

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

X. STOUFF

Sur la transformation des fonctions fuchsiennes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 5 (1888), p. 219-326

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__219_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA TRANSFORMATION
DES
FONCTIONS FUCHSIENNES,

PAR M. X. STOUFF,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR AU LYCÉE DE GRENOBLE.

INTRODUCTION.

Ce travail a son origine dans les Ouvrages de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes. Il se divise en deux Parties. La première est relative à la théorie des sous-groupes; les trois premiers paragraphes traitent d'une formule de correspondance entre deux surfaces de Riemann et de ses applications aux groupes fuchsien. Le § IV a été consacré aux sous-groupes distingués, le § V aux substitutions directes et inverses. En effet, outre l'intérêt qu'offrent par elles-mêmes ces deux questions, elles conduisent à des résultats fort utiles quand on étudie les opérations qui transforment un polygone en un polygone équivalent. Le § VI, qui commence la deuxième Partie, contient des théorèmes généraux établissant une liaison entre cette Partie et la précédente. Les §§ VII et VIII contiennent des applications de ces théorèmes aux genres 2 et 3. Je me suis aussi souvent aidé des propriétés des opérations fondamentales d'un groupe pour reconnaître l'isomorphisme de certains groupes fuchsien et de groupes d'opérations (').

(¹) Ouvrages à consulter : *Sur les groupes des équations linéaires*; M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. IV, p. 279 à 294); M. Goursat (Thèse de doctorat); Klein, deux Notes insérées dans les *Mathematische Annalen*, t. 19 et 20 : *Ueber eindeutige Functionen mit lineären Transformationen in sich selbst*; Walther Dyck, *Ueber reguläre Riemannsche Flächen. Gruppentheoretische Studien.*

Je rends compte, dans l'Introduction même, de certaines définitions et propositions empruntées à la Géométrie non euclidienne (1).

Systèmes de coordonnées et variable imaginaire. — 1° Dans un premier système, on définit un point M du cercle fondamental par la L, ρ de l'arc qui le joint à un point fixe P et par l'angle θ de PM avec un arc fixe passant en P. L'élément de L a pour expression dans ce système

$$dL^2 = d\rho^2 + \text{sh}^2 \rho d\theta^2.$$

Nous désignerons par z_p la fonction $\text{th} \frac{\rho}{2} e^{i\theta}$, qui jouit des propriétés des fonctions imaginaires. 2° Dans un second système, on fait choix d'un arc de cercle Px orthogonal au cercle fondamental; on définira un point M par sa distance ρ à Px et par la distance ω à P du pied de l'arc mené par M perpendiculairement à Px . On a

$$dL^2 = d\rho^2 + \text{ch}^2 \rho d\omega^2;$$

je désignerai par z_{px} la fonction imaginaire $\frac{1 - i \text{th} \frac{\rho}{2}}{1 + i \text{th} \frac{\rho}{2}} e^{i\omega}$.

Systèmes de deux arcs. — Lorsque deux arcs A, A' orthogonaux au cercle fondamental ne se coupent pas, on peut regarder leur angle comme imaginaire et égal à $i\Delta$, Δ étant la L de l'arc P perpendiculaire à la fois à A et à A'. Cette remarque et les remarques analogues permettent de réunir plusieurs théorèmes sous un même énoncé. Ainsi le théorème : *Deux triangles sont égaux quand ils ont trois angles égaux chacun à chacun*, reste vrai quand même les angles des triangles deviennent imaginaires.

Le point C, milieu de P, est tel que tout cercle passant par C et limité à A et A' est partagé par C en deux parties égales; nous le nommerons *centre des deux arcs* A et A'.

Des arcs perpendiculaires à un même arc passent par un point fixe imaginaire.

(1) Je n'ai considéré que les polygones de la première famille.

Des substitutions linéaires. — La forme la plus générale des substitutions qui changent en lui-même le cercle de centre o et de rayon 1 est

$$z' = \frac{(m + in)z + p + iq}{(p - iq)z + m - in} = \frac{\alpha z + \beta}{\beta_0 z + \alpha_0}, \quad m^2 + n^2 - p^2 - q^2 = \alpha\alpha_0 - \beta\beta_0 = 1;$$

on peut représenter simplement cette substitution par (α, β) . On a

$$(\alpha, \beta)(\alpha', \beta') = (\alpha\alpha' + \beta_0\beta', \beta\alpha' + \alpha_0\beta'), \quad (\alpha, \beta)^{-1} = (\alpha_0, -\beta).$$

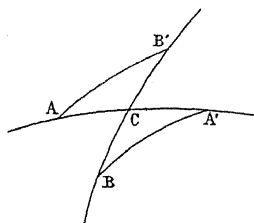
Au point de vue géométrique, toute substitution peut être considérée comme un mouvement : une substitution hyperbolique comme une translation; une substitution elliptique comme une rotation d'un angle α . Nous appellerons *axe d'une substitution hyperbolique* l'arc que cette substitution laisse invariable, L de la substitution la distance constante en un point de l'axe et son transformé.

Pour que deux substitutions hyperboliques soient les transformées l'une de l'autre par une substitution, il faut et il suffit qu'elles aient même L . On démontre fort simplement que la condition est nécessaire. En la supposant réalisée, soient A et A' les axes des deux substitutions. La substitution transformante Σ doit changer A en A' . Si Σ est elliptique, son point double devra être situé sur le lieu des points équidistants de A et de A' . Si A et A' se coupent, ce lieu se compose de deux arcs, mais un seul des deux convient. Dans le cas contraire, il se compose d'un seul arc qui convient, si les deux mouvements ne sont pas de même sens, et ne convient pas dans le cas contraire. Si A et A' se coupent et si Σ est hyperbolique, son axe doit être perpendiculaire au lieu des points doubles des substitutions elliptiques transformantes. Si A et A' ne se coupent pas et si les deux mouvements ne sont pas de même sens, l'axe de Σ est perpendiculaire au lieu des points équidistants. Dans le cas contraire, il passe par le centre de A et de A' .

Composition des substitutions. — Soient $2\alpha, 2\alpha'$ les L de deux substitutions hyperboliques S et S' dont les axes se coupent en C (*fig. 1*). Prenons, sur l'axe de S , $CA = CA' = \alpha$ et sur celui de S' , $CB = CB' = \beta$. S transforme AB' en BA' ; S' transforme BA' en AB' ; donc SS' a pour axe AB' et pour L , $2AB' = 2\rho$; $S'S$ a pour axe BA' et pour L , $2BA' = 2\rho$.

En général, si une substitution hyperbolique est la résultante de deux autres substitutions hyperboliques, leurs axes sont les trois côtés d'un

Fig. 1.



triangle, dont les côtés ont pour longueurs α , β , ρ , cela quand même les angles du triangle seraient imaginaires.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. — Formule relative à la correspondance entre deux surfaces de Riemann.

Imaginons deux surfaces de Riemann S et T , respectivement de genres p et q . On peut supposer, sans diminuer la généralité, que ces surfaces ont été déformées et placées dans l'espace, de façon à n'avoir plus de feuillettes les uns sur les autres. Toute surface du genre 2, par exemple, peut ainsi prendre la forme d'un anneau double.

Faisons les hypothèses suivantes :

1° Entre les points de ces deux surfaces existe une correspondance analytique, de telle sorte qu'à un point M de S répondent m points N_1, N_2, \dots, N_m de T , et à un point N de T n points de S , M_1, M_2, \dots, M_n .

En disant que cette correspondance est analytique, j'entends qu'un petit domaine D , pris sur la surface S , est reproduit sur T sans que les angles formés par les courbes que l'on y peut tracer soient altérés, sauf

lorsque ce petit domaine contient certains points particuliers de la surface S .

2° Les points N cessent d'être fonctions uniformes du point M lorsque M vient coïncider avec un nombre fini de points de S , A_1, A_2, \dots, A_h .

Soient $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h$ les nombres de points N qui se réunissent en un seul lorsque M vient respectivement en A_1, A_2, \dots, A_h . La correspondance est telle que, si l'on considère une variable imaginaire ζ sur la surface S , s'annulant en A_i ($i = 1, 2, \dots, h$) et infiniment petite du premier ordre dans le voisinage de ce point, la variable imaginaire jouissant sur T des mêmes propriétés dans le voisinage du point de réunion se comporte comme $C\zeta^{\frac{1}{\mu_i}}$, C étant une fonction de ζ qui n'est pas infiniment petite.

Inversement, il y a, sur T , h points pour lesquels $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_h$ points M se réunissent, et ces points M dans le voisinage de leurs points de réunion jouissent des propriétés énoncées pour les points N dans le voisinage de leurs points de réunion. Je les appelle B_1, B_2, \dots, B_h .

Recouvrons la surface T de n feuillets formant une surface de Riemann T' et telle que la connaissance d'un point N en T' détermine complètement le point M correspondant. Ces feuillets sont réunis cycliquement, ν_1 à ν_1, ν_2 à ν_2, \dots, ν_h à ν_h respectivement aux points B_1, B_2, \dots, B_h . Soit g' le genre de la surface T' .

Par $2p$ coupures K_1, K_2, \dots, K_{2p} partant d'un point L de la surface S et revenant au point L , je transforme S en une surface simplement connexe. Traçons de plus une coupure partant du point A_1 passant par les points A_2, \dots, A_h et aboutissant en L . Soit (S) la surface ainsi modifiée. Quand le point M décrit la surface (S) , le point N décrit une partie de la surface T' . Cette partie est un polygone qui a $2p + h$ paires de côtés conjugués, $2p$ paires correspondant aux coupures K_1, K_2, \dots, K_{2p} et h paires correspondant aux portions $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{h-1} A_h, A_h L$ de la dernière coupure.

Permettons au point M de franchir une des coupures de la surface (S) , le point N sortira du polygone précédent; et, si ensuite le point N décrit la surface (S) , N décrira sur T' un nouveau polygone construit comme le précédent et qui lui est adjacent. En continuant, on recouvrira la surface T' d'un réseau de m polygones semblables au premier.

Appliquons à ce réseau la formule d'Euler généralisée. Dans tout réseau de polygones recouvrant complètement une surface fermée, le nombre des arêtes plus 2 est la somme du nombre des polygones, du nombre des sommets du réseau et du double du genre de la surface. Le nombre des arêtes est $(2p + h)m$: le réseau a m sommets qui sont les m homologues du point L. Les autres sommets du réseau correspondent tous aux points A_1, A_2, \dots, A_h . Si les points correspondant à A_1, A_2, \dots, A_h étaient tous distincts entre eux, leur nombre serait mh . Mais μ_1 sont réunis en un seul sommet du réseau, μ_2 en un autre sommet, \dots . Il faut donc retrancher du nombre précédent $(\mu_1 - 1) + (\mu_2 - 1) + \dots + (\mu_h - h)$, ce qui donne

$$mh + h - (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_h).$$

On a donc

$$(1) \quad (2p + h)m + 2 = m(h + 2) + h - (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_h) + 2q'.$$

Reste à calculer le genre q' de la surface T' . Ramenons, en la déformant, la surface T à une surface de Riemann étendue sur un plan, de manière que les points communs à plusieurs feuillets dans la nouvelle surface T ne coïncident pas avec les points B_1, B_2, \dots, B_k . Si l'on n'introduisait pas cette hypothèse, la difficulté serait facile à lever. Mais c'est une complication inutile.

λ étant le nombre des feuilles de la surface T , ω la somme des ordres des points singuliers de cette surface (l'ordre d'un point singulier est le nombre des feuilles qui sont réunies cycliquement diminué d'une unité), on a

$$(2) \quad 2q = \omega - 2\lambda + 2.$$

Or chaque point singulier de T donne naissance à n points singuliers du même ordre sur T' ; T' a encore k points singuliers dont les ordres sont respectivement $(\nu_1 - 1), (\nu_2 - 1), \dots, (\nu_k - 1)$. Donc la somme ω' des ordres de ses points singuliers est

$$\omega' = n\omega + (\nu_1 - 1) + (\nu_2 - 1) + \dots + (\nu_k - 1),$$

et comme le nombre des feuilles de T' est $n\lambda$, on a

$$(3) \quad 2q' = \omega' - 2n\lambda + 2 = n(\omega - 2\lambda) + 2 + (\nu_1 - 1) + (\nu_2 - 1) + \dots + (\nu_k - 1),$$

en éliminant $\varphi - 2\lambda$ et $2q'$ entre les équations (1), (2) et (3), on a la relation que je me proposais d'établir

$$(4) \quad \begin{cases} (2p - 2)m + (\mu_1 - 1) + (\mu_2 - 1) + \dots + (\mu_h - 1) \\ = (2q - 2)n + (\nu_1 - 1) + (\nu_2 - 2) + \dots + (\nu_k - 1). \end{cases}$$

Soit $f(x, y) = 0$ une relation algébrique caractérisant la surface de Riemann S; $g(x', y') = 0$ une relation caractérisant la surface T. Si x' et y' sont donnés en fonction de x et de y par des équations algébriques et inversement, les conditions imposées à la correspondance sont remplies, et l'on a le droit d'appliquer la formule (4).

§ II. — Interprétation de la formule précédente dans la théorie
des fonctions fuchsiennes.

Imaginons qu'il existe entre deux surfaces de Riemann

$$f(x, y) = 0, \quad g(x', y') = 0$$

une correspondance algébrique où à un point de f répondent m points de g , et à un point de g , n points de f ; supposons de plus que $x, y; x', y'$ puissent être exprimés en fonctions fuchsiennes d'une variable z , et que cette variable subisse une substitution linéaire, soit lorsque le point (x, y) décrit un contour fermé sur la surface f , soit lorsque (x', y') décrit un contour fermé sur g .

L'ensemble des substitutions qui laissent à la fois x, y invariables forme un groupe H : celui des substitutions qui ne changent pas x', y' forme un groupe K.

On peut trouver $m - 1$ polygones homologues de h_0 par rapport à H; h_0, h_1, \dots, h_{m-1} , tels que les points $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{m-1}$ situés respectivement dans h_0, h_1, \dots, h_{m-1} et homologues entre eux par rapport à H ne soient pas homologues entre eux par rapport à K. Considérons le polygone $h_0 + h_1 + \dots + h_{m-1}$ et amenons P_0 sur un côté C_0 de h_0 . Soit C'_0 le conjugué de C_0 dans h_0 ; $C'_1, C'_2, \dots, C'_{m-1}$ les homologues de C'_0 dans h_1, h_2, \dots, h_{m-1} , C_0, C_1, \dots, C_{m-1} ne sont pas homologues entre eux par rapport à K. Or il ne peut y avoir plus de m points homologues entre eux par rapport à H qui ne soient pas homologues entre eux par rapport à K; donc, parmi $C'_0, C'_1, \dots, C'_{m-1}$, il y a

un côté C'_i qui est homologue à C_0 par rapport à K . Soit C_i l'homologue dans h_i de C_0 dans h_0 . Il n'est pas homologue à C_0 par rapport à K ; il a, parmi $C'_0, C'_1, \dots, C'_{m-1}$, un homologue C'_j qui ne peut donc coïncider avec C'_i . En procédant ainsi, on conjuguera les côtés du polygone $h_0 + h_1 + \dots + h_{m-1}$ de manière à former un polygone m_0 générateur d'un groupe fuchsien M contenu à la fois dans H et K . On a entre les S de m_0 , de h_0 et de k_0 générateur de K les relations

$$m_0 = mh_0 = nk_0.$$

Soient ξ et η deux fonctions fondamentales du groupe M , entre lesquelles a lieu la relation

$$\varphi(\xi, \eta) = 0.$$

A un point (ξ, η) répondent un seul point (x, y) et un seul point (x', y') ; mais à un point (x, y) répondent m points (ξ, η) , et à un point (x', y') n points (ξ, η) .

La correspondance entre les deux surfaces de Riemann f et g résulte donc de deux correspondances d'une nature plus simple, entre f et φ , g et φ . Nous ne ferons plus désormais intervenir que celles-ci, ce qui revient à ne considérer à la fois que deux groupes fuchsien dont l'un contient l'autre.

Deux problèmes se présentent :

1° Déterminer les sous-groupes d'un groupe fuchsien.

On obtient les polygones générateurs des sous-groupes en réunissant plusieurs polygones du réseau du groupe primitif et en conjuguant convenablement les côtés restés libres.

2° Considérons un groupe fuchsien G qui dépend de paramètres variables. Pour quelles valeurs de ces paramètres est-il contenu dans un autre groupe?

Il est intéressant de chercher quand cette circonstance se présente, parce que ces groupes particuliers sont plus simples que les autres et que le calcul des équations fuchsiennes correspondantes peut même se faire algébriquement dans certains cas. Le groupe G engendre une équation fuchsienne

$$(1) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v,$$

$$(1') \quad \psi(x, y) = 0,$$

et, si G est contenu dans un groupe Γ engendrant l'équation fuchsienne

$$(2) \quad \frac{d^2 w}{dx'^2} = \pi(x', y') w,$$

$$(2') \quad \rho(x', y') = 0,$$

x' et y' sont des fonctions rationnelles de x et de y , mais x et y sont seulement des fonctions algébriques de x' et de y' . Nous dirons que l'équation (1), (1') est *réductible* à l'équation (2), (2').

Soient

R le polygone générateur du groupe G;

p le genre de ce groupe;

$\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}, \dots, \frac{2\pi}{\alpha_n}$ les sommes d'angles de ces différents cycles.

La S du polygone R est

$$(3) \quad R = 2\pi \left(2p - 2 + n - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} - \dots - \frac{1}{\alpha_n} \right).$$

D'autre part,

P étant le polygone générateur du groupe Γ;

ϖ le genre de ce groupe;

$\frac{2\pi}{\mu_1}, \frac{2\pi}{\mu_2}, \dots, \frac{2\pi}{\mu_l}$ les sommes d'angles des cycles,

$$(4) \quad P = 2\pi \left(2\varpi - 2 + l - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \dots - \frac{1}{\mu_l} \right).$$

Le rapport $\frac{R}{P}$ étant un nombre entier N, on a

$$(5) \quad 2p - 2 + n - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} - \dots - \frac{1}{\alpha_n} = N \left(2\varpi - 2 + l - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \dots - \frac{1}{\mu_l} \right).$$

La formule (5), malgré son aspect, n'est autre que la formule de correspondance établie dans le § I, appliquée au cas qui nous occupe. Il est instructif de démontrer l'identité des deux formules. Chacun des cycles de P donne naissance, dans le polygone R, à N points non homologues entre eux par rapport au groupe G, mais qui peuvent être distincts ou bien coïncider entre eux. Deux circonstances différentes peu-

vent se présenter : je supposerai que la première est présentée par le cycle de P qui a pour somme d'angles $\frac{2\pi}{\mu_1}$, et le second par celui qui a pour sommes d'angles $\frac{2\pi}{\mu_2}$.

1° Tous les points qui correspondent au cycle dont la somme d'angles est $\frac{2\pi}{\mu_1}$ sont à l'intérieur de R. Parmi les puissances de la substitution elliptique de période μ_1 , qui a pour point double l'un des sommets du cycle, il n'y a que la substitution identique, c'est-à-dire la puissance μ_1 , qui appartient au groupe G. Les N points coïncident donc μ_1 à μ_1 , et $\frac{N}{\mu_1}$ est un entier qui exprime le nombre de ces points qui sont distincts entre eux.

2° Supposons que, parmi les points qui, dans R, correspondent au cycle dont la somme d'angles est $\frac{2\pi}{\mu_2}$, il y en ait qui coïncident avec les sommets des cycles $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ et $\frac{2\pi}{\alpha_2}$, et que les autres tombent dans l'intérieur de R. Puisque le groupe Γ comprend le groupe G, la substitution elliptique, qui a pour point double l'un des sommets du cycle $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ et pour période α_1 , est une puissance de la substitution elliptique qui a le même point double et pour période μ_2 ; donc $\frac{\mu_2}{\alpha_1}$ est un entier. Cet entier exprime combien des N points sont absorbés par le cycle $\frac{2\pi}{\alpha_1}$; de même $\frac{\mu_2}{\alpha_2}$ est un entier qui exprime combien des N points sont absorbés par le cycle $\frac{2\pi}{\alpha_2}$. Il reste $N - \frac{\mu_2}{\alpha_1} - \frac{\mu_2}{\alpha_2}$ points qui tombent dans l'intérieur de R; ceux-ci coïncident μ_2 à μ_2 . Donc $\frac{N}{\mu_2} - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}$ est un entier. Cet entier exprime le nombre des points distincts situés à l'intérieur de R; le nombre total des points distincts, en y comprenant les deux cycles $\frac{2\pi}{\alpha_1}$ et $\frac{2\pi}{\alpha_2}$, est $\frac{N}{\mu_2} - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + 2$. Or la formule du § I peut s'énoncer ainsi : la différence entre $2p - 2$ et $(2\varpi - 2)N$ est la somme des nombres de points qui coïncident, moins le nombre total des coïncidences. La somme des nombres de points qui coïncident est Nl ; le

nombre total des coïncidences est

$$\begin{aligned} & \frac{N}{\mu_1} + \frac{N}{\mu_2} - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + 2 + \dots \\ &= \frac{N}{\mu_1} + \frac{N}{\mu_2} + \dots + \frac{N}{\mu_l} - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} - \dots - \frac{1}{\alpha_n} + n. \end{aligned}$$

On a donc

$$2p - 2 - (2\varpi - 2)N = Nl - \frac{N}{\mu_1} - \frac{N}{\mu_2} - \dots - \frac{N}{\mu_l} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} - n,$$

ce qui est précisément la formule (5).

Étant donné le groupe fuchsien G le plus général de genre p et dont le polygone générateur possède n cycles avec $\frac{2\pi}{\alpha_1}, \frac{2\pi}{\alpha_2}, \dots, \frac{2\pi}{\alpha_n}$ pour sommes d'angles, dans quels cas est-il contenu dans un autre groupe fuchsien? A chaque solution de cette question correspond un système d'entiers $N, l, \varpi, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ satisfaisant à l'équation (5). $N, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ sont plus grands que 1; l et ϖ sont positifs ou nuls. De plus, les groupes G et Γ étant fuchiens (ni rationnels, ni elliptiques), les deux membres de l'équation (5) sont positifs.

Inversement, on est conduit à chercher, pour résoudre la question, un système d'entiers satisfaisant à l'équation (5) et aux conditions précédentes. Lorsque l'on aura obtenu un pareil système, on construira le polygone fuchsien P correspondant et l'on cherchera à former par le groupement de P avec ses homologues un polygone R . Montrons d'abord que le nombre des systèmes d'entiers que l'on peut obtenir est fini.

On a, en effet,

$$\begin{aligned} & 2\varpi - 2 + l - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \dots - \frac{1}{\mu_l} \\ &= 2\varpi - 2 + \left(1 - \frac{1}{\mu_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{\mu_l}\right). \end{aligned}$$

Chacun des entiers μ étant plus grand que 1, chacune des parenthèses est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$; d'ailleurs ϖ a pour minimum 0; donc le premier membre est égal ou supérieur à $\frac{l}{2} - 2$. Comme $N \geq 2$, on a

$$l \leq 2p + 2 + n - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} - \dots - \frac{1}{\alpha_n}.$$

groupe de cette équation est engendré par un polygone fuchsien P , et à P correspond une surface de Riemann de genre ϖ , que nous supposons placée dans l'espace. Soient M_1, M_2, \dots, M_l les points de cette surface qui correspondent aux cycles $\frac{2\pi}{\mu_1}, \frac{2\pi}{\mu_2}, \dots, \frac{2\pi}{\mu_l}$. Recouvrons cette surface de N feuilles, d'abord isolées les unes des autres.

Traçons un système de 2ϖ coupures rendant la surface primitive simplement connexe; puis une coupure allant de M_1 à M_2 , une autre de M_2 à M_3, \dots , une de M_{l-1} à M_l et une de M_l à la limite. Nous supposons qu'en faisant chacune de ces coupures on tranche à la fois les N feuillets placés les uns sur les autres. On aura ensuite à rejoindre les bords devenus libres et situés en face les uns des autres, de façon que sur M_1 il y ait un premier système de $\frac{\mu_1}{\alpha_1}$ feuillets réunis cycliquement, un autre système de $\frac{\mu_1}{\alpha_2}$ feuillets, etc., un de $\frac{\mu_1}{\alpha_{k_1}}$ feuillets, et que les autres feuillets, s'il en reste, soient réunis μ_1 à μ_1 et que, pour M_2, \dots, M_l , les choses se passent d'une manière analogue. A toute nouvelle surface de Riemann ainsi construite correspondra dans le cercle fondamental un polygone R , composé de N polygones P et engendrant un groupe fuchsien G satisfaisant aux conditions proposées.

Pour donner une idée de la manière d'opérer dans les questions de ce genre, je traiterai le problème suivant : *Étant données neuf droites parallèles entre elles, trouver les courbes du quatrième degré tangentes à huit d'entre elles et ayant quatre points coïncidents à l'infini sur la neuvième.*

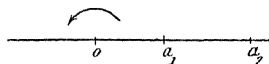
En prenant la neuvième droite pour axe des y et pour axe des x une perpendiculaire à ces huit droites, l'équation de la courbe sera du troisième degré en y , et elle donne naissance à une surface de Riemann à trois feuilles : o est commun aux trois feuilles, a_1, a_2, \dots, a_8 étant les abscisses des huit tangentes, les points a_1, a_2, \dots, a_8 sont communs à deux feuilles.

Supposons le problème résolu; soient $1, 2, 3; 1', 2', 3'$ six demi-feuillets de la surface de Riemann 1 sur $2, 2$ sur $3, 3$ sur le demi-plan positif des $x; 1'$ sur $2', 2'$ sur $3', 3'$ sur le demi-plan négatif. Une des valeurs de y reste pour $x = a_i$ fonction uniforme de x . Nous attachons cette valeur aux demi-feuillets 1 et $1'$, de telle sorte que ces demi-

feuilletés sont joints le long de oa_1 et le long de a_1a_2 (*fig. 2*). Pour définir quelles valeurs de y sont attachées aux autres feuilletés, nous supposons que, lorsque x tourne dans le sens positif autour de o , xy parcourt successivement les demi-feuilletés 1, 2', 2, 3', 3, 1'. Alors la superposition et la jonction des feuilletés est partout complètement déterminée.

Inversement, pour déterminer les courbes du quatrième degré répondant à la question, on placera, sur le plan des x , six demi-feuilletés 1, 2, 3; 1', 2', 3'. Le problème consiste à réunir leurs bords de manière à obtenir une surface à trois feuilles constituée comme je l'ai dit.

Fig. 2.



La jonction des demi-feuilletés aura lieu ainsi

$$oa_3, \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2' & 3' & 1' \end{matrix}; \quad oa_1, \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1' & 2' & 3' \end{matrix}; \quad a_1a_2, \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1' & 3' & 2' \end{matrix}.$$

Le long de a_2a_3 deux des demi-feuilletés restent joints comme ils l'étaient le long de a_1a_2 ; pour les quatre autres, il y a interversion. On peut donc imaginer trois cas :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1' & 2' & 3' \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3' & 1' & 2' \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2' & 3' & 1' \end{matrix}.$$

Les chiffres inférieurs forment les trois permutations paires de 1', 2', 3'. Le long de a_3a_4 les trois hypothèses admissibles sont formées par les trois permutations impaires.

..... Les surfaces de Riemann cherchées sont au nombre de 3^e. Une de ces surfaces de Riemann ne définit pas complètement la fonction y , mais toutes les fonctions y de cette surface de Riemann s'expriment rationnellement par x et par l'une d'entre elles. Au contraire, une fonction y d'une surface de Riemann ne peut s'exprimer rationnellement par x et par une fonction y d'une autre surface.

§ III. — Applications.

Voici des exemples. Dans les premiers, on prend les cas spéciaux où un groupe G est contenu dans un autre. Dans le dernier on détermine, au contraire, certains groupes contenus dans un groupe donné.

A.

1° On considère un quadrilatère R dont les côtés opposés sont conjugués. Notons les sommets 1, 2, 3, 4 en tournant dans le sens positif. Ils appartiennent tous au même cycle, dont je supposerai la somme d'angles égale à π .

On a ici

$$p = 1, \quad n = 1, \quad \alpha_1 = 2,$$

et la formule (5) du § II devient

$$(1) \quad \frac{1}{2} = N \left(2\varpi - 2 + l - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} - \dots - \frac{1}{\mu_l} \right);$$

d'ailleurs,

$$l \leq 2p + 2 + n - \frac{1}{\alpha_1} - \dots - \frac{1}{\alpha_n},$$

donc

$$l \leq 4\frac{1}{2}.$$

On trouve aisément que ϖ est nul, et que

$$l = 4 \quad \text{ou} \quad l = 3.$$

Le système (6) du § II s'écrit

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{N}{\mu_1} - \frac{1}{2} = h_1, & \frac{N}{\mu_2} = h_2, & \dots, & \frac{N}{\mu_l} = h_l, \\ h_1 + \dots + h_l + 1 - (l-2)N = 0. \end{cases}$$

Pour $l = 4$, l'équation (1) s'écrit

$$\frac{1}{2N} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4} = 2,$$

où trois des μ divisent N ; pour y satisfaire, il faut poser, en tenant compte de (2),

$$N = 2, \quad \mu_1 = 4, \quad \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 2.$$

Le polygone correspondant peut être mis sous la forme d'un triangle ABC, où $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ et où les demi-côtés DA et DB, EB et EC, FC et FA sont conjugués; le triangle dépend de deux paramètres comme le quadrilatère R.

Le groupe G de tout quadrilatère est en effet contenu dans un groupe Γ engendré par un de ces triangles. En effet, la diagonale 13 partage R en deux triangles 123, 143 qui sont égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. En conjuguant entre eux les demi-côtés de ces triangles, on forme un polygone duquel dérive un groupe Γ contenant évidemment le groupe G.

Soit maintenant $l = 3$, nous aurons à chercher les solutions en nombres entiers de l'équation

$$\frac{1}{2N} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} = 1,$$

μ_2 et μ_3 divisant N et $\frac{N}{\mu_1} - \frac{1}{2}$ étant entier.

On voit aisément que, lorsque deux des entiers μ sont égaux entre eux ou lorsque l'un d'eux est égal à deux et le second double du troisième, la solution considérée peut se ramener à une autre. Il n'est nécessaire de considérer que les solutions irréductibles. Nous étudierons spécialement les quatre suivantes :

(α)	$N = 6,$	$\mu_1 = 12,$	$\mu_2 = 2,$	$\mu_3 = 3,$
(β)	$N = 6,$	$\mu_1 = 4,$	$\mu_2 = 2,$	$\mu_3 = 6,$
(γ)	$N = 10,$	$\mu_1 = 4,$	$\mu_2 = 2,$	$\mu_3 = 5,$
(δ)	$N = 12,$	$\mu_1 = 8,$	$\mu_2 = 2,$	$\mu_3 = 3,$

en cherchant à former des groupes contenant non seulement G, mais encore Γ .

α .

