MATHIAS LERCH

# Introduction à une théorie élémentaire des intégrales elliptiques (communication faite à M. Hermite)

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 6 (1889), p. 263-296
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1889_3_6__263_0>

INTRODUCTION

A UNE

# THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES;

Communication faite à M. HERMITE,

PAR M. MATHIAS LERCH.

1. Nous nous occuperons de l'intégrale définie

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

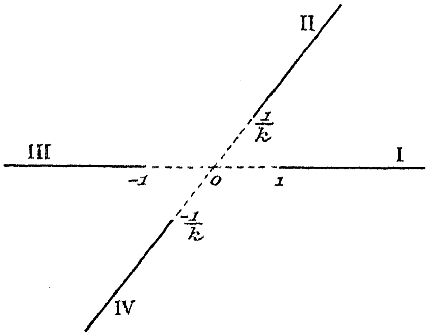
$x$ étant une quantité réelle assez petite pour que la fonction sous le signe $\int$ reste finie et déterminée pour chaque valeur de $t$ appartenant à l'intervalle $(0\ldots x)$. Évidemment, le module $k$ pourra avoir une valeur finie quelconque, réelle ou imaginaire, que nous supposerons différente de zéro et de l'unité, pour éviter les seuls cas particuliers $k=0,\ \pm 1$ qui peuvent être supposés déjà établis. Afin de pouvoir généraliser cette fonction $\Phi(x)$, mettons-la sous la forme

$$\Phi(x) = \int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-t^2x^2)(1-k^2t^2x^2)}}, \tag{1}$$

qui provient du changement de $t$ en $tx$; c'est cette expression de $\Phi(x)$ qui nous servira à étendre la fonction $\Phi(x)$ aux valeurs imaginaires de $x$. En effet, $x$, $k$ étant des quantités finies quelconques, l'intégrale (1) aura un sens déterminé et, par conséquent, une valeur finie, lorsque la fonction sous le signe $\int$ sera finie et déterminée pour chaque valeur de $t$ contenue dans l'intervalle $(0\ldots 1)$.

La fonction sous le signe $\int$ devient infinie, lorsque $1 - t^2x^2 = 0$ ou lorsque $1 - k^2x^2t^2 = 0$; comme $t$ parcourt l'intervalle $(0 \ldots 1)$, cette fonction sera infinie pour une certaine valeur appartenant à cet intervalle lorsque $x$ appartient aux segments de l'axe réel $(1 \ldots +\infty)$, $(-\infty \ldots -1)$ ou aux segments $\left(\frac{1}{k} \cdots \infty\right)$, $\left(-\infty \ldots -\frac{1}{k}\right)$ de la droite, menée par les points $\pm\frac{1}{k}$ dans le plan des $x$. Ce sont les *coupures* correspondantes à l'*expression* $\Phi(x)$, pour parler comme M. Hermite. Nous les représenterons par I, II, III, IV (*fig.* 1).

Fig. 1.




Pour toute valeur de $x$ en dehors des coupures, la fonction sous le signe $\int$ sera finie pour chaque valeur de $t$ de l'intervalle $(0 \ldots 1)$.

Il s'agit encore de prouver que ladite fonction y reste déterminée. En posant, pour abréger, $R(z) = (1 - z^2)(1 - k^2z^2)$, il suffit de montrer que la fonction $\sqrt{R(xt)}$ reste finie et déterminée quand on choisit l'une de ses deux valeurs dans un point particulier, par exemple au point $x = 0$ [et où nous ferons $\sqrt{R(0)} = 1$], pourvu que la variable $x$ reste hors des coupures et que la variable $t$ ait une valeur de l'intervalle $(0 \ldots 1)$. Or, sous ces conditions, la quantité $z = xt$ sera aussi placée hors des coupures, et il suffit donc de considérer la fonction $\sqrt{R(z)}$.

Il est presque évident que cette fonction reste uniforme à l'intérieur du plan affecté des coupures I...IV [1]. Car, en effet, on s'as-

[1] Pour abréger la diction, j'écrirai quelquefois *le plan* [$x$] au lieu de *le plan affecté des coupures*.

sure, à l'aide du théorème du binôme, que cette fonction peut se mettre sous la forme $a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$, la série étant convergente et représentant $\sqrt{R(z)}$, lorsque $z$ se trouve à l'intérieur d'un cercle ayant $z_0$ pour centre et ne contenant à son intérieur aucun point des coupures. Une digression facile prouve que cette fonction ne peut avoir qu'une valeur déterminée dans chaque point du plan $[x]$. J'écrirai $[\sqrt{R(z)}]$ pour désigner la fonction $\sqrt{R(z)}$, uniforme dans le plan affecté des coupures I...IV, qui pour $z = 0$ est égale à $+1$.

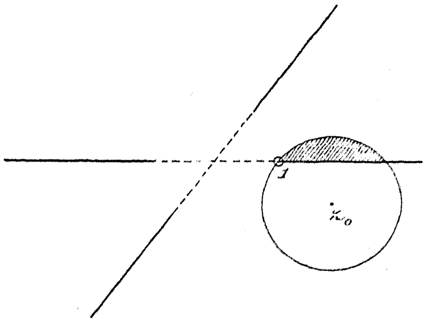
Je dirai aussi que $[\sqrt{R(z)}]$ est une *expression* déterminée ou une *branche* déterminée de la fonction $\sqrt{R(z)}$.

Soit maintenant

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

la série qui représente $\sqrt{R(z)}$. Cette série sera convergente à l'intérieur du cercle ayant à $z_0$ son centre (*fig.* 2) et passant par le

Fig. 2.




point singulier $\left(\pm 1, \pm \frac{1}{k}\right)$ le plus voisin (dans la figure par le point 1); mais elle ne sera égale à l'expression (branche) $[\sqrt{R(z)}]$ que lorsque $z$ se trouvera dans la partie *blanche* de notre cercle, tandis que dans la partie *hachée* ladite série sera égale à $-[\sqrt{R(z)}]$, comme il est aisé de le voir. C'est ce qu'il est nécessaire de remarquer pour distinguer entre la fonction analytique multiforme $\sqrt{R(z)}$ et entre l'expression déterminée $[\sqrt{R(z)}]$.

Donc, en prenant sous le signe $\int$ pour la racine $\sqrt{R(xt)}$ la valeur

$[\sqrt{R(xt)}]$, on voit que cette fonction reste finie, déterminée et continue par rapport à la variable $t$ restreinte à l'intervalle $(0\ldots 1)$.

Revenons maintenant à l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{R(xt)}}, \tag{1}$$

qui est une expression finie et bien déterminée, dépendant d'une manière continue de la variable $x$. Comme elle est de la forme

$$\Phi(x) = \int_0^1 x f(xt)\,dt,$$

$f(xt)$ étant une fonction analytique de la variable réelle $t$, nous aurons, en employant la règle de la différentiation sous le signe $\int$ [1],

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = \int_0^1 [xtf'(xt) + f(xt)]\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}[tf(xt)]\,dt$$

ou

$$\frac{d}{dx}\Phi(x) = [tf(xt)]_{t=0}^{t=1} = f(x);$$

c'est-à-dire nous aurons

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{[\sqrt{R(x)}]} = \frac{1}{[\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}]}.$$

Cela n'exprime autre chose que ce qu'en posant $x = \xi + i\xi'$ l'expression

$$d\Phi = \frac{1}{[\sqrt{R(x)}]}(d\xi + i\,d\xi')$$

est une différentielle totale. De là nous allons conclure que l'expression $\Phi(x)$ est une *fonction analytique* de la variable complexe $x$. Soit, en effet, $x_0$ un point quelconque en dehors des coupures : on sait que

---

[1] La déduction de cette règle, que je suppose connue, n'offrirait aucune difficulté méthodique.

la quantité $\dfrac{1}{[\sqrt{R(x)}]}$ pourra s'exprimer par une série de la forme (1)

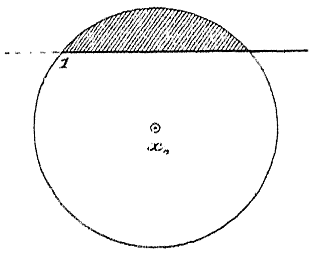
$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}} = c_1 + c_2(x - x_0) + c_3(x - x_0)^2 + \ldots,$$

convergente dans la partie blanche d'un certain cercle construit autour de $x_0$ (*fig.* 3). Formons la série

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x) = c_1(x - x_0) + \frac{c_2}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{c_\nu}{\nu}(x - x_0)^\nu + \ldots,$$

convergente dans le même cercle. Or, à l'intérieur de la partie blanche

Fig. 3.




de ce cercle, nous aurons

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{R(x)}},$$

comme on a coutume de l'établir dans les éléments de la théorie des fonctions.

