement de la variable indépendante, faire en sorte que H ou bien I se réduise à l'unité.

Les fonctions I et H sont des invariants relativement au changement de fonction, et sont aussi des invariants relativement au changement de la variable. Si l'on effectue à la fois ces deux changements,

$$y = ay_1 + b, \qquad \frac{dx_1}{dx} = c,$$

où a, b, c sont des fonctions indéterminées de x, l'équation (1) conserve la même forme, mais les coefficients de l'équation transformée ont maintenant les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
P_1 &= Pa^2 - Saa',\\
Q_1 &= 2Pab + Qa - Sab' - (Sb + T)a',\\
R_1 &= Pb^2 + Qb + R - (Sb + T)b',\\
S_1 &= Sa^2c,\\
T_1 &= ac(Sb + T).
\end{aligned}$$

En calculant les nouvelles expressions I_1 et H_1, on reconnaîtra aisément que

$$I_1 = \frac{1}{c}I, \qquad H_1 = \frac{1}{c}H.$$

Les fonctions I et H sont donc bien des invariants, et le rapport $\frac{H}{I} = J$ est un invariant absolu.

Si, dans l'équation réduite (2), on fait le changement de la variable indépendante définie par

$$\frac{dX}{dx} = I,$$

on la ramènera à l'équation canonique

$$\frac{dY}{dX} + 1 = \frac{J}{Y},$$

et l'on reconnaît immédiatement que X est un invariant absolu.

En posant $Y = \frac{1}{Z}$, on voit que l'équation canonique équivaut à celle-ci

$$\frac{dZ}{dX} = Z^2 - JZ^3,$$

et qu'elle peut être regardée comme l'équation canonique répondant aux équations différentielles

$$\frac{dy}{dx} = Q_3,$$

où le polynôme Q_3 du troisième degré en y admet une racine double.

L'introduction du facteur h dans I et de h^2 dans H donne, d'ailleurs, des équations canoniques qui se déduisent immédiatement les unes des autres. Posons

$$I_1 = hI, \qquad H_1 = h^2 H,$$

on aura

$$J_1 = hJ, \qquad \frac{dX_1}{dx} = hI = h\frac{dX}{dx};$$

d'où l'on conclut

$$X_1 = hX + h_1,$$

h_1 désignant une nouvelle constante. L'équation canonique

$$\frac{dY_1}{dX_1} + 1 = \frac{J_1}{Y_1}$$

se déduit de l'équation canonique

$$\frac{dY}{dX} + 1 = \frac{J}{Y},$$

en posant $Y_1 = hY$.

Supposons que les coefficients de l'équation proposée soient tous constants, on aura évidemment, en désignant par λ, μ, k trois constantes,

$$I = \lambda e^{kx}, \qquad H = \mu e^{2kx}, \qquad \frac{dX}{dx} = \lambda e^{kx}, \qquad X = \frac{\lambda}{k} e^{kx}, \qquad J = \frac{\mu}{\lambda^2} X.$$

L'équation canonique est homogène. Si, comme cas particulier, la constante k est nulle, il est clair que J se réduit à une constante. Les mêmes conclusions subsistent si, au lieu de supposer constants les coefficients de l'équation proposée, on suppose qu'ils soient susceptibles de le devenir par un changement convenable de fonction et de variable, puisque J et X sont des invariants absolus.

Ces cas d'intégrabilité, qui se traduisent par la propriété qu'a $\frac{dJ}{dX}$, ou bien J, de se réduire à une constante, se reconnaîtront sur l'équation réduite (2) et sans passer par l'équation canonique, par les caractères

$$\frac{\left(\frac{H}{I}\right)'}{I} = \text{const.} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{H}{I} = \text{const.}$$

2. Faisons, dans l'équation

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}+\mathrm{I}=\frac{\mathrm{H}}{y},$$

le changement de fonction $y=u+\frac{1}{ay_1+b}$, a, b, u étant des fonctions quelconques de x. L'équation se transforme en une autre, où $\frac{dy_1}{dx}$ est le quotient d'un polynôme du troisième degré en y_1 par un polynôme du premier degré. Mais on voit aisément que le polynôme du troisième degré se réduit à un polynôme du second degré, si u est une solution particulière de l'équation (1). Les invariants I_1 et H_1 de la nouvelle équation ne dépendront pas des fonctions a et b. On sait, en effet, que si l'on fait le changement de fonction $y_1=\alpha y_2+\beta$, α et β étant des fonctions quelconques de x, les invariants ne dépendent pas de α et β. La transformation devient alors

$$y=u+\frac{1}{a(\alpha y_2+\beta)+b}.$$

En prenant $a\alpha=1$, $\beta a+b=0$, on voit qu'on peut se borner à faire la substitution $y=u+\frac{1}{z}$. L'équation (1) devient

$$(2)\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{(u'+\mathrm{I})z^2}{uz+1},$$

et les invariants de cette équation sont

$$(3)\qquad \mathrm{I}_1=\frac{3\mathrm{H}-\mathrm{I}u}{u^4}e^{-\int\frac{1}{u}dx},\qquad \mathrm{H}_1=\frac{\mathrm{H}}{u^6}e^{-2\int\frac{1}{u}dx}.$$

On ramène d'ailleurs l'équation (2) à la forme

$$\frac{dy_1}{dx}+\mathrm{I}_1=\frac{\mathrm{H}_1}{y_1}$$

par le changement de fonction

$$z=ue^{\int\frac{1}{u}dx}y_1-\frac{1}{u}$$

et, par suite,

$$y=u+\frac{1}{z}=\frac{u^3y_1}{u^2y_1-e^{-\int\frac{1}{u}dx}}.$$

Toutes les fois qu'on saura intégrer une équation où les invariants sont I et H, on saura donc intégrer une infinité d'autres équations dont les invariants sont I_1 et H_1, en utilisant les solutions particulières de la première.

Cherchons, par exemple, quelles sont les équations que l'on peut intégrer en les ramenant, par la remarque précédente, à d'autres où le rapport

$$\frac{\left(\frac{H_1}{I_1}\right)'}{I_1} = k,$$

k étant une constante. On a, d'après la relation (3),

$$\frac{\left(\frac{H_1}{I_1}\right)'}{I_1} = \frac{(HI' - IH')u^3 - 2HI^2u^2 + 6H^2Iu - 6H^3}{(3H - Iu)^3}.$$

L'équation (1) sera donc intégrable si l'une de ses solutions satisfait à l'équation du troisième degré

$$(4) \qquad (HI' - IH')u^3 - 2HI^2u^2 + 6H^2Iu - 6H^3 = k(3H - Iu)^3.$$

Par exemple, l'équation dont les deux invariants sont

$$I = (3f - 1)f', \qquad H = f^2(1 - f)f',$$

f étant une fonction de x, pourra être ramenée à une équation où le rapport $\frac{H_1}{I_1}$ est constant; car l'équation

$$\frac{dy}{dx} + I = \frac{H}{y}$$

admet la solution particulière $u = f(1 - f)$, qui est une racine de l'équation du troisième degré

$$(HI' - IH')u^3 - 2HI^2u^2 + 6H^2Iu - 6H^3 = 0.$$

Mais ce caractère d'intégrabilité étant d'une application à peu près impossible, nous en simplifierons la recherche en supposant que l'on prenne pour point de départ l'équation canonique

$$\frac{dy}{dx} + 1 = \frac{J}{y}.$$

Si l'on fait dans l'équation (4) $I = 1$, $H = J = uu' + u$, on obtient

$$-uu'' = (3u' + 2)[k(3u' + 2)^2 + (u' + 1)(2u' + 1)]$$

ou bien

$$\frac{du}{u} + \frac{u'\,du'}{(3u' + 2)[(9k + 2)u'^2 + 3(4k + 1)u' + 4k + 1]} = 0.$$

Intégrant cette équation et C désignant une constante arbitraire,

$$Cu(3u' + 2)^2 = (9k + 2)u'^2 + 3(4k + 1)u' + 4k + 1$$

ou

$$(9Cu - 9k - 2)u'^2 + [12Cu - 3(4k + 1)]u' + 4Cu - 4k - 1 = 0.$$

Résolvant cette équation par rapport à u', on obtient, en posant

$$1 + 4k - 4Cu = t^2,$$

l'équation différentielle

$$\frac{dt}{4C\,dx} = \frac{1}{3t \pm 1}.$$

L'intégration de cette équation donne, en appelant C_1 une nouvelle constante arbitraire,

$$3t^2 \pm 2t + 2C_1 - 8Cx = 0.$$

Connaissant t, on en conclura la solution particulière u et l'expression de $J = u(u' + 1)$. Cette expression contiendra la quantité irrationnelle $\sqrt{1 - 6C_1 + 24Cx}$, qui provient de la résolution de l'équation du second degré en t. Faisons la substitution linéaire

$$1 - 6C_1 + 24Cx = 4X,$$

de façon que l'irrationnelle soit simplement la racine carrée de la nouvelle variable, et en même temps la substitution

$$6Cy = Y,$$

afin que l'équation conserve la forme canonique. On obtiendra alors l'expression suivante de l'invariant absolu J

$$J = \pm \frac{2}{9}\,\frac{9k + 2}{\sqrt{X}} + \frac{2}{9}[3(3k + 1) - X].$$

Les équations caractérisées par cette valeur de J sont, comme nous le verrons plus loin, des équations de Jacobi.

