

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. KOENIGS

**Détermination de toutes les surfaces plusieurs fois  
engendrées par des coniques**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 5 (1888), p. 177-192

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1888\\_3\\_5\\_\\_177\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__177_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# DÉTERMINATION DE TOUTES LES SURFACES

PLUSIEURS FOIS ENGENDRÉES PAR DES CONIQUES,

PAR M. G. KOENIGS,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

---

Le plan et les quadriques sont les seules surfaces qui puissent contenir deux séries de droites, ou par chaque point desquelles il passe plusieurs droites tracées sur elles. Dans le même ordre d'idées, on peut se proposer de chercher les surfaces par chaque point desquelles il passe deux ou plusieurs coniques tracées sur elles. Les surfaces qui contiennent plusieurs séries de coniques ont déjà offert plusieurs spécimens aux géomètres; je ne parle pas du plan et des quadriques, mais la surface de Steiner, les surfaces cubiques, les surfaces du quatrième ordre à conique double, une surface du cinquième ordre étudiée par M. Darboux au Tome II de son *Bulletin*, indiquent assez tout l'intérêt qui s'attache à l'étude de la surface la plus générale doublement engendrée par des coniques.

Le problème se divise en deux.

Lorsqu'une famille de courbes algébriques décrit une surface algébrique, il y a lieu de distinguer selon que par chaque point de la surface il passe *une seule* courbe de la famille ou selon qu'il en passe plusieurs,  $n$  par exemple. On peut dire, dans le premier cas, que la famille ne recouvre qu'une fois la surface ou que la *famille* est *simple*; et, dans le second, que la *famille* est *multiple d'ordre  $n$* , et qu'elle recouvre  $n$  fois la surface. Dans ce dernier cas, en effet, si l'on fait varier le paramètre dont dépendent les courbes de la famille, tout point de la surface se trouve balayé  $n$  fois par ces courbes.

Nous distinguerons donc deux cas :

- 1° Surfaces qui admettent *au moins deux familles simples* de génératrices du second degré;
- 2° Surfaces recouvertes par une *famille multiple* de courbes du second degré.

PREMIER CAS. — *Surfaces qui admettent deux ou plusieurs générations simples par des coniques.*

Considérons une surface  $S$  recouverte par deux familles simples de coniques 1 et 2. Toute conique  $X_1$  d'un système coupe nécessairement toute conique  $X_2$  de l'autre système. Cette rencontre peut avoir lieu en un seul point variable avec  $X_1$  et  $X_2$ , ou bien en deux points variables avec  $X_1$  et  $X_2$ .

Supposons d'abord que :

A. *La rencontre de deux coniques  $X_1, X_2$  de systèmes différents n'a lieu qu'en un seul point variable avec ces coniques.*

Je m'appuierai sur la remarque suivante :

Si l'on prend trois points fixes  $p, q, r$  sur une conique et que  $\lambda$  soit le rapport anharmonique  $(xpqr)$  que forme avec ces trois points un quatrième point mobile  $x$  pris sur la conique, les coordonnées  $x_1, x_2, x_3, x_4$  du point  $x$  sont proportionnelles à des polynômes du second degré en  $\lambda$ .

Prenons alors deux coniques  $X_1, Y_1$  du système 1 et une conique variable  $X_2$  du système 2; appelons  $x$  et  $y$  les points où  $X_2$  coupe  $X_1$  et  $Y_1$ , respectivement. Le point  $x$  étant pris arbitrairement sur la conique  $X_1$ , il ne passe par  $x$  qu'une seule conique  $X_2$  (puisque le système 2 est simple), qui coupera  $Y_1$  en un seul point variable  $y$  [puisque les coniques des systèmes 1 et 2 ne se coupent qu'en un seul point variable <sup>(1)</sup>].