En d'autres termes,

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx},$$

pourvu que $x$ soit à l'intérieur de la partie blanche du cercle considéré. Donc, en posant $x = \xi + i\xi'$, $\varphi$ et $\Phi$ seront des fonctions de deux variables $\xi$, $\xi'$, telles que

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\Phi - \varphi) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\xi'}(\Phi - \varphi) = 0,$$

(1) L'écriture de $[\sqrt{R(x)}]$ est assez incommode, ce qui nous conduit à supprimer le crochet, en conservant toutefois la notion *de l'expression* $\sqrt{R(x)}$.

ce qui exige que $\Phi - \varphi$ soit constante; il vient de là

$$(A') \quad \Phi(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \tfrac{1}{2} c_2 (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu} c_\nu (x - x_0)^\nu + \ldots,$$

ce qui prouve que la fonction peut être représentée, au voisinage d'un point quelconque, par une série de puissances, de sorte que $\Phi(x)$ est une *fonction analytique* de $x$.

Mais cette fonction n'était définie qu'en introduisant les *coupures* I...IV, et il nous reste à examiner comment elle se comporte au voisinage des points de ces coupures. Il est clair d'abord que la série (A') converge pour toutes les valeurs de $x$ qui se trouvent représentées par des points situés à l'intérieur du cercle, à centre $x_0$, qui passe par le point critique $\left(\pm 1, \pm \frac{1}{k}\right)$ le plus voisin, mais qu'elle ne représente l'expression $\Phi(x)$ que dans la partie blanche de ce cercle. De là il suit que la *fonction analytique* définie par l'expression $\Phi(x)$ existe sur tout le plan des $x$ et n'a que quatre points critiques $\pm 1$, $\pm \frac{1}{k}$. Elle est nécessairement multiforme, sans quoi sa dérivée serait uniforme. Mais il s'agit de voir et de connaître les lois qui unissent les différentes branches de cette fonction, ce que nous allons chercher en supposant d'abord que la quantité $k$ ne soit pas réelle.

Dans la partie hachée du cercle $(x_0)$, la série (A') représente une quantité autre que $\Phi(x)$, puisque sa dérivée (A) y représente la fonction $-\frac{1}{[\sqrt{R(x)}]}$, ce qui conduit en même temps à affirmer que, dans ce cas, la valeur de la série (A) sera de la forme $C - \Phi(x)$, C étant une quantité constante. On en déduit qu'en représentant par $x'$ ou $x''$ le point $x$ de la coupure suivant qu'on le compte pour un point du bord droit ou gauche, et en écrivant $\Phi(x')$ au lieu de $\lim_{\xi = x'} \Phi(\xi)$, on aura

$$\Phi(x') + \Phi(x'') = C,$$

la constante étant la même le long d'une même coupure. C'est la loi qui lie les valeurs de l'expression $\Phi(x)$ le long des bords d'une même coupure. Afin d'obtenir la valeur de la constante C, il suffit d'approcher $x$ du point critique duquel part la coupure correspondante. Il est facile de voir, par le développement

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{c_1}{\sqrt{z - z_0}} + c_2 + c_3\sqrt{z - z_0} + \ldots,$$

que la fonction $\Phi(x)$ reste continue au voisinage des points critiques, de sorte que nous aurons $C = 2\Phi(c)$, $c$ étant le point critique correspondant à la coupure envisagée. Par exemple, sur la coupure I, on a

$$C_{\text{I}} = 2\Phi(1),$$

où l'on a posé

$$\Phi(1) = \lim_{x=1}\Phi(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K(k);$$

sur la coupure III, on a

$$C_{\text{III}} = -2K,$$

puisque

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Sur la coupure II, nous aurons

$$\Phi(x') + \Phi(x'') = 2\Phi\left(\frac{1}{k}\right) = 2K'',$$

où

$$K'' = \lim_{kx=1} \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{kx\,dt}{\sqrt{(1-x^2t^2)(1-k^2x^2t^2)}} = \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right)(1-t^2)}},$$

de sorte que $K'' = \frac{1}{k}K\left(\frac{1}{k}\right)$.

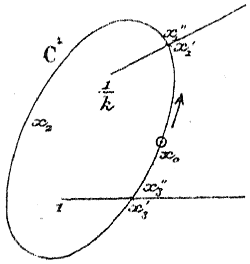
De là il suit :

*L'expression* $\Phi(x)$ *définit une fonction analytique multiforme* $u$ *n'ayant que quatre points critiques* $\pm 1$, $\pm \frac{1}{k}$; *lorsque la valeur de cette fonction* $u$, *au voisinage d'une coupure* I, II, III, IV *est* $\Phi(x)$, *elle sera donnée, sur le côté opposé de la même coupure, par l'expression* $2C - \Phi(x)$, *pourvu que la fonction* $u$ *doive rester continue. Les valeurs de* C *correspondantes aux coupures* I, II, III, IV *sont respectivement* $K$, $K''$, $-K$, $-K''$.

L'introduction de l'expression uniforme $\Phi(x)$ facilite essentiellement l'étude de la fonction $u$. C'est en me plaçant au point de vue de la théorie des intégrales imaginaires, développée dans une Lettre de M. Hermite à M. Mittag-Leffler, que j'ai été conduit à éviter la théorie des intégrales curvilignes dans les éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Le rôle capital que jouent les coupures des expressions analytiques dans l'étude des fonctions définies par celles-ci y est mis en évidence plus d'une fois. On en trouve des applications dans deux Mémoires de M. Goursat, publiés aux *Acta mathematica*.

Il nous reste encore à déterminer la valeur à laquelle parvient la fonction $u$ lorsque la variable $x$ parcourt un certain chemin fermé C (*fig.* 4).

Fig. 4.




Supposons d'abord que ce chemin ne contienne à son intérieur que deux points critiques, 1 et $\frac{1}{k}$ par exemple, de sorte qu'il ne rencontre que deux coupures, dans notre cas I et II. Alors la fonction $u$, partant de $x_0$ avec la valeur $\Phi(x_0)$, parviendra à $x'_1$ avec la valeur

$$\Phi(x'_1) = 2\mathrm{K}'' - \Phi(x''_1)$$

et prendra le long de C la valeur $2\mathrm{K}'' - \Phi(x)$, jusqu'à ce qu'elle parvienne au point $x'_3$ avec la valeur

$$2\mathrm{K}'' - \Phi(x'_3) = 2\mathrm{K}'' - 2\mathrm{K} + \Phi(x''_3),$$

de sorte qu'elle retourne au point $x_0$ avec la valeur

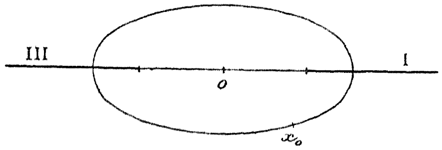
$$\Phi(x_0) + 2(\mathrm{K}'' - \mathrm{K}) = u_0 + 2i\mathrm{K}',$$

en posant $i\mathrm{K}' = \mathrm{K}'' - \mathrm{K}$.

Observons que la ligne C se décompose en deux parties limitées par les points $x_1$, $x_3$. Celle qui contient le point $x_0$ porte les valeurs de la forme $u = \Phi(x)$, tandis que la seconde partie, contenant le point $x_2$, porte les valeurs de la forme $2K'' - \Phi(x)$. Il est donc tout naturel que, en partant de $x_2$ avec la valeur $u_2 = \Phi(x_2)$, on y retourne avec la valeur $u_2 - 2iK'$, ce qui provient de la discontinuité de la fonction (expression) $\Phi(x)$ le long des coupures.

Lorsque la variable $x$ décrit une ligne fermée entourant seulement les points $(-1 \ldots 1)$, la fonction $u$ recevra un accroissement de la forme $\pm 4K$ (*fig.* 4).

Fig. 5.




L'accroissement analogue provenant du chemin fermé contenant à son intérieur des points $\pm \frac{1}{k}$ sera $4iK''$ (*fig.* 5). Lorsque la variable $x$ décrit une ligne fermée ne contenant à son intérieur que le seul point

Fig. 6.