Équation de Jacobi.

3. L'équation de Jacobi est, comme on sait,

$$(1)\qquad \begin{cases} (lx + l'y + l'')(x\,dy - y\,dx) \\ \quad - (mx + m'y + m'')\,dy + (nx + n'y + n'')\,dx = 0, \end{cases}$$

où l, l', l'', m, m', m'', n, n', n'' sont des constantes. On peut l'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{l'y^2 + (lx + l'' - n')y - (nx + n'')}{(l'x - m')y + lx^2 + (l'' - m)x - m''}.$$

Elle rentre donc dans la catégorie d'équations dont nous nous occupons.

En calculant les deux invariants I et H, on trouve que I est le quotient d'un polynôme du premier degré par le cube de la fonction linéaire $l'x - m'$, et que H est le quotient d'un polynôme du troisième degré par la cinquième puissance de cette même fonction linéaire. Les coefficients des deux polynômes ne sont pas arbitraires. Ils doivent satisfaire, comme nous allons voir, à deux relations.

Remarquons d'abord que, par un simple changement de notations, on peut mettre l'équation qui précède sous la forme

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + (n_1 x + n)y + p_1 x + p}{(x + m)y + n_1 x^2 + q_1 x + q},$$

où m, n, n_1, p, p_1, q, q_1 sont des constantes. On peut supposer aussi que l'on a ramené le coefficient de y au dénominateur à être x au moyen de la substitution $x + m = x_1$.

Cela revient à supposer $m = 0$ dans l'équation (2), qui devient

$$(3)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + (n_1 x + n)y + p_1 x + p}{xy + n_1 x^2 + q_1 x + q}.$$

Les deux invariants sont

$$\mathrm{I} = h\frac{(2q_1 - n)x + 3q}{x^3},$$

$$\mathrm{H} = h^2\frac{x^2(p_1 x + p) + (n_1 x^2 + q_1 x + q)[(q_1 - n)x + q]}{x^5},$$

h étant la constante qui provient de l'exponentielle $e^{\int \frac{dx}{x}}$. Si nous identifions avec les expressions suivantes

$$\mathrm{I} = \frac{A_1 x + A_0}{x^3}, \qquad \mathrm{H} = \frac{B_3 x^3 + B_2 x^2 + B_1 x + B_0}{x^5},$$

où les A et les B sont des coefficients constants, on devra satisfaire aux équations

$$(4)\quad \begin{cases} h(2q_1 - n) = A_1, & 3qh = A_0, \\ h^2[p_1 + n_1(q_1 - n)] = B_3, & h^2[p + n_1 q + q_1(q_1 - n)] = B_2, \\ h^2 q(2q_1 - n) = B_1, & h^2 q^2 = B_0. \end{cases}$$

En comparant la deuxième et la dernière de ces équations, puis la première, la deuxième et la cinquième, on aperçoit immédiatement les deux relations

$$\frac{A_0^2}{9} = B_0, \qquad \frac{A_0 A_1}{3} = B_1.$$

Si on les suppose vérifiées, on pourra faire l'identification d'une infinité de façons. Il suffira de prendre

$$(5)\quad \begin{cases} q = \dfrac{A_0}{3h}, & n = \dfrac{2hq_1 - A_1}{h}, \\ p_1 = \dfrac{h^2 n_1 q_1 - h n_1 A_1 + B_3}{h^2}, & p = \dfrac{h^2 q_1^2 - \frac{1}{3} h n_1 A_0 - h q_1 A_1 + B_2}{h^2}, \end{cases}$$

où h, q_1, n_1 demeurent arbitraires.

L'équation

$$(6)\qquad \frac{dY}{dx} + \frac{A_1 x + A_0}{x^3} = \frac{B_3 x^3 + B_2 x^2 + \frac{1}{3} A_0 A_1 x + \frac{1}{9} A_0^2}{x^5 Y}$$

peut donc être considérée comme provenant d'une infinité d'équations de Jacobi, et, comme les solutions de l'une quelconque d'entre elles sont liées à celles de l'équation (6) par des relations connues, il est naturel de chercher si l'on ne peut pas profiter de l'indétermination de h, q_1, n_1 pour en simplifier l'intégration.

Mettons l'équation (3) sous la forme habituelle de l'équation de Jacobi

$$(7)\quad (y + n_1 x)(x\,dy - y\,dx) + (q_1 x + q)\,dy - (p_1 x + ny + p)\,dx = 0.$$

On sait que cette équation admet, en général, trois intégrales linéaires. Ces intégrales s'obtiennent en posant $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, les constantes α, β, γ étant déterminées par les équations

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} (q_1+\lambda)\alpha + p_1\beta - n_1\gamma &= 0,\\ (n+\lambda)\beta - \gamma &= 0,\\ q\alpha + p\beta + \lambda\gamma &= 0, \end{aligned}\right.$$

en prenant pour λ l'une des racines de l'équation du troisième degré obtenue en égalant à zéro le déterminant des équations précédentes, c'est-à-dire

$$(9)\qquad \lambda^3 + (n+q_1)\lambda^2 + (p+nq_1+n_1q)\lambda + pq_1 - p_1q + nn_1q = 0.$$

Rappelons en outre que, si l'on désigne par λ_1, λ_2, λ_3 les racines supposées inégales de l'équation (9), et par α_1, β_1, γ_1 les valeurs des constantes répondant à la racine λ_1, etc., l'intégrale générale de l'équation (7) est

$$(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)^{\lambda_2-\lambda_3}(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)^{\lambda_3-\lambda_1}(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)^{\lambda_1-\lambda_2} = \text{const.}$$

Remplaçons dans l'équation (9) p, p_1, n, q par leurs valeurs tirées des équations (5). On obtient

$$\begin{aligned} n + q_1 &= 3q_1 - \frac{A_1}{h},\\ p + nq_1 + n_1q &= 3q_1^2 - \frac{2q_1}{h}A_1 + \frac{B_2}{h^2},\\ pq_1 - p_1q + nn_1q &= q_1^3 - \frac{q_1^2}{h}A_1 + \frac{q_1}{h^2}B_2 - \frac{A_0B_3}{3h^3}, \end{aligned}$$

et la substitution de ces valeurs ramène l'équation (9) à celle-ci :

$$(10)\qquad h^3(\lambda+q_1)^3 - A_1h^2(\lambda+q_1)^2 + B_2h(\lambda+q_1) - \frac{A_0B_3}{3} = 0.$$

D'après la méthode de réduction indiquée dans le n° 1, on passe de l'équation (3) à l'équation (6) par la substitution

$$y = \frac{x}{h}Y - \frac{n_1x^2 + q_1x + q}{x},$$

d'où l'on tire

$$Y = \frac{h}{x^2}(xy + n_1x^2 + q_1x + q).$$

Remplaçons y par $-\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$. On tire les rapports $\frac{\gamma}{\beta}$ et $\frac{\alpha}{\beta}$ des deux premières équations (8). Ces valeurs sont, en tenant compte des relations (5),

$$\frac{\gamma}{\beta} = 2q_1 + \lambda - \frac{A_1}{h}, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_1(\lambda+q_1) - \frac{B_3}{h^2}}{\lambda + q_1}.$$

On trouvera donc, pour les trois solutions particulières de l'équation (6),

$$Y = \frac{B_3}{h(\lambda+q_1)} + [A_1 - h(\lambda+q_1)]\frac{1}{x} + \frac{A_0}{3}\frac{1}{x^2}.$$

La constante n_1 n'entre pas dans cette expression; les constantes h et q_1 n'entrent que sous la combinaison $h(\lambda+q_1)$, dont dépend seulement l'équation (10). Les trois solutions particulières de l'équation (6) sont donc les mêmes, quelles que soient les équations de Jacobi dont elle provient, et son intégrale générale pourra s'écrire sous une forme analogue à celle qui a été indiquée plus haut. Les quotients des différences des racines de l'équation (10) qui servent à déterminer les exposants restent aussi les mêmes quand on donne à h et q_1 des valeurs quelconques.