A un point  $x$ , pris sur  $X_1$ , ne répond sur  $Y_1$  qu'un seul point  $y$ , et

---

(1) Rien n'empêcherait qu'elles eussent un point *fixe* commun, en dehors d'un point variable.

inversement. *Les points  $x$  et  $y$  se correspondent donc homographiquement.* De là ce théorème :

*Quatre coniques de l'un des systèmes coupent les coniques de l'autre en quatre points variables dont le rapport anharmonique est constant.*

Cela posé, soient  $A_1, B_1, C_1$  trois coniques du système 1;  $A_2, B_2, C_2$  trois coniques du système 2. Prenons un point  $p$  sur la conique  $A_1$ , et soit  $\lambda$  le rapport anharmonique

$$\lambda = (p, \overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 B_2}, \overline{A_1 C_2}),$$

où  $\overline{A_1 A_2}$  est le point de rencontre de  $A_1$  et de  $A_2$ ,  $\overline{A_1 B_2}$  celui de  $A_1$  et de  $B_2$ ,  $\overline{A_1 C_2}$  celui de  $A_1$  et de  $C_2$ . Appelons de même, avec des notations analogues,  $\mu$  le rapport anharmonique

$$\mu = (q, \overline{B_2 A_1}, \overline{A_2 B_1}, \overline{A_2 C_1}),$$

où  $q$  est un point pris sur la conique  $A_2$ .

Les quantités  $\lambda$  et  $\mu$  étant données, un point  $p$  est déterminé sur  $A_1$  et un point  $q$  sur  $A_2$ , ainsi que la conique (unique)  $X_2$  qui passe en  $p$  et la conique  $X_1$  qui passe en  $q$ ; les coniques  $X_1, X_2$  se coupent en un point variable *unique*  $\omega$ , dont les coordonnées homogènes  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont évidemment proportionnelles à des polynômes entiers en  $\lambda, \mu$ , en sorte que

$$p x_i = f_i(\lambda, \mu) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Comme  $\omega$  est un point quelconque de la surface  $S$ , on voit déjà que *cette surface est représentable sur le plan.* Il s'agit maintenant de trouver les quatre polynômes  $f_i(\lambda, \mu)$ .

Laissons  $\mu$  constant; le point  $q$  est fixe, et le point  $\omega$ , lorsque  $\lambda$  varie, décrit la conique  $X_1$ , qui passe au point  $q$ . Or considérons les points de rencontre  $\overline{X_1 A_2}, \overline{X_1 B_2}, \overline{X_1 C_2}$  de  $X_1$  avec les coniques  $A_2, B_2, C_2$ ; le point  $\omega$ , ou  $\overline{X_1 X_2}$ , forme avec eux un rapport anharmonique, que nous représenterons par

$$\Lambda = (\overline{X_1 X_2}, \overline{X_1 A_2}, \overline{X_1 B_2}, \overline{X_1 C_2}).$$

D'autre part, le point  $p$ , ou  $\overline{A_1 X_2}$ , forme avec les points  $\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 B_2}$ ,

$\overline{A_1 C_2}$  sur la conique  $A_1$ , le rapport anharmonique

$$\lambda = (\overline{A_1 X_2}, \overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 B_2}, \overline{A_1 C_2}),$$

et puisque, d'après un théorème précédent, les coniques  $X_2, A_2, B_2, C_2$  doivent couper  $A_1$  et  $X_1$  suivant le même rapport anharmonique, on voit que l'on a

$$\Lambda = \lambda.$$

Ainsi le paramètre  $\lambda$  est le rapport anharmonique que forme le point variable  $\omega$  de la conique  $X_1$  avec les trois points où cette conique rencontre les coniques  $A_2, B_2, C_2$ . D'après une remarque précédente, les coordonnées de  $\omega$  sont proportionnelles à des polynômes du second degré en  $\lambda$ .

Cela fait donc voir que, pour toute valeur constante de  $\mu$ , les polynômes en  $\lambda$  doivent être du second degré; de même, pour toute valeur de  $\lambda$ , ils doivent être du second degré en  $\mu$ . On a donc la forme générale

$$f_i(\lambda, \mu) = (a_i \lambda^2 + b_i \lambda + c_i) \mu^2 + (a'_i \lambda^2 + b'_i \lambda + c'_i) \mu + (a''_i \lambda^2 + b''_i \lambda + c''_i).$$

Réciproquement, si l'on prend une surface dont les coordonnées soient proportionnelles à des polynômes en  $\lambda, \mu$  de cette forme, il est clair que l'on obtiendra sur cette surface deux familles simples de coniques en y laissant successivement constants  $\lambda$  et  $\mu$ .