En appliquant les formules (6) du § II au groupe Γ , on a

$$\begin{aligned} p = 0, \quad n = 4, \quad \alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 2, \\ \varpi = 0, \quad N = 3, \quad \mu_1 = 12, \quad \mu_2 = 2, \quad \mu_3 = 3; \end{aligned}$$

nous savons déjà que les sommets du quadrilatère font partie du cycle $\frac{2\pi}{12}$: il en est de même des sommets A, B, C du triangle ; donc

$$\alpha_{1_1} = 4,$$

Comme, dans cette hypothèse, $\frac{N}{\mu_1} - \frac{1}{\alpha_{1_1}} = 0$, on a

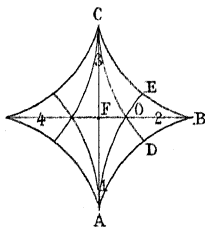
$$h_1 = 0, \quad k_1 = 1,$$

$\mu_3 = 3$ n'est divisible par aucun des α ; donc $h_3 = \frac{N}{\mu_3} = 1$, $k_3 = 0$; par suite,

$$k_2 = 3, \quad \alpha_{1_2} = \alpha_{2_2} = \alpha_{3_2} = 2, \quad h_2 = \frac{N}{\mu_2} - \frac{1}{\alpha_{1_2}} - \frac{1}{\alpha_{2_2}} - \frac{1}{\alpha_{3_2}} = 0.$$

Imaginons donc une sphère, et recouvrons-la de trois feuilles ; en deux points de la sphère, les feuilles seront réunies trois à trois, et, en prenant l'image, dans le cercle fondamental, tant des trois feuilles que de la surface tout entière, on obtient un triangle ADBECF (*fig. 3*),

Fig. 3.



formé de six triangles égaux entre eux et ayant pour angles $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$. La réunion de deux de ces triangles forme le quadrilatère 1234, où les côtés opposés sont conjugués.

Si le quadrilatère éprouve une rotation autour du point F égale à π , les substitutions qui transforment l'un dans l'autre les côtés opposés engendrent encore le même groupe. Il en est de même si l'on fait tourner le quadrilatère, soit autour de D, soit autour de E. Le groupe G engendré par le quadrilatère est donc un sous-groupe *distingué* du groupe Γ engendré par le triangle ADBECF.

On reconnaît de même que G et Γ sont des sous-groupes *distingués* du groupe engendré par le triangle COBE, dans lequel on suppose OB et OC, EB et EC conjugués.

Occupons-nous maintenant des fonctions fuchsiennes fondamentales du quadrilatère. Le triangle OBEC est l'image du plan d'une variable x' à laquelle nous pouvons attribuer la valeur ∞ au point O, la valeur 0 aux points B et C, la valeur 1 au point E. $\sqrt[3]{x'}$ est une fonction uniforme de z dont le plan a pour image le triangle ADBECF. Désignons-la par x . On pourra prendre $x = 1$ au point F, $x = j$ au point D, $x = j^2$ au point E. La fonction $y = \sqrt{x(x-1)(x-j)(x-j^2)}$ (où j et j^2 sont les racines cubiques imaginaires de l'unité) est uniforme par rapport à z , car elle ne peut offrir de ramifications que pour $x = 0, 1, j$ ou j^2 ; or les valeurs de z qui correspondent à $x = 0$ sont des zéros quadruples de cette fonction, et les valeurs de z qui correspondent à $x = 1, j$ ou j^2 sont des zéros doubles respectivement des fonctions $x - 1, x - j, x - j^2$. y et x forment donc les deux fonctions fuchsiennes fondamentales, et le quadrilatère est l'image de la surface de Riemann

$$y = \sqrt{x(x^3 - 1)},$$

dont l'équation peut aussi se mettre sous la forme

$$v = \sqrt{(1 - u^2)[1 + (2 - \sqrt{3})^2 u^2]}.$$

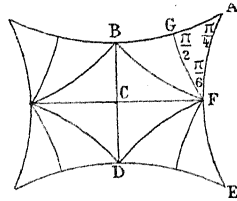
β .

Des raisonnements analogues aux précédents conduisent au quadrilatère figuré ici (*fig. 4*). Il est formé de douze triangles ayant pour angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$.

On prendra pour polygone générateur du groupe Γ le quadrilatère

ABCDEF dans lequel on conjugue CB et CD, AB et ED, FA et FE. Le quadrilatère ABCDEF de genre 0 est l'image du plan d'une variable x :

Fig. 4.

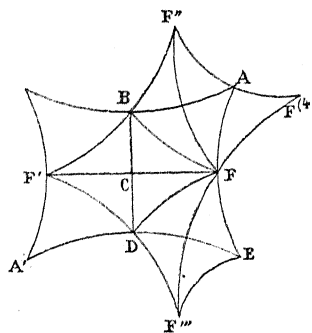


je prends pour valeurs de celle-ci, en C, $-\frac{1}{k}$; en F, -1 ; en A, 1 ; en B, $\frac{1}{k}$. k est une inconnue à déterminer.

Je dis que la fonction $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+kx}}$ est uniforme. En effet, elle ne peut offrir de ramifications que pour $x = 1$ et $x = -\frac{1}{k}$, c'est-à-dire aux points A et C et aux points homologues par rapport au groupe Γ . Or les valeurs de z qui annulent $x - 1$ sont des zéros quadruples de cette fonction, et celles qui annulent $1 + kx$ sont des zéros doubles.

L'image du plan u se fait sur le quadrilatère AEA'E' (fig. 5) dans

Fig. 5.



lequel on conjugue la moitié de chaque côté avec l'autre moitié. En effet, en deux points symétriques par rapport à B, D, F ou F', x prend la même valeur. Donc u prend deux valeurs égales ou égales et de

signes contraires. C'est la première alternative qu'on doit choisir parce que B, D, F et F' ne sont ni zéros ni infinis de u .

Retranchons de ce quadrilatère les triangles BE'F', DF'A' en y ajoutant les triangles symétriques respectivement par rapport aux points B et D. Nous obtiendrons le polygone AF''BF'DF'''EF, dans lequel F''A et F'''E, BF' et BF'', DF' et DF''' sont conjugués. Supprimons de ce polygone le triangle FEF''' pour lui ajouter le triangle FAF⁽⁴⁾, nous aurons le quadrilatère F'F''F⁽⁴⁾F''', dans lequel la moitié de chaque côté est conjuguée avec l'autre moitié. Or le triangle FF'BF'', dans lequel FF', FF''; BF', BF'' sont conjugués, est l'image du plan d'une variable ϖ ; soit $\varpi = 0$ en F et $\varpi = \infty$ en F' et F''; F'F''F⁽⁴⁾F''' est l'image d'une surface de Riemann formée de trois feuilles réunies cycliquement trois à trois aux points 0 et ∞ du plan des ϖ : il est donc l'image du plan de $\sqrt[3]{\varpi}$; u est une fonction linéaire de $\sqrt[3]{\varpi}$; les valeurs de u en des points homologues des triangles FF'F''', FF''F', FF⁽⁴⁾F'' sont donc les puissances d'une substitution linéaire de période 3. Soit $\frac{\alpha u + \beta}{\delta u + \gamma}$ ($\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) l'expression de la valeur de u en un point du triangle FF'F''' en fonction de la valeur de u au point homologue de FF''F'.

La substitution étant la période 3, on a

$$\alpha + \delta = 1.$$

Les valeurs de u au point F, respectivement aux points F⁽⁴⁾F''F'F''', sont $\pm \sqrt{\frac{2}{1-k}}$; chacune d'elles reste invariable par la substitution linéaire. Ainsi l'équation

$$\gamma u^2 + (\delta - \alpha)u - \beta = 0$$

a pour racines $\pm \sqrt{\frac{2}{1-k}}$: donc

$$\alpha = \delta = \frac{1}{2}, \quad \beta - \frac{2}{1-k}\gamma = 0.$$

D'autre part, le point A, comme appartenant au triangle FF⁽⁴⁾F'',

et le point B, comme appartenant au triangle FF'F', sont homologues.

Or la valeur de u est en A, o en B $\sqrt{\frac{k-1}{2k}}$: donc

$$\frac{\beta}{\delta} = 2\beta = \sqrt{\frac{k-1}{2k}}, \quad \beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k-1}{2k}}, \quad \gamma = \frac{1-k}{4} \sqrt{\frac{k-1}{2k}};$$

mais

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \frac{1}{4} + \frac{(k-1)^2}{16k} = 1,$$

$$k^2 - 14k + 1 = 0, \quad k = 7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2.$$

Les deux valeurs de k étant inverses, nous prendrons celle qui est moindre que 1, et la relation elliptique engendrée par le quadrilatère dont les côtés opposés sont conjugués se met sous la forme

$$y = \sqrt{(1-x^2) [1 - (2 - \sqrt{3})^4 x^2]}.$$

Imaginons que l'on fasse tourner le quadrilatère autour du point F d'un angle égal à $\frac{\pi}{3}$ et dans le sens positif; le nouveau quadrilatère engendre deux fonctions fuchsiennes fondamentales x', y' liées encore par la relation

$$y' = \sqrt{(1-x'^2) [1 - (2 - \sqrt{3})^4 x'^2]},$$

et où x' est donné en fonction de x par la relation

$$\frac{1-x'}{1+kx'} = \left(\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+kx}} + \sqrt{\frac{k-1}{2k}}}{\frac{1-k}{2} \sqrt{\frac{k-1}{2k}} \sqrt{\frac{1-x}{1+kx}} + 1} \right)^2.$$

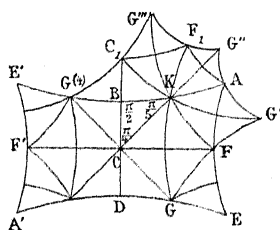
γ.

Le quadrilatère correspondant est formé de vingt triangles ayant pour angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$.

Nous considérerons encore le groupe Γ comme engendré par le

quadrilatère ABCDE (*fig. 6*) dans lequel on conjugue AB et ED, CB et CD, FA et FE. C'est l'image du plan d'une variable x , et je supposerai que cette variable prend : en C, la valeur $-\frac{1}{k}$; en F, la valeur -1 ; en A, la valeur 1 ; en B, la valeur $\frac{1}{k}$. La fonction $\sqrt{\frac{x-1}{kx-1}} = u$ est uniforme par rapport à z . Elle se représente sur le pentagone

Fig. 6.



$GG'G''G'''G^{(4)}$ (*fig. 6*), dans lequel les demi-côtés $FG, FG'; AG', AG''; F_1G'', F_1G'''; C_1G''', C_1G^{(4)}; CG, CG^{(4)}$ sont conjugués. Aux points homologues des triangles $GKG', G'KG'', G''KG''', G'''KG^{(4)}, G^{(4)}KG$, u prend des valeurs qui sont fonctions linéaires les unes des autres. La valeur de u en un point du triangle $G'KG''$ s'exprime en fonction de sa valeur en un point homologue du triangle GKG' par $\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$, $\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$ étant une substitution linéaire de période 5; et, par conséquent, en prenant $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha + \delta$ est égal à $2 \cos \frac{m\pi}{5}$. On démontre aisément que $m = 1$.

Les valeurs de u , qui restent invariables par cette substitution, correspondent aux points K et $GG'G''G'''G^{(4)}$; or, K et $G^{(4)}$ étant symétriques par rapport à B , en ces deux points x a la même valeur et, comme B est un zéro double de $kx + 1$, u a des valeurs égales et de signes contraires. On en déduit

$$\delta = \alpha = \cos \frac{\pi}{5}.$$

Pour F , $u = \sqrt{\frac{2}{1+k}}$, la fraction doit prendre la valeur zéro; d'où

$$\beta = -\sqrt{\frac{2}{1+k}} \cos \frac{\pi}{5};$$

pour C, $u = \sqrt{\frac{1+k}{2k}}$, la fraction doit prendre la valeur $\sqrt{\frac{2}{1+k}}$; d'où

$$\sqrt{\frac{2}{1+k}} = \frac{\sqrt{\frac{1+k}{2k}} \cos \frac{\pi}{5} + \beta}{\gamma \sqrt{\frac{1+k}{2k}} + \cos \frac{\pi}{5}}.$$

On déduit de là

$$\gamma = \frac{1+k-4\sqrt{k}}{\sqrt{2(1+k)}} \cos \frac{\pi}{5},$$

et l'équation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ donne

$$(1+k) \cos \frac{2\pi}{5} - 2\sqrt{k} \left(1 + \cos \frac{2\pi}{5}\right) = 0,$$

et, comme

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad k - 2\sqrt{k}(\sqrt{5}+2) + 1 = 0,$$

on a

$$\sqrt{k} = \sqrt{5} + 2 \pm \sqrt{8 + 4\sqrt{5}}.$$

En prenant la valeur de k moindre que 1, la relation elliptique cherchée est

$$y = \sqrt{(1-x^2) \left[1 - (\sqrt{5} + 2 - \sqrt{8 + 4\sqrt{5}})^2 x^2\right]}.$$

δ.

Le quadrilatère est formé de vingt-quatre triangles ayant pour angles $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$.

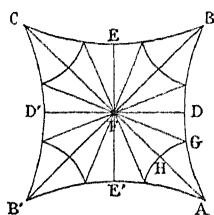
Le triangle ADBECF (*fig. 7*), dans lequel on conjugue DA et DB, EB et EC, FC et FA, est l'image du plan d'une variable x . Le triangle BDAF, dans lequel FA et FB, DA et DB sont conjugués, peut être pris pour image du plan de $\frac{x+1}{x}$; en deux points homologues des deux triangles BDAF, CEBF, x a des valeurs inverses. On peut choisir x de telle sorte qu'elle ait, au point F, la valeur -1 ; au point A, 1; au point D, i ; au point E, $-i$. On en conclut que le quadrilatère est

l'image de la surface de Riemann

$$y = \sqrt{1-x^2}.$$

$x + \frac{1}{x}$ est réel sur tout le contour du triangle FAD; il faut, sur le contour de ce triangle, ou bien que x soit réel, ou bien que $\text{mod } x = 1$. Le premier fait se présente pour le segment FA, le second pour les segments AD et DF.

Fig. 7.



Soit s la fonction dont le demi-plan fait l'image du triangle AGH, s est une fonction rationnelle de x ; je suppose que s prenne, en A, la valeur ∞ , en G, 0, en H, 1; s est du sixième degré en x et l'équation $s = \infty$ a deux racines égales à 1 et quatre à -1 ; $s = 0$ a toutes ses racines triples, $s = 1$ a pour racines $+i$ et $-i$, et ses autres racines sont doubles. On trouve ainsi

$$s = \frac{1}{27} \frac{(5x^2 - 6x + 5)^3}{(x-1)^2(x+1)^4}.$$

On peut, à l'aide de cette formule, calculer les valeurs de x aux points G et H.

On trouve, en G, $\frac{3+i4}{5}$ et, en H, $\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$.

Le groupe G de genre 1 est ici un sous-groupe distingué du groupe Γ engendré par le triangle ADBECF (fig. 7); le groupe Γ est lui-même un sous-groupe distingué du groupe Γ engendré par le triangle BDAF; Γ' est lui-même un sous-groupe, mais non distingué du groupe Γ'' engendré par le triangle GAHF, dans lequel GA et GF, HA et HF sont conjugués.

Des équations fuchsiennes.

Parlons maintenant des équations fuchsiennes, dont les groupes sont engendrés par les quadrilatères dont les côtés opposés sont conjugués.

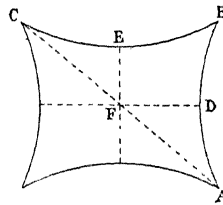
Soient

$$1, -1, \frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$$

les valeurs de x respectivement en

B, D, E, F.

Fig. 8.



L'équation différentielle peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x) v,$$

$$(1') \quad y = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

où l'équation (1) prise isolément est l'équation relative au groupe engendré par le triangle ADBECF. Posons

$$x' = \frac{dx}{dz} = y I(z),$$

d'où

$$x'' = [-(1+k^2)x + 2k^2x^3] I^2(z) + y I'(z),$$

$$x''' = [-(1+k^2) + 6k^2x^2] y I(z)^3 + 3[-(1+k^2)x + 2k^2x^3] I(z) I'(z) + y I''(z).$$

$\varphi(x)$ est, comme on sait, égal à $\frac{2x'x''' - 3x''^2}{4x'^4}$; on en déduit

$$\varphi(x) = \frac{-2(1+k^2) - (1-10k^2+k^4)x^2 - 2k^2(1+k^2)x^4 + y^2 \frac{2I(z)I''(z) - 3I'(z)^2}{I^3(z)}}{4y^4}.$$

La fonction $\frac{2I(z)I''(z) - 3I'(z)^2}{I^3(z)}$ prend des valeurs égales en des points symétriques par rapport à D, E, F; en effet, en de pareils points, x' prend des valeurs égales et de signes contraires et y également; donc

$I(z)$ ne change pas, $I'(z)$ a des valeurs égales et de signes contraires et $I''(z)$ les mêmes valeurs. $I(z)$ a un zéro simple aux points A, B, C.

La fonction a donc en A un infini quadruple, et, comme c'est là son seul infini, elle prend une seule fois toute valeur dans le triangle ABC. C'est donc une fonction linéaire de x

$$\frac{2I(z)I''(z) - 3I'^2(z)}{I^4(z)} = \frac{Mx + N}{x - 1}.$$

En exprimant que

$$\lim \left[(x - 1)^2 \frac{2x'x'' - 3x'^2}{4x'^4} \right]_{\text{pour } x=1} = -\frac{15}{64},$$

on trouve

$$M + N = \frac{3}{8}(1 - k^2),$$

k étant quelconque; les constantes M et N ne peuvent être déterminées par un calcul algébrique. Mais cela est possible dans les cas particuliers signalés. Soit

$$k^2 = -1.$$

Je suppose que la variable z s'annule au centre F du quadrilatère. Posons

$$x = f(z), \quad y = \varphi(z), \quad F(z) = \frac{2I(z)I''(z) - 3I'^2(z)}{I^4(z)} = \frac{Mf(z) + N}{f(z) - 1}.$$

Pour déterminer M et N, je chercherai deux expressions différentes de $F(iz)$,

$$f(iz) = \frac{1}{f(z)}, \quad F(iz) = \frac{M + Nf(z)}{1 - f(z)}.$$

D'ailleurs

$$I(z) = \frac{f'(z)}{\varphi(z)}, \quad f'(iz) = \frac{if'(z)}{f(z)^2}, \quad \varphi(iz) = \frac{\sqrt{f(z)^4 - 1}}{f(z)^2} = i \frac{\varphi(z)}{f(z)^2},$$

$$I(iz) = I(z), \quad I'(iz) = -iI(z), \quad I''(iz) = -I''(z),$$

$$F(iz) = -F(z),$$

$$\frac{M + Nx}{1 - x} = -\frac{Mx + N}{x - 1}, \quad M = N = \frac{3}{8},$$

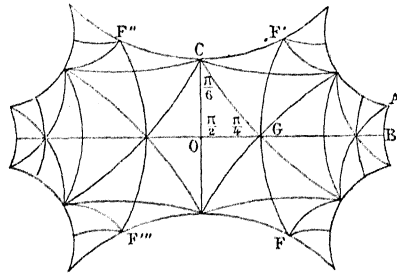
$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{96x^2 + 3(x+1)^2(x^2+1)}{32(1-x^4)^2} v.$$

2° Nous prendrons un nouvel exemple parmi les octogones dont les côtés opposés sont conjugués et la somme des angles égale à 2π . L'octogone considéré se compose de quarante-huit triangles ayant pour angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$. Il est l'image d'une surface hyperelliptique

$$y = \sqrt{R(x)},$$

où $R(x)$ est un polynôme du sixième degré. Je suppose en A, $x = \infty$, en O, $x = 0$, en B, $x = 1$. Soit u (fig. 9) une variable dont le plan a

Fig. 9.



pour image le triangle $FF'F''$, dans lequel on suppose la moitié de chaque côté conjuguée avec l'autre moitié; u est une fonction rationnelle de x du quatrième degré

$$u = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- 1° $P(x) - Q(x)$ est quatrième puissance parfaite ;
 - 2° $kP(x) - Q(x)$ est carré parfait ;
 - 3° A $u = -\frac{1}{k}$ (1) correspondent $x = 0$, $x = 1$, et deux valeurs égales entre elles ;
 - 4° Pour $u = -1$, une valeur de x est infinie.
- On en déduit

$$u = \frac{2(x-a)^4 - (1+k)(x^2+bx+c)^2}{2k(x-a)^4 - (1+k)(x^2+bx+c)^2}$$

(1) k est le module des fonctions elliptiques engendrées par le quadrilatère $FF'F''F'''$. Il a été calculé.

fraction qui satisfait à la première, à la deuxième et à la quatrième condition. Soit

$$v = \frac{(x-a)^2}{x^2 + bx + c},$$

v est une fonction fuchsienne dont le groupe est contenu dans celui de u , et contient celui de x ; pour $u = -\frac{1}{k}$, v a deux valeurs dont une correspond à $x = 0, 1$, l'autre à la racine double; donc, l'une des deux équations

$$2\sqrt{k}(x-a)^2 - (1+k)(x^2 + bx + c) = 0,$$

$$2\sqrt{k}(x-a)^2 + (1+k)(x^2 + bx + c) = 0,$$

a pour racines 0 et 1, et l'autre une racine double. On en déduit, par un calcul facile,

$$a = \frac{(1 + \sqrt[4]{k})^2}{4\sqrt[4]{k}}.$$

B.

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{3}{64} \frac{4x^4 + 4\Lambda x^3 + [\alpha(\alpha-9) - 4\Lambda(\alpha+1)]x^2 + [4\Lambda\alpha - \alpha(\alpha-1)]x + 4\alpha^2}{x^2(x-1)^2(x-a)^2},$$

qui a pour points singuliers 0, 1, ∞ , a . Pour les trois premiers, la différence des racines des équations déterminantes est $\frac{1}{2}$, pour le quatrième $\frac{1}{4}$. Je suppose la constante Λ déterminée de façon que l'équation soit fuchsienne.

On propose de déterminer une substitution rationnelle du quatrième degré, $x = \frac{P(u)}{Q(u)}$, telle que u soit fonction uniforme du rapport de deux intégrales. Pour cela, il faut que u reste fonction uniforme de x , quand même u cesse d'être fonction uniforme de x . Or, les valeurs de u , pour lesquelles u se ramifient par rapport à x , sont données par l'équation du sixième degré

$$P(u)Q'(u) - Q(u)P'(u) = 0.$$

Cette équation ne doit avoir que des racines simples, pour lesquelles $x = 0, 1, \infty, a$; ou une racine triple pour laquelle $x = a$.

Je distinguerai quatre cas :

- 1° Toutes les valeurs de u pour $x = a$ sont simples.
- 2° A $x = a$ correspond une seule valeur double de u .
- 3° A $x = a$ correspondent deux valeurs doubles de u .
- 4° A $x = a$ correspond une valeur quadruple de u .

Dans le premier cas, les six racines de $P(u)Q'(u) - Q(u)P'(u) = 0$ répondent à $x = 0, 1, \infty$, et, comme à chacune des valeurs ne peuvent correspondre plus de deux de ces racines, à $x = 0, 1, \infty$ correspondent deux valeurs doubles de u .

En discutant les hypothèses possibles dans les trois autres cas, sans distinguer entre elles celles qui peuvent se ramener les unes aux autres par la permutation des points singuliers $0, 1, \infty$, on obtient les résultats contenus dans le Tableau suivant. Il donne le nombre des points singuliers de l'équation fuchsienne dont u est la variable et la différence des racines des équations déterminantes relatives à ces points singuliers.

	$x=0.$	$x=1.$	$x=\infty.$	$x=a.$	Nombre des points singuliers.	Diff. des racines des équations déterminantes.
α	2D	2D	2D	4S	4	$\frac{1}{4}$
β	2D	2D	1D; 2S	1D; 2S	5	$3 = \frac{1}{2}; 2 = \frac{1}{4}$
γ	2D	1D; 2S	1D; 2S	2D	6	$\frac{1}{2}$
δ	2D	2D	4S	2D	6	$\frac{1}{2}$
ε	2D	1D; 2S	4S	1Q	6	$\frac{1}{2}$
ζ	1D; 2S	1D; 2S	1D; 2S	1Q	6	$\frac{1}{2}$

S signifie une valeur simple de u ; D une double; Q une quadruple.

Les cas $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ indiquent quatre équations fuchsiennes à six points singuliers, et dans lesquelles les différences des racines des équations déterminantes sont $\frac{1}{2}$. De pareilles équations fuchsiennes se rencontrent, comme nous le verrons plus tard, dans l'étude des polygones fuchsien du genre 2. Lorsque les six points singuliers sont pris arbitrairement, l'équation fuchsienne contient trois quantités qui ne peuvent être déterminées par des calculs algébriques; mais, dans ces cas, le nombre des constantes transcendentes diminue de deux unités. J'achève les calculs pour chacun d'entre eux.

γ .

Soit

$$x = \frac{P(u)}{Q(u)}.$$

1° $P(u)$ est carré parfait; 2° $P(u) - Q(u)$ a une racine double;
3° $Q(u)$ a une racine double; 4° $P(u) - aQ(u)$ est carré parfait.

En posant

$$\frac{P(u)}{Q(u)} = \frac{a(u^2 + Bu + C)^2}{(u^2 + Bu + C)^2 - u^2},$$

la première et la quatrième condition sont remplies.

On a

$$Q(u) = (u^2 + Bu + C - u)(u^2 + Bu + C + u).$$

Si les deux facteurs avaient une racine commune, celle-ci serait nulle, ce qui entraînerait $C = 0$; mais alors la fonction $\frac{P(u)}{Q(u)}$ se réduirait au deuxième degré, hypothèse que nous écartons. Donc l'un des facteurs est carré parfait, ce qui donne

$$(B-1)^2 - 4C = 0 \quad \text{ou} \quad (B+1)^2 - 4C = 0.$$

La seconde hypothèse se ramène à la première en changeant u en $-u$, puis B en $-B$; on a donc

$$(B-1)^2 = 4C.$$

En exprimant la deuxième condition, on trouve

$$\left(B - \frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)^2 = 4C,$$

le radical $\sqrt{1-a}$ contenant le double signe; on en déduit

$$\frac{P(u)}{Q(u)} = \frac{a \left[u^2 + \frac{1 + \sqrt{1-a}}{2\sqrt{1-a}} + \frac{(1 - \sqrt{1-a})^2}{16(1-a)} \right]^2}{\left[u^2 + \frac{1 + \sqrt{1-a}}{2\sqrt{1-a}} u + \frac{(1 - \sqrt{1-a})^2}{16(1-a)} \right]^2 - u^2},$$

et, en posant,

les points singuliers de la nouvelle équation fuchsienne sont donnés par

$$u = 0, \quad u = \infty,$$

$$u^2 + \frac{1+3\varepsilon}{2\varepsilon}u + \frac{(1+\varepsilon)^2}{16\varepsilon^2} = 0, \quad u^2 + \frac{3+\varepsilon}{2\varepsilon} + \frac{(1-\varepsilon)^2}{16\varepsilon^2} = 0.$$

δ.

1° $P(u)$ est carré parfait; 2° $P(u) - Q(u)$ est carré parfait; 3° de même $P(u) - aQ(u)$ est carré parfait. On a

$$x = \frac{a \left[u^2 + \frac{1}{4(1-a)} \right]^2}{\left[u^2 + \frac{1}{4(1-a)} \right]^2 - u^2};$$

les points singuliers de la nouvelle équation fuchsienne sont donnés par

$$u = 0, \quad u = \infty, \quad u^2 \pm u + \frac{1}{4(1-a)} = 0.$$

Les racines des deux équations précédentes sont

$$u = \pm \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4(1-a)}} = \pm \frac{1}{2} \pm \varepsilon.$$

ε.

1° $P(u)$ est carré parfait; 2° $P(u) - Q(u)$ a une racine double; 3° $P(u) - aQ(u)$ est quatrième puissance parfaite

$$x = \frac{a(u^2 - 6u + 1)^2}{(u^2 - 6u + 1)^2 - (1-a)(u+1)^2}$$

les six points singuliers sont racines de l'équation

$$u[(u^2 - 6u + 1)^2 + \lambda(u+1)^4] = 0,$$

où $\lambda = a - 1$ est une quantité arbitraire.

ζ.

1° $P(u)$ a une racine double; 2° $P(u) - Q(u)$ a une racine double;
3° $Q(u)$ a une racine double; 4° $P(u) - aQ(u)$ est une quatrième
puissance parfaite. En posant

$$x = \frac{\alpha(u^2 + Bu + C)}{u^2 + Bu + C - u^4},$$

la première et la quatrième condition sont remplies : il faut exprimer
la deuxième et la troisième. Si l'on pose

$$\frac{u^2 + Bu + C}{u^4} = \varphi(u),$$

l'équation s'écrit

$$(a - x)u^4\varphi(u) + u^4x = 0;$$

toute racine double annule la dérivée, qui est

$$4u^3(a - x)\varphi(u) + 4u^3x + (a - x)u^4\varphi'(u),$$

et, les deux premiers termes étant nuls,

$$\varphi'(u) = -\frac{2}{u^3} - \frac{3B}{u^4} - \frac{4C}{u^5}.$$

Soient $\lambda = 1 - a$ et $\mu = 1, \lambda$; les deux équations

$$(1) \quad u^4 - \mu u^2 - \mu Bu - \mu C = 0$$

ont chacune une racine commune avec l'équation

$$(2) \quad 2u^2 + 3Bu + 4C = 0.$$

En divisant le premier membre de (1) par le premier membre de (2),
on obtient pour reste

$$(9B^2 - 8C - 2\mu)u + 12BC - \mu B \quad (\mu = 1, \lambda),$$

et les deux équations qu'on obtient en égalant cette expression à zéro
donnent les racines de l'équation (2); en éliminant u , on trouve

$$\mu^2(16C - 4B^2) + \mu(27B^4 - 144B^2C + 128C^2) + 256C^3 = 0,$$

dont les racines sont $\mu = 1, \lambda$; donc

$$-(1 + \lambda) = \frac{27B^3 - 144B^2C + 128C^2}{16C - 4B^2}, \quad \lambda = \frac{256C^3}{16C - 4B^2}.$$

En éliminant B entre ces deux équations, on obtient

$$6912C^4 - 288\lambda C^2 + 16C\lambda(1 + \lambda) - \lambda^2 = 0,$$

équation qui donne les valeurs de C en fonction de λ .

Par ce qui précède se trouve résolue la question : chercher les groupes de genre zéro qui sont contenus dans le groupe de l'équation fuchsienne à quatre points singuliers et dont le polygone générateur est quatre fois plus grand que le polygone générateur du groupe de cette équation.

§ IV. — Sous-groupes distingués.