En faisant $h=1$, $q_1=0$, on voit que la formation de l'intégrale dépend de la résolution de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + B_2\lambda - \tfrac{1}{3}A_0B_3 = 0.$$

4. On peut, par un changement de la variable indépendante, ramener l'équation de Jacobi à la forme canonique

$$\frac{dY}{dX} + 1 = \frac{J}{Y}.$$

J et X étant des invariants absolus, l'expression de J en X est indépendante d'un changement de variable fait dans l'équation (6) du numéro précédent, et aussi du changement de $x+m$ en x qui a déjà servi à simplifier cette équation.

Si, dans l'équation (6), on pose $x = \frac{1}{x_1}$, elle devient

$$\frac{dY}{dx_1} = A_0x_1 + A_1 - \frac{B_0x_1^3 + B_1x_1^2 + B_2x_1 + B_3}{Y},$$

les coefficients étant toujours assujettis à satisfaire aux deux relations

$$A_0^2 = 9B_0, \qquad A_0 A_1 = 3B_1.$$

Les deux invariants I_1 et H_1 sont donc deux polynômes du premier et du troisième degré

$$-I_1 = A_0 x_1 + A_1, \qquad -H_1 = \tfrac{1}{9}A_0^2 x_1^3 + \tfrac{1}{3}A_0 A_1 x_1^2 + B_2 x_1 + B_3.$$

La variable canonique X est définie par

$$X = \int I_1\, dx_1 = -\tfrac{1}{2}A_0 x_1^2 - A_1 x_1;$$

x_1 est donné par l'équation du second degré

$$A_0 x_1^2 + 2A_1 x_1 + 2X = 0.$$

Si l'on effectue la division de $\frac{1}{9}A_0^2 x_1^3 + \frac{1}{3}A_0 A_1 x_1^2 + B_2 x_1 + B_3$ par $A_0 x_1^2 + 2A_1 x_1 + 2X$, on trouve comme reste

$$(B_2 - \tfrac{2}{9}A_0 X - \tfrac{2}{9}A_1^2)x_1 + B_3 - \tfrac{2}{9}A_1 X.$$

On en conclut

$$J = \frac{H_1}{I_1} = \frac{(B_2 - \frac{2}{9}A_0 X - \frac{2}{9}A_1^2)x_1 + B_3 - \frac{2}{9}A_1 X}{A_0 x_1 + A_1}$$

et, en remplaçant x_1 par sa valeur,

$$J = -\frac{2}{9}X + \frac{B_2}{A_0} - \frac{2}{9}\frac{A_1^2}{A_0} + \frac{B_3 + \dfrac{2}{9}\dfrac{A_1^3}{A_0} - \dfrac{A_1 B_2}{A_0}}{\sqrt{A_1^2 - 2A_0 X}}.$$

Changeant X en $X + \dfrac{A_1^2}{2A_0}$, l'expression de l'invariant est

$$-\tfrac{2}{9}X + \frac{B_2 - \frac{1}{3}A_1^2}{A_0} + \frac{\frac{2}{9}A_1^3 + A_0 B_3 - A_1 B_2}{A_0\sqrt{-2A_0}\sqrt{X}}.$$

Le changement simultané de X en $h_1^2 X_1$, et de Y en $h_1^2 Y_1$, où h_1 désigne une constante, laisse à l'équation la forme canonique. On pourra donc regarder l'invariant J_1 relatif à une équation de Jacobi comme donné par

$$(1) \qquad J_1 = -\tfrac{2}{9}X_1 + \frac{B_2 - \frac{1}{3}A_1^2}{h_1^2 A_0} + \frac{1}{A_0\sqrt{-2A_0}}\,\frac{\frac{2}{9}A_1^3 + A_0 B_3 - A_1 B_2}{h_1^3\sqrt{X_1}}.$$

Il est clair que, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ désignant des constantes quelconques,

$$J = -\tfrac{2}{9}X + \mathcal{A} + \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{X}}$$

correspond à une équation de Jacobi. C'est la forme qui a été trouvée dans le n° 2, pour les équations qu'on peut intégrer en les ramenant à d'autres dont l'équation canonique est homogène.

En comparant la valeur de J, trouvée pour ces équations, avec celle qui précède, on aura deux relations qui donneront lieu, par l'élimination de h_1, à l'équation

$$\frac{(3k+1)^3}{(9k+2)^2} + \frac{1}{3}\,\frac{(B_2 - \frac{1}{3}A_1^2)^3}{(\frac{2}{9}A_1^3 + A_0B_3 - A_1B_2)^2} = 0.$$

L'intégration de l'équation exige donc encore la résolution d'une équation du troisième degré.

Cas d'une racine double de l'équation caractéristique.

5. La forme sous laquelle se présente l'intégrale générale de l'équation de Jacobi devient illusoire quand l'équation caractéristique du troisième degré admet une racine double. La méthode de d'Alembert conduit à la forme nouvelle qui convient à ce cas particulier [1].

Soit P_1 la fonction linéaire qui répond à la racine simple λ_1 de l'équation caractéristique, P_2 celle qui répond à la racine double λ_2. L'intégrale générale est

$$\frac{P_1}{P_2} = \text{const.}\, e^{(\lambda_1-\lambda_2)\frac{P'_2}{P_2}},$$

P'_2 désignant une fonction linéaire que l'on obtient en dérivant P_2 par rapport à λ, et remplaçant λ par λ_2.

Réciproquement, soient A, B, C trois fonctions linéaires de x et k une constante. L'équation

$$(1)\qquad \frac{y-A}{y-B} = \text{const.}\, e^{k\frac{y-C}{y-B}}$$

(1) Serret, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, 3e édition, Chap. VII.

donne lieu, par l'élimination de la constante arbitraire, à une équation que l'on reconnaît aisément être une équation de Jacobi, dont l'équation caractéristique admet une racine double répondant à la solution linéaire $y = \mathrm{B}$, et une racine simple répondant à la solution $y = \mathrm{A}$. Faisons, en effet, le changement de fonction $y - \mathrm{B} = y_1$, qui transforme une équation de Jacobi en une autre équation de Jacobi, et qui, en outre, n'altère pas les invariants I et H. L'équation (1) se transforme dans la suivante

$$\frac{y-a}{y} = \text{const.}\, e^{k\frac{y-b}{y}},$$

où a et b sont de nouvelles fonctions linéaires de x.

L'élimination de la constante conduit à l'équation différentielle

$$y' = \frac{(a' - kb')\,y^2 + kab'y}{(a - kb)y + kab}. \tag{2}$$

En posant $a = a_1 x + a_0$, $b = b_1 x + b_0$, l'équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}&[(a_1 - kb_1)\,y + ka_1 b_1 x]\,(x\,dy - y\,dx)\\ &\quad + [(a_0 - kb_0)\,y + k(a_1 b_0 + a_0 b_1)\,x + ka_0 b_0]\,dy - ka_0 b_1\,y\,dx = 0,\end{aligned}$$

qui est bien une équation de Jacobi dont l'équation caractéristique admet la racine double $\lambda_2 = -ka_0 b_1$ et la racine simple $\lambda_1 = -ka_1 b_0$. La première donne la solution particulière $y = 0$; la seconde, la solution particulière $y = a$.