La surface ainsi obtenue est du huitième ordre; je lui attribuerai dans ce qui suit le symbole  $\mathfrak{C}$  et le nom de *conicoïde* <sup>(1)</sup>, qui rappelle sa propriété caractéristique.

Je continue la discussion des systèmes simples, et je vais étudier l'hypothèse où les coniques des deux systèmes se coupent en *deux points variables*.

Soit  $X_1$  une conique du système 1, et  $x, x'$  ses deux points de rencontre avec la conique  $X_2$  du système 2. Lorsque  $X_2$  varie, les points  $x$  et  $x'$  décrivent évidemment une involution sur la conique  $X_1$ . En effet,  $x$  étant pris sur  $X_1$ , il y a une conique  $X_2$  unique qui y passe et qui va

---

(1) Tout le monde s'accorde aujourd'hui à donner aux surfaces du second ordre le nom de *quadriques*, au lieu de celui de *conicoïdes* proposé par quelques auteurs; ce nom peut donc être appliqué aux surfaces que nous étudions ici.

couper une seconde fois  $X_1$  en  $x'$ ; donc à un point  $x$  répond un point  $x'$ , et réciproquement; de plus,  $x$  répond à  $x'$  comme  $x'$  répond à  $x$ . Ainsi la correspondance entre  $x$  et  $x'$  est bien une homographie involutive. Il en résulte (1) que la droite  $xx'$  passe par un point fixe  $\xi_1$  du plan de  $X_1$ . Appelons ce point  $\xi_1$  le *pôle d'involution* de  $X_1$ .

Tous les plans des coniques du système 2 doivent passer par  $\xi_1$ .

Considérons alors une autre conique  $Y_1$  du système 1, et son pôle d'involution  $\eta_1$ ; tous les plans des coniques du système 2 doivent passer par  $\eta_1$ , et, par suite, si  $\xi_1$  et  $\eta_1$  ne coïncident pas, doivent passer par la droite  $\xi_1\eta_1$ , que nous représenterons par  $D_1$ . Cette droite  $D_1$  est alors le lieu des pôles d'involution des coniques du système 1, en même temps que l'axe autour duquel tournent les plans des coniques du système 2. Prenons de même les pôles d'involution  $\xi_2, \eta_2$  de deux coniques du système 2; si  $\xi_2$  et  $\eta_2$  sont distincts, la droite  $\xi_2\eta_2$ , que j'appellerai  $D_2$ , est le lieu des pôles d'involution des coniques 2, en même temps que l'axe des plans du système 1. Nous dirons alors que  $D_1$  et  $D_2$  sont deux *axes d'involution*.

Maintenons l'hypothèse de l'existence de la droite  $D_1$  et voyons si  $\xi_2$  et  $\eta_2$  peuvent alors coïncider. Si toutes les coniques du système 2 ont le même pôle d'involution  $O$ , tous les plans du système 2 et tous les plans du système 1 doivent passer par ce point. La droite  $D_1$  doit donc le contenir, puisqu'elle est l'intersection commune des plans 2. Considérons alors une conique  $X_1$ . Son pôle est situé sur  $D_1$  par hypothèse; il est donc au point où  $D_1$  coupe le plan de  $X_1$ , c'est-à-dire au point  $O$ ; car il est impossible que tous les plans du système 1 passent par  $D_1$ , étant donné que tous ceux du système 2 contiennent déjà cette droite.

Donc, si les coniques d'un système ont un pôle d'involution fixe  $O$ , ce point  $O$  est aussi un pôle d'involution pour toutes les coniques de l'autre système. Deux cas seulement subsistent donc : le cas de deux axes d'involution (2) et le cas d'un pôle d'involution unique.

(1) On sait, en effet, que les droites de jonction des couples de points correspondants d'une involution sur une conique passent par un point fixe.