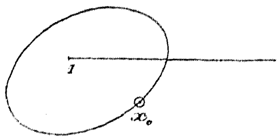
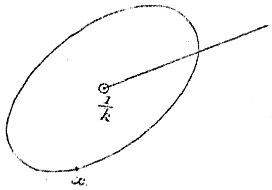



Fig. 7.




critique $x = 1$ (*fig.* 6), la fonction $u$ recevra la valeur $2K - u$; lorsque le chemin de la variable $x$ ne contient à son intérieur que le point $\frac{1}{k}$ (*fig.* 7), la fonction reçoit la valeur

$$2K'' - u = 2K'i + 2K - u.$$

En appelant *période* chaque expression de la forme $\alpha . 4K + \beta . 2iK'$, $\alpha$, $\beta$ étant des nombres entiers, on s'assure aisément que le théorème suivant a lieu :

*Lorsque la variable $x$ décrit une ligne fermée ne contenant à son inté-*

*rieur qu'un seul ou deux points critiques, la fonction u reçoit respectivement une valeur de la forme*

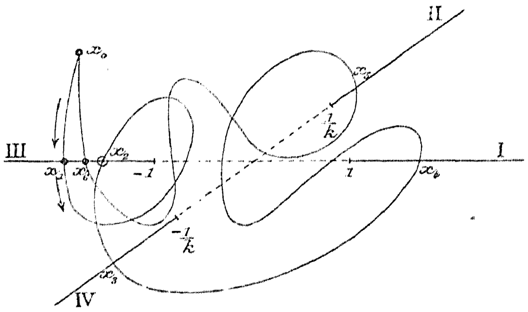
$$\text{période} + 2\mathrm{K} - u, \quad \text{ou} \quad \text{période} + u.$$

Supposons maintenant que la variable $x$ décrive une ligne fermée quelconque, ne passant, bien entendu, par aucun point critique.

Lorsque la variable $x$ franchit une coupure, la valeur de $\Phi(x)$ se change en période $+ 2\mathrm{K} - \Phi(x)$.

Dans notre figure (*fig.* 8), le chemin rencontre les coupures aux

Fig. 8.




points $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Supposant alors que l'on parte de $x_0$ avec la valeur $\Phi(x_0)$ de la fonction $u$, cette fonction sera donnée, le long des arcs $x_0x_1$, $x_1x_2$, $x_2x_3$, $x_3x_4$, $x_4x_5$, $x_5x_6$, $x_6x_0$, par des expressions de la forme

$$\Phi(x), \quad 2\mathrm{K} - \Phi(x) + p, \quad \Phi(x) + p', \quad 2\mathrm{K} - \Phi(x) + p'', \quad \Phi(x) + p''',$$
$$2\mathrm{K} - \Phi(x) + p^{\mathrm{IV}}, \quad \Phi(x) + p^{\mathrm{V}},$$

les symboles $p, p', p''$, ... représentant des périodes. Donc :

*La continuation analytique de la fonction $\Phi(x)$ ne conduit à d'autres valeurs qu'à celles qui s'expriment par l'une des deux formules*

$$\Phi(x) + \alpha.4\mathrm{K} + \beta.2i\mathrm{K}', \quad 2\mathrm{K} - \Phi(x) + \alpha.4\mathrm{K} + \beta.2i\mathrm{K}',$$

*et réciproquement, quels que soient les entiers $\alpha$, $\beta$, on peut trouver des chemins qui conduisent à une quelconque de ces valeurs.*

La seconde partie du théorème se vérifie en remarquant qu'il suffit de faire parcourir à la variable $x$ un chemin entourant les points $-1$, $1$

$\alpha$ — fois dans un sens, et un autre entourant les points $1, \frac{1}{k}$, $\beta$ — fois, pour obtenir la première expression, etc.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que le paramètre $k$ n'est pas réel; autrement les coupures auraient pris une autre position relative. Supposons maintenant la quantité $k$ réelle, entre $0$ et $1$. Alors l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^1 \frac{x\,dt}{\sqrt{(1-x^2t^2)(1-k^2x^2t^2)}}$$

existera dans tout le plan, sauf les coupures $(-\infty \ldots 1)$, $(1 \ldots \infty)$

Fig. 9.


situées sur l'axe réel. Mais la dérivée $\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{R(x)}}$ sera uniforme, en évitant seulement les points des coupures $\left(-\frac{1}{k} \cdots -1\right)$, $\left(\frac{1}{k} \cdots 1\right)$, et il s'ensuit que l'expression $\frac{1}{\sqrt{R(x)}}$ aura la même valeur le long des deux côtés des coupures $\left(\frac{1}{k} \cdots \infty\right)$, $\left(-\frac{1}{k} \cdots -\infty\right)$, tandis qu'elle aura des valeurs opposées le long des coupures $\left(1 \ldots \frac{1}{k}\right)$, $\left(-1 \ldots -\frac{1}{k}\right)$. Représentons par A, A′ les premières, par B, B′ les secondes coupures. Nous aurons alors, le long de A, A′,

$$\Phi(x') = \Phi(x'') + \text{const.},$$

et le long de B, B′,

$$\Phi(x') + \Phi(x'') = \text{const.}$$

La constante correspondant à la coupure B sera évidemment

$$\Phi(x') + \Phi(x'') = 2\Phi(1) = 2K,$$

tandis que, sur la coupure B′, cette constante sera $-2K$.

Afin d'obtenir la constante relative à la coupure A, posons

$$\Phi(x'') - \Phi(x') = 2C, \quad x = \left(\frac{1}{k} \cdots \infty\right).$$

En écrivant

$$\Phi\left(\frac{1}{k} \pm 0.i\right) = \lim_{\varepsilon=0} \Phi\left(\frac{1}{k} \pm \varepsilon i\right),$$

on aura évidemment

$$2C = \Phi\left(\frac{1}{k} + 0.i\right) - \Phi\left(\frac{1}{k} - 0.i\right),$$

$$2K = \Phi\left(\frac{1}{k} + 0.i\right) + \Phi\left(\frac{1}{k} - 0.i\right),$$

ce qui donne

$$C = \Phi\left(\frac{1}{k} + 0.i\right) - K,$$

et il nous reste à évaluer la quantité $\Phi\left(\frac{1}{k} + 0.i\right)$. Posons, à cet effet, $x = \frac{1}{k} e^{i\varphi}$, $\varphi$ étant un petit angle positif; nous avons

$$\Phi(x) = \int_0^1 \frac{\frac{1}{k} e^{i\varphi}\, dt}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{k^2} t^2 e^{2i\varphi}\right)\left(1 - t^2 e^{2i\varphi}\right)}}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{e^{i\varphi}\, dt}{\sqrt{(1 - t^2 e^{2i\varphi})(1 - k^2 t^2 e^{2i\varphi})}} = \int_0^1 + \int_1^{\frac{1}{k}}.$$

Lorsque $\varphi$ s'approche de zéro, la première intégrale converge vers K, et il suffit donc de considérer la seconde.

On voit aisément que la partie imaginaire de la racine

$$\sqrt{(1 - t^2 e^{2i\varphi})(1 - k^2 t^2 e^{2i\varphi})}$$

est négative, de sorte que nous aurons

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_1^{\frac{1}{k}} = i \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2 t^2)}} = K' i,$$

ce qui donne

$$C = K' i,$$

et par là nous aurons, le long de la coupure A,

$$\Phi(x + 0.i) - \Phi(x - 0.i) = 2iK',$$

et, le long de A′,

$$\Phi(x+0.i)-\Phi(x-0.i)=2iK'.$$

En appelant *période* chaque quantité de la forme $\alpha.4K+\beta.2iK'$, $\alpha$, $\beta$ étant des entiers, on trouve qu'aussi, dans ce cas, les expressions

$$\Phi(x)+\text{période},\quad 2K-\Phi(x)+\text{période}$$

coïncident avec l'ensemble des valeurs, auxquelles on parvient par la continuation analytique de l'expression $\Phi(x)$.

On trouve un résultat semblable en supposant $k>1$.

2. Nous aurons besoin de connaître les limites desquelles approchent les expressions $\Phi(x)$ quand le module de $x$ croît au delà de toute limite. Soit d'abord $k$ imaginaire; supposant $|x|>\left|\frac{1}{k}\right|$, 1, nous aurons

$$(1)\qquad \frac{d\Phi}{dx}=\frac{1}{\sqrt{R(x)}}=\frac{\pm 1}{kx^2\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{k^2x^2}\right)}}=\frac{a_1}{x^2}+\frac{a_2}{x^4}+\frac{a_3}{x^6}+\ldots,$$

et, comme la fonction $-\frac{a_1}{x}-\frac{a_2}{3x^3}-\frac{a_3}{5x^5}-\ldots$ a la même dérivée que $\Phi(x)$, il s'ensuit

$$(2)\qquad \Phi(x)=a_0-\frac{a_1}{x}-\frac{a_2}{3x^3}-\frac{a_3}{5x^5}-\ldots.$$

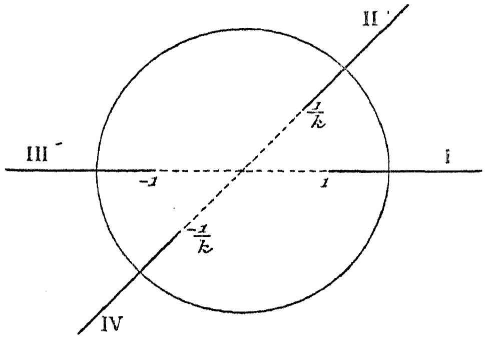
Mais on ne doit pas oublier que le développement (1) ne subsiste que dans une région ne contenant aucune coupure. Il y a quatre régions de cette espèce, limitées respectivement par les coupures I-II, II-III, III-IV, IV-I (*fig.* 10). Dans chacune d'elles, le développement (2) prend une autre forme, c'est-à-dire la constante $a_0$ et le signe des autres coefficients $a$ peuvent changer. Mais il est manifeste que la quantité $\Phi(x)$ s'approche toujours de la valeur correspondante de $a_0$ lorsque $x$ s'éloigne à l'infini en restant cependant dans une même des quatre régions. Nous écrirons $a_0=\Phi(\infty)_{\text{I-II}}$, lorsque $x$ se trouve dans la région I-II, et ainsi de suite.