THÉORÈME. — *A toute substitution permutable avec le groupe G d'une équation fuchsienne correspond une transformation uniforme de l'équation fuchsienne en elle-même. Réciproquement, à toute transformation uniforme de l'équation fuchsienne en elle-même correspond une substitution permutable avec G.*

Soient

$$(1) \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y)v,$$

$$(1') \quad f(x, y) = 0$$

l'équation fuchsienne engendrée par G; $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ la substitution permutable avec G. Soient $x, y; x', y'$ les valeurs des deux fonctions fuchsiennes fondamentales qui répondent respectivement à z et à $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$. Faisons décrire à xy un contour fermé sur la surface de Riemann (1'), z subit une substitution de G, et $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ la transformée de cette substitution par $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, qui, par hypothèse, appartient à G; donc x' et y' reprennent leurs valeurs primitives : ainsi le point analytique x', y' comme

fonction du point xy n'a qu'une valeur. Or $f(x', y') = 0$, et $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, étant la même fonction de $x'y'$ que z l'est de xy , peut être défini comme le quotient de deux intégrales particulières d'une équation

$$\frac{d^2 w}{dx'^2} - \varphi(x', y')w, \quad f(x', y') = 0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

L'équation algébrique $f(x, y) = 0$ admet une transformation uniforme en elle-même; cette transformation permute les points singuliers de l'équation fuchsienne, de telle sorte qu'on retombe sur la même équation fuchsienne. Réciproquement, supposons qu'une équation fuchsienne (1), (1') admette une transformation uniforme en elle-même. Soient $xy, x'y'$ deux points que cette transformation fait correspondre; z et z' les points du cercle fondamental correspondant. A un contour fermé quelconque décrit sur $f(x, y) = 0$ par xy répond un contour fermé décrit par $x'y'$; le domaine naturel de chaque point $x'y'$ est conforme au domaine naturel de chaque point xy . Or z' reproduit le domaine naturel de chaque point $x'y'$ comme z reproduit le domaine naturel de chaque point xy ; donc z' et z , considérés comme fonctions de xy , ont les mêmes propriétés fondamentales. Or un type fuchsien contient une seule équation fuchsienne; donc z' est fonction linéaire de z . D'ailleurs le groupe des substitutions subies par z' est le même que le groupe des substitutions subies par z . Cette substitution est donc permutable avec G.

Parmi toutes les représentations d'une surface de Riemann de genre $p > 1$ à l'intérieur du cercle fondamental, la plus importante est celle où tous les cycles ont pour sommes d'angles 2π ; nous l'appellerons *représentation naturelle de la surface*. Alors, à toute transformation uniforme de la surface en elle-même correspond une substitution permutable avec G.

On peut chercher les transformations uniformes des surfaces de Riemann en elles-mêmes par la formule d'Euler généralisée. Nous distinguons deux cas :

1° *La période de la transformation est un nombre premier m.* — En faisant la transformation m fois de suite, un point donne naissance à m points différents, ou il reste toujours invariable. Soit q le nombre

des points restant fixes. On peut partager la surface en m régions qui se transforment les unes dans les autres. En prenant la représentation naturelle de la surface sur le cercle fondamental, et en exprimant que la S de l'image de la surface entière est m fois la S de chaque région, on a

$$2\pi(2p - 2) = 2\pi m \left(2\varpi - 2 + q - \frac{q}{m} \right),$$

ϖ désignant le genre de chaque région.

p étant donné et > 1 , cette équation n'est satisfaite que par un nombre limité de systèmes ϖ, q, m . A un pareil système ne correspond pas nécessairement une transformation de la surface en elle-même. Il faudra former un polygone de genre ϖ avec q cycles ayant $\frac{2\pi}{m}$ pour sommes d'angles et chercher à grouper m de ces polygones et à conjuguer les côtés de l'ensemble de manière à former un polygone de genre p .

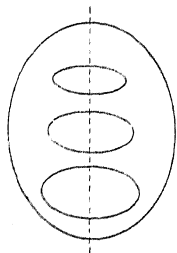
Des considérations de Géométrie dans l'espace permettent souvent de répondre à la question d'une manière affirmative. Considérons, par exemple, le système

$$m = 2, \quad \varpi = 0, \quad q = 2p + 2.$$

Une surface de Riemann de genre p peut se mettre sous la forme d'une sphère plus ou moins déformée dans laquelle on aurait fait p trous.

On peut disposer une pareille surface de manière à obtenir, pour sa

Fig. 10.



section par le plan du Tableau la figure tracée ici (*fig. 10*), et à lui donner un axe situé dans ce plan par rapport auquel elle est symé-

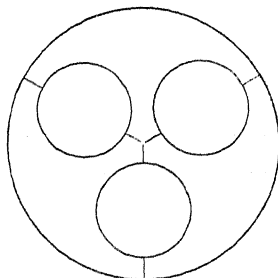
trique. Par une rotation de 180° autour de cet axe, la surface coïncide avec elle-même, et les $2p + 2$ points auxquels elle est rencontrée par l'axe ne changent pas. La surface est une surface hyperelliptique.

Soit

$$p = 3, \quad m = 3, \quad \varpi = 1, \quad q = 2.$$

Imaginons la section de la surface donnée par quatre cercles dont trois sont intérieurs au quatrième et disposés régulièrement. La surface se projette dans la partie du plan intérieure (*fig. 11*) au grand cercle

Fig. 11.



et extérieure aux trois petits : elle a deux parties, l'une antérieure, l'autre postérieure au plan du tableau. On peut évidemment la disposer de telle façon qu'une rotation de 120° autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, et qui la rencontre en deux points, la fasse coïncider avec elle-même.

Les trois régions s'obtiennent en faisant passer par l'axe et par les centres des trois petits cercles trois plans dont les intersections avec la surface déterminent les courbes limites.

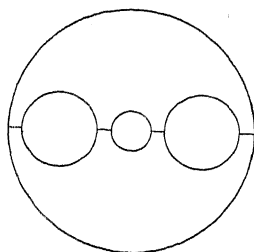
Soit

$$p = 3, \quad m = 2, \quad \varpi = 2, \quad q = 0.$$

Prenons deux cercles concentriques (*fig. 12*) et deux cercles disposés symétriquement par rapport au centre commun des deux premiers ; je suppose que l'ensemble de ces quatre cercles représente la section par le plan du tableau d'une surface formée de deux parties, l'une antérieure, l'autre postérieure au plan du tableau, qui se projettent intérieurement au grand cercle et extérieurement aux trois petits. On peut faire tourner de 180° la surface autour d'un axe pas-

sant au centre de la figure, perpendiculaire au plan du tableau, de manière à l'appliquer sur elle-même.

Fig. 12.



2° *La période de la transformation est un nombre non premier m .* — Imaginons qu'on répète m fois cette transformation. Outre les points complètement invariables et les points variables à chaque transformation, il peut y avoir des points mixtes qui restent invariables par une puissance δ de la transformation. Par les $\delta - 1$ premières opérations, un de ces points P donne naissance à $\delta - 1$ autres points ; le $\delta^{\text{ième}}$ coïncide avec P, δ est un diviseur de m . Pendant les m transformations, la suite des δ points est parcourue $\delta' = \frac{m}{\delta}$ fois dans le même ordre.

Prenons un point voisin de P, les $\delta - 1$ premières transformations le changent en $\delta - 1$ points voisins des $\delta - 1$ transformés de P, la $\delta^{\text{ième}}$ le ramène dans le voisinage de P ; dans la suite des m transformations, il sera ramené $\delta' = \frac{m}{\delta}$ fois dans le voisinage de P. Si nous supposons la surface de Riemann partagée en m régions qui se changent l'une dans l'autre, il y aura δ' de ces régions aboutissant au point P, chacune par un angle $\frac{2\pi}{\delta'}$.

Soient d_1, d_2, \dots, d_h des diviseurs de m dans lesquels m peut se trouver une ou plusieurs fois ; on est conduit à l'équation

$$(3) \quad 2\pi(2p - 2) = 2\pi m \left(2\varpi - 2 + h - \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} - \dots - \frac{1}{d_h} \right),$$

où le nombre des points qui ne sont pas complètement variables est h ,

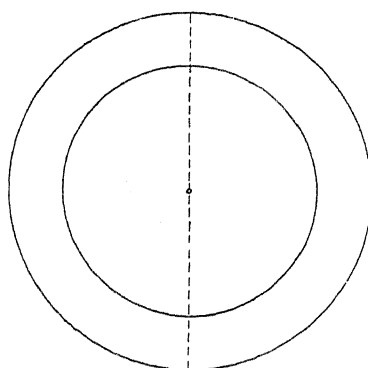
et où les puissances des transformations qui les laissent invariables sont respectivement $\frac{m}{d_1}, \frac{m}{d_2}, \dots, \frac{m}{d_h}$.

Pour $p = 3$, l'équation est satisfaite par

$$m = 6, \quad \varpi = 0, \quad h = 4, \quad d_1 = d_2 = 6, \quad d_3 = d_4 = 2.$$

Je figure la section d'un tore (*fig. 13*) par le plan des parallèles extrêmes, et, dans ce plan, je trace un axe vertical. Je fais tourner ce

Fig. 13.



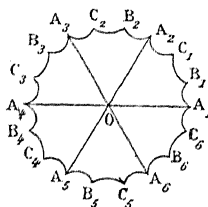
tore successivement de 120° , puis de 240° autour de cet axe. J'obtiens ainsi deux nouveaux tores qui se coupent dans leur partie supérieure et dans leur partie inférieure. A la partie supérieure, je supprime toutes les parties de chaque tore qui sont intérieures à chacun des autres, puis je raccorde entre elles les parties qui restent. On a alors, à la partie supérieure, une surface formée de six tuyaux divergents à partir d'un noyau commun. A la partie inférieure, je laisse les trois nappes indépendantes les unes des autres, sans qu'on puisse, bien qu'elles se coupent, passer de l'une sur l'autre aux points communs. On obtient ainsi une surface qu'on peut ramener par une déformation continue à une sphère percée de trois trous et qui est par conséquent de genre 3. Si l'on fait tourner cette surface autour de l'axe vertical de $\frac{2\pi}{6}$, elle revient s'appliquer sur elle-même. Mais les deux points où l'axe de rotation la rencontre dans sa partie supérieure ne changent pas. Chacun des trois tores vient s'appliquer sur le suivant. Par suite,

les trois points où l'axe vertical rencontre les trois tores dans la partie inférieure de la figure et sur le plus petit parallèle se permutent cycliquement. (Ces trois points, quoique occupant la même place dans l'espace, sont différents au point de vue de la géométrie de situation.) Donc, quand on aura fait trois fois la rotation, ils reviendront à leurs positions primitives; il en est de même des trois points situés à la partie inférieure, sur l'axe, et sur le plus grand parallèle.

Les six régions sont limitées par trois plans bissecteurs des dièdres formés par les plans des parallèles extrêmes.

L'existence de cette transformation sera mise en évidence en prenant pour polygone générateur du groupe de genre 3 un polygone de dix-huit côtés $A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2 A_3 B_3 C_3 A_4 B_4 C_4 A_5 B_5 C_5 A_6 B_6 C_6$ (fig. 14),

Fig. 14.



dans lequel $A_1 B_1$ et $A_2 C_1$, $A_2 B_2$ et $A_3 C_2$, $A_3 B_3$ et $A_4 C_3$, ..., $A_6 B_6$ et $A_1 C_6$ sont conjugués; d'autre part, $B_1 C_1$ est conjugué avec $C_4 B_4$, $B_2 C_2$ avec $C_5 B_5$, $B_3 C_3$ avec $C_6 B_6$. Il y a quatre cycles dont trois formés respectivement par $B_1 C_1 B_4 C_4$, $B_2 C_2 B_5 C_5$, $B_3 C_3 B_6 C_6$, et un formé par $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$.

Pour déterminer les cas où un groupe G est contenu comme sous-groupe distingué dans un groupe, on fera encore usage des équations (6) du § II; seulement, il faudra que sur une surface de genre p existent des transformations uniformes de périodes $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$. On est ainsi conduit à des systèmes de nombres qu'il faut essayer.

Je suppose que le groupe G donné soit le groupe de la représentation naturelle d'une surface de genre 3. Les formules (6) du § II deviennent alors

$$\frac{N}{\mu_1} = h_1, \quad \frac{N}{\mu_2} = h_2, \quad \frac{N}{\mu_3} = h_3, \quad \dots, \quad \frac{N}{\mu_l} = h_l.$$

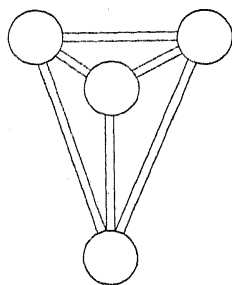
$$4 - (2\varpi - 2 + l)N + h_1 + h_2 + \dots + h_l = 0.$$

Or ce système admet la solution suivante :

$$l = 4, \quad \mu_1 = \mu_2 = 3, \quad \mu_3 = \mu_4 = 2, \quad \omega = 0, \quad N = 12.$$

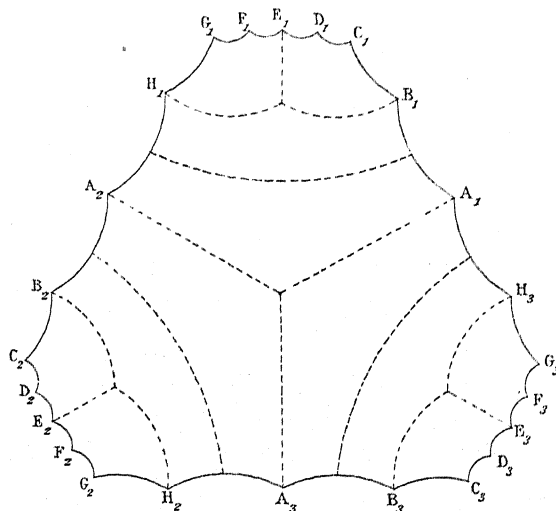
Plaçons aux sommets d'un tétraèdre régulier quatre boules solides et relierons-les entre elles par des triangles au nombre de six (fig. 15).

Fig. 15.



La surface du corps ainsi formé est de genre 3. Elle coïncide avec elle-même quand on la fait tourner, soit autour des quatre hauteurs du tétraèdre, soit autour des droites qui joignent les milieux des arêtes opposées.

Fig. 16.



On met en évidence les transformations en prenant pour polygone générateur du groupe G de la représentation naturelle de la surface

(fig. 16) un polygone de vingt-quatre côtés :

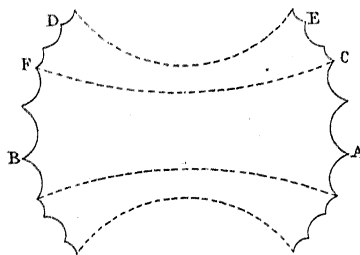
$$A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1 A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 F_2 G_2 H_2 A_3 B_3 C_3 D_3 E_3 F_3 G_3 H_3.$$

$A_1 B_1$ et $A_2 H_1$, $A_2 B_2$ et $A_3 H_2$, $A_2 B_3$ et $A_1 H_3$ sont conjugués ; $B_1 C_1$ et $D_1 E_1$, $G_1 H_1$ et $F_1 E_1$ sont conjugués, et les choses se passent de la même façon dans les deux autres parties de la surface ; $G_1 F_1$ et $C_2 D_2$, $G_2 F_2$ et $C_3 D_3$, $G_3 F_3$ et $C_1 D_1$ sont conjugués.

Il y a sept cycles : $A_1 A_2 A_3$, $B_1 E_1 H_1$, $B_2 E_2 H_2$, $B_3 E_3 H_3$, $G_1 F_1 C_2 D_2$, $G_2 F_2 C_3 D_3$, $G_3 F_3 C_1 D_1$; la somme des angles de chacun de ces cycles est égale à 2π ⁽¹⁾.

Autre exemple. — Formons une file de n polygones P de $4p$ côtés avec côtés opposés conjugués, en réunissant chacun d'eux au suivant, toujours suivant une même paire de côtés conjugués. Le polygone total n'est plus limité que par deux côtés de cette paire qui sont forcément conjugués entre eux. Nous laisserons les autres côtés conjugués dans le polygone total comme ils le sont dans chacun des n polygones pris isolément. Soit R le polygone de $(4p - 2)n + 2$ côtés ainsi formé. Les sommets donnent n cycles (dans la fig. 17), le cycle

Fig. 17.



ABCDEF en est un), dont la somme d'angles est égale à celle du cycle formé par les sommets du polygone de $4p$ côtés. Le groupe G engendré par le polygone R est un sous-groupe distingué du groupe

(1) Les deux fonctions fuchsiennes fondamentales peuvent se représenter en fonction d'un paramètre arbitraire t par $x = \sqrt{\frac{(t-aj)(t-1)}{(t-a)(t-j)}}$, $y = \sqrt{\frac{(t-aj^2)(t-1)}{(t-a)(t-j^2)}}$, où $j^3 = 1$.

engendré par les polygones P. Une seule des substitutions qui réunissent les côtés opposés de P ne figure pas dans G, soit Σ ; Σ^n appartient à G. Soit $u(z)$ une quelconque des fonctions fuchsienues engendrées par le groupe G; soit j une racine d'ordre n de l'unité et

$$f(z) = u(z) + ju(z\Sigma) + j^2u(z\Sigma^2) + \dots + j^{n-1}u(z\Sigma^{n-1}),$$

on a

$$f(z\Sigma) = u(z\Sigma) + ju(z\Sigma^2) + \dots + j^{n-1}u(z\Sigma^n);$$

mais, $u(z\Sigma^n) = u(z)$, puisque Σ^n appartient au groupe G. Donc

$$f(z\Sigma) = j^{n-1}f(z).$$

Donc $[f(z)]^n$ est une des fonctions fuchsienues engendrées par le polygone P et s'exprime rationnellement au moyen des deux fonctions fondamentales de ce polygone. En prenant pour j successivement les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, on aura n fonctions $f(z)$, dont la somme est $nu(z)$; $u(z)$ s'exprime donc par des radicaux d'ordre n au moyen des deux fonctions fondamentales du polygone p .

Pour une valeur donnée de m , un groupe fuchsien G engendre un nombre fini de fonctions linéairement indépendantes

$$\Theta_h(z), \quad (h=1, 2, \dots, k),$$

sans discontinuités dans le cercle fondamental et telles que,

$$\Sigma_i = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

étant une substitution quelconque du groupe G,

$$\Theta_h(z\Sigma_i) = (\gamma_i z + \delta_i)^{2m} \Theta_h(z);$$

ce sont les fonctions thêtafuchsienues de deuxième espèce.

THÉORÈME. — Soient $\sigma = \frac{mz+n}{pz+q}$ une substitution linéaire permutable avec le groupe G et

$$\Theta'_h(z) = \frac{1}{(pz+q)^{2m}} \Theta_h(z\sigma),$$

$\Theta'_h(z)$ est une fonction thêtafuchsienne de deuxième espèce.

En effet, $\Theta'_h(z)$ n'est pas discontinu dans le cercle fondamental. D'autre part,

$$\Theta'_h(z\Sigma_i) = \frac{1}{[p(z\Sigma_i) + q]^{2m}} \Theta_h(z\Sigma_i\sigma);$$

or $\Sigma_i\sigma = \sigma\Sigma_j$,

$$\Theta'_h(z\Sigma_i) = \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{2m}}{[(p\alpha_i + q\gamma_i)z + p\beta_i + q\delta_i]^{2m}} \Theta_h(z\sigma\Sigma_j).$$

Or $(p\alpha_i + q\gamma_i)z + p\beta_i + q\delta_i$ est la détermination de la substitution $\Sigma_i\sigma_i$; il est égal au dénominateur de la substitution $\sigma\Sigma_j$ qui est

$$(\gamma_j m + \delta_j p)z + \gamma_j n + \delta_j q;$$

d'autre part,

$$\Theta_h(z\sigma\Sigma_j) = [\gamma_j(z\sigma) + \delta_j]^{2m} \Theta_h(z\sigma) = \frac{[(\gamma_j m + \delta_j p)z + \gamma_j n + \delta_j q]^{2m}}{(pz + q)^{2m}} \Theta'_h(z),$$

et, par suite,

$$\Theta_h(z\Sigma_i) = (\gamma_i z + \delta_i)^{2m} \Theta'_h(z).$$

Puisque $\Theta'_h(z)$ est une fonction thêtafuchsienne de seconde espèce, elle s'exprime linéairement et d'une manière homogène au moyen des fonctions $\Theta_1(z), \Theta_2(z), \dots, \Theta_k(z)$. On a donc

$$\Theta_h(z\sigma) = \sum_l \Lambda_{lh} \Theta_l(z) (pz + q)^{2m}, \quad (l = 1, 2, \dots, k),$$

les Λ_{lh} étant des coefficients constants.

THÉORÈME. — *Toute surface hyperelliptique de genre p peut se représenter conformément sur un polygone de $4p$ côtés dans lequel les côtés opposés sont conjugués et les axes des substitutions concourent en un même point. Réciproquement, si, dans un polygone de $4p$ côtés, les côtés opposés sont conjugués et les axes des substitutions concourent en un point, ce polygone est l'image d'une surface hyperelliptique de genre p .*

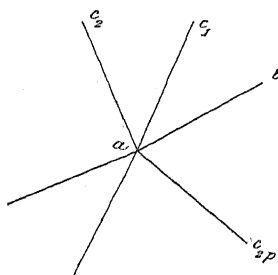
Soit

$$y = \sqrt{(x - a)(x - b)(x - c_1) \dots (x - c_{2p})}$$

une relation hyperelliptique de genre p . Formons une équation fuchsienne de genre 0 ayant pour points singuliers a, b, c_1, \dots, c_{2p} , la différence des racines de l'équation déterminante étant, pour $x = a$,

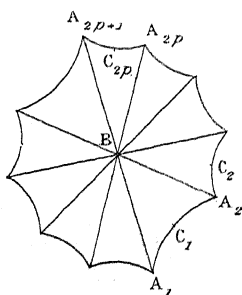
$\frac{1}{2n}$, et pour les autres points singuliers $\frac{1}{2}$. Traçons des coupures allant de a à b, c_1, \dots, c_{2p} (fig. 18). Le rapport de deux intégrales de l'équation fuchsienne devient fraction uniforme de x dans le plan x modifié par ces coupures.

Fig. 18.



L'image de ce plan sur le cercle fondamental est limitée par $2p + 1$ arcs symétriques par rapport aux points $B, C_1, C_2, \dots, C_{2p}$ qui correspondent aux points $b, c_1, c_2, \dots, c_{2p}$. On peut les remplacer par des arcs de cercle orthogonaux au cercle fondamental en ajoutant et en retranchant du polygone des parties homologues entre elles. On obtient ainsi le polygone $A_1 C_1 A_2 C_2 \dots A_{2p} C_{2p} A_{2p+1} B$ (fig. 19), dans lequel la

Fig. 19.



moitié de chaque côté est conjuguée de l'autre moitié. Construisons le symétrique de ce polygone par rapport à B . Nous obtenons un polygone total de $4p$ côtés, dans lequel nous conjuguerons les côtés opposés; x admet le groupe engendré par ce polygone. La fonction y est uniforme par rapport à z . En deux points symétriques par rapport à B ou aux points C_1, \dots, C_{2p} , x reprend la même valeur, donc y reprend

des valeurs égales ou de signes contraires. Or, B, C₁, C₂, ..., C_{2p} sont des zéros simples de γ ; donc les deux valeurs de γ sont de signes contraires. La substitution qui conjugue A₁A₂ et A_{2p+2}A_{2p+1} est le produit d'une rotation de 180° autour de C₁ par une rotation de 180° autour de B. Donc, en deux points correspondants de ces deux côtés, γ reprend la même valeur. C'est une fonction du polygone total et la surface hyperelliptique se représente conformément sur ce polygone.

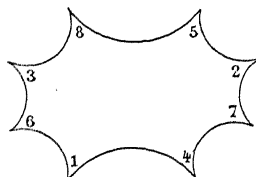
La substitution A₁A₂ in A_{2p+2}A_{2p+1} est le produit d'une rotation de π autour de C₁ par une rotation de π autour de B; par suite, elle transforme évidemment en lui-même l'arc BC₁ et a cet arc pour axe. Ainsi les axes concourent en B.

Pour démontrer la réciproque, désignons par B le point de concours des axes. Les substitutions peuvent être considérées comme les produits de rotations de π autour de certains points C₁, C₂, ..., C_{2p} situés sur leurs axes respectifs par une rotation de π autour de B. On démontre aisément que $\frac{2\pi}{n}$ étant la somme des angles du polygone, le produit de ces rotations dans l'ordre B, C₁, C₂, ..., C_{2p} est elliptique et de période $2n$. Le polygone peut se décomposer en deux polygones de genre 0, qui sont chacun l'image du plan d'une variable x ; il est lui-même l'image d'une surface hyperelliptique $y = \sqrt{P(x)}$.

THÉORÈME. — Si, dans un octogone, les côtés opposés sont conjugués et la somme des angles égale à 2π , les axes des substitutions concourent en un même point.

Je note, par des chiffres, les angles de l'octogone (fig. 20), de façon

Fig. 20.



que, si l'on considère un sommet du réseau engendré par cet octogone, en tournant autour de ce sommet dans le sens positif, on rencontre ces chiffres dans l'ordre de grandeur croissante. En parcourant le con-

tour de l'octogone dans le sens positif, les chiffres croissent de trois unités, mod. 8. Soit

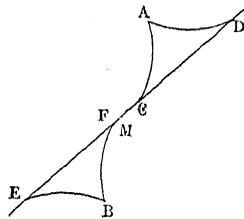
$$S = 14 \text{ in } 85, \quad S' = 47 \text{ in } 38, \quad S'' = 72 \text{ in } 63, \quad S''' = 25 \text{ in } 16,$$

on a

$$\begin{aligned} SS'^{-1}S''S'''^{-1}S^{-1}S'S''^{-1}S''' &= 1, \\ SS'^{-1}S''S'''^{-1} &= S'''^{-1}S''S'^{-1}S = \Sigma. \end{aligned}$$

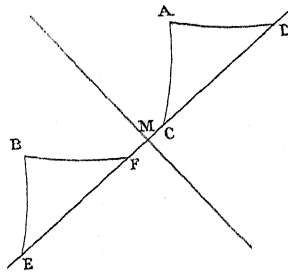
Les substitutions SS'^{-1} , $S'^{-1}S$ ont une même L , 2α ; $S''S'''^{-1}$, $S'''^{-1}S''$ une même L , 2β . Soit 2ρ la L de Σ ; les axes de SS'^{-1} , $S''S'''^{-1}$, Σ et de $S'^{-1}S$, $S'''^{-1}S''$, Σ appartiennent respectivement à deux triangles CAD , EBF (*fig. 21*) dont les côtés sont α , β , ρ et qui, par conséquent, sont

Fig. 21.



égaux entre eux, les angles de ces triangles peuvent être réels, c'est le cas de la figure, ou imaginaires. Deux cas peuvent se présenter :
 1° Supposons AD et EB placés de côtés différents de l'axe $EFCD$ de Σ . Le milieu M de ED est aussi le milieu de FC , et, à cause de l'égalité des angles (réels ou imaginaires) ADC , FEB ; ACD , BFE (*fig. 22*), il

Fig. 22.



est le centre des deux systèmes (AD, BE) , (CA, EF) . Mais, comme S et S' transforment SS'^{-1} en $S'^{-1}S$, leurs axes passent par le point M , pour

la même raison les axes de S'' et de S''' y passent aussi; 2° AD et EB sont du même côté de EFCD. Si, par M, on mène un arc perpendiculaire à FC, les axes de $S'^{-1}S$, SS'^{-1} , $S''^{-1}S'''$, $S'''S''^{-1}$ sont respectivement symétriques par rapport à cet arc, les axes de S, S', S'', S''' sont tous perpendiculaires à cet arc et concourent, par conséquent, en un même point imaginaire.

Nous rejeterons le second système de substitutions dont les paramètres forment une multiplicité complètement séparée de celle que forment les paramètres du premier système, et nous ne considérerons que des substitutions dont les axes concourent en un point réel (1).

Relations entre les L des substitutions S, S', S'', S''' et les angles des axes entre eux. — Soient 2λ , $2\lambda'$, $2\lambda''$, $2\lambda'''$ les L de S, S', S'', S'''. Prenons le point de concours pour centre du cercle fondamental. Soient β l'angle des axes de S et de S'; β' , β'' , β''' ceux des axes de S' et de S'', de S'' et de S''', de S'' et de S⁻¹. Les quatre substitutions peuvent être exprimées par

$$(\operatorname{ch}\lambda, \operatorname{sh}\lambda), \quad (\operatorname{ch}\lambda', \operatorname{sh}\lambda' e^{i\beta}), \quad [\operatorname{ch}\lambda'', \operatorname{sh}\lambda'' e^{i(\beta+\beta')}], \quad [\operatorname{ch}\lambda''', \operatorname{sh}\lambda''' e^{i(\beta+\beta'+\beta'')}],$$

soit

$$\beta + \beta' + \beta'' + \beta''' = \pi.$$

En exprimant que

$$SS'^{-1}S''S'''^{-1} = S'''^{-1}S''S'S^{-1},$$

on trouve

$$\operatorname{th}\lambda \operatorname{th}\lambda' \sin\beta + \operatorname{th}\lambda' \operatorname{th}\lambda'' \sin\beta' + \operatorname{th}\lambda'' \operatorname{th}\lambda''' \sin\beta'' + \operatorname{th}\lambda \operatorname{th}\lambda''' \sin\beta''' \\ - \operatorname{th}\lambda \operatorname{th}\lambda' \operatorname{th}\lambda'' \operatorname{th}\lambda''' \sin(\beta+\beta'') - \operatorname{th}\lambda \operatorname{th}\lambda'' \sin(\beta+\beta') - \operatorname{th}\lambda' \operatorname{th}\lambda''' \sin(\beta'+\beta''') = 0.$$

THÉORÈME. — *A toute transformation uniforme en elle-même d'une relation hyperelliptique de genre $p > 1$ correspond une substitution linéaire sur x .*

Soit

$$y = \sqrt{P(x)}$$

(1) Pour construire quatre substitutions du deuxième système, on formera un hexagone ABCDEF dans lequel $A + C + E = B + D + F$. Soient $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ quatre substitutions linéaires inverses, ayant pour lignes de points doubles des arcs perpendiculaires au milieu de AB, BC, CD, DE, EF, FA; on posera

$$S = T_1 T_5, \quad S' = T_2 T_5, \quad S'' = T_3 T_5, \quad S''' = T_4 T_5.$$

la relation considérée. Il y a, pour $m = 1$, p fonctions thêtafuchiennes de deuxième espèce

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad x \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}, \quad \dots, \quad x^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}.$$

Si G est le groupe de la représentation naturelle de la surface, il existe une substitution $\sigma = \frac{mz+n}{pz+q}$ permutable avec G . Soient

$$x_1 = x \left(\frac{mz+n}{pz+q} \right), \quad \frac{dx_1}{dz} = \frac{dx \left(\frac{mz+n}{pz+q} \right)}{d \left(\frac{mz+n}{pz+q} \right)} \frac{1}{(pz+q)^2}.$$

D'après le théorème donné plus haut sur les fonctions thêtafuchiennes

$$\frac{x_1^h \frac{dx_1}{dz}}{\sqrt{P(x_1)}} = \frac{Q_h(x)}{\sqrt{P(x)}} \quad (h = 0, \dots, p-1),$$

$Q_h(x)$ étant un polynôme entier en x de degré $p-1$; donc

$$x_1 = \frac{Q_{h+1}(x)}{Q_h(x)}.$$

Ainsi x_1 est rationnel en x . Inversement, x est rationnel en x_1 ; donc x_1 et x sont des fonctions linéaires l'une de l'autre.