Les invariants I et H de l'équation (2), où nous supposerons maintenant que a et b sont des fonctions quelconques de x, sont

$$\mathrm{I} = \frac{k(2a + kb)\,(ba' - ab')}{(a - kb)^3}, \qquad \mathrm{H} = \frac{k^2 a^2 b\,(ba' - ab')}{(a - kb)^5}.$$

On reconnaît aisément qu'ils ne dépendent que du rapport $\frac{b}{a} = t$. On a ainsi

$$-\mathrm{I} = \frac{k(2 + kt)\,t'}{(1 - kt)^3}, \qquad -\mathrm{H} = \frac{k^2 tt'}{(1 - kt)^5}.$$

Toutes ces équations admettent une même équation canonique, que l'on forme facilement au moyen des expressions précédentes de I et H, ou, plus simplement encore, si l'on effectue la substitution $1 - kt = \frac{1}{\theta}$, au moyen des valeurs suivantes :

$$-\mathrm{I} = (3\theta - 1)\theta', \qquad -\mathrm{H} = \theta^2(\theta - 1)\theta'.$$

On retrouve ainsi, multipliées respectivement par -1 et $(-1)^2$, les valeurs rencontrées dans le n° 2 pour les invariants des équations qui peuvent être ramenées à d'autres où le rapport $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{I}}$ est une constante. D'ailleurs, en formant l'équation canonique, on obtient, pour l'expression de l'invariant absolu J,

$$\mathrm{J} = -\frac{2}{9}\mathrm{X} + \frac{2}{3} \pm \frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{X}}},$$

que l'on retrouve en faisant $k = 0$ dans la valeur de J qui a été rencontrée dans le n° 2.

On a vu, dans le n° 4, que les invariants I et H d'une équation de Jacobi peuvent toujours se ramener à être des polynômes du premier et du troisième degré. Toutes les fois que l'équation caractéristique admet une racine double, le polynôme du troisième degré admet aussi une racine double, et réciproquement. On a effectivement, en se reportant aux notations du n° 3,

$$-\mathrm{H} = \tfrac{1}{9}\mathrm{A}_0^2 x^3 + \tfrac{1}{3}\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 x^2 + \mathrm{B}_2 x + \mathrm{B}_3.$$

Le discriminant du second membre est

$$\frac{4}{9}\left[\frac{1}{27}\mathrm{A}_0^2\mathrm{B}_2 - \frac{1}{9^2}\mathrm{A}_0^2\mathrm{A}_1^2\right][\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3 - \mathrm{B}_2^2] - \left[\frac{1}{9}\mathrm{A}_0^2\mathrm{B}_3 - \frac{1}{27}\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2\right]^2.$$

En l'égalant à zéro et supprimant le facteur A_0^2, on a la condition

$$4(3\mathrm{B}_2 - \mathrm{A}_1^2)(\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3 - \mathrm{B}_2^2) - (3\mathrm{A}_0\mathrm{B}_3 - \mathrm{A}_1\mathrm{B}_2)^2 = 0$$

qui exprime l'existence d'une racine double pour l'équation caractéristique

$$\lambda^3 - \mathrm{A}_1\lambda^2 + \mathrm{B}_2\lambda - \tfrac{1}{3}\mathrm{A}_0\mathrm{B}_3 = 0.$$

Cas d'une racine triple de l'équation caractéristique.

6. L'intégration de l'équation de Jacobi peut être alors considérée comme immédiate, par suite de la forme particulière que l'on peut donner aux invariants I et H. En exprimant que l'équation caractéristique

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + B_2\lambda - \tfrac{1}{3}A_0B_3 = 0$$

a une racine triple, on a les conditions

$$B_2 = \tfrac{1}{3}A_1^2, \qquad A_0B_3 = \tfrac{1}{9}A_1^3.$$

Si l'on ramène les invariants I et H à être des polynômes du premier et du troisième degré, on trouve donc

$$-I = A_0x + A_1, \qquad -H = \frac{1}{9A_0}(A_0x + A_1)^3.$$

Les deux invariants satisfont à la relation

$$\left(\frac{H}{I}\right)' = -\tfrac{2}{9}I$$

qui fait voir que l'intégration se ramène à des quadratures.

En appliquant à ce nouveau cas particulier le procédé de d'Alembert, on trouve pour l'intégrale générale la forme suivante (¹)

$$CP^2 - 2P + P'^2 = 0,$$

où C est la constante arbitraire, P la fonction linéaire qui répond à l'unique solution linéaire, et P′ la dérivée de cette fonction par rapport à λ, où l'on remplace λ par la racine triple.

On voit que l'intégrale se compose de courbes du second degré. Pour une valeur convenable de la constante, on pourra généralement faire disparaître le terme en y^2 de l'équation intégrale, et l'on obtiendra ainsi une solution particulière rationnelle. C'est cette der-

(¹) Serret, *loc. cit.*

nière solution qui s'introduit avec la fonction P quand on intègre directement l'équation de Jacobi sans avoir recours au procédé de d'Alembert. Considérons l'équation

$$y(y-a)^{\lambda} = \text{const.},$$

λ étant une constante et a une fonction quelconque de x. L'élimination de la constante conduit à l'équation différentielle

$$y' = \frac{\lambda a' y}{(\lambda+1)y-a},$$

que l'on ramène, conformément à la méthode générale, à la forme réduite

$$\frac{dY}{dx} + \frac{1-\lambda}{1+\lambda}a' = \frac{\lambda a a'}{(\lambda+1)^2 Y} \tag{1}$$

par le changement de fonction

$$y = Y + \frac{a}{\lambda+1}.$$

Les deux invariants I et H satisfont, pour l'équation précédente, à la relation

$$\left(\frac{H}{I}\right)' = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} I.$$

On peut, à cause de la fonction arbitraire a et de la constante λ, regarder l'équation (1) comme l'équation réduite de toutes les équations de la forme qui nous occupe, pour lesquelles le rapport de $\left(\frac{H}{I}\right)'$ à I est une constante quelconque.

Son intégrale générale s'obtient en remplaçant y par sa valeur en Y dans $y(y-a)^{\lambda} = \text{const.}$, ce qui donne

$$[(\lambda+1)Y + a][(\lambda+1)Y - \lambda a]^{\lambda} = \text{const.}$$

Si nous appliquons la remarque précédente à l'équation

$$\frac{dY}{dx_1} = A_0 x_1 + A_1 - \frac{1}{9A_0}\frac{(A_0 x_1 + A_1)^3}{Y}, \tag{2}$$

on trouvera d'abord la constante λ en résolvant l'équation du second degré

$$\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} = -\frac{2}{9}$$

dont les racines sont -2 et $-\frac{1}{2}$. Prenons par exemple $\lambda = -2$.

On détermine a par l'équation

$$-3a' = -A_0 x_1 - A_1,$$

d'où

$$a = \frac{1}{6} A_0 x_1^2 + \frac{1}{3} A_1 x_1 + \frac{1}{6} \frac{A_1^2}{A_0},$$

en déterminant la constante d'intégration de façon que

$$2aa' = \frac{1}{9A_0} (A_0 x_1 + A_1)^3.$$

L'intégrale générale de l'équation (2) est donc

$$\left[-Y + \frac{1}{6} A_0 x_1^2 + \frac{1}{3} A_1 x_1 + \frac{1}{6} \frac{A_1^2}{A_0}\right] \left[-Y + \frac{1}{3} A_0 x_1^2 + \frac{2}{3} A_1 x_1 + \frac{1}{3} \frac{A_1^2}{A_0}\right]^{-2} = \text{const.}$$

Le changement de variable $x_1 = \frac{1}{x}$ donne

$$\left[-Y + \frac{1}{6} A_0 \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} A_1 \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \frac{A_1^2}{A_0}\right] \left[-Y + \frac{1}{3} A_0 \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3} A_1 \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{A_1^2}{A_0}\right]^{-2} = \text{const.}$$

pour l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{dY}{dx} + \frac{A_1 x + A_0}{x^3} = \frac{1}{9A_0} \frac{(A_1 x + A_0)^3}{x^5 Y}. \tag{3}$$