Rien n'est plus facile que de déterminer ces quatre quantités $\Phi(\infty)$.

En effet, nous avons, d'après les propriétés de $\Phi(x)$ établies plus haut,

$$\begin{aligned}\Phi(\infty)_{\text{I-II}} + \Phi(\infty)_{\text{II-III}} &= 2K + 2iK',\\ \Phi(\infty)_{\text{II-III}} + \Phi(\infty)_{\text{III-IV}} &= -2K,\end{aligned}$$

Fig. 10.




et en même temps il faut que l'on ait $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, d'où

$$\Phi(\infty)_{\text{III-IV}} = -\Phi(\infty)_{\text{I-II}},$$

ce qui donne

$$(3)\qquad \begin{cases}\Phi(\infty)_{\text{I-II}} = 2K + iK',\\ \Phi(\infty)_{\text{II-III}} = iK'.\end{cases}$$

Les valeurs de $\Phi(\infty)$ sont donc de la forme

$$iK' + \text{période} \quad \text{ou} \quad 2K - iK' + \text{période};$$

car on a

$$\begin{aligned}-iK' &= iK' - 2iK' = iK' + \text{période},\\ 2K + iK' &= 2K - iK' + 2iK' = 2K - iK' + \text{période},\\ -2K - iK' &= 2K - iK' + 4K \;\; = 2K - iK' + \text{période}.\end{aligned}$$

Lorsque $k$ est réel, on n'a que deux valeurs $\Phi(\infty)$ qui, d'ailleurs, ne diffèrent que par le signe. On a (*fig.* 11)

$$\Phi(M_\infty) = \Phi(N_\infty) = -\Phi(-M_\infty)$$

et, d'autre part,

$$\Phi(N\;) - \Phi(-M_\infty) = 2iK',$$

ce qui donne

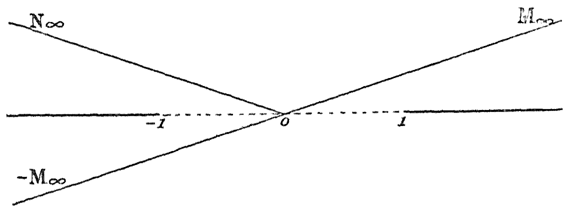
$$\Phi(N\;) = iK'.$$

On a donc

$$\Phi(\infty) = \pm iK',$$

et la continuation analytique de $\Phi(x)$ conduit à des valeurs de la

Fig. 11.




forme $iK' +$ période et $2K - iK' +$ période, $x$ devenant infini.

### Une propriété du rapport des périodes.

3. Nous aurons besoin de savoir que le rapport $\frac{K'i}{K}$ ne peut jamais être un nombre rationnel, en supposant que $k^2$ diffère de o et de 1. Je démontre d'abord que les quantités $K'i$, K ne peuvent jamais s'annuler en même temps; car, si l'on avait en même temps, pour une certaine valeur de $k$ différente de o et de $\pm 1$, $K = 0$, $K' = 0$, la fonction analytique $u$ définie par l'expression $\Phi(x)$ n'admettrait que *deux* valeurs différentes pour chaque valeur de $x$, à savoir $\pm \Phi(x)$. Alors $u^2$ serait une fonction analytique uniforme égale à $\Phi(x)^2$ et elle resterait inférieure à une limite finie, comme l'est $\Phi(x)$. Or cela exige que l'on ait $u^2 =$ const., chose impossible.

On voit de même que l'on ne peut avoir $K \gtrless 0$, $K' = 0$; car, dans ce cas, la continuation analytique $u$ de la fonction $\Phi(x)$ serait de la forme $\pm \Phi(x) + \alpha . 2K$ ($\alpha =$ entier), ce qui conduit à affirmer que $e^{\frac{u\pi i}{K}}$ serait une fonction analytique $f(x)$ qui n'admet que deux valeurs différentes $e^{\pm \Phi(x) \frac{\pi i}{K}}$, de sorte que $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ serait une fonction analytique *uniforme* de la variable $x$, fonction qui reste moindre qu'une limite, chose impossible puisque l'hypothèse $f(x) + \frac{1}{f(x)} =$ const. donne

$$f(x) = \text{const.}, \qquad \text{d'où} \qquad \Phi(x) = \text{const.}$$

On voit de la même manière que l'hypothèse $K' \gtrless 0$, $K = 0$ n'est pas admissible.

Nous allons maintenant prouver que le quotient $\frac{K'i}{K}$ ne peut jamais être un nombre rationnel $\frac{p}{q}$. En effet, supposons qu'on ait, au contraire,

$$\frac{K'i}{K} = \frac{p}{q}.$$

Posant $\omega = \frac{2iK'}{p} = \frac{2K}{q}$, on voit que l'ensemble des valeurs de la fonction $u$ définie par l'élément $\Phi(x)$ est de la forme

$$u = \pm \Phi(x) + \alpha\omega \quad (\alpha = \text{entier});$$

d'où l'on voit que, en posant $f(x) = e^{\frac{2u\pi i}{\omega}}$, la fonction $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ est uniforme et reste contenue au-dessous d'une limite finie, ce qui est impossible.

## Inversion.

4. Nous avons vu plus haut que la fonction $\Phi(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{[\sqrt{R(x)}]};$$

la continuation $u$ de $\Phi(x)$ aura donc cette propriété qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{R(x)}},$$

où $\sqrt{R(x)}$ représente ou $[\sqrt{R(x)}]$ ou $-[\sqrt{R(x)}]$, suivant que la branche correspondante de la fonction $u$ est de la forme

$$\Phi(x) + \text{const.} \qquad \text{ou de celle-ci} \qquad -\Phi(x) + \text{const.}$$

Si l'on pouvait montrer qu'inversement $x$ peut être considéré comme une fonction de $u$, on aurait une solution de l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)},$$

où $u$ est une variable indépendante; mais on parvient au même but en étudiant cette équation différentielle directement, comme l'ont fait Briot et Bouquet. Nous suivrons la même voie, mais nous croyons nécessaire d'entrer, en quelques détails très délicats, dans cette question.

Il faut d'abord démontrer le théorème de Cauchy :

*Étant donnée une équation différentielle de la forme*

$$\frac{dx}{du} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu \tag{2}$$

*dont le second membre est convergent sur le cercle* $|x - x_0| = r$, *sur lequel le maximum de son module est* $g$, *cette équation sera satisfaite en posant* $x = f(u\,|\,u_0)$, *où* $f(u\,|\,u_0)$ *est une fonction exprimable par une série de la forme*

$$f(u\,|\,u_0) = x_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu (u - u_0)^\nu, \tag{3}$$

*et dont le rayon de convergence est au moins égal à* $\frac{r}{2g}$.

[Cette solution est la seule qui s'approche de $x_0$ lorsque $u$ tend vers $u_0$ (¹).] Ici $u_0$ est une quantité choisie à volonté.

*Démonstration.* — Si l'on sait que l'équation (2) est satisfaite par une fonction holomorphe au voisinage de $u_0$, on obtient immédiatement le développement (3), en observant que les dérivées de $x$ par rapport à $u$ s'obtiennent en différentiant l'équation (2). On trouve, en effet,

$$\frac{d^{n+2}x}{du^{n+2}} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{n+2}^{(m)} (x - x_0)^m,$$

où $C_{n+2}^{(m)}$ représente la somme

$$\sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+2}} \mu_1(\mu_1 + \mu_2 - 1)(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - 2)\ldots(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n+1} - n)\, a_{\mu_1} a_{\mu_2} \ldots a_{\mu_{n+2}}$$

---

(¹) Nous laisserons de côté cette dernière partie du théorème, puisqu'elle est contenue dans une propriété beaucoup plus générale des intégrales des équations différentielles, dont j'aurai l'occasion d'employer quelques cas particuliers.