La recherche des cas où un groupe hyperelliptique est sous-groupe distingué se ramène donc à l'étude des groupes finis. Les solutions répondent aux cas où les racines de $P(x)$ sont les sommets d'un polyèdre régulier, d'un polygone régulier, d'une pyramide régulière ou d'une double pyramide régulière.

Dans le cas des polyèdres réguliers, l'équation fuchsienne est de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{Q(x)}{P(x)^2} v, \quad y = \sqrt{P(x)},$$

où l'équation $P(x) = 0$ représente les sommets du polyèdre.

THÉORÈME. — *L'équation $Q(x) = 0$ représente les pôles des faces du polyèdre. Le degré de multiplicité de chaque racine est égal au nombre des côtés de chaque face moins deux.*

Lemme. — Si, dans l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{Q(x)}{P(x)^2} v,$$

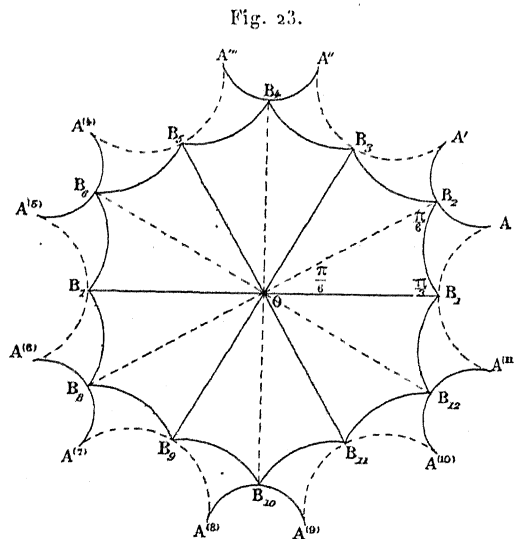
on fait la substitution $x = \frac{m x_1 + n}{p x_1 + q}$ et si, dans la nouvelle équation, on fait disparaître le second terme, on obtient une équation

$$\frac{d^2 v_1}{dx_1^2} = \frac{Q_1(x_1)}{P_1^2(x_1)} v_1,$$

où $Q_1(x_1) = 0$ et $Q\left(\frac{m x_1 + n}{p x_1 + q}\right) = 0$ ont les mêmes racines.

Ce lemme se démontre par le calcul direct.

Imaginons le cercle fondamental partagé en polygones réguliers



ayant le même nombre de côtés n que les faces du polyèdre et pour angles la moitié des angles des polygones réguliers sphériques formés par les projections des arêtes du polyèdre sur la sphère circonscrite. Prenons pour exemple le cube. Chaque face donne un quadrilatère dont tous les angles sont égaux à $\frac{\pi}{3}$. La sphère des x est représentée conformément sur le demi-polygone $OB, AA'A''A'''A^{(4)}A^{(5)}B, O$ (fig. 23).

Soit x_1 une fonction linéaire de x s'annulant au centre C d'un de ces polygones et infinie en un point C' correspondant au point diamétralement opposé à celui qui, sur la sphère des x , correspond à C. Soit

$$x_1 = f(z_c), \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}},$$

$f(\omega z_c)$ est une fonction linéaire de $f(z_c)$ et, d'après le choix de x_1 ,

$$f(\omega z_c) = \omega f(z_c),$$

D'autre part, l'équation fuchsienne devient, en substituant x_1 à x ,

$$\frac{d^2 v_1}{dx_1^2} = \frac{Q_1(x_1)}{P_1(x_1)^2} v_1;$$

or

$$\frac{Q_1(x_1)}{P_1(x_1)^2} = \frac{2x_1' x_1'' - 3x_1''^2}{4x_1'^4},$$

$$f'(\omega z_c) = f'(z_c), \quad f''(\omega z_c) = \omega^{n-1} f''(z_c), \quad f'''(\omega z_c) = \omega^{n-2} f'''(z_c),$$

$$\frac{2 f'(\omega z_c) f'''(\omega z_c) - 3 f''(\omega z_c)^2}{4 f'(\omega z_c)^4} = \omega^{n-2} \frac{2 f'(z_c) f'''(z_c) - 3 f''(z_c)^2}{4 f'(z_c)^4},$$

donc

$$\frac{Q_1[f(\omega z_c)]}{P_1[f(\omega z_c)]^2} = \frac{Q_1[\omega f(z_c)]}{P_1[\omega f(z_c)]^2} = \frac{Q_1(\omega x_1)}{P_1(\omega x_1)^2} = \omega^{n-2} \frac{Q_1(x_1)}{P_1(x_1)^2}.$$

Si $P_1(x_1)$ a une racine ξ , il admet aussi la racine $\omega\xi$; donc $P_1(x_1)$ ne contient x_1 qu'avec les exposants multiples de n , et

$$P_1(\omega x) = P_1(x_1), \quad Q_1(\omega x_1) = \omega^{n-2} Q_1(x_1);$$

$Q_1(x_1)$ est donc de la forme

$$Q_1(x_1) = \sum_h A_h x_1^{n-2+nh}.$$

D'après le lemme, $Q(x) = 0$ admettra comme racine, au degré de multiplicité $n - 2$, la valeur de x qui répond à $x_1 = 0$. Ainsi le pôle de chaque face est racine de $Q(x) = 0$ au degré $n - 2$. On épuise ainsi toutes les racines de $Q(x)$, car le degré de $Q(x)$ est, d'après un théorème élémentaire, inférieur de quatre unités à celui de $P^2(x)$. En désignant par S le nombre des sommets du polyèdre, F celui de ses faces,

on doit vérifier la formule

$$(n - 2)F = 2S - 4;$$

or nF est le double du nombre des arêtes du polyèdre. Cette formule revient donc à celle d'Euler.

RÉSULTATS NUMÉRIQUES.

Cube :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{3}{16} \frac{(x^6 - 20x^3 - 8)^2}{x^2(x^3 - 1)^2(x^3 + 8)^2} v.$$

Dodécaèdre :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -900 \frac{x^3(x^{10} + 11x^5 - 1)^3}{(x^{20} - 228x^{15} + 494x^{10} + 228x^5 + 1)^2} v.$$

Icosaèdre :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{3}{16} \frac{x^{20} - 228x^{15} + 494x^{10} + 228x^5 + 1}{x^2(x^{10} + 11x^5 - 1)^2} v.$$

La même méthode permet de traiter les cas du polygone régulier, de la pyramide régulière et de la double pyramide régulière.

Polygone régulier :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{3(p+1)^2}{4} \frac{x^{2p}}{(x^{2p+2} - 1)^2} v.$$

Pyramide régulière :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{3}{16} \frac{x^{4p} + 4p(p+1)x^{2p-1}}{(x^{2p+1} - 1)^2} v.$$

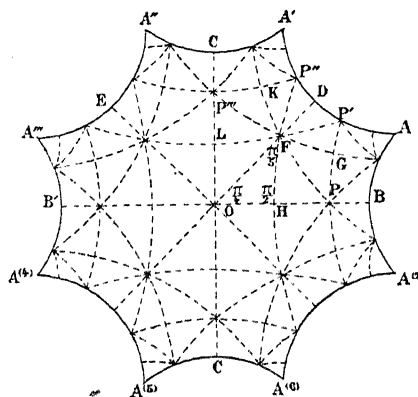
Double pyramide régulière :

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{3}{16} \frac{x^{4p} - (4p^2 - 2)x^{2p} + 1}{x^2(x^{2p} - 1)^2} v.$$

PROBLÈME. — On propose de déterminer la relation hyperelliptique engendrée par l'octogone ci-dessus, formé de quatre-vingts triangles ayant pour angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{5}$.

Je choisis la fonction fuchsienne x , de telle sorte qu'au point O (fig. 24) $x = 0$, aux sommets de l'octogone $x = \infty$, en B, $x = 1$.

Fig. 24.



Deux rotations de $\frac{\pi}{2}$, l'une autour de O, l'autre autour de K, sont permutable avec le groupe de l'octogone. En vertu des conditions imposées à x et en posant $x = f(z_0) = \varphi(z_K)$,

$$f(iz_0) = -f(z_0), \quad \varphi(z_K) \varphi(-z_K) = \alpha.$$

De la connaissance de la constante α dépend la solution du problème. Soit s la fonction qui représente le triangle OHF sur le demi-plan positif et qui prend en H, F, O les valeurs 0, 1, ∞ ; s ne change pas quand on change x en $-x$ ou en $\frac{\alpha}{x}$; donc, en posant

$$u = x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2}, \quad s = \frac{R(u)}{S(u)},$$

$\frac{R(u)}{S(u)}$ est une fraction du cinquième degré. Le plan de la variable u a pour image le pentagone régulier OPGP'DP''KP''', dans lequel on conjugue OP et OP'', GP et GP', DP' et DP'', KP'' et KP'''. Le polynôme $R(u)$ a pour racines $\alpha^2 + 1$, 2α et -2α , et une racine double; $S(u)$, $u = \infty$ et une valeur quadruple; $R(u) - S(u)$, une valeur quintuple. On peut, d'après cela, déterminer une fonction $u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$, telle que

$$s = \frac{(u'^3 - 5u'^2 + 10u' - 10)u'^2}{\dots}$$

Soient μ_1, μ_2, μ_3 les trois racines de l'équation

$$u^3 - 5u^2 + 10u - 10 = 0;$$

on a

$$\frac{\alpha(a^2 + 1) + \beta}{\gamma(a^2 + 1) + \delta} = \mu_1, \quad \frac{2a\alpha + \beta}{2a\gamma + \delta} = \mu_2, \quad \frac{-2a\alpha + \beta}{-2a\gamma + \delta} = \mu_3, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{5},$$

et, en éliminant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on a l'équation réciproque

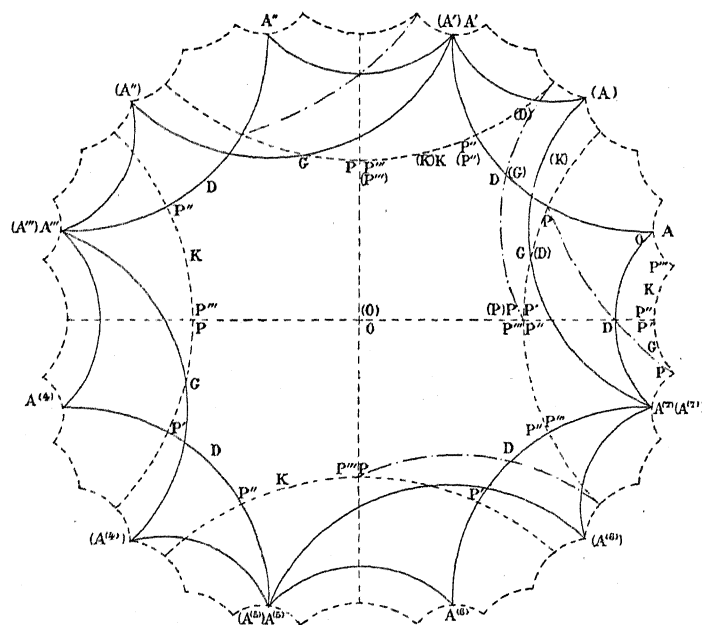
$$4\alpha(5\mu_2\mu_3 + \mu_1) + (a - 1)^2(5\mu_1\mu_2 + \mu_3) - (a + 1)^2(5\mu_1\mu_3 + \mu_2) = 0.$$

En permutant μ_2 et μ_3 , on a l'équation

$$4\alpha(5\mu_2\mu_3 + \mu_1) + (a + 1)^2(5\mu_1\mu_3 + \mu_2) - (a - 1)^2(5\mu_1\mu_2 + \mu_3) = 0,$$

qui est la transformée en $-\alpha$ de la précédente. En les multipliant, on

Fig. 25.



en conclut que $a^2 + \frac{1}{a^2}$ est une fonction rationnelle de μ_1 , à coefficients entiers. Il faudra prendre pour μ_1 la racine réelle de l'équation. Aux deux racines imaginaires correspondraient deux octogones n'ayant pas

d'axe de symétrie, mais une disposition symétrique l'un par rapport à l'autre.

Retranchons de OPGP'DP''KP''' (*fig.* 25) le triangle DF'GP et ajoutons son symétrique par rapport à D, nous aurons

$$(O)(P)(G)(P')(D)(P'')(K)(P'''),$$

constitué de la même façon que le premier (proprement équivalent). Les sommets du réseau qu'il engendre correspondent un à un aux sommets du réseau engendré par OPGP'DP''KP'''. En joignant dans ce second réseau les points de la même manière que dans le premier pour construire l'octogone $AA'A''A'''A^{(4)}A^{(5)}A^{(6)}A^{(7)}$, on a l'octogone $(A)(A')(A'')(A''')(A^{(4)})(A^{(5)})(A^{(6)})(A^{(7)})(A^{(8)})$ qui correspond à l'une des racines imaginaires.

§ V. — Groupes symétriques.

J'appelle *substitution linéaire directe* une substitution de la forme

$$\frac{(m + in)z + p + iq}{(p - iq)z + m - in},$$

substitution linéaire inverse une substitution

$$\frac{(m + in)z_0 + p + iq}{(p - iq)z_0 + m - in}.$$

Le produit de deux substitutions linéaires inverses est une substitution directe. Le produit de deux substitutions, l'une directe, l'autre inverse, est une substitution inverse. Une substitution inverse transforme un arc orthogonal au cercle fondamental en un arc orthogonal à ce cercle. Un segment d'arc et son transformé ont même L.

Soient AB, A'B' deux arcs orthogonaux au cercle fondamental et de même L. Il y a une substitution inverse unique qui transforme AB en A'B'. Prenons en effet le symétrique A₁B₁ de AB par rapport à l'axe réel; AB se transforme en A₁B₁ par z_0 ; mais il y a une substitution directe qui transforme A₁B₁ en A'B'. Le produit est une substitution inverse qui répond à la question. Il n'y en a pas d'autres; car, si cela

avait lieu, il y aurait deux substitutions directes changeant A, B , en $A'B'$.

Les valeurs de $z = \alpha + i\beta$ invariables par une substitution inverse sont données par

$$(p - iq)(\alpha^2 + \beta^2) - 2in\alpha + 2im\beta - (p + iq) = 0,$$

$$(A) \quad p(\alpha^2 + \beta^2 - 1) = 0,$$

$$(B) \quad q(\alpha^2 + \beta^2) + 2n\alpha - 2m\beta + q = 0.$$

Si $p \neq 0$, (A) représente le cercle fondamental : (B) un cercle orthogonal à ce cercle. La substitution laisse en général invariables deux points du cercle fondamental et change en lui-même le cercle (B), que nous nommerons son *axe*. Pour $p = 0$ elle change en lui-même chaque point du cercle (B).

A un groupe discontinu de substitutions directes et inverses répond un polygone générateur. On peut supposer ce polygone limité par des arcs orthogonaux au cercle fondamental.

Les côtés sont de trois espèces.

Côtés de première espèce. — Ils sont en nombre pair et conjugués deux à deux par des substitutions directes.

Côtés de deuxième espèce. — Ils sont en nombre pair et conjugués deux à deux par des substitutions inverses.

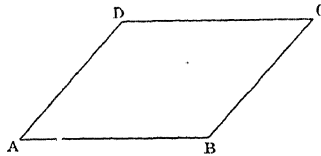
Côtés de troisième espèce. — Ils sont en nombre quelconque, et chacun d'eux définit une substitution inverse qui laisse tous leurs points invariables.

Cherchons maintenant les conditions pour qu'un polygone limité par des côtés de ces trois espèces engendre un groupe discontinu de substitutions linéaires distinctes et inverses.

Faisons d'abord une remarque. La disposition des points conjugués sur les côtés de deuxième espèce n'est pas la même que celle des points conjugués sur les côtés de première espèce. En effet, supposons qu'on parcoure un côté de première espèce en décrivant positivement le contour du polygone, nous savons que, pour parcourir le côté conjugué en suivant les points conjugués dans le même ordre, il faut décrire le contour du polygone en sens contraire. Ainsi, dans le parallélogramme ABCD (*fig. 27*), A est conjugué de D et C de B. En allant

de A en B, on parcourt le contour du polygone dans le sens positif, et en allant de D en C, on le parcourt dans le sens négatif.

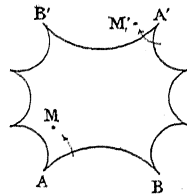
Fig. 26.



Au contraire, si l'on a deux côtés conjugués par une substitution linéaire inverse, il faut suivre les deux côtés en tournant dans le même sens pour rencontrer dans le même ordre les points conjugués. Ainsi deux côtés conjugués par une substitution linéaire inverse offriront la disposition figurée.

On le reconnaît par cette propriété des substitutions inverses : si un point M (fig. 27) voisin de A tourne autour de A dans le sens positif, son homologue M' tourne autour de A' dans le sens négatif.

Fig. 27.



Les sommets du polygone générateur peuvent se grouper en points homologues. Les ensembles de sommets homologues entre eux s'appellent *cycles*. Pour reconnaître la nature des cycles, envisageons le réseau formé par le polygone générateur et tous ses transformés. Prenons un sommet de ce réseau S, et étudions la région ρ d'amplitude 2π qui l'environne. Trois cas peuvent se présenter :

1° Un point M infiniment voisin de S n'a pas d'homologue infiniment voisin de S. Alors tous les côtés des polygones du réseau qui aboutissent au point M sont de première ou de deuxième espèce. En effet, s'il y avait un côté de troisième espèce, la région ρ serait partagée en

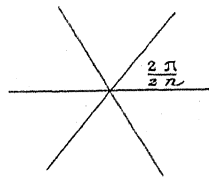
deux autres, chacune d'amplitude π et formée de points homologues aux points de l'autre.

Si la région ρ contient plusieurs points infiniment voisins de S homologues entre eux, on peut la partager en régions limitées par deux arcs de cercles orthogonaux au cercle fondamental et homologues les uns des autres. On obtient ainsi le deuxième et le troisième cas.

2° Les deux arcs limites partant du sommet peuvent être conjugués entre eux. Ils le sont nécessairement par une substitution linéaire directe. En effet, la substitution doit laisser S invariable, et une substitution linéaire inverse n'a de points doubles que sur le cercle fondamental, sauf le cas où elle en a une infinité sur un cercle. Mais alors au sommet S aboutirait un côté de troisième espèce, et la région ρ ne serait pas divisée suivant l'hypothèse. L'angle des deux arcs limites est $\frac{2\pi}{n}$, n étant entier. J'appelle les cycles du premier et du deuxième cas *cycles de première catégorie*.

3° Un des arcs limites est un côté de troisième espèce. L'autre arc, n'ayant pas de conjugué, est aussi un côté de troisième espèce. On obtient alors une région angulaire qui se reproduit par symétrie autour de ses côtés. Elle est donc d'amplitude $\frac{2\pi}{2n}$ (*fig. 28*), n étant entier. On a un *cycle de la deuxième catégorie*.

Fig. 28.



Tout polygone qui est limité par des arcs orthogonaux au cercle fondamental répartis en paires de première et de deuxième espèce et en côtés de troisième espèce, dont les cycles satisfont à ces conditions, engendre un groupe discontinu. En effet, en faisant les substitutions directes et inverses qu'il définit, on obtient un réseau de polygones juxtaposés et ne se recouvrant pas les uns les autres.

(J'ai abrégé l'exposition de cette théorie parce que les développe-

ments offrent une analogie complète avec ceux de M. Poincaré dans la théorie des groupes fuchsien.)

Remarquons encore qu'il y a le même nombre de cycles de la deuxième catégorie que de côtés de troisième espèce. En effet, chacun des deux bouts d'un côté de troisième espèce sert de limite à l'angle d'un cycle de la deuxième catégorie, et d'autre part l'angle d'un cycle de la deuxième catégorie est limité par deux arcs de troisième espèce.

Nous désignerons par $2m$, $2n$, q respectivement les nombres de première, deuxième, troisième espèce, par l le nombre des cycles de première catégorie.

Contours complets et incomplets. — Imaginons des côtés de troisième espèce AB, BC, CD, DE limitant un polygone générateur P; chacun des angles B, C, D est nécessairement une partie aliquote de π ; en A et E aboutissent des côtés de première ou de deuxième espèce. Si les points A et E sont homologues, nous appellerons le contour ABCDE *contour complet*; dans le cas contraire, *contour incomplet*. E appartient à un cycle de deuxième catégorie; considérons le réseau engendré par P et dans ce réseau le deuxième côté de troisième espèce limitant l'angle du cycle auquel appartient E. Ce côté appartient à un polygone égal à P; soit FG son homologue dans P; FG est l'origine d'un nouveau contour incomplet FGHK.

Si K est homologue de A, nous appellerons l'ensemble des deux contours incomplets ABCDE, FGHK *contour complet*. Sinon nous continuerons de la même façon: comme nous supposons que P n'a qu'un nombre limité de côtés, on finira par retomber sur un homologue de A. Je désignerai par s le nombre des contours complets. Ils sont analogues aux cycles.

THÉORÈME. — Si $n = 0$, $m - l - s$ est impair.

Transformons en effet d'une manière continue le polygone P en réduisant à 0 tous les côtés de troisième espèce. On obtient un polygone (P) dont tous les côtés sont de première espèce. Chacun des contours complets donne naissance à un cycle de sommets de (P). Les cycles de première catégorie dans P subsistent sans altération dans (P). Le

nombre des côtés de P est $2m$, celui de ses cycles $l + s$. Soit p_1 son genre

$$m - l - s = 2p_1 - 1.$$

C. Q. F. D.

Étant donné un groupe Γ de substitutions directes et inverses, il est évident que les substitutions directes contenues dans Γ forment un groupe G . Soit P un polygone engendrant Γ ; on formera un polygone R engendrant G en réunissant P avec un polygone P' de son réseau ayant en commun avec P un côté de deuxième ou de troisième espèce. Tout côté de troisième espèce dans P sera conjugué avec le côté homologue de troisième espèce dans P'; chaque côté de deuxième espèce dans P avec l'homologue dans P' de son conjugué dans P.

Je me propose maintenant de déterminer les cycles de R. Considérons un sommet du réseau engendré par R. Si dans P il appartient à un cycle de première catégorie, à ce sommet aboutissent deux arcs conjugués par une substitution elliptique qui est directe et par conséquent appartient à G. Le cycle subsiste donc sans changement dans R. S'il appartient à un cycle de deuxième catégorie dans P, à ce sommet aboutissent deux arcs faisant un angle $\frac{\pi}{k}$, et définissant chacun une substitution inverse qui laisse tous leurs points invariables. Le produit d'une de ces substitutions par l'autre est une substitution elliptique de période k faisant partie de G; ainsi ce cycle de deuxième catégorie donne naissance dans G à un cycle ayant pour somme d'angles $\frac{2\pi}{k}$, qui comprend aussi les sommets homologues dans P.

Le nombre des côtés de R est $4m + 4n + 2q - 2$; celui de ses cycles est, d'après ce qui précède, $2l + q$. Il a donc pour genre

$$p = \frac{2m + 2n + q - 1 - (2l + q) + 1}{2} = m + n - l;$$

G est un sous-groupe distingué de Γ .

Considérons une équation fuchsienne

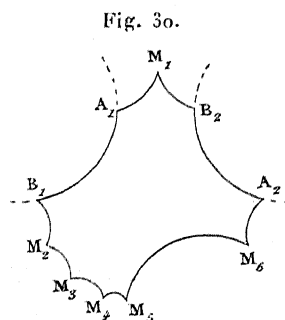
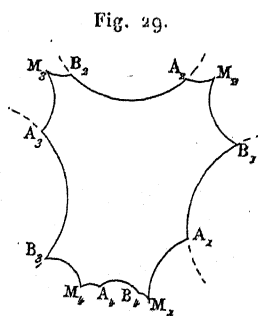
$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \quad f(x, y) = 0,$$

où les fonctions rationnelles $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ ont leurs coefficients

réels. Soit ab une valeur spéciale du point xy , (v) et $\left(\frac{dv}{dx}\right)$, $(v)'$ et $\left(\frac{dv}{dx}\right)'$ deux systèmes arbitraires de valeurs initiales de v et $\frac{dv}{dx}$; on pourra développer, suivant les puissances croissantes de $x - a$, deux intégrales de l'équation fuchsienne correspondant à ces valeurs initiales. D'autre part, l'équation $f(x, y) = 0$ admet aussi la solution a_0, b_0 ; et l'on pourra développer, suivant les puissances croissantes de $x - a_0$, deux intégrales correspondant aux valeurs initiales de v et de $\frac{dv}{dx}$, $(v)_0, \left(\frac{dv}{dx}\right)_0$; $(v)'_0, \left(\frac{dv}{dx}\right)'_0$ pour $x = a_0, y = b_0$. Aux deux points analytiques xy, x_0y_0 répondent donc deux quotients de deux intégrales imaginaires conjugués. La variable x du cercle fondamental prend deux valeurs qui sont fonctions linéaires inverses l'une de l'autre.

Le groupe G de l'équation fuchsienne est donc sous-groupe d'un groupe Γ de substitutions directes et inverses.

Application aux courbes du troisième genre. — Je prendrai des exemples dans la représentation naturelle des courbes du troisième genre qui admettent des équations à coefficients réels. A chaque contour complet répond une branche réelle de courbe. Nous supposons



que chaque contour complet ne contient qu'un côté de troisième espèce, et que la somme des angles adjacents à ce côté est π . Nous prendrons $l = 1$; la somme des angles de ce cycle est nécessairement 2π . On a donc

$$m + n = 4.$$

Soient $n = 0, m = 4; m - s$ étant pair et non négatif, $s = 2$ ou $s = 4$. Ces deux hypothèses donnent les polygones ci-dessus. J'indique les couples de côtés conjugués en les écrivant entre parenthèse, les côtés de troisième espèce en les écrivant seuls (*fig. 29 et 30*).

$$\begin{array}{ll} (M_1 A_1, M_2 B_1), & (M_2 A_2, M_3 B_2), & (M_1 A_1, M_2 B_1), & (M_2 M_3, M_5 M_4), \\ (M_3 A_3, M_4 B_3), & (M_4 A_4, M_1 B_4), & (M_3 M_4, M_6 M_5), & (M_6 A_2, M_1 B_2), \\ (A_1 B_1), & (A_2 B_2), & (A_3 B_3), & (A_4 B_4). \end{array}$$

Nous examinerons encore les cas suivants (*fig. 31 à 34*) :

Fig. 31.

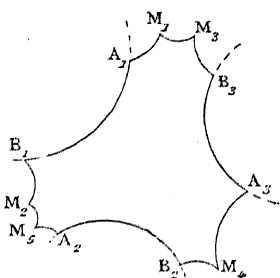
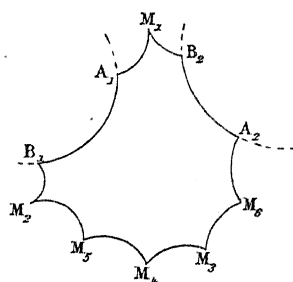


Fig. 32.



$$\begin{array}{l} n = 1, \quad m = 3, \quad s = 3, \\ (M_1 A_1, M_2 B_1), \quad (M_2 M_3, M_3 M_1), \\ (M_3 B_3, M_4 A_3), \quad (M_4 B_2, M_5 A_2), \\ (A_1 B_1), \quad (A_2 B_2), \quad (A_3 B_3). \end{array}$$

$$\begin{array}{l} s = 2, \quad m = 2, \quad n = 2. \\ (M_1 A_1, M_2 B_1), \quad (M_2 M_3, M_3 M_6), \\ (M_3 M_4, M_4 M_5), \quad (M_6 A_2, M_1 B_2), \\ (A_1 B_1), \quad (A_2 B_2). \end{array}$$

Fig. 33.

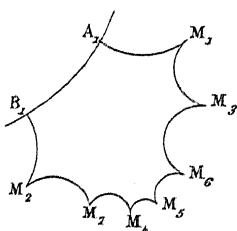
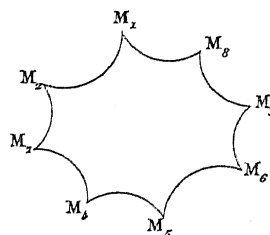


Fig. 34.



$$\begin{array}{l} s = 1, \quad m = 1, \quad n = 3, \\ (M_1 A_1, M_2 B_1), \quad (M_1 M_3, M_7 M_2) \\ (M_7 M_4, M_6 M_3), \quad (M_4 M_5, M_3 M_6), \quad (A_1 B_1). \end{array}$$

$$\begin{array}{l} s = 0, \quad m = 0, \quad n = 4. \\ (M_1 M_2, M_8 M_1), \quad (M_3 M_8, M_2 M_7), \\ (M_7 M_4, M_3 M_6), \quad (M_4 M_6, M_5 M_6). \end{array}$$

Le dernier cas fournit une courbe du troisième degré qui n'a pas de branches réelles.

THÉORÈME. — Si

$$\sigma = \frac{mz_0 + n}{pz_0 + q}$$

est une substitution inverse permutable avec un groupe G , et $\Theta(z)$ une fonction thêtafuchsienne de deuxième espèce,

$$\Theta_1(z) = \left[\frac{1}{(pz_0 + q)^{2m}} \Theta(z\sigma) \right]_0$$

est aussi une fonction thêtafuchsienne de deuxième espèce.

Ce théorème se démontre comme le théorème analogue du § IV.

Application aux relations hyperelliptiques. — Soit un groupe G de la représentation naturelle d'une surface hyperelliptique $y = R(x)$; on démontre aisément, à l'aide du théorème précédent, que, si le genre p de la surface hyperelliptique est plus grand que 1, à toute substitution linéaire inverse permutable avec le groupe G correspond une substitution linéaire inverse sur la variable x . S'il y en a deux, leur produit est une substitution directe permutable avec G ; cas étudié. Nous n'en supposons donc qu'une de période 2, et par suite réductible par une transformation à $x' = x_0$.

Ainsi nous sommes amenés à considérer les groupes qui correspondent aux surfaces hyperelliptiques $y = \sqrt{R(x)}$, où $R(x)$ a ses coefficients réels.

Soit (n impair)

$$R(x) = (x-a)(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_n)(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_m)(x-c'_1)(x-c'_2)\dots(x-c'_m);$$

considérons l'équation fuchsienne

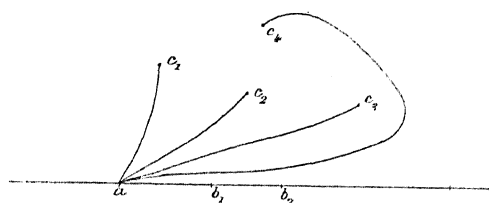
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{P(x)}{(x-a)^2(x-b_1)^2(x-b_2)^2\dots(x-b_n)^2(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_m)^2(x-c'_1)^2(x-c'_2)^2\dots(x-c'_m)^2} v,$$

où toutes les différences des racines des équations déterminantes sont $\frac{1}{2}$.

Je suppose a, b_1, b_2, \dots, b_n réels (*fig. 35*), c_1 et c'_1, c_2 et c'_2, \dots

c_m et c'_m imaginaires conjugués. Traçons dans le plan des x une coupure suivant l'axe réel de la surface, puis des coupures partant du point a et allant aux points $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$. Le rapport de deux intégrales de l'équation fuchsienne devient alors, dans le demi-plan situé du côté

Fig. 35.