Nous savons que l'équation (3) peut être considérée comme provenant d'une infinité d'équations de Jacobi. Choisissons la plus simple qui répond (n° 3) aux hypothèses

$$h = 1, \qquad q_1 = 0, \qquad n_1 = 0;$$

d'où l'on conclut

$$q = \frac{A_0}{3}, \qquad n = -A_1, \qquad p_1 = \frac{1}{9} \frac{A_1^3}{A_0}, \qquad p = \frac{A_1^2}{3}.$$

On obtient ainsi l'équation

$$(4)\qquad y_1(x\,dy_1 - y_1\,dx) + \frac{1}{3}\mathrm{A}_0\,dy_1 + \left(\mathrm{A}_1 y_1 - \frac{1}{9}\frac{\mathrm{A}_1^3}{\mathrm{A}_0}x - \frac{1}{3}\mathrm{A}_1^2\right)dx = 0,$$

dont l'équation caractéristique admet la racine triple $\frac{\mathrm{A}_1}{3}$. On passe de cette équation à l'équation réduite (3) par le changement de fonction

$$y_1 = x\mathrm{Y} - \frac{1}{3}\frac{\mathrm{A}_0}{x}.$$

L'intégrale générale de l'équation (4) est donc

$$(5)\qquad \left[y_1 - \frac{2}{3}\mathrm{A}_1 - \frac{1}{3}\frac{\mathrm{A}_1^2}{\mathrm{A}_0}x\right]^2 = \text{const.}\left[xy_1 + \frac{1}{6}\mathrm{A}_0 - \frac{1}{3}\mathrm{A}_1 x - \frac{1}{6}\frac{\mathrm{A}_1^2}{\mathrm{A}_0}x^2\right].$$

On constate immédiatement : 1° que le premier facteur égalé à zéro donne pour y_1 la solution linéaire qui répond à la racine triple; 2° que le second facteur égalé à zéro fournit également une solution particulière; 3° qu'on est conduit au même résultat en prenant pour λ l'autre racine $-\frac{1}{2}$ de l'équation du second degré.

Si l'on veut avoir l'intégrale générale d'une équation donnée de Jacobi dans le cas d'une racine triple, on déduira cette intégrale de la précédente par un changement convenable de la fonction et de la variable indépendante. On mettra l'équation sous la forme

$$(6)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + (n_1 x + n)y + p_1 x + p}{xy + n_1 x^2 + q_1 x + q}.$$

Cette équation se ramène à la forme réduite (3) par le changement de fonction

$$y = x\mathrm{Y} - \frac{n_1 x^2 + q_1 x + q}{x},$$

en faisant égale à l'unité la constante désignée par h dans le n° 3. Les deux relations qui définissent y_1 et y en fonction de Y donnent, par l'élimination de Y,

$$y_1 = y + n_1 x + q_1.$$

Telle est la substitution qui permettra de passer de l'équation (4) à l'équation (6) et, par suite, de l'intégrale générale (5) à celle que l'on cherche.

7. Proposons-nous de chercher quelles sont les équations de la forme qui nous occupe, dont l'intégrale générale s'obtient en élevant à des puissances convenables les facteurs qui correspondent à trois solutions particulières, et en égalant le produit à une constante.

En désignant par a, b, c, A, B, C des fonctions quelconques de x, et par α, β, γ des constantes, l'intégrale aura la forme

$$(ay - \mathrm{A})^\alpha (by - \mathrm{B})^\beta (cy - \mathrm{C})^\gamma = \text{const.}$$

En divisant par $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, l'équation équivaut à celle-ci

$$(y - \mathrm{A})^\alpha (y - \mathrm{B})^\beta (y - \mathrm{C})^\gamma = \mathrm{D} \times \text{const.},$$

A, B, C, D étant quatre fonctions quelconques de x. L'équation différentielle résultant de l'élimination de la constante est

$$\alpha \frac{y' - \mathrm{A}'}{y - \mathrm{A}} + \beta \frac{y' - \mathrm{B}'}{y - \mathrm{B}} + \gamma \frac{y' - \mathrm{C}'}{y - \mathrm{C}} - \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} = 0.$$

On obtient de deux façons une équation où y' est le quotient d'un polynôme du second degré en y par un polynôme du premier degré.

1° En exprimant que le coefficient de $y^2 y'$ est nul, ainsi que celui de y^3, ce qui donne les conditions

$$\mathrm{D} = \text{const.}, \qquad \alpha + \beta + \gamma = 0;$$

2° En exprimant que le coefficient du terme en y' est nul, ainsi que celui du terme indépendant de y et y', ce qui permettra la suppression du facteur y. On obtiendra ainsi les deux conditions

$$\frac{\alpha}{\mathrm{A}} + \frac{\beta}{\mathrm{B}} + \frac{\gamma}{\mathrm{C}} = 0, \qquad \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{D}} = \alpha \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}} + \beta \frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{B}} + \gamma \frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}},$$

ou, en intégrant la seconde,

$$\mathrm{D} = \text{const.}\, \mathrm{A}^\alpha \mathrm{B}^\beta \mathrm{C}^\gamma.$$

La première forme ne donne que les équations provenant de l'équation de Jacobi par un changement de la variable indépendante; la seconde, dont nous nous occuperons un peu plus loin, appartient à une classe d'équations différentielles plus générales que l'équation de Jacobi.

Si l'on veut trouver les invariants I et H de l'équation différentielle provenant de

$$(y-\mathrm{A})^{\alpha}(y-\mathrm{B})^{\beta}(y-\mathrm{C})^{\gamma}=\text{const.},\qquad \alpha+\beta+\gamma=0,$$

on sait qu'on peut, sans les altérer, poser $y-\mathrm{C}=y_1$, ce qui ne laisse dans les équations que les deux fonctions arbitraires $\mathrm{A}-\mathrm{C}$ et $\mathrm{B}-\mathrm{C}$. Si l'on pose ensuite $y_1=(\mathrm{A}-\mathrm{C})y_2$, l'équation prend la forme

$$(y_2-1)^{\alpha}\left(y_2-\frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{\mathrm{A}-\mathrm{C}}\right)^{\beta}y_2^{\gamma}=\text{const.},$$

où n'entre plus qu'une fonction arbitraire. On pourra donc se borner à chercher les deux invariants de l'équation provenant de

$$(y-1)(y-t)^{\lambda}y^{-\lambda-1}=\text{const.},$$

où t est une fonction quelconque de x et λ une constante. On trouve

$$-\mathrm{I}=\frac{\lambda(\lambda+2)t-(2\lambda+1)}{(1+\lambda t)^3}t',\qquad -\mathrm{H}=\frac{\lambda(\lambda+1)t(1-t)t'}{(1+\lambda t)^5}.$$

On peut, en partant de ces expressions, ramener l'équation à la forme canonique. On rendra les calculs un peu plus simples en posant

$$\frac{1-\lambda t}{1+\lambda t}=\frac{\theta}{\lambda+1},$$

ce qui donne

$$-\mathrm{I}=(3\theta+\lambda-1)\theta',\qquad -\mathrm{H}=(\theta+\lambda-1)(\theta+\lambda+1)(\theta-\lambda-1)\theta'.$$

La formation de l'équation canonique est facile. On obtient ainsi

$$\mathrm{J}=\frac{2}{3}\,\frac{\lambda^2+\lambda+1}{h^2}-\frac{2}{9}\mathrm{X}+\frac{2}{9}\,\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)(2\lambda+1)}{h^3\sqrt{\mathrm{X}}},$$

où h désigne une constante arbitraire. On voit que les équations en question sont des équations de Jacobi.