étendue à toutes les solutions de l'équation indéterminée

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{n+2} = m + n + 1.$$

On aura alors

$$c_\nu = \frac{1}{\nu!}(D_u^\nu x)_{u=u_0} = \frac{1}{\nu!}C_\nu^{(0)} = \frac{1}{\nu!}F_\nu(a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

où $F_\nu$ représente une somme de la forme

$$\Sigma N_{\alpha\beta\gamma\ldots} a_\alpha a_\beta a_\gamma \ldots,$$

dans laquelle $N_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ sont des nombres entiers positifs. C'est donc la série

$$(3\ bis)\qquad f(u \mid u_0) = x_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F_\nu(a_0, a_1, a_2, \ldots)}{\nu!}(u - u_0)^\nu$$

qui peut vérifier l'équation différentielle (2). Il faut d'abord en trouver le rayon de convergence. J'observe, à cet effet, que l'on a $a_\mu \leqq g r^{-\mu}$ et, d'après la formation de la fonction $F_\nu$,

$$|F_\nu(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)| \leqq F_\nu(g, gr^{-1}, gr^{-2}, gr^{-3}, \ldots).$$

La série (3 *bis*) sera donc convergente lorsque la série

$$\varphi(v) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F_\nu(g, gr^{-1}, gr^{-2}, gr^{-3}, \ldots)}{\nu!} v^\nu$$

le sera; or il est aisé de voir que celle-ci converge pour $|v| < \frac{r}{2g}$; car, en effet, elle est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dz}{dv} = \frac{g}{1 - \frac{z}{r}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g}{r^\nu} z^\nu$$

et se réduit à zéro pour $v = 0$; une telle solution est la fonction suivante

$$z = r - r\sqrt{1 - \frac{2g}{r}v} = gv + \frac{1}{2}\frac{g^2}{r}v^2 + \ldots,$$

qui doit être identique avec $\varphi(v)$; mais le développement de cette fonction converge pour $|v| < \frac{r}{2g}$.

La série (3 *bis*) est donc convergente pour $|u - u_0| < \frac{r}{2g}$ et définit une fonction analytique $f(u|u_0)$. Il faut démontrer qu'il y a un nombre $\rho$, tel que pour chaque valeur de $u$, qui rend moindre que $\rho$ le module de $u - u_0$, cette fonction satisfait à l'équation différentielle proposée (2). Or il y a, en effet, une quantité $\rho$ pour laquelle

$$|f(u | u_0) - x_0| \leqq r \quad \text{lorsque} \quad |u - u_0| \leqq \rho;$$

la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu = \sum a_\nu [f(u | u_0) - x_0]^\nu$$

sera alors convergente et se réduira à une fonction $\psi(u)$ holomorphe au point $u_0$. La manière dont nous avons déterminé les coefficients $c_\nu$ prouve que l'on a identiquement

$$\psi^{(n)}(u_0) = f^{(n+1)}(u_0), \qquad \psi(u_0) = f'(u_0);$$

d'où l'on a, en employant la série de Taylor,

$$\psi(u) = f'(u_0) + f''(u_0)\frac{u - u_0}{1!} + f'''(u_0)\frac{(u - u_0)^2}{2!} + \ldots = f'(u).$$

On a donc

$$f'(u) = \frac{df(u | u_0)}{du} = \psi(u) = \Sigma a_\nu (x - x_0)^\nu, \qquad x = f(u | u_0),$$

ce qui démontre le théorème.

Revenant maintenant à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)} = \sqrt{R(x)}, \tag{1}$$

j'en considère l'intégrale, qui se réduit à zéro pour $u = 0$, et dont la dérivée $\sqrt{R(x)}$ y devient égale à $+1$. Puisqu'on a

$$\sqrt{R(x)} = 1 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \ldots,$$

pourvu que le module de $x$ reste inférieur à la plus petite des quantités $1$, $\left|\frac{1}{k}\right|$, ladite équation admettra l'intégrale de la forme

$$x = f(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu u^\nu, \qquad c_1 = 0, \tag{2}$$

la série étant convergente à l'intérieur d'un certain cercle décrit autour de l'origine. Nous allons d'abord prouver que cette série ne peut être convergente pour chaque valeur de $u$, de sorte que son rayon de convergence est nécessairement fini.

Supposons, à cet effet, que la série (2) soit partout convergente et définisse, par conséquent, une fonction holomorphe $f(u)$. Cela étant, la quantité $f[\Phi(x)]$ sera une quantité finie et variant d'une manière continue avec $x$ lorsque $x$ ne franchit aucune des coupures (I...IV). Il est aisé de voir qu'elle est une fonction *analytique* de la variable $x$; car nous avons en effet pour chaque valeur de $x$ dans un certain voisinage d'un point quelconque $x_0$ (en dehors des coupures) un développement de la forme

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu (x - x_0)^\nu,$$

et l'on en déduit

$$f[\Phi(x)] = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu (x - x_0)^\nu.$$

La fonction $f[\Phi(x)]$ n'ayant, dans un point quelconque, qu'une valeur finie et déterminée, et s'y comportant comme une fonction holomorphe, il est clair qu'elle est une fonction *analytique* de $x$, cette variable étant prise dans le plan affecté des coupures. Mais aussi sur celles-ci la valeur de $f(\Phi)$ reste une fonction analytique et ne peut avoir des points singuliers qu'aux points critiques $\pm 1$, $\pm \frac{1}{k}$, de sorte qu'il ne faut que chercher si elle est uniforme au voisinage de ces points ou non. Afin d'obtenir la valeur de $f[\Phi(x)]$, il suffit de la déterminer au voisinage d'un point quelconque, par exemple au voisinage de $x = 0$; supposant alors $x$ assez petit, nous aurons

$$f[\Phi(x)] = \varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu x^\nu.$$

Afin d'obtenir les coefficients, considérons la fonction $\Phi[f(u)]$ qui, pour des petites valeurs de $u$, est holomorphe; sa dérivée étant

$$\Phi'(f) f'(u) = \frac{1}{\sqrt{R(f)}} \sqrt{R(f)} = 1,$$

elle doit coïncider avec $u$,

$$\Phi[f(u)] = u,$$

ce qui fait voir que l'on a

$$f\{\Phi[f(u)]\} = f(u),$$

de sorte qu'en posant $x = f(u)$, on a

$$\Sigma A_\nu x^\nu = x,$$

d'où il suit, par conséquent, que

$$A_1 = 1, \qquad A_2 = A_3 = A_4 = \ldots = 0,$$

et par là

$$f\,\Phi(x) = x.$$

Notre fonction coïncide donc avec la fonction la plus simple, $x$, et cette coïncidence devra subsister quel que soit $x$.

Mais en faisant tendre $x$ vers l'infini, la quantité $\Phi(x)$, ainsi que $f(\Phi)$, s'approche d'une limite finie, tandis que $x$ devient infini, et l'équation $f(\Phi) = x$ sera impossible. Ce qui prouve que $f(u)$ n'est point une fonction partout holomorphe, et que la série qui la représente doit devenir divergente lorsque le module de $u$ surpasse une certaine quantité $\rho$. Représentons par $(\rho)$ le cercle de convergence de ce développement, et dont l'équation est $|u| = \rho$.

D'après un théorème bien connu, il y a au moins un *point singulier* $u_0$ de la fonction $f(u)$ sur la limite de convergence $(\rho)$ de la série (2). Il s'agit d'étudier la nature de la discontinuité de $f(u)$ au voisinage d'un tel point $u_0$.

I. Supposons d'abord qu'il y ait au voisinage de $u_0$ une série des points $u_1$ qui s'approchent indéfiniment de $u_0$ en restant à l'intérieur du cercle $(\rho)$ et tels que la quantité $f(u_1)$ tende vers une limite finie $x_0$ lorsque $u_1$ tend vers $u_0$. Soit, en premier lieu, $x_0$ différent des valeurs critiques $\pm 1$, $\pm \frac{1}{k}$. Dans ce cas, l'équation différentielle (1) prend la forme

$$\frac{dx}{du} = \sum^{\infty} a'_\nu (x - x_0)^\nu, \tag{1'}$$

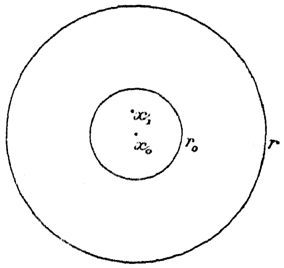
et l'on peut trouver une fonction

$$(2') \qquad x = f(u \mid u_0) = x_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c'_\nu (u - u_0)^\nu$$

qui y satisfait et se réduit à $x_0$ pour $u = u_0$; le rayon de convergence de cette série est au moins égal à $\frac{r}{2g}$, $r$ désignant une quantité moindre que le rayon de convergence de la série (1'), et $g$ représentant le module maximum de $\sqrt{R(x)}$ sur le cercle $|x - x_0| = r$.