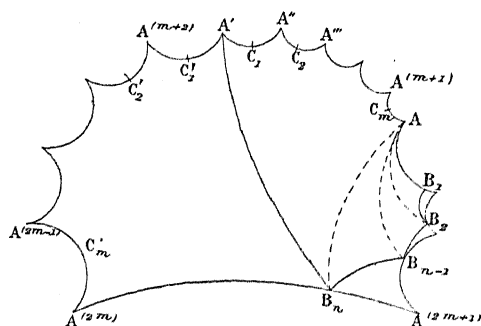
positif de l'axe réel fonction uniforme de la variable x , et le polygone P' qui représente ce demi-plan engendre un groupe Γ' de substitutions directes et inverses.

L'axe réel est représenté par une ligne brisée $AB_1B_2\dots B_nA'$ (fig. 53) dont les angles sont droits et qui forme un contour complet. Chacune des coupures menées dans le demi-plan positif donne naissance à des arcs symétriques respectivement par rapport aux points C_1, C_2, \dots, C_m images de c_1, c_2, \dots, c_m . On peut toujours modifier ces coupures de manière que ces arcs deviennent des arcs de cercle orthogonaux au cercle fondamental. Cela revient en effet à ajouter et à retrancher au polygone des parties homologues entre elles. Les côtés $C_1A', C_1A''; C_2A'', C_2A'''; \dots; C_mA^{(m+1)}, C_mA$ sont conjugués entre eux et forment des côtés de première espèce. La somme des angles A est $\frac{\pi}{2}$.

Pour obtenir le polygone générateur P du groupe Γ des substitutions directes de Γ' , je prends le symétrique du contour $A'A''A''' \dots A^{(m+1)}A$ par rapport au côté $B_nA', A^{(m+2)}A^{(m+3)} \dots A^{(2m-1)}A^{(2m)}$ (fig. 36); les points C_1, C_2, \dots, C_m ont pour symétriques les points C'_1, C'_2, \dots, C'_m . L'arc $A^{(2m)}B_n$ est symétrique par rapport à B_nA' de l'arc AB_n ; prenons le symétrique $A^{(2m+1)}B_n$ de l'arc AB_n par rapport à $B_{n-1}B_n$, l'arc $A^{(2m+1)}B_n$ vient se placer alors dans le prolongement de $A^{(2m)}B_n$, et B_n est le milieu de $A^{(2m)}A^{(2m+1)}$. $A^{(2m+1)}B_{n-1}$ est symétrique de AB_{n-1} par rapport à $B_{n-1}B_n$. En prenant le symétrique de AB_{n-1} par rapport à $B_{n-1}B_{n-2}$,

cet arc se place dans le prolongement de $A^{2m+1}B_{n-1}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive en un point symétrique de A par rapport à B_1 . On obtient ainsi un polygone P ayant $2m + n$ côtés, et dans lequel la moitié de chaque côté est conjuguée de l'autre moitié. Ce polygone engendre précisément le groupe de l'équation fuchsienne de genre 0.

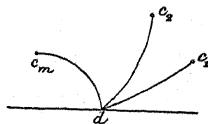
Fig. 36.



Pour obtenir le polygone R générateur du groupe G de la représentation naturelle de $g = \sqrt{R(x)}$, on prendra le symétrique de P par rapport au point B_1 , et l'on conjuguera les côtés opposés du polygone total.

Lorsque toutes les racines de $R(x)$ sont imaginaires conjuguées deux à deux, les constructions précédentes ne s'appliquent plus. Remarquons toutefois que P' a encore, dans ce cas, un côté de troisième espèce; car, x restant réel, le rapport de deux intégrales de l'équation fuchsienne décrit un arc orthogonal au cercle fondamental, et deux points symétriques par rapport à cet arc sont homologues dans Γ' . Ceci posé, traçons une coupure suivant l'axe réel, puis d'un point d pris

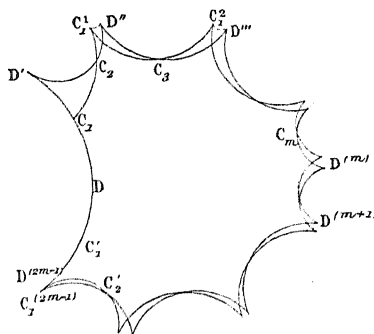
Fig. 37.



sur cet axe menons des coupures dc_1, dc_2, \dots, dc_m (fig. 37) aux racines situées dans le demi-plan positif. Le demi-plan ainsi modifié se repré-

sente dans le cercle fondamental par un polynôme $DD'D'' \dots D^{(m)}$ (fig. 38), où les milieux de m côtés sont C_1, C_2, \dots, C_m .

Fig. 38.



On peut choisir les coupures et le point d de telle sorte que les côtés soient des arcs orthogonaux au cercle fondamental et que l'angle en D soit droit. Alors la somme des angles $D', D'', D^{(m)}$ est $\frac{\pi}{2}$. Je construis son symétrique par rapport à $DD^{(m)}$.

Pour construire le polygone P , générateur de Γ , je prends le symétrique C_1^1 de C_1 par rapport à C_2 , puis le symétrique C_1^2 de C_1^1 par rapport à C_3 , et ainsi de suite en parcourant le contour formé par la réunion des deux polygones. Je dis que le dernier point $C_1^{(2m-1)}$ auquel on arrive est symétrique de C_1 par rapport à C_1' . Pour cela il suffit de démontrer que C_1' et $C_1^{(2m-1)}$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à $D^{(2m-1)}$.

En effet, $C_1^1 D''$ et $C_1' D'$ ainsi que les angles $C_1 D' C_2, C_1' D'' C_2$ sont égaux. Par suite, l'angle $C_1^1 D'' C_3$ est la somme de $C_1 D' C_2$ et de $C_2 D'' C_3$, l'angle $C_1^2 D''' C_4$ est la somme de $C_1 D' C_2, C_2 D'' C_3, C_3 D C_4$ et ainsi de suite; par conséquent, l'angle $C_1^{(2m-1)} D^{(2m-1)} C_1'$ est la somme de tous les angles $D', D'', \dots, D^{(2m-1)}$, c'est-à-dire π . Donc $C_1^{(2m-1)} D^{(2m-1)}$ est dans le prolongement de $D^{(2m-1)} C_1'$. Comme on a

$$C_1 D' = C_1^1 D'' = C_1^2 D''' = \dots = C_1^{(2m-1)} D^{(2m-1)}$$

et que $C_1 D' = C_1 D = D C_1' = C_1' D^{(2m-1)}$, C_1 et C_1' sont symétriques par rapport à $D^{(2m-1)}$. On a donc P , générateur de Γ , dans lequel les demi-

côtés sont conjugués entre eux. En prenant le symétrique de P par rapport à C_1 et en conjuguant les côtés opposés du tout, on aura R, générateur de G.

SECONDE PARTIE.

§ VI. — Polygones équivalents.

Définitions. — On nomme *polygones équivalents* deux polygones qui engendrent le même groupe fuchsien. Si R et R_1 sont deux polygones équivalents, les substitutions S, S', S'', ..., S⁽ⁿ⁾, qui conjuguent les côtés de R, s'expriment par les substitutions S₁, S'₁, S''₁, ..., S⁽ⁿ⁾₁, qui conjuguent les côtés de R₁, et inversement (1).

Les deux polygones R et R₁ sont *proprement équivalents*, s'ils sont constitués et notés de la même façon. Alors $n' = n$, et il y a les mêmes relations entre les substitutions de même nom des deux polygones. Dans le cas contraire, nous appellerons R et R₁ polygones *improprement équivalents*.

R et R₁ étant improprement équivalents, pour transformer R en R₁, il faut faire une certaine *opération*. L'ensemble de toutes les opérations qu'il faut faire pour transformer un polygone en un polygone quelconque proprement équivalent forme un groupe \mathfrak{G} . Ce groupe est dérivé de *systèmes d'opérations fondamentales* qui, par leurs combinaisons, suffisent à l'engendrer.

THÉOREME. — *Les groupes \mathfrak{G} et \mathfrak{G}_1 d'opérations qui transforment deux polygones improprement équivalents R et R₁ en polygones qui leur soient respectivement proprement équivalents sont isomorphes holoédriquement.*

(1) Je considère toujours comme *identiques* deux polygones dont les substitutions sont les mêmes. Je me borne aux polygones qui n'ont pas de partie négative ou qui peuvent être ramenés à des polygones de ce genre en déformant les côtés, mais sans altérer les substitutions.

Soit, en effet, \mathcal{S} une opération de \mathcal{G} qui transforme R en R' . Dans les formules qui expriment les substitutions de R_i par celles de R , remplaçons les substitutions de R par celles de R' . Les nouvelles expressions définissent un polygone R'_i constitué et noté comme R_i , équivalent à R' ; R' étant lui-même équivalent à R , et par suite à R_i , R_i et R'_i sont proprement équivalents. Ainsi à \mathcal{S} dans \mathcal{G} correspond une opération \mathcal{S}_i dans \mathcal{G}_i transformant R_i en R'_i . Inversement à \mathcal{S}_i dans \mathcal{G}_i correspond \mathcal{S} dans \mathcal{G} .

Il est souvent utile d'employer tantôt l'un, tantôt l'autre des groupes isomorphes entre eux pour mettre leurs propriétés en évidence.

Il faut encore distinguer, parmi les polygones proprement équivalents, ceux qui font partie du même réseau et ceux qui appartiennent à des réseaux différents. Généralement, nous ne ferons pas de distinction entre les polygones d'un même réseau, de sorte que nous regarderons comme égales à l'unité les opérations qui transforment un polygone en un polygone de son réseau.

THÉORÈME. — *Envisageons les expressions des substitutions d'un polygone R_i engendrant un groupe G_i contenu dans un groupe Γ , par celles de P_i engendrant Γ . 1° Si l'on remplace dans ces formules les substitutions de P_i par celles d'un polygone P_i de son réseau, on obtient des polygones R_i engendrant un nombre fini de groupes différents G_1, G_2, \dots, G_N . 2° Si l'on remplace P_i par un polygone proprement équivalent P_i^j qui n'est pas de son réseau; puis P_i^j par un polygone P_i^j de son réseau; les polygones R_i^j engendrent N groupes tous identiques aux N premiers ou tous différents. 3° Le nombre total des groupes G que l'on peut obtenir en remplaçant P_i par un polygone proprement équivalent quelconque est fini.*

En effet : 1° soit n le nombre maximum de points homologues entre eux par rapport à Γ et non homologues entre eux par rapport à G_i . Il n'y a pas plus de n polygones R_i engendrant des groupes différents. Ainsi $N \leq n$.

2° Il y a les mêmes relations entre les substitutions de P_i et celles de même nom de P_i^j ; le nombre des groupes déduits des polygones du réseau de P_i^j ne peut donc être inférieur ou supérieur à N . Soient $G_1^j, G_2^j, \dots, G_N^j$ ces groupes. Si G_1^j , par exemple, était le même que $G_1, G_2,$

G_3, \dots, G_N , qui sont les transformés de G_1 par les substitutions de Γ devraient se retrouver parmi $G_2^j, G_3^j, \dots, G_N^j$ qui sont les transformés de G_1^j par les substitutions de Γ , et les N groupes G^j seraient identiques aux N groupes G .

3° Construisons la surface de Riemann dont le polygone P_1 et aussi P_1' , etc., sont l'image. Le nombre des surfaces de Riemann ayant N feuilles et satisfaisant aux conditions nécessaires pour représenter un polygone R est limité. Imaginons-les toutes : en prenant l'une quelconque de leurs feuilles pour en faire l'image sur P_1 , les surfaces de Riemann à N feuilles se représentent sur des polygones engendrant tous les groupes G , qu'on peut obtenir en faisant varier tant les indices inférieurs que les indices supérieurs. Donc le nombre total des groupes est limité.

Remarque. — Soit Nk le nombre des groupes G ; ces groupes

$$G_1, G_2, \dots, G_N; \dots; G_1^j, G_2^j, \dots, G_N^j; \dots; G_1^{k-1}, \dots, G_N^{k-1}$$

se déduisent de N polygones

$$P_1, P_2, \dots, P_N; \dots; P_1^j, P_2^j, \dots, P_N^j; \dots; P_1^{k-1}, \dots, P_N^{k-1}.$$

Imaginons les substitutions de tous ces polygones exprimées par celles de P_1 . Si, dans ces expressions, on remplace les substitutions de P_1 par celles d'un polygone proprement équivalent, les Nk groupes G ne font que se permuer; le groupe H de ces permutations est imprimitif et les $G_1^j, G_2^j, \dots, G_N^j$ forment les systèmes d'imprimitivité.

Le groupe \mathfrak{H} des opérations qui transforment P_1 en un polygone équivalent offre avec H un isomorphisme méridrique. H contient, comme sous-groupe distingué, un groupe intransitif I , formé des permutations qui ne déplacent pas les systèmes d'imprimitivité, mais qui ne font qu'échanger entre eux les éléments de chaque système. A I répond un sous-groupe distingué \mathfrak{I} de \mathfrak{H} .

Les deux théorèmes suivants sont fort importants, et les §§ VII et VIII sont en grande partie consacrés à leurs applications.

THÉORÈME. — *Si un groupe Γ contient un sous-groupe distingué G et si R_1 est un polygone générateur de G , quand on transforme R_1 par les substitutions de Γ , on obtient N polygones appartenant à des réseaux différents*

R_1, R_2, \dots, R_N . Si l'on exprime les substitutions de ces N polygones par celles de R_1 , les expressions obtenues définissent un sous-groupe fini \mathcal{F} du groupe \mathcal{G} des opérations qui transforment tout polygone R constitué et noté comme R_1 en un polygone proprement équivalent, quand même le groupe engendré par R ne serait contenu dans aucun autre groupe.

En effet, G étant sous-groupe distingué de Γ , les substitutions de R_2 étant les transformées des substitutions de R_1 par une substitution de Γ appartiennent à G et s'expriment par les substitutions de R_1 . Imaginons que nous ayons ainsi formé les expressions des substitutions des N polygones par celles de R_1 ; en considérant comme égales à 1 les opérations qui transforment R_1 en un polygone de son réseau, ces expressions définissent un groupe fini d'opérations d'ordre N . Faisons varier les paramètres dont R_1 dépend, sans nous occuper si le groupe qu'il engendre reste sous-groupe distingué d'un groupe Γ . Soit R le nouveau polygone. Ses cycles sont les mêmes que ceux de R_1 . Or il n'y a, tant dans R que dans R_1 , de relations entre les substitutions que celles fournies par les cycles et les combinaisons de celles-ci entre elles. Ainsi, les relations entre les substitutions de même nom de R et de R_1 sont les mêmes. Si le groupe \mathcal{F} est fini et d'ordre N , c'est que certains produits des substitutions de R_1 sont égaux à 1. Les produits des substitutions de même nom de R seront aussi égaux à 1. Ainsi l'on obtient, quel que soit R , un groupe \mathcal{F} d'ordre N .

Remarque. — En transformant R_1 par les substitutions d'un polygone générateur de Γ , les expressions correspondantes donnent les opérations fondamentales de \mathcal{F} .

THÉORÈME. — Si l'on exprime les substitutions de R_1 par celles d'un polygone P générateur de Γ et si, dans les expressions obtenues, on remplace les substitutions de P par celles d'un polygone proprement équivalent P' et tel que R_1 se change en R'_1 proprement équivalent à R_1 , les expressions des substitutions de R'_1 par celles de R_1 définissent des opérations formant un sous-groupe \mathcal{K} de \mathcal{G} et ayant \mathcal{F} pour sous-groupe distingué.

Il faut prouver que la transformée d'une opération de \mathcal{F} par une opération de \mathcal{K} est une opération de \mathcal{F} . Soient P_1 et P_2 deux polygones générateurs de Γ du même réseau; R_1 et R_2 les polygones générateurs de G

qui en dérivent. Les expressions des substitutions de R_i par celles de R_1 définissent une opération \mathfrak{S} de \mathfrak{F} . Soit t une opération changeant P_i en P'_i , et telle que le polygone R'_i qui dérive de P'_i soit équivalent à R_i ; les expressions des substitutions de R'_i par celles de R_1 définissent une opération \mathfrak{C} de \mathfrak{A} . Faisons sur P_i l'opération t . Elle donne un polygone P'_i . Comme P_i est le transformé de P_1 par une substitution σ de Γ , P'_i est le transformé de P'_1 par σ . R'_i dérivé de P'_i est aussi le transformé de R'_1 par σ ; il se déduit donc de R'_1 par une opération \mathfrak{S}' de \mathfrak{F} . Il se déduit d'ailleurs de R_i par \mathfrak{C} . On a donc

$$\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{S}\mathfrak{C} = \mathfrak{S}',$$

C. Q. F. D.

Notation des opérations. — Pour noter une opération, je suppose les substitutions du polygone désignées par une même lettre affectée d'un indice ou d'un accent, et j'écris entre deux traits verticaux les expressions des substitutions du nouveau polygone par celles de l'ancien, en suivant l'ordre de grandeur croissante des indices ou des accents des substitutions qu'elles représentent.

Sur les polygones hyperelliptiques. — Toute relation hyperelliptique de genre p peut se représenter naturellement sur un polygone de $4p$ côtés, dans lequel les côtés opposés sont conjugués et les axes des substitutions concourants. Pour $p > 2$, les surfaces hyperelliptiques peuvent se représenter naturellement sur de pareils polygones, mais dans lesquels les axes des substitutions ne sont pas concourants. Les polygones de $4p$ côtés, dont les côtés opposés sont conjugués et qui représentent des surfaces hyperelliptiques, se partagent alors en multiplicités distinctes, telles que dans chacune d'elles les substitutions jouissent d'une propriété géométrique spéciale.

Soit \mathfrak{G} le groupe des opérations qui transforment un polygone hyperelliptique dans lequel les axes des substitutions sont concourants en polygones proprement équivalents de la même multiplicité. Je me propose de déterminer un système d'opérations fondamentales de \mathfrak{G} .

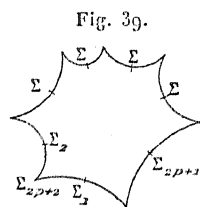
Soient $S, S', S'', \dots, S^{(2^{p-1})}$ les substitutions du polygone; on a

$$S = \Sigma_1 \Sigma_{2p+1}, \quad S' = \Sigma_2 \Sigma_{2p+1}, \quad \dots, \quad S^{2^{(p-1)}} = \Sigma_{2p} \Sigma_{2p+1}, \\ \Sigma_1 \Sigma_2 \dots \Sigma_{2p+1} \Sigma_{2p+2} = 1.$$

Les Σ étant des rotations de $\pi \cdot \Sigma_{2p+1}$ est celle qui a pour centre le point de concours des axes. Nous ne considérerons pas comme distincts les systèmes

$$S, S', \dots, S^{(2p-1)} \text{ et } S^{-1}, S'^{-1}, \dots, S^{(2p-1)-1},$$

le second est le transformé du premier par Σ_{2p+1} . Sous cette condition, il y a isomorphisme holoédrique entre \mathfrak{G} et le groupe \mathfrak{g} des opérations qui transforment le polygone défini par les Σ en un polygone équivalent. Pour fixer les idées, nous prendrons un polygone de $2p + 1$ côtés, où les demi-côtés sont conjugués, et les milieux sont les points doubles de $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{2p+1}$ (fig. 39). Le point double de Σ_{2p+2} est le sommet compris sur le contour entre le point double de Σ_1 et celui de Σ_{2p+1} .



Soient $a_1, a_2, \dots, a_{2p}, a_{2p+1}, a_{2p+2}$ les racines du polynôme placé sous le radical dans la relation hyperelliptique. Le polygone dont les substitutions sont les Σ_i et un système de coupures allant du point a_{2p+2} aux points $a_1, a_2, \dots, a_{2p}, a_{2p+1}$ se correspondent d'une façon unidérminative. On peut donc substituer à la considération de deux polygones proprement équivalents celle de deux systèmes de coupures constitués et notés de la même façon, que nous appellerons aussi proprement équivalents. Soient $C_1, C_2, \dots, C_{2p+1}$ et $C'_1, C'_2, \dots, C'_{2p+1}$ deux systèmes de coupures tracées : les premières, entre le point a_{2p+2} et les points $a_1, a_2, \dots, a_{2p+1}$; les secondes, entre le point $a_{j_{2p+2}}$ et les points $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{2p+1}}$, où les j indiquent les $2p + 2$ premiers nombres dans un ordre quelconque. On suppose que, dans chaque système, un mobile infiniment voisin du point où les coupures se réunissent et tournant autour de ce point dans le sens positif les rencontre dans l'ordre des indices croissants. L'opération

$$l = | \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_{2p+2}, \Sigma_1 |$$

permet de remplacer le point $a_{j_{2p+2}}$ par un quelconque des autres.

Il nous reste donc seulement à ramener au système $C_1, C_2, \dots, C_{2p+1}$ un système $C'_1, C'_2, \dots, C'_{2p+1}$ partant de a_{2p+2} et aboutissant à $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{2p+1}}$. Comme la dernière substitution s'exprime par les autres, nous ne la ferons désormais plus entrer dans la notation des opérations.

THÉORÈME. — *Pour réduire le système C' au système C, il suffit des deux opérations*

$$m = |\Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_{2p+1}, \Sigma_1|,$$

$$n = |\Sigma_2, \Sigma_2 \Sigma_1 \Sigma_2, \Sigma_3, \dots, \Sigma_{2p+1}|.$$

Deux systèmes de coupures doivent être considérés comme identiques, lorsqu'on peut ramener l'une à l'autre les coupures de même nom en les déformant d'une manière continue.

Remarque I. — Considérons une portion E de sphère limitée par une courbe L, un point a pris sur L et un point b pris dans E. Les arcs situés dans E, et allant de a en b sans se couper eux-mêmes, peuvent se ramener l'un à l'autre par une déformation continue.

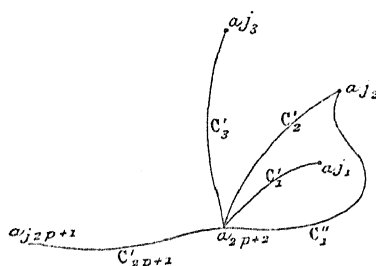
Remarque II. — Marquons dans E un point c , tous les arcs allant de a en b sans se couper eux-mêmes, et sans rencontrer un arc fixe A tracé entre a et b , se partagent en deux classes : 1° les arcs d'une même classe peuvent être ramenés l'un à l'autre par déformation continue sans franchir c ; 2° deux arcs de deux classes différentes peuvent être ramenés l'un à l'autre, mais en franchissant c une fois. Nous appellerons *première classe* celle à laquelle appartient A.

Remarque III. — L'opération m permute cycliquement les noms des coupures.

Remarque IV. — Si l'on fait sur un système $C'_1, C'_2, \dots, C'_{2p+1}$ (*fig. 42*) l'opération n , les coupures $C'_3, C'_4, \dots, C'_{2p+1}$ ne changent pas, la coupure C'_2 est remplacée par C'_1 . L'ensemble des bords des coupures $C'_3, C'_4, \dots, C'_{2p+1}$ forme une courbe L. D'après la remarque II, l'arc suivant lequel est tracée C'_2 et le point a_{j_1} définissent deux classes d'arcs; C'_1 est remplacée par une coupure C''_1 tracée suivant un arc de la deuxième classe. On peut déformer C'_2 et C''_1 de manière à les rendre infiniment voisines sur tout leur parcours, le point a_{j_1} étant entre les deux. Si l'on fait abstraction du nom des coupures, l'opération n n'altère qu'une

des $2p + 1$ coupures, C'_2 , qui, au lieu d'aboutir dans l'angle de C'_1 et de C'_3 , aboutit dans l'angle de C'_1 et de C'_{2p+1} . L'opération $nm^{-1}n$ ne change que les noms des $2p$ coupures $C'_1, C'_3, \dots, C'_{2p+1}$; mais la dernière, au lieu d'aboutir dans l'angle de C'_1 et de C'_3 , aboutit dans l'angle de C'_{2p} et de C'_{2p+1} . En général, les opérations m et n permettent, en changeant seulement le nom de h coupures, de faire aboutir les $2p + 1 - h$ autres dans l'un quelconque des angles de celles-ci, et, comme m permute cycliquement les noms des coupures, on peut passer d'un système qui a h coupures à un système où ces h coupures sont les h premières.

Fig. 40.



L'opération n^{-1} ne change pas les $2p - 1$ dernières coupures, remplace C'_1 par C'_2 et C'_2 par une coupure qui ne rencontre pas C'_1 et qui correspond entre elle et C'_1 , le point a_{j_1} .

Pour démontrer le théorème, il suffit de démontrer la proposition suivante : si les opérations m et n permettent de réduire le système C' au système C , lorsqu'ils ont les $r + 1$ premières coupures communes, elles permettent de les réduire l'un à l'autre lorsqu'ils ont les r premières coupures communes.

Ainsi les coupures C_1, C_2, \dots, C_r sont communes; $C'_{r+1}, \dots, C'_{2p+1}$ et C_{r+1}, \dots, C_{2p+1} sont différentes. Une coupure $C'_i, i > r$ aboutit au point a_{r+1} . On peut (*Remarque IV*), sans modifier les $2p$ autres coupures, la faire aboutir dans l'angle de C_r et de C'_{r+1} . Alors C_{r+1} et C'_{r+1} se terminent toutes deux au point a_{r+1} . Supprimons les $2p - r$ dernières coupures dans chaque système. L'ensemble des bords des r premières forme une courbe fermée L . C_{r+1} et C'_{r+1} sont tracées suivant deux arcs allant de a_{2p+2} à a_{r+1} . On peut donc (*Remarque I*) ramener C'_{r+1} à C_{r+1} par une déformation continue. Pendant cette déformation, C'_{r+1} franchira les

points $a_{r+2}, a_{r+3}, \dots, a_{2p+1}$. Elle ne change d'ailleurs pas de nature tant qu'elle se déforme sans franchir un de ces points; soient $(C'_{r+1})_1, (C'_{r+1})_2, \dots, (C'_{r+1})_k$ les états successifs de C'_{r+1} pendant la déformation.

Dans le passage de C'_{r+1} à $(C'_{r+1})_1$, C'_{r+1} deviendra infiniment voisine d'un point $a_i (i > r+1)$, $(C'_{r+1})_1$ sera la coupure infiniment voisine de C'_{r+1} , telle qu'entre les deux il y ait a_i . Imaginons d'abord les deux coupures $C'_{r+1}, (C'_{r+1})_1$ existant en même temps et menons des coupures $C''_{r+3}, \dots, C''_{2p+1}$ aux $2p - r - 1$ derniers points des deux systèmes. Enlevons ensuite $(C'_{r+1})_1$ et menons la coupure C''_{r+2} à a_i . Les deux systèmes $C_1, C_2, \dots, C_r, C'_{r+1}, C'_{r+2}, \dots, C'_{2p+1}; C_1, C_2, \dots, C_r, C'_{r+1}, C''_{r+2}, \dots, C''_{2p+1}$ ont $r+1$ coupures communes; nous admettons donc qu'on peut passer de l'un à l'autre par les opérations m et n .

Par l'opération m' , le second système devient $C'_{r+1}, C''_{r+2}, \dots, C'_{2p+1}, C_1, C_2, \dots, C_r$; n^{-1} substitue à la deuxième coupure de ce système $(C'_{r+1})_1$. Par les opérations m et n , on peut passer (*Remarque IV*) du système obtenu à un système où $C_1, C_2, \dots, C_r, (C'_{r+1})_1$ sont les $r+1$ premières coupures. Le même procédé permet évidemment de passer de $(C'_{r+1})_1$ à $(C'_{r+1})_2$, et ainsi de suite jusqu'à ce que, dans les deux systèmes, les deux coupures de rang $r+1$ soient les mêmes. C. Q. F. D.

THÉORÈME. — *Le groupe \mathfrak{G} admet pour opérations fondamentales :*

$$L = |S' S^{-1} S' \dots S^{(2p-2)-1} S^{(2p-1)}, S'' S^{-1} \dots S^{(2p-2)-1} S^{(2p-1)}, \dots S^{-1} S' \dots S^{(2p-2)-1} S^{(2p-1)}|,$$

$$M = |S' S^{-1}, S'' S^{-1}, \dots, S^{(2p-1)} S^{-1}, S^{-1}|,$$

$$N = |S', S' S^{-1} S', S'', \dots, S^{(2p-1)}|.$$

En effet, L, M, N sont les opérations de \mathfrak{G} qui correspondent à l, m, n opérations fondamentales de \mathfrak{g} .

VII. — Du genre 2.

Opérations fondamentales.

Nous prendrons pour polygone générateur du groupe fuchsien de la représentation naturelle d'une surface de genre 2 un octogone dont les côtés opposés sont conjugués. La notation en a déjà été indiquée au

§ IV. \mathfrak{G} étant le groupe des octogones, les trois opérations

$$\begin{aligned} A &= |S', S'', S''', S^{-1}|, \\ B &= |S, S^{-1}S', S^{-1}S'', S^{-1}S'''|, \\ C &= |S''SS'^{-1}, S'''S''^{-1}, S''^{-1}, S'S'^{-1}| \end{aligned}$$

forment un système fondamental. Voici d'abord quelques détails sur le calcul des opérations. Étant données deux opérations

$$H = |S_1, S'_1, S''_1, S'''_1|, \quad H' = |S_2, S'_2, S''_2, S'''_2|,$$

où les S_i et les S'_i sont des produits de S, S', S'', S''' , le produit HH' s'obtient en remplaçant dans S_2, S'_2, S''_2, S'''_2 les lettres S, S', S'', S''' par S_1, S'_1, S''_1, S'''_1 qui sont les produits de ces lettres; en supprimant les substitutions qui se détruisent, on a

$$HH' = |S_3, S'_3, S''_3, S'''_3|,$$

où les S_3 sont des produits de S, S', S'', S''' .

Nous appellerons inverse de H une opération H^{-1} , telle que $HH^{-1} = 1$. Les S_i sont des produits de S, S', S'', S''' ,

$$\begin{aligned} S_1 &= P(S, S', S'', S'''), & S'_1 &= P'(S, S', S'', S'''), \\ S''_1 &= P''(S, S', S'', S'''), & S'''_1 &= P'''(S, S', S'', S'''); \end{aligned}$$

en résolvant ces équations par rapport à S, S', S'', S''' , on aura, pour S, S', S'', S''' , quatre expressions en S_1, S'_1, S''_1, S'''_1 ; ces expressions définissent, en supprimant les accents, l'opération H^{-1} .

Posons

$$E = |S, S', S'S^{-1}S''^{-1}S''', S''|, \quad F = |S, S', S'', S'''S''^{-1}S'S^{-1}|;$$

on trouve

$$E = AB^{-1}A^{-1}B^{-1}A^{-1}C^{-1}A^2, \quad F = (AE^{-1})^3;$$

les deux opérations E et F sont commodes dans les calculs, à cause de leur forme simple.

Comme dans tout octogone dont les côtés opposés sont conjugués les axes des substitutions sont concourants, nous conservons la convention générale pour les polygones de cette espèce,

$$|S^{-1}, S'^{-1}, S''^{-1}, S'''^{-1}| = 1,$$

Les opérations L, M, N du § VI ont pour expressions

$$L = AF^{-1}A^{-1}BA, \quad M = BA, \quad N = AF^{-1}AE^{-1}A^2;$$

elles s'expriment donc par A, B, C : cela démontre que A, B, C forment un système fondamental.