La comparaison de cette expression de J avec celle qui a été trouvée dans le n° 4, formule (1), nous conduit à une relation algébrique intéressante; on obtient les deux équations

$$\frac{2}{3}\,\frac{\lambda^2+\lambda+1}{h^2}=\frac{B_2-\frac{1}{3}A_1^2}{h_1^2 A_0},\quad \frac{2}{9}\,\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)(2\lambda+1)}{h^3}=\frac{\frac{2}{9}A_1^3+A_0B_3-A_1B_2}{h_1^3 A_0\sqrt{-2A_0}}.$$

On élimine le rapport arbitraire $\frac{h}{h_1}$ en divisant membre à membre le cube de la première relation par le carré de la seconde, ce qui fournit l'équation

$$\frac{(\lambda^2+\lambda+1)^3}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)^2(2\lambda+1)^2}=\frac{1}{3}\,\frac{(\frac{1}{3}A_1^2-B_2)^3}{(\frac{2}{9}A_1^3+A_0B_3-A_1B_2)^2}.$$

Nous obtenons ainsi l'équation qui donne les quotients des différences des racines de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3-A_1\lambda^2+B_2\lambda-\frac{A_0B_3}{3}=0,$$

dont dépend l'intégration de l'équation de Jacobi. Pour le vérifier, en évitant des calculs longs et inutiles, remarquons que, si l'on change le signe de l'un des quotients, on obtient, en appelant λ_1, λ_2, λ_3 les racines de l'équation du troisième degré, l'expression $\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2}$, qui peut être considérée comme le rapport anharmonique des quatre racines λ_1, λ_2, λ_3, ∞ d'une équation du quatrième degré dans laquelle le coefficient du premier terme se réduit à zéro. On sait que le rapport anharmonique α des quatre racines d'une équation du quatrième degré est donné par l'équation du sixième degré

$$\frac{(1-\alpha+\alpha^2)^3}{(1+\alpha)^2(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2}=\frac{1}{24}\,\frac{i^3}{j^2},$$

où i et j sont les deux invariants de la forme biquadratique correspondante

$$a_0x_1^4+4a_1x_1^3x_2+6a_2x_1^2x_2^2+4a_3x_1x_2^3+a_4x_2^4,$$

$$i=2(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2),$$

$$j=6\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & a_3 & a_4\end{vmatrix}.$$

En faisant

$$4a_1 = 1, \qquad 6a_2 = -A_1, \qquad 4a_3 = B_2, \qquad 3a_4 = -A_0B_3,$$

on trouve

$$i = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}A_1^2 - B_2),$$
$$j = \tfrac{1}{8}(A_0B_3 - A_1B_2 + \tfrac{2}{9}A_1^3).$$

Si l'on remplace i et j par ces valeurs, et α par $-\lambda$, on retombe sur l'équation trouvée précédemment.

8. Si, au lieu de trois fonctions de x, on introduit quatre fonctions A, B, C, D, et si l'on désigne par α, β, γ, δ quatre constantes, l'équation

$$(1) \qquad (y-A)^\alpha (y-B)^\beta (y-C)^\gamma (y-D)^\delta = \text{const.}$$

donne naissance à une équation différentielle où y' est le quotient d'un polynôme du second degré en y par un polynôme du premier degré, sous les conditions

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$
$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0.$$

Si l'on fait le changement de fonction

$$y = (A - D)y_1 + D,$$

l'équation ne dépend plus que des deux rapports $\frac{B-D}{A-D}$, $\frac{C-D}{A-D}$, liés par la relation

$$\alpha + \beta\frac{B-D}{A-D} + \gamma\frac{C-D}{A-D} = 0,$$

c'est-à-dire d'une seule fonction de x. Les invariants I et H étant indépendants du changement de fonction qui a été fait, on peut se borner à les calculer en partant de l'équation

$$(y-1)^k (y-t)^h (y+k+ht) y^{-k-h-1} = \text{const.},$$

où k et h sont des constantes et t une fonction quelconque de x. On obtient ainsi une classe d'équations différentielles qui se déduisent les unes des autres par un changement de la variable indépendante. On peut les définir en les ramenant à la forme canonique. Mais nous allons chercher à former celles de ces équations dont quatre solutions particulières sont des fonctions linéaires, ce qui nous donnera une généralisation de l'équation de Jacobi.

En éliminant la constante de l'équation (1), on obtient l'équation

$$y' = \frac{Py^2 + Qy + R}{Sy + T},$$

en posant

$$\begin{aligned}
P &= -\Sigma\alpha(B + C + D)A', \\
Q &= \Sigma\alpha(BC + BD + CD)A', \\
R &= -\Sigma\alpha BCDA', \\
S &= \Sigma\alpha(BC + BD + CD), \\
T &= -\Sigma\alpha BCD,
\end{aligned}$$

où le signe Σ se rapporte à quatre termes se déduisant, par permutation, du premier qui est seul écrit. Les expressions de ces coefficients donnent lieu aux remarques suivantes :

A, B, C, D étant supposées des fonctions linéaires de x, S est un polynôme du second degré, et P en est la demi-dérivée.

Complétons, en effet, les parenthèses qui figurent dans S, de façon à y introduire la somme des produits deux à deux des quantités A, B, C, D. Le résultat obtenu est nul, en vertu de la relation $\Sigma\alpha = 0$. On a donc

$$S = -\Sigma\alpha A(B + C + D).$$

Si l'on introduit la somme $A + B + C + D$ dans tous ces termes, en tenant compte de la relation $\Sigma\alpha A = 0$, on voit que

$$S = \Sigma\alpha A^2.$$

On voit de la même façon que

$$P = \Sigma\alpha AA' \qquad \text{ou} \qquad P = \tfrac{1}{2}S'.$$

Q est un polynôme du second degré, T un polynôme du troisième degré dont les premiers coefficients sont les mêmes; car, si l'on désigne par a, b, ... le coefficient de x dans A, B, ..., le premier terme de Q a pour coefficient

$$\Sigma\alpha(abc + abd + acd),$$

qui est égal, d'après la relation $\Sigma\alpha = 0$, à

$$-\Sigma\alpha bcd,$$

c'est-à-dire au coefficient de x^3 dans T.

Enfin R est un polynôme du second degré, le coefficient de x^3 étant nul d'après la relation $\Sigma\alpha = 0$.

Il en résulte que l'équation différentielle aura la forme

$$(2) \qquad y' = \frac{(mx - m_1)y^2 + (n_2x^2 + n_1x + n)y + p_2x^2 + p_1x + p}{(mx^2 - 2m_1x + m_2)y + n_2x^3 + q_2x^2 + q_1x + q};$$

mais les constantes $m, m_1, m_2, n, n_1, n_2, p, p_1, p_2, q, q_1, q_2$ doivent satisfaire à d'autres conditions qu'il serait moins facile de trouver par la comparaison des deux équations différentielles.

On aura de nouvelles relations en exprimant que l'équation (2) admet des intégrales particulières linéaires. Exprimons que $y = ax + b$ est une solution. On obtient les relations

$$\begin{aligned}
-m_1a^2 - mab + (q_2 - n_1)a - n_2b - p_2 &= 0,\\
m_2a^2 - mb^2 + (q_1 - n)a - n_1b - p_1 &= 0,\\
m_2ab + m_1b^2 + qa - nb - p &= 0.
\end{aligned}$$

En regardant a et b comme les coordonnées d'un point, ces trois équations représentent trois coniques qui n'ont pas, en général, de point commun. L'équation différentielle admettra quatre solutions linéaires si l'on exprime que les trois coniques ont quatre points communs, c'est-à-dire, comme on le vérifie facilement, si

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned}
&pm + p_1m_1 + p_2m_2 = 0,\\
&nm + n_1m_1 + n_2m_2 = 0,\\
&qm + q_1m_1 + q_2m_2 = nm_1 + n_1m_2.
\end{aligned}\right.$$

Les conditions (3) sont nécessaires. Pour établir qu'elles sont suffisantes, remarquons que l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$-L\,dy + M\,dx + N(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

où l'on a

$$\begin{aligned}
L &= 2m_1xy - m_2y - q_2x^2 - q_1x - q,\\
M &= m_1y^2 - n_1xy - p_2x^2 - p_1x - ny - p,\\
N &= n_2x^2 + mxy.
\end{aligned}$$

Elle appartient donc à une classe d'équations, pour lesquelles M. Darboux [1] a montré qu'on peut former l'intégrale générale quand on connaît un nombre suffisant d'intégrales particulières algébriques. Les polynômes L, M, N étant du second degré, il semble qu'il soit nécessaire d'avoir cinq intégrales particulières; mais on reconnaît facilement que, dans le cas actuel, les quatre solutions linéaires dont on a exprimé l'existence suffisent pour obtenir l'intégrale générale.

Si l'on désigne, en effet, par $Px + Qy + Rz$ la fonction linéaire homogène qui, égalée à zéro, donne une des quatre intégrales linéaires, on sait que, pour des valeurs convenables des constantes λ, μ, ν, on doit avoir l'identité

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{LP} + \mathrm{MQ} + \mathrm{NR} = (\mathrm{P}x + \mathrm{Q}y + \mathrm{R}z)(\lambda x + \mu y + \nu z),$$

où les polynômes L, M, N ont été rendus homogènes.