Traçons (*fig.* 13), autour du point $x_0$ comme centre, le cercle du

Fig. 12.




rayon $r$ et ensuite un autre cercle concentrique ayant un rayon $r_0$ plus petit que $r$. Choisissons $u_1$ de telle manière que la valeur $x_1 = f(u_1)$ se trouve représentée par un point $x_1$ à l'intérieur de $(r_0)$. Alors le développement de la fonction $\sqrt{R(x)}$ autour de $x_1$, à savoir

$$(3') \qquad \sqrt{R(x)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a''_\nu (x - x_1)^\nu,$$

reste convergent à l'intérieur et sur la périphérie du cercle

$$|x - x_1| = r - r_0.$$

Le module maximum $g_1$ de $\sqrt{R(x)}$ sur ce cercle reste inférieur à $g$, puisque la fonction $\sqrt{R(x)}$ reste holomorphe sur le cercle $r$, et le cercle considéré est contenu à l'intérieur de celui-là. Donc, la fonction

$$(4') \qquad f(u) = \sum^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(u_1)}{\nu!} (u - u_1)^\nu$$

étant holomorphe au point $u_1$ et satisfaisant à l'équation différentielle $\frac{dx}{du} = \sqrt{R(x)}$, le rayon de convergence $\rho_1$ de ce dernier développement est au moins égal à $\frac{r-r_0}{2g_1} > \frac{r-r_0}{2g}$; je dis qu'on peut déterminer la quantité $u_1$ de manière que l'on ait $\frac{r-r_0}{2g} > |u_0 - u_1|$. En effet, d'après l'hypothèse, les quantités $u_1$ s'approchent indéfiniment de $u_0$ et en même temps les quantités $x_1 = f(u_1)$ tendent vers $x_0$. Construisant autour de $u_0$ un cercle avec le rayon $\frac{r-r_0}{2g}$, celui-ci contiendra à son intérieur une infinité de points $u_1$ parmi lesquels se trouvent aussi ceux pour lesquels la valeur de $f(u_1)$ est aussi voisine de $x_0$ que l'on veut, de sorte qu'on peut supposer, par exemple,

$$|f(u_1) - x_0| < r_0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La série (4′) sera donc convergente à l'intérieur d'un cercle contenant $u_0$ à son intérieur, ce qui prouve que la fonction $f(u)$ reste holomorphe au point $u_0$ et coïncide avec la série $f(u|u_0)$. Le point $u_0$ ne peut donc être un point singulier de $f(u)$.

Si, en second lieu, la quantité $x_0$ était égale à une des valeurs critiques $\pm 1$, $\pm \frac{1}{k}$, la fonction $\sqrt{R(x)}$ serait développable en série de la forme $2\sqrt{x-x_0}\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x-x_0)^\nu$ et, en changeant $x - x_0$ en $t^2$, l'équation différentielle deviendra

$$\frac{dt}{du} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu t^{2\nu} \tag{1″}$$

et admettra l'intégrale

$$t = \varphi(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (u-u_0)^\nu. \tag{2″}$$

Or, la même équation admettant l'intégrale $t = \sqrt{f(u) - x_0}$, on démontre de la même manière, comme précédemment, que ces deux intégrales coïncident, de sorte que $u_0$ n'est pas un point critique de $f(u)$.

II. Cela étant, nous allons voir que, $u_0$ étant un point singulier de $f(u)$, chaque voisinage de $u_0$ contiendra des points $u$, pour lesquels le module de $f(u)$ devient aussi grand que l'on veut. Imaginons à cet effet une série de points $u_1, u_2, u_3, \ldots$, qui s'approchent indéfiniment de $u_0$ en restant à l'intérieur du cercle $(\rho)$. A chaque point $u_\alpha$ correspond une valeur bien déterminée $f(u_\alpha) = x_\alpha$. Supposons que le module de $x_\alpha$ reste inférieur à une quantité finie R; alors toutes les quantités

$$x_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

seront représentées par des points à l'intérieur d'un cercle $|x| = R' > R$. Maintenant deux cas peuvent se présenter ici :

$\alpha$. Parmi ces points, il n'y en a qu'un nombre fini qui sont différents; de là il suit qu'au moins une des quantités $f(u_\alpha)$ se présente une infinité de fois. Or ce cas est impossible, puisque le point $u_0$ ne saurait être un point singulier, comme nous l'avons vu précédemment, soit en supposant

$$f(u_\alpha) = x_0 \gtrless \pm 1, \ \pm \frac{1}{k},$$

soit pour

$$x_0 = \pm 1, \ \pm \frac{1}{k}.$$

$\beta$. Les points $x_\alpha$ sont en nombre infini. Alors, la région finie (R′) contenant une infinité de points de l'espèce déterminée, il y aura au moins un point $x^*$ à l'intérieur de (R′), tel que chaque voisinage de ce point contient une infinité de points $x_\alpha$; en d'autres termes, chaque voisinage de $u_0$ contiendra des points $u_\alpha$, pour lesquels la quantité $f(u_\alpha)$ sera aussi approchée que l'on voudra d'une quantité finie $x^*$. Il s'ensuit, d'après ce que nous avons vu plus haut, que le point $u_0$ est un point ordinaire de la fonction $f(u)$, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc il y a, à chaque voisinage de $u_0$, des points $u_1$ où le module de $f(u_1)$ est aussi grand que l'on veut.

En posant $x = \frac{1}{z}$, l'équation différentielle (1) prend la forme

$$\frac{dz}{du} = -\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)} = a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \ldots,$$

le développement étant convergent à l'intérieur d'un cercle; soit $r$ une quantité moindre que le rayon de ce cercle. Soit $r_0$ une quantité positive moindre que $r$, et traçons le cercle $(r_0)$ avec le rayon $r_0$ autour du point $z = 0$, ainsi que le cercle $(r)$ avec le rayon $r$. Lorsque $z_1$ se trouve à l'intérieur de $(r_0)$, le rayon de convergence du développement

$$-\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)} = a'_0 + a'_1(z-z_1) + a'_2(z-z_1)^2 + \ldots$$

sera plus grand que $r - r_0$, et son module maximum sur le cercle $|z - z_1| = r - r_0$ sera inférieur au module maximum de la quantité

$$\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}$$

sur le cercle $|z| = r$, que je désigne par $g$.

Soit maintenant $u_1$ un point tel que $|u_0 - u_1| < \frac{r - r_0}{2g}$, et que $f|(u_1)| > \frac{1}{r_0}$. Alors il est clair que le développement

$$\frac{1}{f(u)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (u - u_1)^\nu$$

reste convergent sur le cercle $|u - u_1| = \frac{r - r_0}{2g}$, qui contient le point $u_0$ à son intérieur. La fonction $\frac{1}{f(u)}$ est donc holomorphe au point $u_0$, et, comme elle est susceptible de valeurs infiniment petites au voisinage de $u_0$, elle doit avoir la forme

$$\frac{1}{f(u)} = c_1(u - u_0) + c_2(u - u_0)^2 + \ldots.$$

L'équation $\frac{dz}{du} = -\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}$ fait voir que $c_1 = \pm k$ est différent de zéro, ce qui donne

$$f(u) = \frac{1}{(u - u_0)[c_1 + c_2(u - u_0) + c_3(u - u_0)^2 + \ldots]},$$

ou

$$f(u) = \frac{b}{u - u_0} + b_0 + b_1(u - u_0) + b_2(u - u_0)^2 + \ldots.$$

La fonction $f(u)$ n'admet donc sur la circonférence $(\rho)$ d'autres points singuliers que des pôles qui, par conséquent, s'y doivent présenter en nombre fini. La fonction est donc méromorphe (et uniforme) dans un domaine plus étendu que $(\rho)$. On voit de la même manière que les points singuliers de $f(u)$, en dehors de $(\rho)$, sont des pôles, de sorte que la fonction reste uniforme dans toute l'étendue du plan et n'y admet d'autres singularités que des pôles.

5. Étudions maintenant la quantité $f[\Phi(x)] = \Psi(x)$. Soit $x_0$ une quantité quelconque située en dehors des coupures I...IV. La fonction $\Phi(x)$ sera exprimable par une série de la forme

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu.$$

Cette série reste convergente à l'intérieur du cercle ayant pour centre $x_0$ et passant par le point critique $\left(\pm 1, \pm \frac{1}{k}\right)$ le plus rapproché de $x_0$ ; mais, en général, elle ne représente $\Phi(x)$ que dans une partie de ce cercle.