Interprétation géométrique de A, B, C.

Les trois figures suivantes indiquent les octogones $1'4'7'2'5'8'3'6'$,

Fig. 41.

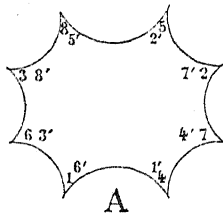


Fig. 42.

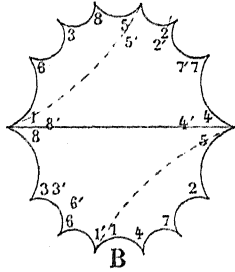
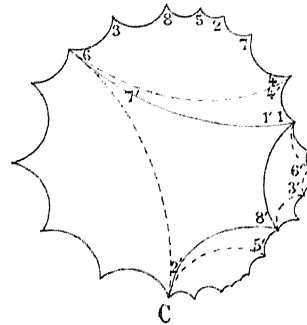


Fig. 43.



obtenus quand on fait sur un octogone 14725836 les opérations A, B, C (*fig. 41 à 43*).

Propriétés des opérations A, B, C.

THÉORÈME. — *Les opérations A et C engendrent un groupe fini.*

Le calcul donne, en effet,

$$A^2 = 1, \quad C^2 = 1, \quad CA = |S''S''^{-1}, S''^{-1}, S'S''^{-1}, S'S''^{-1}S''^{-1}|$$

et

$$(CA)^2 = 1.$$

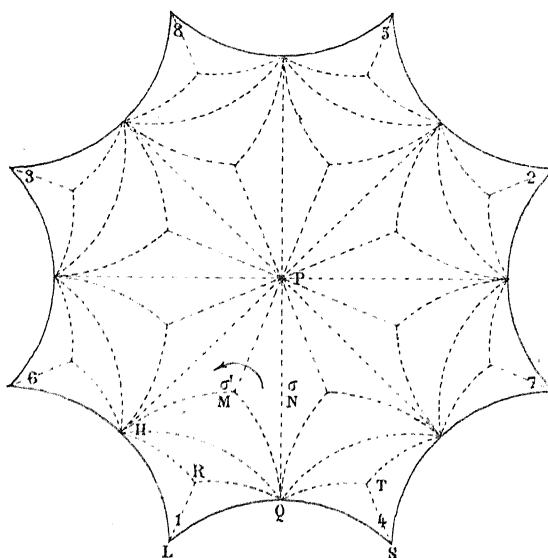
Ces trois relations montrent que le groupe engendré par A et C est isomorphe au groupe d'une équation différentielle du genre 0 à trois points singuliers, avec $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ pour différences des racines des équations déterminantes. Or le groupe de cette équation étant fini, le groupe qu'engendre A et C est fini et présente, avec le premier, un isomorphisme holoédrique (1).

(1) Comparer DYCK, *Gruppentheoretische Studien*, I.

On peut aussi considérer ce résultat comme une application des théorèmes du § VI.

Construisons un octogone régulier dont la somme d'angles est 2π (*fig. 46*), conjuguons-y les côtés opposés et exprimons les quatre sub-

Fig. 44.



stitutions de cet octogone au moyen des substitutions σ et σ' ayant respectivement pour points doubles M et N avec les relations

$$\sigma'^3 = 1, \quad \sigma^2 = 1, \quad (\sigma'\sigma)^8 = 1.$$

S est le produit d'une rotation de 180° autour de Q par une rotation de 180° autour de P,

$$S = (\sigma'\sigma)^4 (\sigma\sigma')^4.$$

D'autre part, $\sigma'^{-1}\sigma$ est une rotation de $\frac{\pi}{4}$ autour de P dans le sens positif; S', S'', S''' sont des transformées de S par cette rotation, son carré et son cube,

$$S' = \sigma\sigma'(\sigma'\sigma)^4(\sigma\sigma')^2 \quad S'' = (\sigma\sigma')^2(\sigma'\sigma)^4(\sigma\sigma')^2, \quad S''' = (\sigma\sigma')^3(\sigma'\sigma)^4\sigma\sigma';$$

il est donc clair que l'opération A remplace S, S', S'', S''' par leurs transformées au moyen de $\sigma'^{-1}\sigma$.

Considérons dans la figure les deux triangles QTS, LRQ, soit

$$\text{QTS in LRQ} = \tau = (\sigma\sigma'^{-1})^2 \sigma (\sigma\sigma'^{-1})^2 = \sigma\sigma'^{-1} \sigma\sigma' \sigma\sigma'^{-1}.$$

Je dis que

$$\begin{aligned} \tau^{-1} \mathbf{S} \tau &= \mathbf{S} \mathbf{S}'^{-1} \mathbf{S}''', & \tau^{-1} \mathbf{S}' \tau &= \mathbf{S}''^{-1} \mathbf{S}''', \\ \tau^{-1} \mathbf{S}'' \tau &= \mathbf{S}'''^{-1} \mathbf{S}''^{-1} \mathbf{S}''', & \tau^{-1} \mathbf{S}''' \tau &= \mathbf{S}'''^{-1} \mathbf{S}' \mathbf{S}''^{-1} \mathbf{S}''', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau^{-1} \mathbf{S} \tau &= (\sigma' \sigma)^2 \sigma (\sigma' \sigma)^6 (\sigma\sigma')^4 (\sigma\sigma'^{-1})^2 \sigma (\sigma\sigma'^{-1})^2 \\ &= (\sigma' \sigma)^2 \sigma (\sigma\sigma'^{-1})^2 (\sigma\sigma')^4 (\sigma\sigma'^{-1})^2 \sigma (\sigma\sigma'^{-1})^2 \\ &= (\sigma' \sigma)^2 (\sigma'^{-1} \sigma)^2 (\sigma' \sigma)^4 \sigma'^{-1} \sigma\sigma' \sigma\sigma'^{-1} \\ &= (\sigma' \sigma)^2 (\sigma'^{-1} \sigma)^2 (\sigma\sigma'^{-1})^4 \sigma'^{-1} \sigma\sigma' \sigma\sigma'^{-1} \\ &= (\sigma' \sigma)^2 \sigma'^{-1} \sigma\sigma' (\sigma\sigma'^{-1})^2 \sigma (\sigma' \sigma)^2 \sigma'^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \mathbf{S}'^{-1} \mathbf{S}''' &= (\sigma' \sigma)^4 \sigma\sigma' (\sigma\sigma'^{-1})^4 (\sigma\sigma')^2 (\sigma' \sigma)^4 \sigma\sigma' \\ &= (\sigma' \sigma)^3 (\sigma'^{-1} \sigma)^5 \sigma' \sigma\sigma'^{-1} \sigma (\sigma' \sigma)^3 \sigma\sigma' \\ &= (\sigma' \sigma)^3 (\sigma\sigma')^3 \sigma' \sigma\sigma'^{-1} \sigma (\sigma' \sigma)^2 \sigma'^{-1} \\ &= (\sigma' \sigma)^2 \sigma'^{-1} \sigma\sigma' \sigma\sigma'^{-1} \sigma\sigma'^{-1} \sigma (\sigma' \sigma)^2 \sigma'^{-1}; \end{aligned}$$

les deux dernières formes de $\tau^{-1} \mathbf{S} \tau$ et de $\mathbf{S} \mathbf{S}'^{-1} \mathbf{S}'''$ sont évidemment les mêmes,

$$\begin{aligned} \tau^{-1} \mathbf{S}' \tau &= (\sigma' \sigma)^2 \sigma (\sigma' \sigma)^2 \sigma\sigma' (\sigma' \sigma)^4 (\sigma\sigma')^3 (\sigma\sigma'^{-1})^2 \sigma (\sigma\sigma'^{-1})^2 \\ &= \sigma' \sigma\sigma'^{-1} \sigma\sigma'^{-1} (\sigma' \sigma)^3 \sigma'^{-1} (\sigma\sigma')^2 (\sigma\sigma'^{-1})^2 \sigma'^{-1} \sigma\sigma'^{-1} \\ &= \sigma'^{-1} \sigma\sigma'^{-1} (\sigma\sigma')^2 \sigma\sigma'^{-1} \sigma\sigma' \sigma\sigma'^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}''^{-1} \mathbf{S}''' &= (\sigma'^{-1} \sigma)^2 (\sigma\sigma'^{-1})^4 \sigma\sigma' (\sigma' \sigma)^4 \sigma\sigma' \\ &= \sigma'^{-1} \sigma\sigma' (\sigma\sigma'^{-1})^4 (\sigma\sigma')^2 \sigma\sigma'^{-1} \\ &= \sigma'^{-1} \sigma\sigma' (\sigma' \sigma)^4 (\sigma\sigma')^2 \sigma\sigma'^{-1} \\ &= \sigma'^{-1} \sigma\sigma'^{-1} (\sigma\sigma')^2 \sigma\sigma'^{-1} \sigma\sigma' \sigma\sigma'^{-1}. \end{aligned}$$

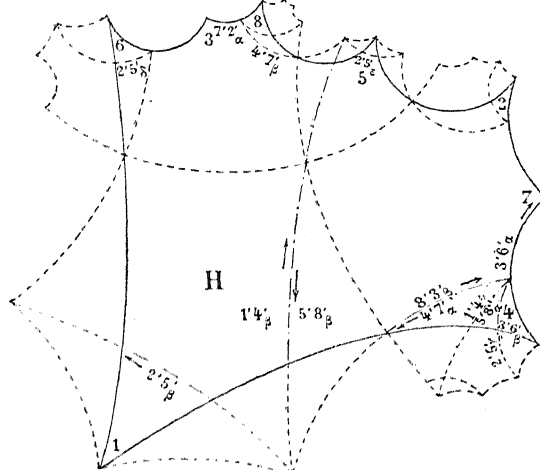
On fait de même les deux autres vérifications. Ainsi l'opération C est celle qui transforme l'octogone primitif en un octogone construit sur le triangle LRQ de la même façon que le primitif l'est sur QTS. CA donne un octogone construit de même sur QRH.

THÉORÈME. — CA et C sont respectivement le carré et le cube de deux opérations du groupe.

Construisons un réseau d'hexagones réguliers ayant leurs angles droits et, dans ce réseau, l'octogone 14725836 (*fig. 47*). Cet octogone engendre un réseau d'octogones; en convenant de le désigner par 1, on

peut désigner chaque octogone par la substitution qui sert à changer en celui-là l'octogone 1. Faisons tourner de 60° autour de son centre l'hexagone désigné par H et l'octogone 14725836, cela donnera un nouvel octogone 1'4'7'2'5'8'3'6'. Le contour de ce dernier n'est pas

Fig. 45.



contenu tout entier dans l'octogone 1; mais, si une partie de ce contour est en dehors, il suffit d'indiquer son homologue dans l'octogone 1 et l'octogone où elle se trouve. 1'4' est divisé en trois tronçons, dont chacun se trouve dans un octogone différent du réseau; je désignerai le premier que l'on rencontre, en parcourant le contour 1'4'7'2'5'8'3'6' dans le sens positif, par 1'4'_α; le deuxième par 1'4'_β; le troisième par 1'4'_γ. 1'4'_β est dans l'octogone 1, et, comme il va rencontrer le côté 85 de cet octogone, 1'4'_γ est dans l'octogone S; quand on est arrivé au sommet 4', il faut suivre un arc faisant avec 1'4'_γ un angle égal à l'angle 4, ce qui donne 4'7'_α dans l'octogone S; 4'7'_α va aboutir sur le côté 14, de sorte que 4'7'_β est dans l'octogone S⁻¹S = 1; 7'2'_α est dans l'octogone 1 et coïncide avec la seconde moitié de 83; 7'2'_β est, par suite, dans S⁻¹S^{m-1}S'' et coïncide avec la première moitié de 83; 2'5'_α est dans S⁻¹S^{m-1}S'', 2'5'_β dans S^{m-1}S'', 2'5'_γ dans S'', 2'5'_δ dans 1, 2'5'_ε dans S'', 2'5'_ζ dans SS'', 5'8'_α dans SS'', 5'8'_β dans S'', 5'8'_γ dans S⁻¹S'', 8'3'_α dans S⁻¹S'', 8'3'_β dans S'', 3'6'_α dans S'', 3'6'_β dans SS''S^{m-1}S'', 6'1'_α dans

$SS''S''^{-1}S''$, $G'1'_\beta$ dans $S''S''^{-1}S''$, $G'1'_\gamma$ dans $S''^{-1}S''$, $G'1'_\delta$ dans S'' , $G'1'_\epsilon$ dans 1 , $G'1'_\zeta$ dans S^{-1} , $1'4'_\alpha$ dans S^{-1} et, comme vérification, $1'4'_\beta$ dans 1 .

Dans le nouvel octogone, pour obtenir $1'4'$ in $8'5'$, on remarquera que $1'4'_\alpha$ est homologue de $5'8'_\gamma$. Or $1'4'_\alpha$ est dans S^{-1} , $5'8'_\gamma$ dans $S^{-1}S''$; donc

$$1'4' \text{ in } 5'8' = S''.$$

Ainsi l'équation qui transforme l'octogone primitif dans le nouveau est

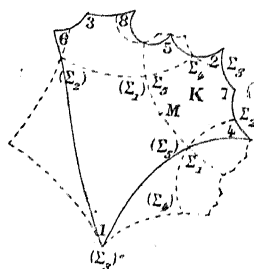
$$\begin{aligned} G &= |S'', S^{-1}S'', S'^{-1}SS''S''^{-1}S'', S''^{-1}S''|, \\ G^2 &= |S''^{-1}S'', S''^{-1}S''^{-1}S'', S''^{-1}S'S''^{-1}S'', S''^{-1}S'S^{-1}| = CA, \\ G^6 &= 1. \end{aligned}$$

On a, pour G , l'expression

$$G = A^2 FAB^{-1}.$$

Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$ des substitutions de période 2, ayant res-

Fig. 46.



pectivement pour points doubles les milieux de $14, 47, 72$ et 25 (fig. 46) et le centre de l'octogone

$$S = \Sigma_1 \Sigma_5, \quad S' = \Sigma_2 \Sigma_5, \quad S'' = \Sigma_3 \Sigma_5, \quad S''' = \Sigma_4 \Sigma_5.$$

Faisons tourner l'hexagone K de 180° autour de M milieu de Σ_1, Σ_3 , les Σ se changent en $(\Sigma_1), (\Sigma_2), (\Sigma_3), (\Sigma_4), (\Sigma_5)$, et

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) &= \Sigma_5, & (\Sigma_2) &= \Sigma_5 \Sigma_4 \Sigma_3, & (\Sigma_3) &= \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4 \Sigma_5, \\ (\Sigma_4) &= \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_1, & (\Sigma_5) &= \Sigma_1. \end{aligned}$$

Les substitutions $(S), (S'), (S''), (S''')$ de l'octogone construit sur K

dans sa nouvelle position ont pour valeurs

$$\begin{aligned} (S) &= (\Sigma_1)(\Sigma_5) = \Sigma_5 \Sigma_1 = S^{-1}, \\ (S') &= (\Sigma_2)(\Sigma_5) = \Sigma_5 \Sigma_4 \Sigma_5 \Sigma_1 = S''^{-1} S^{-1}, \\ (S'') &= (\Sigma_3)(\Sigma_5) = \Sigma_5 \Sigma_4 \Sigma_3 \Sigma_2 = S''^{-1} S'' S'^{-1}, \\ (S''') &= (\Sigma_4)(\Sigma_5) = \Sigma_1 \Sigma_2 = S S'^{-1}, \end{aligned}$$

soit

$$H = |S^{-1}, S''^{-1} S^{-1}, S''^{-1} S'' S'^{-1}, S S'^{-1}| = \Lambda^2 C A^2,$$

comme le montre le calcul direct. On a donc

$$H^2 = 1, \quad GH = |S''', S'' S''^{-1} S'', S^{-1} S' S^{-1}, S^{-1}|;$$

d'où

$$(GH)^2 = 1.$$

Des trois relations $G^5 = 1$, $H^2 = 1$, $(GH)^2 = 1$, on conclut que le groupe engendré par G et H est isomorphe holoédriquement à un groupe fini de substitutions linéaires à une variable et, par conséquent, fini.

J'ai annoncé que C était le cube d'une opération du groupe; pour le démontrer, il suffit de faire voir que C est une transformée de G^3 . Posons

$$\begin{aligned} M &= |S''', S^{-1} S' S''^{-1} S'', S^{-1} S' S^{-1}, S^{-1}|, \\ M^{-1} &= |S''^{-1}, S''^{-1} S'' S''^{-1}, S S'^{-1} S'' S''^{-1}, S|, \\ M^{-1} C &= |S S''^{-1} S'', S' S''^{-1} S'', S'' S''^{-1} S' S^{-1}, S''^{-1} S' S^{-1}|, \\ M^{-1} C M &= |S''^{-1} S' S^{-1}, S''^{-1} S'' S''^{-1} S' S^{-1}, S''^{-1} S'' S^{-1} S' S^{-1}, S''^{-1} S'' S^{-1}| = G^3; \end{aligned}$$

donc $(MGM^{-1})^3 = C$. Le calcul donne

$$MGM^{-1} = |S S'^{-1}, S S''^{-1}, S S''^{-1} S^{-1} S' S''^{-1}, S| = F^{-1} B^{-1} A.$$

THÉORÈME. — AB est une opération de période 5.

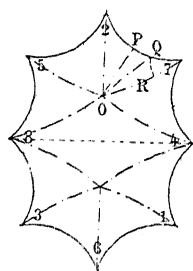
On a, en effet,

$$\begin{aligned} AB &= |S', S'^{-1} S'', S'^{-1} S'', S'^{-1} S^{-1}|, \\ (AB)^2 &= |S'^{-1} S'', S''^{-1} S'', S''^{-1} S^{-1}, S''^{-1}|, \\ (AB)^3 &= |S''^{-1} S^{-1}, S, S S', S S''|, \\ (AB)^5 &= |S, S', S'', S''| = 1. \end{aligned}$$

Cette opération change l'octogone 14725836, formé des deux pentagones réguliers 47258 et 48361, en un octogone égal. Une rotation

de $\frac{2\pi}{5}$, autour du centre d'un des pentagones, est permutable avec le groupe G engendré par l'octogone; mais G est contenu dans un groupe plus étendu qui ne lui est pas permutable. Soit O le centre de 47258.

Fig. 47.



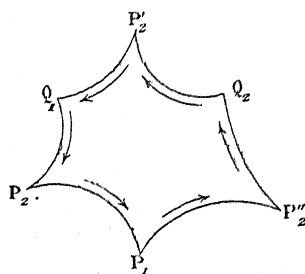
Menons la bissectrice OP de l'angle 2O7, le triangle OP7 a pour angles $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{10}$. Il est décomposable en trois triangles OPQ, RQO, QR7 égaux entre eux. Si l'on envisage l'un de ces triangles comme l'image du demi-plan d'une variable u , le groupe Γ de u contient G.

PROBLÈME. — *Trouver les opérations fondamentales du groupe des transformations du polygone $P_1P'_2Q_2P'_2O_1P_2$ (fig. 48), dans lequel*

$$\begin{aligned} \sigma_1 = P_1P'_2 \text{ in } P_1P_2, \quad \tau_1 = Q_1P_2 \text{ in } Q_1P'_2, \quad \tau_2 = Q_2P'_2 \text{ in } Q_2P''_2, \\ \sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_2^2 = 1, \quad \tau_1^2 = 1, \quad \tau_2^2 = 1, \quad \sigma_1\sigma_2\tau_1\tau_2 = 1, \end{aligned}$$

en un polygone équivalent.

Fig. 48.

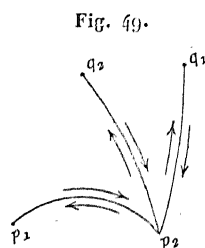


Ce polygone est l'image d'un plan modifié par les coupures p_2p_1, p_2q_2, p_2q_1 (fig. 49). Dans tout système de coupures proprement équi-

valent, le point de réunion des coupures sera p_1 ou p_2 . L'emploi de l'opération

$$\Lambda = | \sigma_2, \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2, \tau_1, \tau_2 |$$

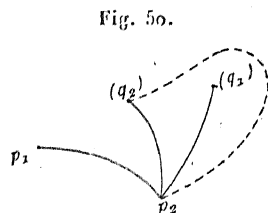
permet de partir d'un système de coupures où le point de réunion est p_2 .



Cela posé, pour ramener l'un à l'autre deux systèmes qui ont la coupure $p_1 p_2$ commune, il suffit de l'opération

$$M = | \sigma_1, \sigma_2, \tau_2, \tau_2^{-1} \tau_1 \tau_2 |.$$

En effet, cette opération, faite sur un système de coupures $p_2 p_1$, $p_2(q_2)$, $p_2(q_1)$ (*fig. 50*), remplace $p_2(q_2)$ par $p_2(q_1)$ et $p_2(q_1)$ par une

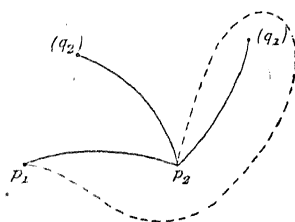


coupure qui ne diffère de $p_1(q_2)$ que par l'interposition du point (q_1) . L'opération inverse remplace $p_2(q_1)$ par $p_2(q_2)$ et $p_2(q_2)$ par une coupure qui diffère de $p_2(q_1)$ par l'interposition du point (q_2) . Or l'une des coupures $p_2(q_1)$ ou $p_2(q_2)$ a les mêmes extrémités que $p_2(q_1)$, et (Remarque I, § VII) on peut la ramener à $p_2 q_1$ par une déformation continue. Dans cette déformation, elle franchira une ou plusieurs fois le point q_2 et passera par plusieurs états successifs. Pour passer d'un de ces états au suivant, on emploiera M ou son inverse. Finalement, on obtiendra un système où $p_2(q_1)$ et $p_2 q_1$ seront les mêmes, et alors

$p_2(q_2)$ et p_2q_2 seront aussi les mêmes, ou un système où $p_2(q_2)$ sera le même que p_2q_1 , et on les ramènera l'un à l'autre par M^{-1} .

Considérons maintenant un système dans lequel la coupure tracée entre p_2 et p_1 , (p_2p_1) [fig. 51] est différente de p_2p_1 . On peut la ra-

Fig. 51.



mener à p_2p_1 par une déformation continue. Soient $(p_2p_1)', \dots, (p_2p_1)^k$ ses états successifs pendant cette déformation. Dans le passage de (p_2p_1) à $(p_2p_1)'$, (p_2p_1) devient infiniment voisin de l'un des points q_1 ou q_2 ; on formera un système de coupures avec (p_2p_1) , admettant pour point (q_1) celui des deux points q_1 et q_2 qui va être dépassé et une coupure $p_2(q_2)$: on sait passer du système primitif à celui-là, puisque la coupe (p_2p_1) est commune. L'opération suivante

$$N = |\sigma_1, \tau_1 \sigma_2 \tau_1, \tau_2, \sigma_1 \tau_1 \sigma_1^{-1}|$$

permet d'introduire $(p_2p_1)'$. De $(p_2p_1)'$ on passera à $(p_2p_1)''$ et ainsi de suite. Les opérations Λ , M , N forment donc un système fondamental.

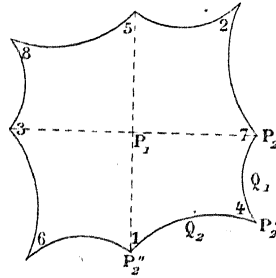
Remarque. — Une équation fuchsienne à quatre points singuliers et pour laquelle deux des différences des racines des équations déterminantes sont égales à $\frac{1}{\alpha}$, et les deux autres à $\frac{1}{\beta}$, est réductible à une équation où ces différences sont $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$.

Groupe d'opérations permutable avec A^2 .

D'après le § VI, on obtiendra, comme il suit, un groupe d'opérations permutable avec A^2 ; on formera un octogone qui reste invariable par A^2 . Un pareil octogone coïncide avec lui-même par une rotation de 90° autour du point de concours des axes. Son groupe G est contenu

comme sous-groupe distingué dans un groupe Γ engendré par le polygone $P_1 P_2' Q_2 P_2' Q_1 P_2$ (*fig. 52*). Quand on remplace $P_1 P_2' Q_2 P_2' Q_1 P_2$ par un polygone proprement équivalent, l'octogone se change lui-même

Fig. 52.



en un octogone proprement équivalent, et le groupe des opérations ainsi définies est permutable avec Λ^2 .

On a

$$S = \tau_2 \sigma_1^2, \quad S' = \tau_1 \sigma_1^2, \quad S'' = \sigma_1^{-1} \tau_2 \sigma_1^{-1}, \quad S''' = \sigma_1^{-1} \tau_1 \sigma_1^{-1};$$

A donne

$$\begin{aligned} (S) &= (\tau_2) (\sigma_1)^2 = \tau_2 \sigma_2^2 = \tau_2 \sigma_1^2 \cdot \sigma_1 \tau_2 \sigma_1 \cdot \sigma_1^{-1} \tau_1 \sigma_1^{-1} \cdot \tau_2 \sigma_1^2 \cdot \sigma_1^2 \tau_1 = SS''^{-1} S''' SS'^{-1}, \\ (S') &= (\tau_1) (\sigma_1)^2 = \tau_1 \sigma_2^2 = \tau_1 \sigma_1^2 \cdot \sigma_1 \tau_2 \sigma_1 \cdot \sigma_1^{-1} \tau_1 \sigma_1^{-1} \cdot \tau_2 \sigma_1^2 \cdot \sigma_1^2 \tau_1 = S' S''^{-1} S''' SS'^{-1}, \\ (S'') &= (\sigma_1)^{-1} (\tau_2) (\sigma_1)^{-1} = \sigma_2^{-1} \tau_2 \sigma_2^{-1} \\ &= \tau_1 \sigma_1^2 \cdot \sigma_1^2 \tau_2 \cdot \sigma_1 \tau_2 \sigma_1 \cdot \sigma_1^{-1} \tau_1 \sigma_1^{-1} \cdot \sigma_1 \tau_2 \sigma_1 = S' S^{-1} S''^{-1} S''' S''^{-1}, \\ (S''') &= (\sigma_1)^{-1} (\tau_1) (\sigma_1)^{-1} = \sigma_2^{-1} \tau_1 \sigma_2^{-1} = \tau_1 \sigma_1^2 \cdot \sigma_1^2 \tau_2 \cdot \sigma_1 \tau_2 \sigma_1 = S' S^{-1} S''^{-1}; \end{aligned}$$

donc

$$L = |SS''^{-1} S''' SS'^{-1}, S' S''^{-1} S''' SS'^{-1}, S' S^{-1} S''^{-1} S''' S''^{-1}, S' S^{-1} S''^{-1}|, \\ \Lambda^2 = \Lambda^2 L,$$

comme on le vérifie facilement. Un calcul analogue donne

$$M = |SS'^{-1} S, S, S' S''^{-1} S''', S''|, \quad N = |S''^{-1}, S, S', S''| = \Lambda^{-1}.$$

Remarque. — Le groupe Γ est, d'après une remarque, sous-groupe distingué lui-même d'un groupe Γ'' engendré par un triangle qui a pour somme d'angles $\frac{\pi}{2}$ et dont les demi-côtés sont conjugués entre

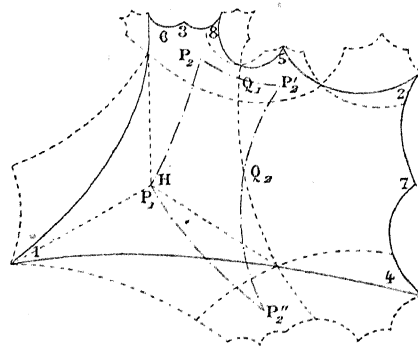
eux. Tout octogone invariable par A^2 reste aussi invariable par l'opération

$$[S''S'''^{-1}S^{-1}, SS'^{-1}S''S'''^{-1}S^{-1}, SS''S'^{-1}, SS'''S''^{-1}].$$

Groupe d'opérations permutable avec le groupe Γ , CA, (CA)².

Reportons-nous au réseau d'hexagones réguliers formé plus haut et qui nous a servi à trouver la racine carrée de CA. Imaginons l'hexagone H (*fig. 53*) remplacé par un autre hexagone, non plus régulier,

Fig. 53.



mais coïncidant avec lui-même par une rotation de 120° autour de son centre; sur son contour, deux angles consécutifs sont supplémentaires. Sur cet hexagone, construisons un octogone en suivant la même règle que plus haut. Si l'on fait tourner l'hexagone H de 120° autour de son centre et l'octogone avec lui, le nouvel octogone est équivalent au premier et s'en déduit par l'opération CA.

Considérons, dans la figure, le polygone $P_1P_2Q_1P'_2Q_2P'_2P_1$, où P_2 , P'_2 , P''_2 sont centres d'hexagones;

$$P_1P'_2 \text{ in } P_1P_2 = \sigma_1, \quad Q_1P_2 \text{ in } Q_1P'_2 = \tau_1, \quad Q_2P'_2 \text{ in } Q_2P''_2 = \tau_2,$$

où

$$\sigma_1\sigma_2\tau_1\tau_2 = 1, \quad \sigma_1^3 = 1, \quad \sigma_2^3 = 1, \quad \tau_1^2 = 1, \quad \tau_2^2 = 1.$$

Il engendre un groupe Γ' contenant Γ comme sous-groupe distingué. L'équation fuchsienne de genre 0 correspondante a deux différences égales à $\frac{1}{3}$ et deux égales à $\frac{1}{2}$.

Calculons les trois opérations fondamentales du sous-groupe correspondant de G. On a

$$S = \tau_2 \tau_1, \quad S' = \tau_2 \sigma_1 \tau_1 \sigma_2, \quad S'' = \tau_1 \sigma_2 \tau_1 \sigma_2^{-1}, \quad S''' = \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_2 \sigma_1.$$

A donne

$$(S) = (\tau_2) (\tau_1) = \tau_2 \tau_1 = S,$$

$$\begin{aligned} (S') &= (\tau_2) (\sigma_1) (\tau_1) (\sigma_2) = \tau_2 \sigma_2 \tau_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \\ &= \tau_2 \sigma_2 \tau_1 \sigma_2^{-1} \tau_2 \tau_1 = \tau_2 \tau_1 \cdot \tau_1 \sigma_2 \tau_1 \sigma_2^{-1} \cdot \tau_2 \tau_1 = SS''S, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S'') &= (\tau_1) (\sigma_2) (\tau_1) (\sigma_2)^{-1} = \tau_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \tau_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 \\ &= \tau_1 \sigma_2^{-1} \tau_2 \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1} \sigma_2 = \tau_1 \sigma_2^{-1} \tau_2 \tau_1 \tau_2 \sigma_2 = \tau_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \tau_2 \sigma_2 = \tau_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \tau_2 \sigma_2 \\ &= (\tau_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \tau_1)^2 \tau_2 \sigma_1 \tau_1 \sigma_2 = (\tau_2 \tau_1 \cdot \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_2 \sigma_1 \cdot \sigma_2 \tau_1 \sigma_2^{-1} \tau_1)^2 \tau_2 \sigma_1 \tau_1 \sigma_2 = (SS''S''^{-1})^2 S', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S''') &= (\tau_1) (\sigma_1)^{-1} (\tau_2) (\sigma_1) = \tau_1 \sigma_2^{-1} \tau_2 \sigma_2 \\ &= \tau_2 \sigma_1 \tau_1 \sigma_2 \cdot \sigma_2 \tau_1 \sigma_2^{-1} \tau_1 \cdot \tau_1 \sigma_1^{-1} \tau_2 \sigma_1 \cdot \tau_2 \tau_1 = S' S''^{-1} S''' S; \end{aligned}$$

d'où

$$L' = |S, SS''S, (SS''S''^{-1})^2 S', S' S''^{-1} S''' S|.$$

On vérifie aisément que

$$L' CA = (CA)^2 L'.$$

A l'opération M correspond

$$M' = |S, SS' S''^{-1} S''' S, SS'' S''^{-1} S''', SS''|;$$

à N,

$$N' = |SS'^{-1}, SS''^{-1} S''' SS''^{-1}, SS''^{-1}, S| = G^{-1}.$$

Remarque. — Les octogones que CA transforme en octogones égaux ne changent pas non plus par les opérations $A^2 CA$ et $G^{-1} A^2 CAG$, qui engendrent avec CA un groupe fini isomorphe à celui d'une double pyramide régulière à douze faces.