Si l'on identifie les coefficients de y^2, on trouve la relation $\mu = m_1$. La méthode de M. Darboux consiste, en élevant les facteurs

$$\mathrm{P}_1 x + \mathrm{Q}_1 y + \mathrm{R}_1 z, \quad \ldots,$$

qui répondent aux intégrales particulières, à des puissances convenables $\rho_1, \ldots$, à former une fonction u homogène et de degré zéro qui satisfasse identiquement à

$$\mathrm{L}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{M}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{N}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

On sait que les exposants $\rho_1, \rho_2, \ldots$ doivent satisfaire à la condition $\Sigma\rho = 0$ et annuler identiquement

$$\Sigma\rho(\lambda x + \mu y + \nu z),$$

en sorte que les quatre valeurs de ρ devraient satisfaire à quatre équations linéaires et homogènes, ce qui ne permettrait pas de déterminer leurs rapports; mais nous avons remarqué que, pour les quatre solutions linéaires, la constante μ a une valeur unique m_1. La condition qui exprime que le coefficient de y est nul dans la somme

$$\Sigma\rho(\lambda x + \mu y + \nu z)$$

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI.

se confond ainsi avec la relation $\Sigma\rho = 0$, et l'on n'a que trois équations homogènes et linéaires qui déterminent les rapports des quatre exposants ρ.

En résumé, pour avoir l'intégrale générale, on calculera les coefficients des solutions linéaires $y = ax + b$. La constante a satisfait à une équation du quatrième degré, que l'on peut former en fonction des coefficients de l'équation donnée. La constante b est alors connue par une équation du premier degré. Soient $a_1, b_1, \ldots, a_4, b_4$ les quatre systèmes de solutions. Il faut déterminer les exposants $\rho_1, \ldots, \rho_4$.

Si, dans les deux membres de l'identité (4), on égale les coefficients de xy et de yz, on obtient

$$\begin{aligned} Pm_1 - Q(n_1 + \lambda) + Rm &= 0, \\ Pm_2 + Q(n + \nu) + Rm_1 &= 0. \end{aligned}$$

En remplaçant $\frac{P}{Q}$ par $-a$ et $\frac{R}{Q}$ par $-b$, on aura

$$\begin{aligned} \lambda &= -n_1 - m_1 a - mb, \\ \nu &= -n + m_2 a + m_1 b. \end{aligned}$$

Les relations qui expriment que $\Sigma\rho(\lambda x + \mu y + \nu z)$ est nulle identiquement se réduisent donc à

$$\Sigma\rho = 0, \qquad m_1 \Sigma\rho a + m\Sigma\rho b = 0, \qquad m_2 \Sigma\rho a + m_1 \Sigma\rho b = 0.$$

Supposons que $m_1^2 - mm_2$ soit différent de zéro, les trois équations homogènes qui déterminent les rapports des quatre exposants ρ sont alors

$$\Sigma\rho = 0, \qquad \Sigma\rho a = 0, \qquad \Sigma\rho b = 0.$$

Lorsque $m_1^2 - mm_2 = 0$, les trois coniques ont une direction asymptotique commune et ne se coupent plus qu'en trois points, à distance finie. L'équation différentielle n'admet alors que trois intégrales particulières linéaires. On vérifie sans difficulté, en ayant égard aux relations (3), que tous les coefficients de l'équation différentielle sont divisibles par $mx - m_1$, et qu'on tombe ainsi sur une équation ordinaire de Jacobi.

Les équations que nous avons rencontrées dans le n° 7,

$$(y-A)^\alpha (y-B)^\beta (y-C)^\gamma = \text{const.}\, A^\alpha B^\beta C^\gamma,$$

avec la condition

$$\frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}=0,$$

rentrent dans celles que nous venons d'étudier. En posant

$$A=\frac{1}{A_1}, \qquad B=\frac{1}{B_1}, \qquad C=\frac{1}{C_1}, \qquad y=\frac{1}{y_1},$$

on obtient

$$\left(\frac{A_1}{y_1}-1\right)^\alpha \left(\frac{B_1}{y_1}-1\right)^\beta \left(\frac{C_1}{y_1}-1\right)^\gamma = \text{const.},$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(A_1-y_1)^\alpha (B_1-y_1)^\beta (C_1-y_1)^\gamma y_1^\delta = \text{const.},$$

avec les conditions

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0, \qquad \alpha A_1+\beta B_1+\gamma C_1=0.$$

Si l'on suppose que A_1, B_1, C_1 sont des fonctions linéaires de x, l'équation différentielle résultant de l'élimination de la constante est un cas particulier de l'équation de Jacobi généralisée. Elle admet la solution particulière $y=0$. Les trois constantes p, p_1, p_2 sont nulles, et les trois coniques dont les points communs fournissent les solutions linéaires passent toutes par l'origine des coordonnées.

9. On peut intégrer quelques équations de la forme que nous étudions par la remarque suivante, qui n'est qu'une modification d'une transformation indiquée par M. Appell (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 377; 1889). Considérons l'équation

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ay^2+by+c}{Ay+B}, \tag{1}$$

où a, b, c sont des constantes, A et B des polynômes en x dont le degré est au plus égal à 2. Cette équation est intégrable, puisque, si l'on considère x comme la fonction, elle est une équation de Riccati. L'intégration se ramène à des quadratures, lorsque A et B sont du premier degré.

Les deux invariants de l'équation (1) sont

$$(2)\qquad I = \frac{2aB - bA + BA' - AB'}{A^2 e^{\int \frac{a}{A} dx}}, \qquad H = \frac{aB^2 - bAB + cA^2}{A^3 e^{2\int \frac{a}{A} dx}}.$$

Ils se réduisent, pour $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, à $-\left(\frac{B}{A}\right)'$ et $\frac{1}{A}$ et donnent ainsi le cas d'intégrabilité qu'a signalé M. Appell.

Supposons que les polynômes A et B soient du premier degré et mettons en évidence leurs coefficients

$$A = a_1 x + a_0, \qquad B = b_1 x + b_0;$$

l'exponentielle $e^{\int \frac{a}{A} dx}$ devient $(a_1 x + a_0)^{\frac{a}{a_1}}$. Posons $\frac{a}{a_1} = \alpha$. Supposons $a_0 = 0$, a_1 différent de zéro, et multiplions I par $a_1^{\alpha+1}$, H par $a_1^{2\alpha+2}$, ce qui revient, comme on sait, à multiplier la fonction par une constante; on aura

$$I = \frac{(2\alpha b_1 - b)x + (2\alpha + 1)b_0}{x^{\alpha+2}}, \qquad H = \frac{\alpha(b_1 x + b_0)^2 - bx(b_1 x + b_0) + ca_1 x^2}{x^{2\alpha+3}}.$$

Cherchons à identifier ces expressions avec les suivantes

$$I = \frac{A_1 x + A_0}{x^{\alpha+2}}, \qquad H = \frac{B_2 x^2 + B_1 x + B_0}{x^{2\alpha+3}},$$

où A_0, A_1, B_0, B_1, B_2 sont des constantes quelconques. On obtient ainsi cinq équations contenant les cinq indéterminées a_1, b_1, b_0, b, c; mais on reconnaît aisément que le système est, en général, impossible et que les coefficients doivent satisfaire aux deux relations

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha A_0^2 = (2\alpha + 1)^2 B_0, \\ A_0 A_1 = (2\alpha + 1) B_1. \end{cases}$$

Si on les suppose vérifiées, l'identification peut être faite d'une infinité de façons, les cinq indéterminées devant satisfaire aux trois relations

$$b_0 = \frac{A_0}{2\alpha+1}, \qquad b = 2\alpha b_1 - A_1, \qquad ca_1 = B_2 + \alpha b_1^2 - b_1 A_1.$$

On pourra prendre, par exemple,

$$b_0 = \frac{A_0}{2\alpha+1}, \qquad b_1 = 0, \qquad b = -A_1, \qquad a_1 = 1, \qquad c = B_2;$$

on ramène ainsi à l'équation linéaire

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha y^2 - A_1 y + B_2}{xy + \frac{A_0}{2\alpha+1}}$$

l'équation

$$(5) \qquad \frac{dY}{dx} + \frac{A_1 x + A_0}{x^{\alpha+2}} = \frac{B_2 x^2 + B_1 x + B_0}{x^{2\alpha+3} Y},$$

avec les conditions (3), au moyen de la substitution

$$y = x^\alpha Y - \frac{A_0}{(2\alpha+1)x}.$$

L'équation en Y admet deux intégrales particulières d'une forme simple répondant aux deux solutions données par l'équation

$$\alpha y^2 - A_1 y + B_2 = 0,$$

qui sont évidentes pour l'équation (4).