1° Soit $u = a_0$ un point ordinaire de $f(u)$. Dans ce cas on aura, pour les valeurs de $x$ assez voisines de $x_0$, le développement de la forme

$$f(u) = \Sigma c_\nu (u - a_0)^\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

et, par conséquent,

$$f[\Phi(x)] = \Psi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (x - x_0)^\nu.$$

2° Si, au contraire, $u = a_0$ est un point singulier de $f(u)$, nous aurons dans un certain voisinage de $a_0$

$$f(u) = \frac{c}{u - a_0} + c_0 + c_1(u - a_0) + c_2(u - a_0)^2 + \ldots,$$

ce qui donne

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} f[\Phi(x)] = {} & \frac{B_{-m}}{(x - x_0)^m} + \frac{B_{-m+1}}{(x - x_0)^{m-1}} + \ldots \\ & + \frac{B_{-1}}{x - x_0} + B_0 + B_1(x - x_0) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

$m$ étant un certain nombre entier.

Cela prouve que $\Psi(x)$ est une fonction analytique de la variable $x$. On voit aisément que les seuls points critiques que cette fonction pourrait avoir sont $x = \pm 1$, $\pm \frac{1}{k}$ et certains pôles $x_0$. Mais, lorsque $x$ est assez petit, on a $\Psi(x) = x$. Cette équation subsiste donc, quel que soit $x$. Il est clair que cette fonction n'a aucune singularité à distance finie, ce qui prouve qu'un développement de la forme (1) ne pourra jamais se présenter. En d'autres termes, lorsque $x$ est fini, la valeur de $\Phi(x)$ est un point ordinaire de $f(u)$, tandis que les valeurs de $\Phi(\infty)$ sont des pôles de $f(u)$, comme il est aisé de le voir en considérant l'équation $\Psi(x) = x$.

La fonction $f[\Phi(x)]$ étant uniforme, nous allons en conclure que $f(u)$ est doublement périodique.

Soient $x'$, $x''$ deux points infiniment voisins et placés aux côtés opposés d'une même coupure, par exemple de la coupure T. On a

$$\Phi(x'') + \Phi(x') = 2K + \varepsilon, \qquad \lim_{x'-x''=0} \varepsilon = 0;$$

d'où, en écrivant $\Phi(x') = u$, $\Phi(x'') = 2K + \varepsilon - u$,

$$f(2K + \varepsilon - u) - f(u) = x'' - x'.$$

Comme nous l'avons vu plus haut, $f(u)$ et $f(2K + \varepsilon - u)$ sont des fonctions continues de $u$. Lorsque $x'$ et $x''$ s'approchent du point $x$ sur la coupure, $u$ et $2K + \varepsilon - u$ s'approchent de $v$ et de $2K - v$, ce qui donne

$$f(2K - v) - f(v) = 0.$$

Cette équation subsistant pour une série continue des valeurs de $v$ qui correspondent aux valeurs de $x$ sur la coupure I, elle subsiste, quel que soit $v$, de sorte que nous aurons *identiquement*

$$f(2K - u) = f(u). \tag{1}$$

On trouve de même

$$f(-2K - u) = f(u),$$

et, en écrivant $u = v - 2K$,

$$f(v) = f(v + 4k). \tag{2}$$

La considération de la coupure II nous conduit à la formule

$$f(2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'-u)=f(u);$$

d'où, en posant $u=2\mathrm{K}-v$ et en faisant usage de la formule (1),

$$f(v+2i\mathrm{K}')=f(v). \tag{3}$$

Cette fonction $f(u)$ s'appelle le sinus de l'amplitude de $u$, ou le sinus modulaire, d'après Gudermann, et se désigne par $\operatorname{sinam} u$ ou plus simplement par $\operatorname{sn} u$. Elle admet les périodes $4\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$ et prend la même valeur aux points de la forme $u+$ période, $2\mathrm{K}-u+$ période. Je nomme les points de la première espèce *points homologues* avec $u$, tandis que les seconds sont des points *symétriques* avec $u$. La fonction $\operatorname{sn} u$ étant impaire, elle s'annule aux points homologues et aux points symétriques avec l'origine. Comme $\operatorname{sn} u$ reste uniforme dans toute l'étendue du plan, les périodes $4\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$ ne peuvent avoir un rapport réel et irrationnel, et comme $\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}}$ ne peut être ni zéro, ni infini, ni un nombre rationnel, ce quotient $\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}}$ sera une quantité essentiellement imaginaire. Nous pourrons supposer que la partie imaginaire de ce quotient $\frac{\mathrm{K}'i}{\mathrm{K}}$ soit positive, quoique nous ayons déjà défini, d'une manière précise, les quantités K et $\mathrm{K}'i$. Car rien n'empêche d'écrire $-\mathrm{K}'$ au lieu de $\mathrm{K}'$ et de modifier les formules correspondantes; les résultats principaux restent inaltérés par ce changement. Faisons encore des remarques sur la solution de l'équation $\operatorname{sn} u=a$. Nous avons vu que $\operatorname{sn}\Phi(x)=x$, équation qui subsiste quel que soit $x$; donc l'équation $\operatorname{sn} u=a$ sera satisfaite en prenant $u\equiv\Phi(a)$, $2\mathrm{K}-\Phi(a)$ (j'écrirai $u\equiv v$ pour exprimer que les points $u$, $v$ sont homologues). Mais il s'agit de voir si ladite équation n'admet pas d'autres solutions.

Nous avons vu que, pour les valeurs assez petites de $u$,

$$\Phi(\operatorname{sn} u)=u;$$

la variable $u$ décrivant un certain contour dans le plan $(u)$, la valeur de $\operatorname{sn} u=x$ en décrira un autre dans le plan $[x]$. Lorsque cette variable $x$

franchit une des coupures, la valeur de $\Phi(x)$ change brusquement en prenant la valeur symétrique de celle qu'avait l'expression $\Phi(x)$ avant la rencontre avec la coupure. Alors il est clair qu'on revient à la position initiale de $u$ avec une valeur de $\Phi(\operatorname{sn} u)$ de la forme

$$u + \text{période}, \quad \text{ou de celle-ci} \quad 2\mathrm{K} - u + \text{période}.$$

Telles sont donc les valeurs de la quantité $\Phi(\operatorname{sn} u)$. Supposons maintenant qu'on ait $\operatorname{sn} u = a$, alors $\Phi(a)$ devra être l'une des valeurs de $\Phi(\operatorname{sn} u)$, c'est-à-dire on aura

$$u = \Phi(a), \qquad 2\mathrm{K} - \Phi(a).$$

Ce sont précisément les valeurs de $u$ trouvées plus haut.

Nous avons, en particulier,

$$\operatorname{sn}\mathrm{K} = 1, \qquad \operatorname{sn}(\mathrm{K} + i\mathrm{K}') = \frac{1}{k};$$

comme nous l'avons vu plus haut, les fonctions $\sqrt{1 \pm \operatorname{sn} u}$, $\sqrt{1 \pm k \operatorname{sn} u}$ restent holomorphes aux points $u = \mathrm{K}$, respectivement $u = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, qui sont les seuls où elles s'évanouissent respectivement. La fonction $\operatorname{sn} u$ devenant infinie lorsque $u = i\mathrm{K}'$, et $2\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$ y étant de la forme

$$\frac{c}{u - u_0} + \Sigma c_\nu (u - u_0)^\nu,$$

les racines considérées ne sont pas uniformes au voisinage de ces pôles $u_0$. Mais les fonctions

$$\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u}, \quad \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}, \quad \sqrt{(1 \pm \operatorname{sn} u)(1 \pm k \operatorname{sn} u)}$$

y seront uniformes et le restent dans toute l'étendue du plan. On écrit

$$\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u, \qquad \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{dn} u = \Delta \operatorname{am} u,$$

en supposant $\operatorname{cn} 0 = 1$, $\operatorname{dn} 0 = 1$. On trouve aisément

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_u \operatorname{sn} u &= \phantom{-}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \mathrm{D}_u \operatorname{cn} u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \mathrm{D}_u \operatorname{dn} u &= -k^2 \operatorname{cn} u \operatorname{sn} u. \end{aligned}$$

La fonction $\operatorname{sn} u$ est impaire, tandis que $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ sont paires. Donnons les périodes des fonctions $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$.