Des polygones invariables par C et du groupe d'opérations permutable avec C.

Considérons maintenant des polygones que l'opération

$$C = |S''' SS'^{-1}, S''' S''^{-1}, S''^{-1}, S' S''^{-1}|$$

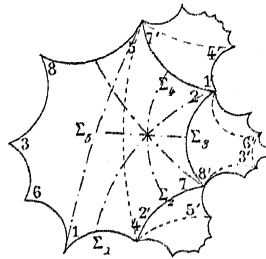
laisse invariables.

Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$ (*fig. 54*) un système de cinq substitutions engendrant le groupe Γ qui contient G , chacune de période 2. On peut remplacer C par une opération faite sur ce système;

$$(\Sigma_1) = \Sigma_4 \Sigma_5 \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3, \quad (\Sigma_2) = \Sigma_4, \quad (\Sigma_3) = \Sigma_5, \quad (\Sigma_4) = \Sigma_2, \quad (\Sigma_5) = \Sigma_3$$

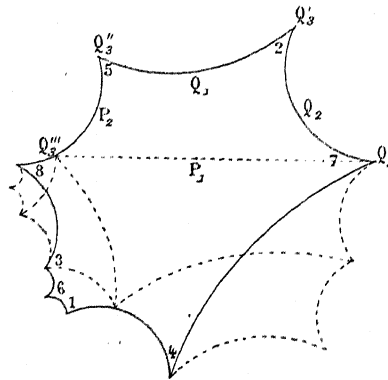
revient en effet à C . Elle transpose les points doubles de Σ_2 et de Σ_4 ,

Fig. 54.



de Σ_3 et de Σ_5 , le point double de Σ_1 avec celui de $\Sigma_4 \Sigma_5 \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$. Pour que le polygone reste invariable, il faut que ces points soient symétriques deux à deux par rapport à un point. De là, la construction sui-

Fig. 55.



vante des octogones de cette espèce (*fig. 55*). Soient

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= P_1 Q_3 \text{ in } P_1 Q'_3, & \sigma_2 &= P_2 Q'_3 \text{ in } P_2 Q''_3, \\ \tau_1 &= Q_1 Q'_3 \text{ in } Q_1 Q''_3, & \tau_2 &= Q_2 Q'_3 \text{ in } Q_2 Q_3, \end{aligned}$$

et τ_3 une substitution de période 2 ayant Q_3 pour point double :

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 = 1, \quad \sigma_2^2 = 1, \quad \tau_1^2 = 1, \quad \tau_2^2 = 1, \quad \tau_3^2 = 1, \quad \sigma_1 \sigma_2 \tau_1 \tau_2 \tau_3 = 1, \\ S = \sigma_1 \tau_1 \sigma_2, \quad S' = \sigma_1 \tau_1 \tau_2 \sigma_1, \quad S'' = \tau_2 \sigma_1 \tau_2 \sigma_1, \quad S''' = \tau_1 \sigma_1 \tau_2 \sigma_1. \end{aligned}$$

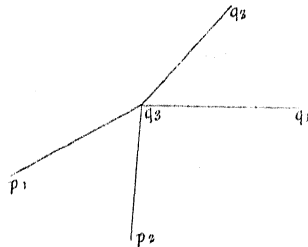
On a

$$\sigma_1 S \sigma_1 = S''' S S'^{-1}, \quad \sigma_1 S' \sigma_1 = S''' S''^{-1}, \quad \sigma_1 S'' \sigma_1 = S''^{-1}, \quad \sigma_1 S''' \sigma_1 = S' S''^{-1},$$

c'est-à-dire que le nouveau polygone se déduit de l'ancien par C.

Le groupe fini ne se compose que de C. En effet, à des rotations de π autour des points Q_1, Q_2, Q_3 , substitutions appartenant à Γ , correspond la substitution unité, et σ_2 s'exprimant par $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ donne aussi C. Ce n'est pas ici le groupe des transformations du polygone $P_1 Q_3 Q_2 Q_3' Q_1 Q_3'' P_2 Q_3'''$ en un polygone équivalent qui fournit un groupe permutable avec C, mais un sous-groupe distingué de celui-là (§ VI). Le polygone est l'image d'un plan modifié par des coupures $q_3 p_1, q_3 p_2, q_3 q_1, q_3 q_2$ (fig. 56), $y = \sqrt{R(x)}$ étant la relation hyperelliptique de

Fig. 56.



l'octogone; aux points q_1, q_2, q_3 correspondent des valeurs de x qui annulent $R(x)$; il n'en est pas de même pour les points p_1 et p_2 . On ne peut donc échanger entre eux que les rôles de p_1 et de p_2 , et ceux de q_1, q_2, q_3 pris isolément. La méthode dont j'ai déjà donné plusieurs exemples permet de trouver encore ici les opérations fondamentales du sous-groupe distingué et, par suite, celles d'un groupe d'opérations permutable avec C.

Des relations et des cycles des différents ordres.

Nous avons déjà trouvé plusieurs relations entre les opérations A, B, C,

$$A^4 = 1, \quad C^2 = 1, \quad (AB)^3 = 1, \quad \dots$$

Nous avons désigné par L et M les opérations suivantes

$$L = | SS''^{-1}S'''SS'^{-1}, S'S''^{-1}S'''SS'^{-1}, S'S^{-1}S''^{-1}S'''S''^{-1}, S'S^{-1}S''^{-1} |,$$

$$M = | SS'^{-1}S, S, S''S'''^{-1}S'', S'' |;$$

elles ont pour expressions

$$L = EA^2B^{-1}A^2E^2, \quad M = A^2E^2A^{-1}EAB^2AE^{-1}A^{-1}.$$

Or, comme elles sont permutable avec A^2 , on a

$$LA^2L^{-1}A^2 = I, \quad MA^2M^{-1}A^2 = I;$$

en remplaçant L et M par leurs expressions en A, B, E, on a deux relations entre A, B, E.

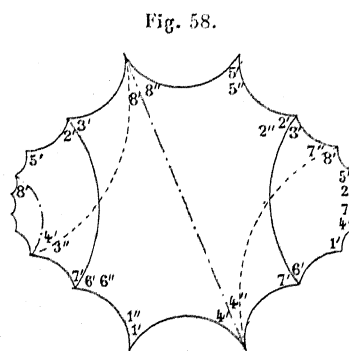
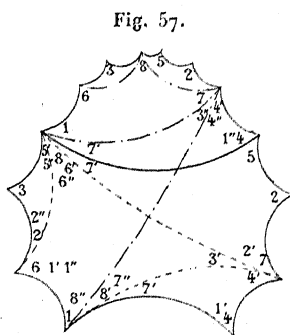
Citons encore la relation remarquable

$$BEB^{-1}E^{-1} = I.$$

Lorsque l'on a choisi un système fondamental, tout produit des opérations du système égal à l'unité s'appelle *cycle du premier ordre*. Il y a une infinité de cycles du premier ordre; car un produit de deux cycles du premier ordre est un cycle du premier ordre. A condition de ne pas considérer comme distincts les transformés d'un cycle par une même substitution, tout cycle du premier ordre peut être formé par la combinaison d'un certain nombre de *cycles fondamentaux du premier ordre*.

Je donne ici le calcul de quelques cycles :

1° Sur 14725836 (*fig. 57*), je fais les opérations AC et BAC, ce qui



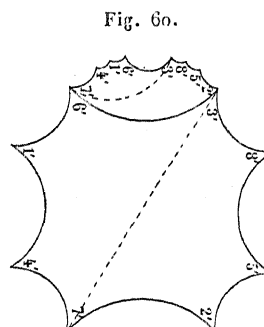
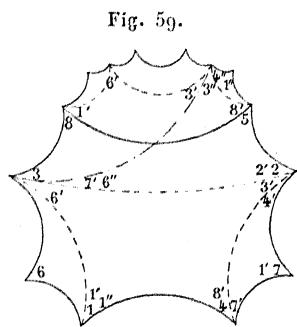
donne deux nouveaux réseaux; j'ai noté par 1'4'7'2'5'8'3'6' (*fig. 58*) les angles du réseau AC, et par 1''4''7''2''5''8''3''6'' les angles du réseau

BAC. Pour plus de clarté, je figure ensuite un polygone générateur du réseau BAC dans le réseau AC.

Je fais sur BAC l'opération AB; le nouvel octogone a pour côtés $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, la diagonale 4'8' et les paires $\begin{pmatrix} 1' & 4' \\ 8' & 5' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5' & 2' \\ 6' & 1' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3' & 8' \\ 4' & 7' \end{pmatrix}$ appartenant aussi à l'ancien; AB⁻¹ donne un octogone ayant pour paire $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2' & 7' \\ 3' & 6' \end{pmatrix}$; A⁻¹B⁻¹A⁻¹ donne enfin l'octogone AC; donc

$$\begin{aligned} \text{BACABAB}^{-1}\text{A}^{-1}\text{B}^{-1}\text{A}^{-1} &= \text{AC}, \\ \text{BACABAB}^{-1}\text{A}^{-1}\text{B}^{-1}\text{A}^{-1}\text{CA}^{-1} &= \text{I}. \end{aligned}$$

2° Je forme A²C et BA²C. Je construis ensuite BA²C dans le réseau de A²C (fig. 59 et 60).



On réduit BA²C à A²C par l'opération A²B⁻¹A²; donc

$$\text{BA}^2\text{CA}^2\text{B}^{-1}\text{A}^2\text{CA}^2 = \text{I},$$

ce qui montre que A²BA² est permutable avec C.

Voici un exemple de relation d'ordre supérieur. Nous avons posé

$$\Lambda = |\sigma_2, \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2, \tau_1, \tau_2|, \quad \text{M} = |\sigma_1, \sigma_2, \tau_2, \tau_2^{-1}\tau_1\tau_2|,$$

d'où

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} &= |\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}, \sigma_1, \tau_1, \tau_2|, & \text{M}^{-1} &= |\sigma_1, \sigma_2, \tau_1\tau_2\tau_1^{-1}, \tau_1|, \\ \Lambda\text{M} &= |\sigma_2, \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2, \tau_2, \tau_2^{-1}\tau_1\tau_2|, & \Lambda^{-1}\text{M}^{-1} &= |\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}, \sigma_1, \tau_1\tau_2\tau_1^{-1}, \tau_1|, \\ & & \Lambda\text{M}\Lambda^{-1}\text{M}^{-1} &= \text{I}. \end{aligned}$$

Par suite, entre L et M, on a la relation de même forme

$$\text{LML}^{-1}\text{M}^{-1} = 1.$$

Soient

$$\mathcal{L} = \text{LA}^2\text{L}^{-1}\text{A}^{-2}, \quad \mathcal{M} = \text{MA}^2\text{M}^{-1}\text{A}^{-2}, \quad \mathcal{Q} = \text{LML}^{-1}\text{M}^{-1};$$

les équations

$$\mathcal{L} = 1, \quad \mathcal{M} = 1, \quad \mathcal{Q} = 1$$

sont trois relations du premier ordre entre A, B, E. Le signe \equiv indiquera que deux produits d'opérations sont les mêmes, non seulement par rapport aux résultats qu'ils donnent, mais par rapport aux opérations qu'ils contiennent. On a

$$\text{LML}^{-1}\text{M}^{-1}\text{A}^{-2}\text{MLM}^{-1}\text{L}^{-1} \equiv \mathcal{Q}\text{A}^2\mathcal{Q}^{-1},$$

$$\text{L} \equiv \mathcal{L}\text{A}^2\text{LA}^{-2}, \quad \text{M} \equiv \mathcal{M}\text{A}^2\text{MA}^{-2};$$

d'où

$$\mathcal{L}\text{A}^2\text{LA}^{-2}\mathcal{M}\text{A}^2\text{ML}^{-1}\text{A}^{-2}\mathcal{L}^{-1}\text{A}^2\text{M}^{-1}\text{A}^{-2}\mathcal{M}^{-1}\text{A}^2\text{MLM}^{-1}\text{L}^{-1}\mathcal{Q}\text{A}^{-2}\mathcal{Q}^{-1} \equiv 1.$$

Le premier nombre devient égal à 1 par suite de $\mathcal{L} = 1$, $\mathcal{M} = 1$, $\mathcal{Q} = 1$; d'autre part, en y remplaçant \mathcal{L} , \mathcal{M} , \mathcal{Q} par leurs expressions, toutes les opérations se détruisent. Nous dirons que la relation ainsi obtenue est une relation du deuxième ordre entre les trois relations du premier ordre $\mathcal{L} = 1$, $\mathcal{M} = 1$, $\mathcal{Q} = 1$.

Si l'on a fait choix d'un système de cycles fondamentaux du premier ordre, toute relation du deuxième ordre entre ces cycles sera un cycle du deuxième ordre. Les cycles du deuxième ordre pourront être engendrés par des systèmes de cycles fondamentaux du deuxième ordre. Tout produit des cycles fondamentaux du deuxième ordre qui se réduit à 1 par la destruction des cycles fondamentaux du premier ordre est un cycle du troisième ordre, et ainsi de suite.

§ VIII. — Du genre 3.

Opérations A, B, C, D (fig. 61 à 64). — Nous étudierons ici les opérations A, B, C, D analogues aux opérations A, B, C du § VII et qui

s'appliquent à des dodécagones dont les côtés opposés sont conjugués :

$$\begin{aligned}
 A &= |S', S'', S''', S^{(4)}, S^{(5)}, S^{-1}|, \\
 B &= |S, S^{-1}S', S^{-1}S'', S^{-1}S''', S^{-1}S^{(4)}, S^{-1}S^{(5)}|, \\
 C &= |S^{(5)}SS''^{-1}, S^{(5)}S'S''^{-1}, S^{(5)}S''S''^{-1}, S^{(5)}S^{(4)-1}, S^{(4)-1}, S''S^{(4)-1}|, \\
 D &= |S^{(4)-1}S^{(5)}SS'^{-1}S'', S^{(4)-1}S''', S^{(5)-1}S''', S'', S'^{-1}S''', S''^{-1}S''|.
 \end{aligned}$$

Nous noterons les angles d'un dodécagone par les douze premiers

Fig. 61.

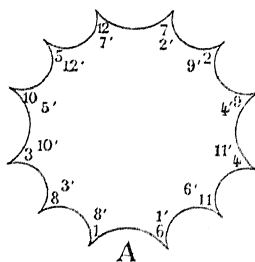


Fig. 62.

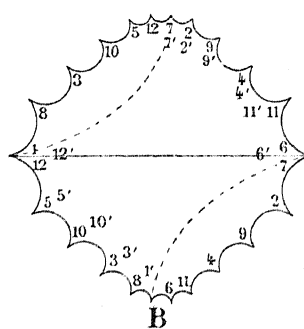


Fig. 63.

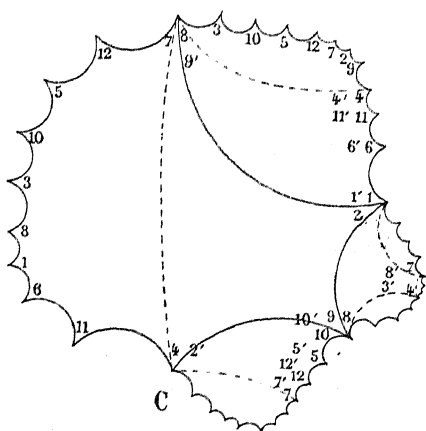
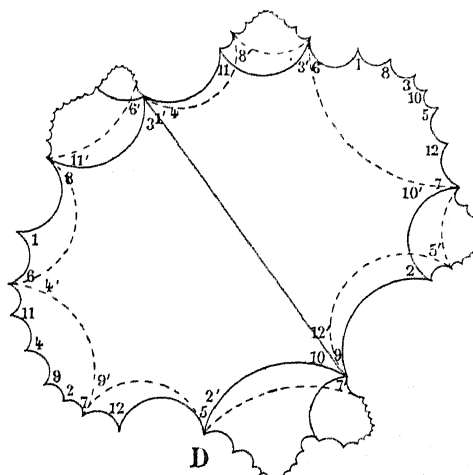


Fig. 64.



nombre, de sorte que, en tournant autour du dodécagone dans le sens positif, les nombres qui indiquent les angles croissent de cinq unités (mod. 12).

Les figures ci-dessus indiquent les dodécagones $1', \dots, 8'$ déduits des dodécagones $1, \dots, 8$ par les opérations A, B, C, D.

Des polygones hyperelliptiques. — Toutes les opérations sur des octogones sont permutables avec l'opération

$$|S^{-1}, S'^{-1}, S''^{-1}, S'''^{-1}|.$$

Nous avons été conduit à considérer dans le § VII cette opération comme égale à 1. Dans le genre 3, cette opération a pour analogue

$$A^6 = |S^{-1}, S'^{-1}, S''^{-1}, S'''^{-1}, S^{(4)-1}, S^{(5)-1}|;$$

les opérations L, M, N du § VI engendrent pour $p = 3$ un sous-groupe permutable avec A^6 . Les opérations A et B appartiennent à ce sous-groupe. Mais l'opération C ne lui appartient pas, et, en faisant C sur un dodécagone dans lequel les axes des substitutions sont concourants, on obtient un exemple de dodécagone hyperelliptique dans lequel cela n'a pas lieu. Soient, en effet,

$$\begin{aligned} S &= \Sigma_1 \Sigma_7, & S' &= \Sigma_2 \Sigma_7, & S'' &= \Sigma_3 \Sigma_7, \\ S''' &= \Sigma_4 \Sigma_7, & S^{(4)} &= \Sigma_5 \Sigma_7, & S^{(5)} &= \Sigma_6 \Sigma_7 \end{aligned}$$

les substitutions du premier; celles du second sont

$$\begin{aligned} (S) &= \Sigma_6 \Sigma_7 \Sigma_1 \Sigma_4, & (S') &= \Sigma_6 \Sigma_7 \Sigma_2 \Sigma_4, & (S'') &= \Sigma_6 \Sigma_7 \Sigma_3 \Sigma_4, \\ (S''') &= \Sigma_6 \Sigma_5, & (S^{(4)}) &= \Sigma_7 \Sigma_5, & (S^{(5)}) &= \Sigma_4 \Sigma_5; \end{aligned}$$

les axes des trois dernières passent au point double de Σ_5 et les axes des trois premières n'y passent pas en général.

THÉORÈME. — CA^6 et CA^2 engendrent un groupe fini.

On a, en effet,

$$CA^6 = |S''' S^{-1} S^{(5)-1}, S''' S'^{-1} S^{(5)-1}, S''' S''^{-1} S^{(5)-1}, S^{(4)} S^{(5)-1}, S^{(4)}, S^{(4)} S'''^{-1}|,$$

d'où

$$(CA^6)^2 = 1,$$

$$(CA^2) = |S^{(5)} S''' S'''^{-1}, S^{(5)} S^{(4)-1}, S^{(4)-1}, S''' S^{(4)-1}, S''' S^{-1} S^{(5)-1}, S''' S'^{-1} S^{(5)-1}|,$$

$$(CA^2)^2 = |S'^{-1} S^{(5)-1}, S'^{-1} S, S'''^{-1} S^{(5)} S, S^{(4)-1} S^{(5)} S, S^{(4)-1} S''' S'''^{-1} S', S'|,$$

$$(CA^2)^4 = |S^{-1}, S^{-1} S^{(5)-1}, S^{-1} S^{(5)-1} S^{(4)} S^{(5)-1}, S'^{-1} S''' S'''^{-1} S^{(4)} S^{(5)-1}, S'^{-1} S''' S'^{-1} S, S'^{-1} S|.$$

et

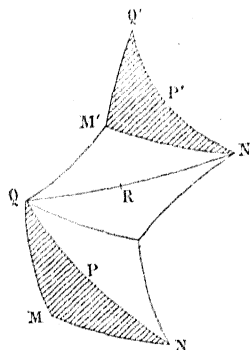
$$(CA^2)^8 = 1.$$

D'ailleurs

$$CA^6(CA^2)^{-1} = A^4,$$

dont le cube est l'unité. Soit une équation fuchsienne de genre 0 à trois points singuliers et pour différences des racines des équations déterminantes $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}$. Le groupe G de cette équation et le groupe \mathcal{F} , engendré par CA^6 et CA^2 , sont évidemment isomorphes. Je vais montrer que cet isomorphisme est méridrique et que \mathcal{F} est isomorphe holoédriquement au groupe des transformations en elles-mêmes de la surface de Walther Dyck à 96 feuilles (*Mathematische Annalen*, t. 17). On peut prendre comme polygone générateur de G le triangle MNPQ (*fig. 65*), dans lequel MN et MQ, PN et PQ sont conjugués, et $M = \frac{2\pi}{3}$,

Fig. 65.



$N = Q = \frac{\pi}{8}$, A^4 correspond à (MN in MQ), CA^6 à (PN in PQ). Si l'on considère le triangle $Q'M'N'P'$ placé comme l'indique la figure, QMNP est le transformé de $Q'M'N'P'$ par une substitution hyperbolique, dont l'axe passe par les points P et R. A cette substitution hyperbolique correspond l'opération

$$CA^6 A^4 CA^6 A^{-4} = CA^{-2} CA^2.$$

Or

$$CA^{-2} CA^2 = |S^{(4)-1} S^{(5)} S S'^{-1}, S^{(4)-1} S'' S''^{-1}, S^{(5)-1} S''' S'''^{-1}, S' S''^{-1}, S' S'''^{-1}, S'|,$$

et, en élevant au cube,

$$(CA^{-2}CA^2)^3 = I,$$

or la surface de Walther Dyck peut se représenter naturellement comme il suit : le polygone générateur du groupe fuchsien est formé de quatre octogones réguliers dont les angles sont égaux à $\frac{\pi}{2}$ et qui sont réunis par un sommet. Je désigne les paires de côtés conjugués par ij_α, ij_β , et les substitutions du polygone par Σ_{ij} , de telle sorte que

$$\Sigma_{ij} = ij_\alpha \text{ in } ij_\beta,$$

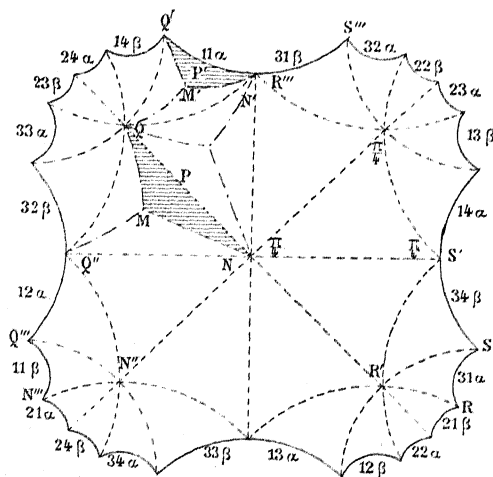
où $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$.

On a entre les Σ_{ij} les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Sigma_{i1} \Sigma_{i2} \Sigma_{i3} \Sigma_{i4} &= 1, & (i = 1, 2, 3), \\ \Sigma_{1j} \Sigma_{2j} \Sigma_{3j} &= 1, & (j = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Imaginons les triangles QMN, Q'M'N' (fig. 66) dont nous nous

Fig. 66.



sommes occupés tout à l'heure, placés comme l'indique la figure. $CA^{-2}CA^2$ correspond à la substitution $(Q'N' \text{ in } QN)$; or Σ_{11} est le cube de cette substitution. Ainsi à Σ_{11} , dans G , correspond dans \mathcal{F} l'unité. La substitution Σ_{31} est le cube de $(RS \text{ in } R'S')$. Le quadrilatère $RSR'S'$

n'est autre que le quadrilatère $Q''NQ'N'$ transformé par une substitution de G . Donc l'opération de \mathcal{F} , qui correspond à $(RS \text{ in } R'S')$ est la transformée de l'opération qui répond à $(Q''N \text{ in } Q'N')$ par une opération de \mathcal{F} . Mais $Q''N \text{ in } Q'N' = QN \text{ in } Q'N'$, et à $QN \text{ in } Q'N'$ répond $(CA^{-2}CA^2)^{-1}$. Ainsi, à Σ_{31} répond une transformée du cube de $(CA^{-2}CA^2)^{-1}$, c'est-à-dire 1.

En vertu de la relation $\Sigma_{11}\Sigma_{21}\Sigma_{31} = 1$, à Σ_{21} répond aussi dans \mathcal{F} l'unité. On démontre aussi facilement qu'à Σ_{1j} et à Σ_{3j} et, par suite, à Σ_{2j} , pour les quatre valeurs de j , correspond l'unité dans \mathcal{F} .

Par suite, on aura toutes les opérations distinctes de \mathcal{F} en ne prenant que les seules substitutions de G , qui transforment un point situé dans le polygone précédent en un point encore situé dans ce polygone; le groupe \mathcal{F} est donc fini.

Remarque. — Toute relation de genre 3 peut se représenter sur un polygone de vingt-quatre côtés, tel que celui que nous avons choisi pour image de la surface de Walther Dyck. On repassera de cette représentation à celle qui nous est habituelle, comme il suit. Les relations entre les Σ résolues par rapport à Σ_{2j} ($j = 1, 2, 3, 4$) et par rapport à Σ_{i3} ($i = 1, 2, 3$) donnent

$$\begin{aligned} \Sigma_{21} &= \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{31}^{-1}, & \Sigma_{22} &= \Sigma_{12}^{-1} \Sigma_{32}^{-1}, & \Sigma_{23} &= \Sigma_{13}^{-1} \Sigma_{33}^{-1}, & \Sigma_{24} &= \Sigma_{14}^{-1} \Sigma_{34}^{-1}, \\ \Sigma_{13} &= \Sigma_{12}^{-1} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{14}^{-1}, & \Sigma_{23} &= \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}^{-1} \Sigma_{24}^{-1}, & \Sigma_{33} &= \Sigma_{32}^{-1} \Sigma_{31}^{-1} \Sigma_{34}^{-1}; \end{aligned}$$

en égalant les deux valeurs obtenues pour Σ_{23} , on trouve

$$\Sigma_{14} \Sigma_{11} \Sigma_{12} \Sigma_{34} \Sigma_{31} \Sigma_{32} \Sigma_{14}^{-1} \Sigma_{34}^{-1} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{31}^{-1} \Sigma_{12}^{-1} \Sigma_{32}^{-1} = 1,$$

égalité qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\Sigma_{14} \Sigma_{11} \Sigma_{12} \Sigma_{34} \Sigma_{31} \Sigma_{32} \cdot \Sigma_{14}^{-1} \cdot \Sigma_{12}^{-1} \Sigma_{11}^{-1} \cdot \Sigma_{11} \cdot \Sigma_{12} \Sigma_{31} \cdot \Sigma_{32} \\ &\times \Sigma_{32}^{-1} \Sigma_{31}^{-1} \Sigma_{34}^{-1} \Sigma_{12}^{-1} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{14}^{-1} \cdot \Sigma_{14} \cdot \Sigma_{11} \Sigma_{12} \cdot \Sigma_{11}^{-1} \cdot \Sigma_{31}^{-1} \Sigma_{12}^{-1} \cdot \Sigma_{32}^{-1} = 1, \end{aligned}$$

ce qui, en posant

$$\begin{aligned} S &= \Sigma_{14} \Sigma_{11} \Sigma_{12} \Sigma_{34} \Sigma_{31} \Sigma_{32}, & S' &= \Sigma_{14}, & S'' &= \Sigma_{12}^{-1} \Sigma_{11}^{-1}, \\ S''' &= \Sigma_{14}^{-1}, & S^{(4)} &= \Sigma_{12} \Sigma_{31}, & S^{(5)} &= \Sigma_{32}^{-1}, \end{aligned}$$

devient

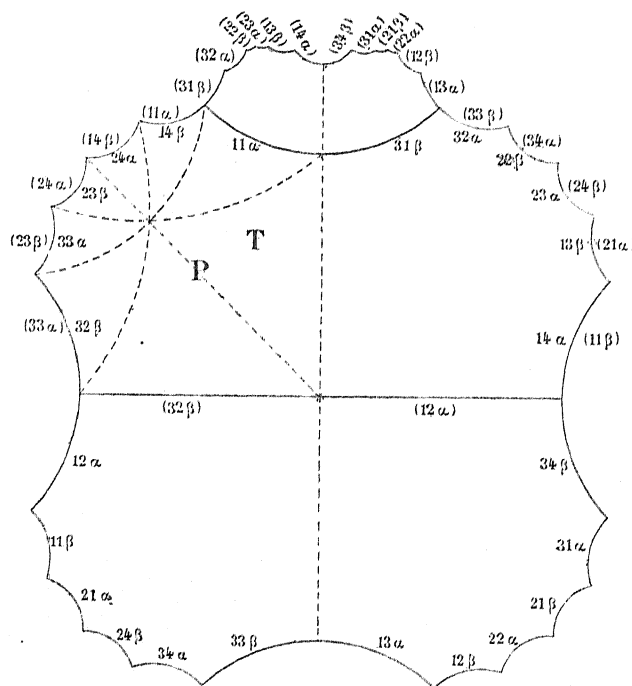
$$SS'^{-1}S''S'''^{-1}S^{(4)}S^{(5)-1} \cdot S^{-1}S'S''^{-1}S'''S^{(4)-1}S^{(5)} = 1;$$

$S, S', S'', S''', S^{(4)}, S^{(5)}$ sont donc les substitutions d'un dodécagone dont les côtés opposés sont conjugués. Voici maintenant les expressions de Σ_{ij} en fonction des S obtenues en résolvant ces formules :