Ces équations comprennent comme cas particulier, pour $\alpha = 1$, l'équation de Jacobi. Faisons dans l'équation (5), avec $\alpha = 1$, $x = \frac{1}{x_1}$; elle devient

$$\frac{dY}{dx_1} = A_0 x_1 + A_1 - \frac{(B_0 x_1^2 + B_1 x_1 + B_2) x_1}{Y}.$$

Les relations (3) deviennent

$$(6) \qquad \begin{cases} A_0^2 = 9 B_0, \\ A_0 A_1 = 3 B_1. \end{cases}$$

On obtient donc (n° 4) l'équation provenant de la réduction d'une équation de Jacobi avec l'hypothèse particulière $B_3 = 0$. On revient au cas général par un changement linéaire de la variable indépendante. Appelons, en effet, α_0 la racine de l'équation $A_0 x_1 + A_1 = 0$, α_1 et α_2 les racines de $B_0 x_1^2 + B_1 x_1 + B_2 = 0$, et, désignant par α_3 une constante quelconque, faisons le changement de variable $x_1 = x'_1 - \alpha_3$. Le polynôme $A_0 x_1 + A_1$ se transforme en $A'_0 x'_1 + A'_1$, le polynôme $(B_0 x_1^2 + B_1 x_1 + B_2) x_1$ en un polynôme complet du troisième degré $B'_0 x_1'^3 + B'_1 x_1'^2 + B'_2 x'_1 + B'_3$. On a évidemment $A'_0 = A_0$, $B'_0 = B_0$, en sorte que les nouveaux coefficients vérifient la première des relations (6)

$$A_0'^2 = 9 B'_0.$$

Remplaçons la seconde des relations (6) par celle que l'on obtient en les divisant membre à membre

$$3 \frac{A_1}{A_0} = \frac{B_1}{B_0}.$$

Elle se traduit par la relation suivante entre les racines

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 3 \alpha_0,$$

qui peut s'écrire

$$\alpha_3 + (\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_2 + \alpha_3) = 3 (\alpha_0 + \alpha_3),$$

c'est-à-dire

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 = 3 \alpha'_0.$$

Elle revient ainsi à la relation

$$\frac{B'_1}{B'_0} = 3 \frac{A'_1}{A'_0}.$$

Les nouveaux coefficients vérifient donc bien les deux relations qui caractérisent l'équation de Jacobi.

Le cas où $2\alpha + 1 = 0$ donne, pour b_0, une valeur impossible. Il est facile de le traiter directement; mais il ne présente rien d'intéressant.

Reprenons les valeurs (2) et supposons $a = 0$, le polynôme A se réduisant à une constante a_0. En multipliant I par a_0 et H par a_0^2, on voit qu'on ramène à une équation de Riccati l'équation dont les invariants sont

$$I = - B' - b, \qquad H = - bB + ca_0$$

Mettant en évidence les coefficients de $B = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, si l'on cherche à identifier avec les expressions suivantes

$$I = A_1 x + A_0, \qquad H = B_2 x^2 + B_1 x + B_0,$$

où A_1, A_0, B_2, B_1, B_0 sont des constantes quelconques, on vérifie aisément que les coefficients doivent vérifier la relation

$$(7) \qquad 2 A_1 A_0 B_2 - B_1 A_1^2 + 4 B_2^2 = 0,$$

et que l'identification peut se faire alors d'une infinité de façons en posant

$$b = \frac{2 B_2}{A_1}, \qquad b_1 = -\frac{A_1 B_1}{2 B_2}, \qquad b_2 = -\tfrac{1}{2} A_1, \qquad c a_0 A_1 - 2 b_0 B_2 = B_0 A_1;$$

on peut supposer, par exemple,

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = 0, \qquad c = B_0, \qquad b = \frac{2 B_2}{A_1}, \qquad b_1 = -\frac{A_1 B_1}{2 B_2}, \qquad b_2 = -\tfrac{1}{2} A_1.$$

L'équation

$$(8) \qquad \frac{dY}{dx} + A_1 x + A_0 = \frac{B_2 x^2 + B_1 x + B_0}{Y},$$

où les coefficients vérifient la relation (7), se réduit ainsi à l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \frac{B_2}{A_1} y + B_0}{y - \frac{1}{2} A_1 x^2 - \frac{A_1 B_1}{2 B_2} x}$$

par la substitution

$$y = Y + \tfrac{1}{2} A_1^2 x^2 + \frac{A_1 B_1}{2 B_2} x.$$

A cause de la relation (7), l'équation (8) admet comme intégrale particulière un polynôme du second degré

$$Y = -\tfrac{1}{2} A_1 x^2 - \frac{A_1 A_0 + 2 B_2}{A_1} x - \frac{A_1 B_0}{2 B_2};$$

mais cette intégrale répond à la solution particulière $y = -\frac{A_1 B_0}{2 B_2}$ de l'équation de Riccati, et ne peut servir pour en ramener l'intégration à des quadratures.

La relation (7) est vérifiée pour $B_1 = B_2 = 0$. Les deux invariants se réduisent à

$$I = A_1 x + A_0, \qquad H = B_0.$$

On tombe ainsi sur un cas d'intégrabilité qui est connu.

Revenons encore aux expressions (2) des invariants, en supposant que le polynôme A se réduit à $a_1 x$, et que la constante a est nulle. Le polynôme B étant du second degré et égal à $b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, les invariants seront

$$I = \frac{-b_2 x^2 - bx + b_0}{x^2}, \qquad H = \frac{-bb_2 x^2 + (ca_1 - bb_1)x - bb_0}{x^2}.$$

Si l'on cherche à les identifier avec les expressions

$$I = \frac{A_2 x^2 + A_1 x + A_0}{x^2}, \qquad H = \frac{B_2 x^2 + B_1 x + B_0}{x^2},$$

on trouve que les coefficients doivent vérifier les deux relations

$$(9) \qquad A_1 A_0 - B_0 = 0, \qquad A_1 A_2 + B_2 = 0.$$

On pourra faire alors l'identification d'une infinité de manières, en prenant

$$b = -A_1, \qquad b_0 = A_0, \qquad b_2 = -A_2, \qquad ca_1 + b_1 A_1 = B_1.$$

Les relations (9) sont vérifiées en particulier si l'on prend

$$A_1 = B_2 = B_0 = 0.$$

On saura donc intégrer, en la ramenant à une équation de Riccati, l'équation

$$\frac{dY}{dx} + A_2 + \frac{A_0}{x^2} = \frac{B_1}{xY}$$

ou, en faisant le changement de variable $x = e^{x_1}$, l'équation

$$\frac{dY}{dx_1} + A_2 e^{x_1} + A_0 e^{-x_1} = \frac{B_1}{Y},$$

où les constantes A_0, A_2, B_1 sont quelconques.

On réduit le polynôme B au premier degré en supposant $b_2 = 0$ et, par suite, $A_2 = 0$. La seconde relation (9) donne alors $B_2 = 0$. On intégrera donc, au moyen de quadratures, les équations où les invariants ont la forme

$$I = \frac{A_1 x + A_0}{x^2}, \qquad H = \frac{B_1 x + A_1 A_0}{x^2}$$

ou, si l'on effectue un changement de la variable indépendante, les équations où l'on aura

$$I = A_1 \frac{\varphi'}{\varphi} + A_0 \frac{\varphi'}{\varphi^2}, \qquad H = B_1 \frac{\varphi'}{\varphi} + A_1 A_0 \frac{\varphi'}{\varphi^2},$$

A_1, A_0, B_1 étant des constantes quelconques et φ une fonction de x.