Comme $\operatorname{sn}(2K - u) = \operatorname{sn} u$, on aura

$$\operatorname{cn}(2K - u) = \pm \operatorname{cn} u$$

ou, en changeant $u$ en $K + v$,

$$\operatorname{cn}(K - v) = \pm \operatorname{cn}(K + v),$$

ce qui exige que $\operatorname{cn}(K + v)$ soit une fonction ou paire ou impaire. Si cette fonction était paire, sa dérivée devrait s'annuler avec $v$. Or, cette dérivée étant $-\operatorname{sn}(K+v)\operatorname{dn}(K+v)$, elle se réduit à $-\sqrt{1-k^2}$ lorsque $v = 0$, ce qui prouve que la fonction considérée est impaire; on a donc

$$\operatorname{cn}(2K - u) = -\operatorname{cn} u$$

ou, en changeant $u$ en $-u$,

$$\operatorname{cn}(u + 2K) = -\operatorname{cn} u.$$

On trouve de même, en différentiant,

$$\operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u.$$

On déduit ensuite de l'équation

$$\operatorname{sn}(2K + 2iK' - u) = \operatorname{sn} u$$

cette conséquence que $\operatorname{dn}(K + iK' + v)$ est une fonction impaire de $v$, ce qui donne

$$\operatorname{dn}(u + 2K + 2K'i) = -\operatorname{dn} u,$$

ou, en employant la formule $\operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u$,

$$\operatorname{dn}(u + 2K'i) = -\operatorname{dn} u;$$

d'où, en différentiant,

$$\operatorname{cn}(u + 2K'i) = -\operatorname{cn} u.$$

## Développements des fonctions elliptiques.

6. La fonction $\operatorname{sn} u$ impaire et aux périodes $4K$, $2iK'$ n'ayant d'autres singularités que des pôles $\equiv K'i$, $2K + K'i$, on la développe aisément

en série en employant la méthode fournie par le théorème de M. Mittag-Leffler. Mais, pour m'approcher des méthodes de M. Weierstrass, je considère la fonction $\varphi u = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u}$ qui jouit de propriétés analogues à celles de la fonction $pu$. Elle satisfait à l'équation différentielle

$$\varphi'(u)^2 = 4\varphi u(\varphi u - 1)(\varphi u - k^2),$$

admet les périodes $2K$ et $2K'i$ et n'a d'autres singularités que les pôles

$$u_0 = m.2K + n.2K'i \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

où elle est de la forme

$$\frac{1}{(u-u_0)^2} + \sum_0^\infty c_\nu (u-u_0)^\nu.$$

J'écrirai, pour plus de commodité, $2K = \omega$, $2K'i = \omega'$, et je vais étudier la série

$$F(u) = \sum{}' \left[\frac{1}{(u - m\omega - n\omega')^2} - \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2}\right] + \frac{1}{u^2},$$

où les indices sommatoires $m$, $n$ parcourent toutes les combinaisons de $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sauf la combinaison $m = n = 0$.

Cette série semble jouir des mêmes propriétés que la fonction $\varphi u$. Il faut d'abord montrer qu'elle est absolument convergente et qu'elle représente une fonction analytique de $u$. Le premier fait s'établit en observant que la série $\sum{}' \frac{1}{|m\omega + n\omega'|^3}$ est convergente, comme on le voit aisément. En écrivant, pour abréger, $w = m\omega + n\omega'$, on voit que l'on a

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{2 - \frac{u}{w}}{\left(1 - \frac{u}{w}\right)^2} \frac{u}{w^3};$$

d'où il est aisé de voir que la série

$$\sum{}' \left| \frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right|$$

est convergente, ce qu'il fallait démontrer.

Pour montrer que $F(u)$ est une fonction analytique de $u$, soit (R) un cercle ayant l'origine pour centre et R pour rayon, supposé assez grand pour que $u$ soit à l'intérieur de (R). Ce cercle contient un certain nombre de quantités $w = m\omega + n\omega'$ à son intérieur et à sa périphérie; en supprimant les termes correspondants dans la somme $\sum' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$, je considère la somme

$$F_1(u) = \sum'' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

de tous les autres termes.

Puisqu'ici $|u| < |w|$, on a évidemment

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu u^{\nu-1}}{w^{\nu+1}},$$

et je dis que la série à triple entrée

$$\text{(A)} \qquad \sum_{w}'' \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu u^{\nu-1}}{w^{\nu+1}}$$

est absolument convergente. J'observe, à cet effet, que l'on a

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \left|\frac{\nu u^{\nu-1}}{w^{\nu+1}}\right| = \frac{2 - \left|\frac{u}{w}\right|}{\left(1 - \left|\frac{u}{w}\right|\right)^2} \frac{|u|}{|w|^3},$$

et il est clair que la série

$$\text{(A*)} \qquad \sum_{w}'' \sum_{\nu=2}^{\infty} \left|\frac{\nu u^{\nu-1}}{w^{\nu+1}}\right| = \sum_{w}'' \frac{2 - \left|\frac{u}{w}\right|}{\left(1 - \left|\frac{u}{w}\right|\right)^2} \frac{|u|}{|w|^3}$$

est convergente, ce qui montre la convergence absolue de (A). Donc la série (A), qui, évidemment, représente la fonction $F_1(u)$, ne change pas en intervertissant l'ordre de ses termes et peut être ordonnée suivant les puissances de $u$ :

$$\text{(B)} \qquad F_1(u) = \sum_{\nu=2}^{\infty} A_\nu u^{\nu-1}.$$

La quantité $F_1(u)$ est donc une fonction analytique de $u$ qui reste holomorphe lorsque $|u| < R$, et, comme la différence $F(u) - F_1(u)$ se réduit à un nombre fini de termes qui forment une fraction rationnelle, il est clair qu'aussi $F(u)$ est une fonction analytique de $u$, qui reste uniforme pour $|u| < R$. Comme $F(u)$ ne dépend point de R, elle est une fonction analytique uniforme de $u$ dans toute l'étendue du plan; lorsque $u$ se trouve au voisinage d'un *pôle* $w_0$, $F(u)$ prend la forme

$$\frac{1}{(u - w_0)^2} + \Sigma c_\nu (u - w_0)^\nu.$$

L'équation (B) fait voir que l'on a

$$D_u F_1(u) = \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu + 1) A_\nu u^{\nu-2} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{w}'' \frac{\nu(\nu - 1) u^{\nu-2}}{w^{\nu+1}}.$$

Comme il est aisé de voir que la dernière série à triple entrée converge absolument, on aura

$$D_u F_1(u) = \sum_{w}'' \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu(\nu - 1) u^{\nu-2}}{w^{\nu+1}} = -2 \sum_{w}'' \frac{1}{(u - w)^3},$$

ce qui prouve que l'on a

$$D_u F(u) = -2 \sum_{w}' \frac{1}{(u - w)^3} - \frac{2}{u^3} = -2 \sum_{w} \frac{1}{(u - w)^3}.$$

La fonction $F'(u) = D_u F(u)$ ne change pas évidemment en remplaçant $u$ par $u + \omega$ ou par $u + \omega'$ ou par $u + w_0$, $w_0$ étant une période $\alpha\omega + \alpha'\omega'$. De l'équation

$$D_u[F(u + w_0) - F(u)] = 0$$

on déduit

$$F(u + w_0) - F(u) = C;$$

mais

$$\begin{aligned} F(u + w_0) - F(u) &= \sum{}' \left[\frac{1}{(u + w_0 - w)^2} - \frac{1}{(u - w)^2}\right] + \frac{1}{(u + w_0)^2} - \frac{1}{w^2} \\ &= \sum{}^{\star} \left[\frac{1}{(u + w_0 - w)^2} - \frac{1}{(u - w)^2}\right] + \frac{1}{(u + w_0)^2} - \frac{1}{(u - w_0)^2}, \end{aligned}$$

où la somme $\sum^{\star}$ s'étend à tous les $w$, sauf $w = 0$, $w = w_0$. Cette quantité devant être égale à C lorsque $u = 0$, on aura

$$C = \sum{}^{\star}\left[\frac{1}{(w_0 - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right], \qquad w \gtrless 0, \quad w_0.$$

On a, de même, en posant $u = -w_0$,

$$C = \sum{}^{\star}\left[\frac{1}{w^2} - \frac{1}{(w_0 - w)^2}\right], \qquad w \gtrless 0, \quad w_0,$$

de sorte que $C = -C = 0$. Donc $F(u + w_0) = F(u)$, c'est-à-dire $F(u)$ admet les périodes $\omega$, $\omega'$.

La différence $\varphi(u) - F(u)$ admettant des périodes $\omega$, $\omega'$ et étant holomorphe dans toute l'étendue du plan doit nécessairement se réduire à une constante. Pour obtenir celle-ci, il suffit d'observer que $\varphi(u) = 0$ lorsque $u = K'i = \frac{\omega'}{2}$, ce qui donne

$$\varphi u = F(u) - F\left(\frac{\omega'}{2}\right).$$

La fonction $F(u)$ n'est autre chose que la fonction $pu$ de M. Weierstrass.

On aura donc

$$\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} u} = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n}{}' \left[\frac{1}{(u - m\omega - n\omega')^2} - \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2}\right]$$
$$- \frac{1}{\left(\frac{\omega'}{2}\right)^2} - \sum_{m,n}{}' \left\{\frac{1}{[m\omega + (n - \frac{1}{2})\omega']^2} - \frac{1}{(m\omega + n\omega')^2}\right\}$$

ou, plus simplement,

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = \sum_{m,n} \left[\frac{1}{(u - m\omega - n\omega')^2} - \frac{1}{(m\omega + n\omega' - \frac{1}{2}\omega')^2}\right] = \varphi u.$$