(2) On peut toujours supposer que les axes d'involution ne se coupent pas, car, s'ils avaient un point  $O$  commun, ce point serait évidemment un pôle d'involution pour les coniques des deux systèmes.

B. *Cas de deux axes d'involution.*

La surface  $S$  ne peut être qu'une quadrique. Prouvons d'abord que les coniques  $\mathfrak{z}$  coupent la droite  $D_1$ , axe de leurs plans, en deux points fixes. Soit, en effet,  $P_2$  un point de rencontre de  $D_1$  avec la conique  $X_2$ ; ce point  $P_2$  est le pôle d'involution de la conique  $X_1$ , dont le plan passe par la droite  $D_2$  et par le point  $P_2$ . L'intersection  $P_2I$  des plans des coniques  $X_1$  et  $X_2$  doit couper ces deux coniques aux deux mêmes points. La conique  $X_1$  doit donc passer par le point  $P_2$ , où la droite  $P_2I$  coupe déjà la conique  $X_2$ . Mais considérons alors une autre conique quelconque  $Y_2$  du système  $\mathfrak{z}$ , elle doit passer par les deux points où son plan rencontre  $X_2$ ; or, le plan de  $Y_2$ , passant par  $D_1$ , contient le point  $P_2$  de  $X_1$ , et, par suite,  $Y_2$  doit passer par  $P_2$ . Cela prouve bien que toutes les coniques  $\mathfrak{z}$  coupent  $D_1$  en deux points fixes  $P_2, Q_2$ ; de même, les coniques  $\mathfrak{r}$  coupent  $D_2$  en deux points fixes  $P_1, Q_1$ . Considérons alors deux coniques  $X_2, Y_2$  du système  $\mathfrak{z}$  et une conique quelconque  $X_1$  du système  $\mathfrak{r}$ ; ces trois coniques se coupent deux à deux en deux points; elles définissent donc une certaine quadrique  $Q$ ; toute conique  $Y_1$  du système  $\mathfrak{r}$  coupe cette quadrique d'abord en  $P_1, Q_1$ , et en quatre autres points situés sur  $X_2$  et  $Y_2$ , en tout six points: donc toutes les coniques  $\mathfrak{r}$  et, par suite, aussi toutes les coniques  $\mathfrak{z}$  sont situées sur cette surface  $Q$ , qui n'est autre, dès lors, que la surface  $S$  considérée.

Reste le cas beaucoup plus-intéressant où il existe

C. *Un pôle d'involution unique.*

Je vais prouver que la surface est du quatrième ordre et possède une conique double.

Appelons  $O$  le pôle d'involution et prenons trois coniques  $A_1, B_1, C_1$  du système  $\mathfrak{r}$ , dont les plans, que j'appellerai  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  passent par le point  $O$ ; soit aussi  $a_1, b_1, c_1$  les polaires du point  $O$  par rapport aux coniques  $A_1, B_1, C_1$ . On peut toujours éliminer le cas où les coniques d'un système passeraient toutes au point  $O$ ; en effet, les coniques du second système passeraient aussi par ce point, et nous n'aurions plus alors qu'un seul point variable d'intersection possible. Il résulte de là que les trois droites  $a_1, b_1, c_1$  ne se rencontrent pas.

Ceci posé, soit  $X_2$  une conique quelconque du système 2, dont le plan  $\xi_2$  doit passer par le point O, et soit  $x_2$  la polaire du point O par rapport à cette conique. Je dis que la droite  $x_2$  rencontre les trois droites  $a_1, b_1, c_1$ .

En effet, le plan  $\xi_2$  coupe ces trois droites en trois points  $p, q, r$ , tandis qu'il coupe les coniques  $A_1, B_1, C_1$  respectivement aux points  $(l, l'), (m, m'), (n, n')$ ; ces six points  $l, l', m, m', n, n'$  sont aussi ceux où la conique  $X_2$  coupe respectivement  $A_1, B_1, C_1$ . Or  $p$  et O divisent harmoniquement le segment  $ll'$ , puisque  $p$  est un point de la polaire  $a_1$  du point O par rapport à  $A_1$ ; il en résulte que le point  $p$  est aussi un point de la polaire  $x_2$  du point O par rapport à  $X_2$ , attendu que les points  $l$  et  $l'$  sont sur  $X_2$ . De la même manière,  $q$  et  $r$  sont sur la droite  $x_2$ .