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= S'''^{-1}, & \Sigma_{21} &= S''' S^{(4)-1} S''' S''^{-1}, & \Sigma_{31} &= S'' S'''^{-1} S^{(4)}; \\ \Sigma_{12} &= S''' S''^{-1}, & \Sigma_{22} &= S'' S'''^{-1} S^{(5)}, & \Sigma_{32} &= S^{(5)-1}; \\ \Sigma_{13} &= S'' S'^{-1}, & \Sigma_{23} &= S, & \Sigma_{33} &= S^{-1} S' S''^{-1}; \\ \Sigma_{14} &= S', & \Sigma_{24} &= S'^{-1} S'' S'''^{-1} S^{(4)} S^{(5)-1} S^{-1} S' S''^{-1}, & \Sigma_{34} &= S'' S'^{-1} S S^{(5)} S^{(4)-1} S''' S''^{-1} \end{aligned}$$

La surface de Dyck fournit, par l'application des théorèmes du § VI, un groupe fini dont on détermine, comme il suit, un système de deux

Fig. 67.



opérations fondamentales. Faisons tourner l'octogone P (fig. 67) de $\frac{\pi}{4}$ autour de son centre et imaginons que le polygone générateur tourne

avec lui, les substitutions du nouveau polygone sont

$$\begin{aligned} (\Sigma_{11}) &= \Sigma_{14}^{-1}, & (\Sigma_{21}) &= \Sigma_{13}^{-1} \Sigma_{31}, & (\Sigma_{31}) &= \Sigma_{31}^{-1} \Sigma_{13} \Sigma_{14}; \\ (\Sigma_{12}) &= \Sigma_{31}, & (\Sigma_{22}) &= \Sigma_{31}^{-1} \Sigma_{11}^{-1}, & (\Sigma_{32}) &= \Sigma_{11}; \\ (\Sigma_{13}) &= \Sigma_{31}^{-1} \Sigma_{34}^{-1} \Sigma_{11}^{-1}, & (\Sigma_{23}) &= \Sigma_{11} \Sigma_{33}^{-1}, & (\Sigma_{33}) &= \Sigma_{32}^{-1}; \\ (\Sigma_{14}) &= \Sigma_{11} \Sigma_{24}^{-1}, & (\Sigma_{24}) &= \Sigma_{23}^{-1}, & (\Sigma_{34}) &= \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{31}. \end{aligned}$$

Par les formules données plus haut et qui font correspondre unidéterminativement à tout polygone de vingt-quatre côtés un dodécagone dont les côtés opposés sont conjugués, on obtient l'opération de période 8,

$$| S''^{-1} S'' S'^{-1} S, S^{(4)-1} S^{(5)} S, S^{(4)-1} S'' S''^{-1} S', S', S'', S'' |.$$

L'octone P étant décomposé en triangles équilatéraux égaux entre eux et dont les angles sont $\frac{\pi}{4}$, faisons tourner le polygone générateur de $2\frac{\pi}{3}$ autour du centre du triangle T. On a

$$\begin{aligned} (\Sigma_{11}) &= \Sigma_{32}^{-1}, & (\Sigma_{21}) &= \Sigma_{32} \Sigma_{24} \Sigma_{11}^{-1}, & (\Sigma_{31}) &= \Sigma_{11} \Sigma_{24}^{-1}; \\ (\Sigma_{12}) &= \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{31}, & (\Sigma_{22}) &= \Sigma_{31}^{-1} \Sigma_{22} \Sigma_{14}, & (\Sigma_{32}) &= \Sigma_{14}^{-1}; \\ (\Sigma_{13}) &= \Sigma_{31}^{-1} \Sigma_{12}^{-1} \Sigma_{11}^{-1}, & (\Sigma_{23}) &= \Sigma_{14}^{-1} \Sigma_{13}^{-1}, & (\Sigma_{33}) &= \Sigma_{31}; \\ (\Sigma_{14}) &= \Sigma_{11}, & (\Sigma_{24}) &= \Sigma_{33}^{-1} \Sigma_{32}^{-1}, & (\Sigma_{34}) &= \Sigma_{32} \Sigma_{33} \Sigma_{11}^{-1}. \end{aligned}$$

l'opération correspondante est

$$| S''^{-1}, S''^{-1}, S^{(4)-1}, S^{(5)-1}, S, S' | = A^{-4}.$$

THÉORÈME. — DA^2 et DA^6 engendrent un groupe fini isomorphe au groupe des transformations d'un cube en lui-même; D et DA^2 engendrent un groupe fini isomorphe aux transformations d'une surface hyperelliptique en elle-même.

$$\begin{aligned} DA^6 &= | S''^{-1} S' S^{-1} S^{(5)-1} S^{(4)}, S''^{-1} S^{(4)}, S''^{-1} S^{(5)}, S''^{-1}, S''^{-1} S', S''^{-1} S'' |, \\ DA^2 &= | S^{(5)-1} S'', S'', S'^{-1} S'', S''^{-1} S'', S''^{-1} S' S^{-1} S^{(5)-1} S^{(4)}, S''^{-1} S^{(4)} |. \end{aligned}$$

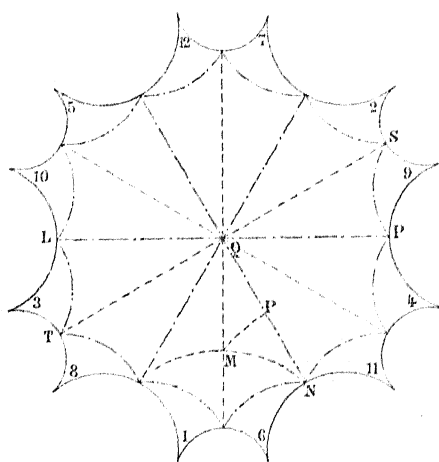
Le calcul donne

$$(DA^6)^2 = 1, \quad (DA^2)^4 = 1, \quad [DA^6(DA^2)^{-1}]^3 = 1;$$

ce sont précisément les relations qui existent entre les deux rotations fondamentales qui engendrent toutes les transformations d'un cube en

lui-même. Comme le groupe des transformations d'un cube en lui-même n'a pas de sous-groupe distingué, les deux groupes présentent un isomorphisme holoédrique. Le calcul donne aussi $D^2 = 1$. Comme on a aussi $(DA^2)^4 = 1$ et $(A^2)^6 = 1$, on voit que D et DA^2 engendrent un groupe isomorphe avec le groupe d'une équation fuchsienne à trois points singuliers et ayant $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ pour différences des racines des équations déterminantes. Reprenons la figure que nous avons faite pour le cas où, dans une rotation hyperelliptique de genre 3, $y = \sqrt{R(x)}$, les huit racines de $R(x)$ forment les sommets d'un cube. On suppose que, dans le triangle $MNPQ$ (fig. 69), à $(MQ \text{ in } MN)$ correspond A^2D ; à

Fig. 68.



$(PN \text{ in } PQ), D; A^2$ répond à une rotation de $\frac{\pi}{3}$ autour de Q dans le sens positif. DA^6 répond évidemment à la substitution hyperbolique qui transforme l'arc $6N11$ dans l'arc TQS . Or

$$(DA^6)^2 = 1.$$

Donc à $(611 \text{ in } 512)$ répond l'unité; $(94 \text{ in } 103)$ et $(27 \text{ in } 38)$ sont des transformées de cette substitution. L'unité leur correspond aussi. La substitution hyperbolique $16 \text{ in } LP$ est le produit d'une rotation de 180° autour de M , qui répond à $(A^2D)^2$ par une rotation de 160° autour de Q , qui répond à A^6 . Or

$$(A^2D)^2 A^6 = A^2 [(DA^2)^2 A^6] A^{-2}.$$

Le calcul montre que

$$[(DA^2)^2 A^6]^2 = 1.$$

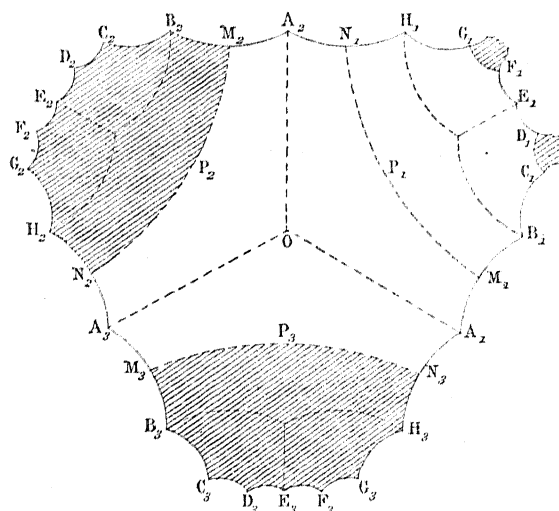
Ainsi, à 16 in 127 répond l'unité.

Le groupe engendré par D et DA² est donc isomorphe holoédriquement au groupe de transformations uniformes en elles-mêmes d'une surface hyperelliptique de genre 3, lorsque les huit racines forment les sommets d'un cube.

THÉORÈME. — AB est une opération de période 7; A est une opération de période 12, et A engendre, avec une opération de période 2, un groupe isomorphe à celui d'une double pyramide régulière de vingt-quatre faces.

Autre exemple. — Nous donnerons encore un exemple de groupe fini.

Fig. 69.



fourni par une surface régulière du § IV. Cette surface se représente naturellement sur le polygone figuré. Soit (fig. 69)

$$\begin{array}{lll} H_1 = A_1 B_1 \text{ in } A_2 H_1, & H_2 = A_2 B_2 \text{ in } A_3 H_2, & H_3 = A_3 B_3 \text{ in } A_1 H_3, \\ \Theta_1 = B_1 C_1 \text{ in } E_1 D_1, & \Theta_2 = B_2 C_2 \text{ in } E_2 D_2, & \Theta_3 = B_3 C_3 \text{ in } E_3 D_3, \\ \Theta'_1 = H_1 G_1 \text{ in } E_1 F_1, & \Theta'_2 = H_2 G_2 \text{ in } E_2 F_2, & \Theta'_3 = H_3 G_3 \text{ in } E_3 F_3, \\ I_1 = G_1 F_1 \text{ in } C_2 D_2, & I_2 = G_2 F_2 \text{ in } C_3 D_3, & I_3 = G_3 F_3 \text{ in } C_1 D_1. \end{array}$$

Les sept cycles du polygone

$$A_1 A_2 A_3, F_1 G_1 C_2 D_2, F_2 G_2 C_3 D_3, F_3 G_3 C_1 D_1, H_1 E_1 B_1, H_2 E_2 B_2, H_3 E_3 B_3$$

donnent

$$\begin{aligned} H_1 H_2 H_3 &= 1, \\ \Theta_1^{-1} I_1 \Theta_3 I_1^{-1} &= 1, & \Theta_1^{-1} H_1^{-1} \Theta_1 &= 1, \\ \Theta_2^{-1} I_2 \Theta_3 I_2^{-1} &= 1, & \Theta_1^{-1} H_2^{-1} \Theta_2 &= 1, \\ \Theta_3^{-1} I_3 \Theta_1 I_3^{-1} &= 1, & \Theta_3^{-1} H_3^{-1} \Theta_3 &= 1. \end{aligned}$$

En éliminant $\Theta'_1, \Theta'_2, \Theta'_3$, puis H_1, H_2, H_3 , on a la relation

$$\begin{aligned} \Theta_1 I_1 \Theta_2^{-1} I_1^{-1} \Theta_2 I_2 \Theta_3^{-1} I_2^{-1} \Theta_3 I_3 \Theta_1^{-1} I_3^{-1} &= 1, \\ H_1 = \Theta_1 I_1 \Theta_1^{-1} I_1^{-1}, & \quad H_2 = \Theta_2 I_2 \Theta_3^{-1} I_2^{-1}, & \quad H_3 = \Theta_3 I_3 \Theta_1^{-1} I_3^{-1}; \end{aligned}$$

à une relation de 120° autour du centre O du polygone répond l'opération de période 3,

$$(\Theta_1) = \Theta_2, \quad (\Theta_2) = \Theta_3, \quad (\Theta_3) = \Theta_1, \quad (I_1) = I_2, \quad (I_2) = I_3, \quad (I_3) = I_1;$$

si l'on fait tourner le polygone de 180° autour de P, les deux polygones $M_2 B_2 C_2 D_2 E_2 F_2 G_2 H_2 N_2$ et $M_3 B_3 C_3 D_3 E_3 F_3 G_3 H_3 N_3$ sont remplacés par deux autres, limitrophes du polygone générateur en $G_1 F_1$ et $C_1 D_1$.

On a

$$\begin{aligned} (\Theta_1) &= H_2 = \Theta_2 I_2 \Theta_3^{-1} I_2^{-1}, \\ (\Theta_2) &= I_3^{-1} H_3^{-1} I_3 = \Theta_1 I_3^{-1} \Theta_3^{-1} I_3, \\ (\Theta_3) &= I_1 \Theta_2^{-1} I_1^{-1} = I_1 I_2 \Theta_3^{-1} I_2^{-1} I_1^{-1}; \\ (I_1) &= I_3, \quad (I_2) = I_3^{-1} I_2^{-1} I_1^{-1}, \quad (I_3) = I_1. \end{aligned}$$

La relation entre les Θ et les I peut s'écrire

$$\begin{aligned} I_3^{-1} \cdot \Theta_1 \cdot I_1 I_3 \Theta_1^{-1} \cdot \Theta_1 I_3^{-1} \Theta_2^{-1} \cdot I_1^{-1} \Theta_2 I_2 I_3 \Theta_1^{-1} \cdot \Theta_1 I_3^{-1} \Theta_3^{-1} \Theta_2^{-1} I_1 \\ \times I_3 \cdot \Theta_1^{-1} \cdot \Theta_1 I_3^{-1} I_1^{-1} \cdot \Theta_2 I_3 \Theta_1^{-1} \cdot \Theta_1 I_3^{-1} I_2^{-1} \Theta_2^{-1} I_1 \cdot I_1^{-1} \Theta_2 \Theta_3 I_3 \Theta_1^{-1} = 1, \end{aligned}$$

et, en posant

$$\begin{aligned} S &= I_3^{-1}, & S' &= \Theta_1^{-1}, & S'' &= I_1 I_3 \Theta_1^{-1}, & S''' &= \Theta_2 I_3 \Theta_1^{-1}, \\ S^{(4)} &= I_1^{-1} \Theta_2 I_2 I_3 \Theta_1^{-1}, & S^{(5)} &= I_1^{-1} \Theta_2 \Theta_3 I_3 \Theta_1^{-1}, \end{aligned}$$

on a

$$SS'^{-1} S'' S'''^{-1} S^{(4)} S^{(5)-1} S^{-1} S' S''^{-1} S''' S^{(4)-1} S^{(5)} = 1.$$

Les S sont les substitutions d'un dodécagone dont les côtés opposés sont conjugués. Les deux opérations calculées engendrent un groupe

isomorphe au groupe des transformations d'un tétraèdre régulier en lui-même. Le polygone $OA_1M_1P_1N_1A_2$ dans lequel OA_1 et OA_2 , A_1M_1 et A_2N_1 , P_1M_1 et P_1N_1 sont conjugués, engendre une équation fuchsienne à quatre points singuliers, deux différences égales à $\frac{1}{2}$ et deux autres égales à $\frac{1}{4}$. Le groupe de cette équation, ayant comme sous-groupe distingué le groupe de genre 3, fournit encore un groupe fini \mathcal{F} d'opérations. Nous connaissons les opérations fondamentales qui changent $OA_1M_1P_1N_1A_2$ en un polygone proprement équivalent; à ces opérations correspondent les opérations fondamentales d'un groupe \mathcal{A} admettant \mathcal{F} comme sous-groupe distingué.

Opérations inverses.

Jusqu'ici nous avons réservé le nom de *proprement équivalents* à deux dodécagones 1, 6, ..., 8; 1', 6', ..., 8', qui engendrent le même groupe, dont les côtés opposés sont conjugués, mais tels que les nombres qui indiquent les angles croissent régulièrement de cinq unités (mod. 12) lorsqu'on parcourt le contour des deux dodécagones dans le sens positif. En étendant la dénomination de *proprement équivalents* à deux dodécagones dont les côtés opposés sont conjugués et qui engendrent le même groupe, mais tels que les nombres qui indiquent les angles croissent régulièrement de cinq unités (mod. 12) quand on parcourt le contour de l'un dans le sens positif et celui de l'autre dans le sens négatif, on définit en même temps de nouvelles opérations que nous appellerons *opérations inverses*, en réservant le nom d'*opérations directes* aux opérations considérées jusqu'à présent. Le produit de deux opérations inverses est une opération directe. Le produit d'une opération directe par une opération inverse, ou *vice versa*, est une opération inverse. D'après cela, il suffit, pour engendrer toutes les opérations directes et inverses, d'adjoindre à un système fondamental d'opérations directes une seule opération inverse, par exemple

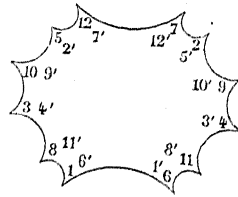
$$K = |S, S^{(5)^{-1}}, S^{(6)^{-1}}, S^{(7)^{-1}}, S^{(8)^{-1}}, S^{(1)^{-1}}|,$$

qui transforme 1, 6, ..., 8 en 1', 6', ..., 8' (*fig. 70*).

Nous avons étudié différents cas (§ V) où un groupe G de genre 3 est sous-groupe distingué d'un groupe Γ de substitutions directes et

inverses. Soient R le polygone générateur de G et R' son transformé par une substitution inverse de Γ : les expressions des substitutions de R' par R définissent une opération de période 2.

Fig. 70.



Exemple. — Le polygone générateur de Γ est (fig. 71)

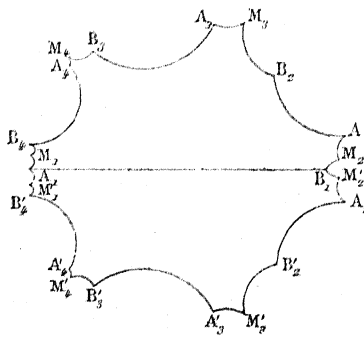
$$M_1 A_1 B_1 M_2 A_2 B_2 M_3 A_3 B_3 M_4 A_4 B_4,$$

dont les substitutions sont les quatre substitutions directes

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= M_1 A_1 \text{ in } M_2 B_1, & \Sigma_2 &= M_2 A_2 \text{ in } M_3 B_2, \\ \Sigma_3 &= M_3 A_3 \text{ in } M_4 B_3, & \Sigma_4 &= M_4 A_4 \text{ in } M_1 B_4, \end{aligned}$$

et les quatre substitutions inverses T_1, T_2, T_3, T_4 définies par les côtés

Fig. 71.



de troisième espèce $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, A_4 B_4$. En prenant le symétrique de ce polygone par rapport à $A_1 B_1$, l'ensemble donne un polygone gé-

nérateur de G, dont les substitutions sont, outre les Σ ,

$$\begin{aligned} \Lambda &= A_1 B_1 \text{ in } A'_1 B'_1, & \Lambda' &= A_2 B_2 \text{ in } A'_2 B'_2, & \Lambda'' &= A_3 B_3 \text{ in } A'_3 B'_3, \\ \Sigma_1 &= M'_1 A_1 \text{ in } M'_2 B_1, & \Sigma'_2 &= M'_2 A'_2 \text{ in } M'_3 B'_2, & \Sigma'_3 &= M'_3 A'_3 \text{ in } M'_4 B'_3, \\ \Sigma'_4 &= M'_4 A'_4 \text{ in } M'_1 B'_4 \end{aligned}$$

avec les relations

$$(1) \quad \begin{cases} \Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4 = 1, & \Sigma_1 \Sigma'_2 \Sigma'_3 \Sigma'_4 = 1, \\ \Sigma_2 \Lambda \Sigma_2^{-1} \Lambda^{-1} = 1, & \Sigma_3 \Lambda' \Sigma_3^{-1} \Lambda'^{-1} = 1, & \Sigma_4 \Lambda'' \Sigma_4^{-1} \Lambda''^{-1} = 1. \end{cases}$$

Les transformées de ces substitutions par T_1 ont pour valeurs

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) &= \Sigma_1, & (\Sigma_2) &= \Sigma'_2, & (\Sigma_3) &= \Sigma'_3, & (\Sigma_4) &= \Sigma_4, \\ & & \Sigma'_2 &= \Sigma_2, & \Sigma'_3 &= \Sigma_3, & \Sigma'_4 &= \Sigma_4, \\ (\Lambda) &= \Lambda^{-1}, & (\Lambda') &= \Lambda'^{-1}, & (\Lambda'') &= \Lambda''^{-1}. \end{aligned}$$

Remarque. — Si un polygone est tel que les substitutions ainsi définies soient les transformées des anciennes par une substitution inverse T_1 , le polygone générateur de Γ admet quatre côtés de troisième espèce et, par suite, G engendre une courbe du troisième genre à quatre branches réelles.

Comme T_1 transforme Σ_1 en elle-même, les axes de T_1 et de Σ_1 coïncident; T_1 transformant Λ en Λ^{-1} transforme en lui-même l'axe de Λ , ce qui ne peut avoir lieu que si T_1 a une ligne de points doubles perpendiculaire à cet axe. Soit $T_2 = \Lambda T_1$, T_2 a aussi une ligne de points doubles; or de $T_1 \Sigma_2 T_1 = \Sigma'_2$ et $\Sigma_2 \Lambda \Sigma_2^{-1} \Lambda^{-1} = 1$, on déduit

$$\Sigma_2 = \Lambda T_1 \Sigma_2 T_1 \Lambda^{-1}:$$

donc les axes de T_2 et de Σ_2 coïncident. On retrouve ainsi comme polygone générateur de Γ le même polygone que plus haut.

Si entre les relations (1) on élimine $\Sigma_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3, \Sigma'_4$, on obtient

$$\Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4 \Lambda''^{-1} \Sigma_4^{-1} \Lambda'' \Lambda'^{-1} \Sigma_3^{-1} \Lambda' \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1} \Lambda = 1,$$

qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\Lambda \cdot \Sigma_2 \cdot \Lambda' \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1} \cdot \Sigma_2 \Lambda \Lambda'^{-1} \Sigma_3 \cdot \Lambda'' \Lambda'^{-1} \Sigma_3^{-1} \Lambda' \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1} \cdot \Sigma_2 \Lambda \Lambda'^{-1} \Sigma_3 \Lambda' \Lambda'^{-1} \Sigma_4 \\ &\times \Lambda^{-1} \cdot \Sigma_2^{-1} \cdot \Sigma_2 \Lambda \Lambda'^{-1} \cdot \Sigma_3^{-1} \Sigma_2 \Lambda' \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1} \cdot \Sigma_2 \Lambda \Lambda'^{-1} \Sigma_3 \Lambda' \Lambda'^{-1} \cdot \Sigma_4^{-1} \Lambda'' \Lambda'^{-1} \Sigma_3^{-1} \Lambda' \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1} = 1. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} \Lambda = S, \quad \Sigma_2^{-1} = S', \quad \Lambda' \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1} = S'', \quad \Sigma_3^{-1} \Lambda' \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1} = S''', \\ \Lambda'' \Lambda'^{-1} \Sigma_3^{-1} \Lambda' \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1} = S^{(4)}, \quad \Sigma_4^{-1} \Lambda'' \Lambda'^{-1} \Sigma_3^{-1} \Lambda' \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1} = S^{(5)}, \end{aligned}$$

les S sont les substitutions d'un dodécagone dont les côtés opposés sont conjugués. En résolvant les équations précédentes par rapport à $\Lambda, \Lambda', \Lambda''; \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$;

$$\begin{aligned} \Lambda = S, \quad \Lambda' = S'' S'^{-1} S, \quad \Lambda'' = S^{(4)} S'''^{-1} S'' S'^{-1} S, \\ \Sigma_2 = S'^{-1}, \quad \Sigma_3 = S'' S'''^{-1}, \quad \Sigma_4 = S^{(4)} S^{(5)-1}, \end{aligned}$$

les autres Σ sont donnés par

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = S^{(5)} S^{(4)-1} S''' S''^{-1} S', \quad \Sigma'_2 = S^{-1} S' S, \\ \Sigma'_3 = S^{-1} S' S'''^{-1} S'' S'^{-1} S, \quad \Sigma'_4 = S^{-1} S' S'''^{-1} S'' S^{(5)-1} S^{(4)} S'''^{-1} S'' S'^{-1} S. \end{aligned}$$

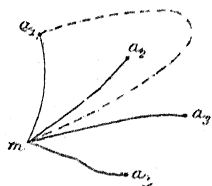
A l'aide de ces formules, on obtient l'opération inverse de période 2

$$\begin{aligned} Q = |S^{-1}, \quad S^{-1} S' S, \quad S^{-1} S' S'''^{-1} S'' S'^{-1} S, \quad S^{-1} S' S'''^{-1} S'' S'''^{-1} S' S, \\ S^{-1} S' S'''^{-1} S'' S^{(4)-1} S''' S''^{-1} S' S, \quad S^{-1} S' S'''^{-1} S'' S^{(4)-1} S^{(5)}, \quad S^{(4)-1} S''' S''^{-1} S' S|, \end{aligned}$$

qui est telle que, lorsque les nouvelles substitutions sont les transformées des anciennes par une substitution inverse, le dodécagone engendre une courbe du troisième genre à quatre branches réelles.

Soit P le polygone générateur de Γ . Les polygones proprement équivalents à P s'obtiennent de la même manière que les polygones équivalents à un polygone de genre 0 ayant quatre cycles dont les sommes

Fig. 72.



d'angles sont différentes de 2π et égales entre elles. Les contours complets $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, A_4 B_4$ jouent ici le rôle des quatre cycles. Imaginons dans un plan quatre coupures partant d'un point m quelconque et allant aux quatre points singuliers a_1, a_2, a_3, a_4 (fig. 72)

de l'équation de genre 0. On transformera ce système en un système proprement équivalent quelconque en combinant les deux opérations

$$|\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_1|, \quad |\Sigma_2, \Sigma_2^{-1}\Sigma_1\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4|;$$

soit (P) un nouveau polygone proprement équivalent à P. Le polygone (R) dérivé de (P) est proprement équivalent à R. A $|\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_1|$ correspond sur R l'opération

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) &= \Sigma_2, & (\Sigma_2) &= \Sigma_3, & (\Sigma_4) &= \Sigma_1, \\ (\Sigma'_2) &= \Lambda\Sigma'_3\Lambda^{-1}, & (\Sigma'_3) &= \Lambda\Sigma'_4\Lambda^{-1}, & (\Sigma'_4) &= \Lambda\Sigma_1\Lambda^{-1}, \\ (\Lambda) &= \Lambda'\Lambda^{-1}, & (\Lambda') &= \Lambda''\Lambda^{-1}, & (\Lambda'') &= \Lambda^{-1}, \end{aligned}$$

et, en se servant des formules plus haut, on obtient sur un dodécagone l'opération

$$\begin{aligned} U &= |S''S'^{-1}, S''S''^{-1}, S^{(4)}S''^{-1}, S^{(5)}S''^{-1}, \\ & \quad S^{-1}S'S''^{-1}S''S^{(4)-1}S^{(5)}S''^{-1}, S^{-1}S''^{-1}|. \end{aligned}$$

A $|\Sigma_2, \Sigma_2^{-1}\Sigma_1\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4|$ répond

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) &= \Sigma_2, & (\Sigma_2) &= \Sigma_2^{-1}\Sigma_1\Sigma_2, & (\Sigma_3) &= \Sigma_3, & (\Sigma_4) &= \Sigma_4, \\ (\Sigma'_2) &= \Lambda\Sigma_2^{-1}\Sigma_1\Sigma'_2\Lambda^{-1}, & (\Sigma'_3) &= \Lambda\Sigma'_3\Lambda^{-1}, & (\Sigma'_4) &= \Lambda\Sigma'_4\Lambda^{-1}, \\ (\Lambda) &= \Sigma_2^{-1}\Lambda^{-1}\Sigma_2, & (\Lambda') &= \Lambda'\Lambda^{-1}, & (\Lambda'') &= \Lambda''\Lambda^{-1}, \end{aligned}$$

et sur le dodécagone

$$\begin{aligned} V &= |S'S^{-1}S'^{-1}, S''S''^{-1}S^{(4)}S^{(5)-1}S'^{-1}, S''SS'^{-1}S''S''^{-1}S^{(4)}S^{(5)-1}S'^{-1}, \\ & \quad S''SS'^{-1}S''S''^{-1}S^{(4)}S^{(5)-1}S'^{-1}, S^{(4)}SS'^{-1}S''S''^{-1}S^{(4)}S^{(5)-1}S'^{-1}, \\ & \quad S^{(5)}SS'^{-1}S''S''^{-1}S^{(4)}S^{(5)-1}S'^{-1}|. \end{aligned}$$

Les deux opérations U et V sont permutables avec Q, ainsi que le groupe qu'elles engendrent.

Autre exemple. — Γ est engendré par le polygone (*fig.* 73)

$$\begin{aligned} & M_1 A_1 B_1 M_2 A_2 B_2 M_3 M_4 M_5 M_6, \\ M_1 A_1 & \text{ in } M_2 B_1 = \Sigma_1, & M_2 A_2 & \text{ in } M_3 B_2 = \Sigma_2, \\ M_3 M_4 & \text{ in } M_6 M_5 = \Theta_1, & M_4 M_5 & \text{ in } M_1 M_6 = \Theta_2; \end{aligned}$$

il n'y a pas de côtés de deuxième espèce : $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ sont de troi-

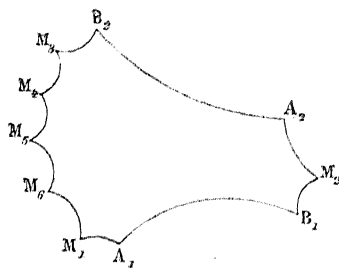
sième espèce et définissent deux substitutions T_1 et T_2 ; en posant

$$\Lambda = T_2 T_1, \quad \Theta'_1 = T_1 \Theta_1 T_1, \quad \Theta'_2 = T_1 \Theta_2 T_1, \quad \Sigma'_2 = T_1 \Sigma_2 T_1, \quad \Sigma'_3 = T_1 \Sigma_3 T_1,$$

Λ , les Σ et les Σ' définissent un groupe de genre 3; on a les relations

$$\Sigma_1 \Sigma_2 \Theta_1 \Theta_2^{-1} \Theta_1^{-1} \Theta_2 = 1, \quad \Sigma_1 \Sigma'_2 \Theta'_1 \Theta'_2^{-1} \Theta'_1^{-1} \Theta'_2 = 1, \quad \Sigma_2 \Lambda \Sigma_2^{-1} \Lambda^{-1} = 1;$$

Fig. 73.



on obtient l'opération inverse

$$\begin{aligned} (\Sigma_1) &= \Sigma_1, & (\Sigma_2) &= \Sigma'_2, & (\Sigma'_2) &= \Sigma_2, \\ (\Theta_1) &= \Theta'_1, & (\Theta'_1) &= \Theta_1, & (\Theta_2) &= \Theta'_2, & (\Theta'_2) &= \Theta_2; \end{aligned}$$

on repasse au dodécagone par les formules

$$\begin{aligned} S &= \Lambda, & S' &= \Sigma_2^{-1}, & S'' &= \Theta_1 \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1}, & S''' &= \Theta_2 \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1}, \\ S^{(4)} &= \Theta_1^{-1} \Theta_2 \Theta_2^{-1} \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1}, & S^{(5)} &= \Theta_1^{-1} \Theta_2 \Theta_1^{-1} \Lambda^{-1} \Sigma_2^{-1}. \end{aligned}$$