Si donc on prend les polaires du point O par rapport aux coniques  $X_2$  du système 2, ces polaires  $x_2$  engendrent un hyperboloïde H, dont les trois droites  $a_1, b_1, c_1$  sont les directrices.

Que l'on prenne maintenant trois coniques  $A_2, B_2, C_2$  du système 2 et qu'on refasse le même raisonnement, on arrivera à la conclusion suivante :

*Les polaires du point O par rapport aux coniques des systèmes 1 et 2 constituent les deux systèmes de génératrices rectilignes d'un même hyperboloïde H.*

Les plans des coniques 1, par exemple, contenant chacun une génératrice de l'hyperboloïde, sont tangents à cette surface; ils enveloppent donc le cône du second degré  $\Gamma$  circonscrit à H et qui a le point pour sommet. Donc :

*Les plans des coniques des deux systèmes enveloppent le même cône, à savoir le cône du second degré  $\Gamma$ , de sommet O circonscrit à l'hyperboloïde H.*

Réciproquement, prenons arbitrairement trois coniques  $A_1, B_1, C_1$ ; appelons O l'intersection de leurs plans, et  $a_1, b_1, c_1$  les polaires de O par rapport à ces courbes. Considérons l'hyperboloïde H dont  $a_1, b_1, c_1$  sont trois génératrices; puis prenons une génératrice  $x_2$  du second système et coupons par le plan  $Ox_2$  les coniques  $A_1, B_1, C_1$  aux six points  $l, l', m, m', n, n'$ . Ces six points sont sur une même conique  $X_2$ , dans laquelle  $x_2$  est la polaire de O. Le lieu de  $X_2$  est une surface S qui peut être évidemment engendrée de la même manière par des con-



ques  $X_1$ , obtenues en partant de trois coniques  $A_2, B_2, C_2$  prises parmi les coniques variables  $X_2$ .

Nous obtenons donc ainsi une solution nouvelle de notre problème général.

Pour évaluer le degré de la surface ainsi trouvée, coupons-la par une droite  $\Delta$  issue du point  $O$ . Ce point ne peut appartenir à la surface, sans quoi toutes les coniques des deux systèmes y passeraient. Par la droite  $\Delta$ , menons deux plans tangents au cône  $\Gamma$ ; ces deux plans tangents contiennent : l'un une conique  $X_1$  et une conique  $X_2$ ; l'autre, de même, une conique  $Y_1$  et une conique  $Y_2$ . Soient  $P_1, Q_1$  et  $P_2, Q_2$  respectivement les traces de  $X_1, X_2$  sur la droite  $\Delta$ ; il est clair que la conique  $Y_2$  vient couper  $X_1$  en  $P_1$  et  $Q_1$ , et que  $Y_1$  coupe  $X_2$  en  $P_2$  et  $Q_2$ . La droite  $\Delta$  ne coupe donc qu'en quatre points  $P_1, Q_1, P_2, Q_2$  la surface  $S$ , qui est ainsi du quatrième degré. Un plan  $\xi$  tangent au cône  $\Gamma$ , suivant une génératrice  $\Delta$  de ce cône, coupe la surface suivant deux coniques  $X_1, X_2$  qui se coupent sur  $\Delta$  en deux points où le plan  $\xi$  est tangent; mais les deux autres points d'intersection de  $X_1, X_2$  sont des points doubles de la surface qui possède ainsi un lieu de points doubles du second degré. Les surfaces du quatrième ordre à conique double (1) constituent donc notre nouvelle solution.

Mais ces surfaces contiennent, on le sait, dix séries de coniques qui s'associent en couples  $(1, 1'), (2, 2'), (3, 3'), (4, 4'), (5, 5')$ . Les coniques d'un même couple  $(i, i')$  se coupent en deux points variables; mais les coniques de la famille 1, par exemple, coupent chacune en un seul point toutes les coniques des familles 2, 2', 3, 3', 4, 4', 5, 5'. Ces surfaces réalisent donc de quarante manières une double génération simple par des coniques avec rencontre en *un seul point* variable. Ces surfaces doivent donc, à ce titre, être comprises dans notre surface du huitième ordre, ainsi d'ailleurs que les quadriques. Donc, on peut déjà énoncer le théorème suivant :

*Si une surface admet deux ou plusieurs systèmes simples de génération par des coniques, cette surface est une conicoïde.*

---

(1) Lorsque, dans une surface du quatrième ordre admettant un lieu de points doubles du second degré, ce lieu se décompose en deux droites non situées dans un même plan, la surface est réglée et ne contient pas de coniques proprement dites. Il faut donc supposer, comme nous le faisons ici, que le lieu des points doubles est une conique.

*Extension au cas de courbes d'ordre supérieur unicursales.*

Bien que ce ne soit pas notre but d'étudier le cas général d'une surface rationnelle quelconque, je crois utile de présenter ici quelques remarques relatives à ce cas. M. Noëther a étudié les surfaces engendrées par une famille de courbes unicursales et qui sont représentables sur un cône; il les a ramenées à des types déterminés au moyen de transformations rationnelles. Comme j'aurai occasion de le dire plus loin, M. Noëther, dans ses belles recherches, suppose que le système des courbes génératrices est simple; supposons-le encore ici. Dans ce cas, si, en dehors de la famille de courbes unicursales, il existe une autre courbe unicursale, la surface est représentable point par point sur le plan.

Soit, en effet,  $D_0$  la courbe unicursale considérée, qui est coupée en chacun de ses points par une courbe  $C$  de la famille. Chaque point  $P$  de  $D_0$  dépend rationnellement d'un paramètre  $\lambda$ , et la courbe  $C$  qui passe en  $P$  également, c'est-à-dire que  $C$  a une représentation de la forme

$$(1) \quad \rho x_i = a_i(\lambda)\mu^m + b_i(\lambda)\mu^{m-1} + \dots,$$

où  $\mu$  est le paramètre dont dépend rationnellement chaque point de  $C$ , et  $a_i, b_i, \dots$  des polynômes en  $\lambda$ .

Reste à savoir maintenant, question qu'on ne se pose pas toujours, si les équations (1), qui font répondre à tout point  $\lambda, \mu$  d'un plan un seul point de la surface, font véritablement correspondre à chaque point de la surface un seul point du plan.

Si les courbes  $C$  ne coupent  $D_0$  qu'en un point, la question n'est point douteuse; car par un point  $M$  de la surface ne passe qu'une courbe  $C$ , qui ne coupe  $D_0$  qu'en un point  $P$ . Donc  $\lambda$  et  $\mu$  sont bien déterminés.

Mais, si  $C$  coupe  $D_0$  en  $k$  points de paramètres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , il n'en est plus ainsi.

Néanmoins la surface est toujours représentable sur le plan. Remarquons d'abord que les  $k$  points, qu'une courbe  $C$  définit sur la courbe  $D_0$ , forment une involution, et, par suite, leurs paramètres sont racines



Par exemple, la surface la plus générale réglée qui contienne une famille de coniques ne coupant chacune qu'une fois les génératrices rectilignes est une surface du quatrième ordre, dont les plans des coniques osculent une cubique gauche et coupent la surface suivant une conique et suivant deux génératrices rectilignes (1).

Dans le cas d'une famille de cubiques et de droites, la surface est du sixième degré, du douzième pour des cubiques et des coniques, etc. Le cas où les courbes génératrices considérées ont plusieurs points variables communs est plus compliqué, il se ramène à un problème sur les transformations Cremona dans le plan.

SECOND CAS. — *Surfaces recouvertes plusieurs fois par une même famille de coniques.*

Supposons qu'une famille  $\mathcal{F}$  de coniques recouvre  $n$  fois une surface  $S$ . Par tout point  $P$  pris sur une conique  $A$  du système passent  $(n - 1)$  autres coniques. Donc, il existe une infinité de coniques de  $\mathcal{F}$  qui coupent  $A$ ; donc toutes les coniques de  $\mathcal{F}$  coupent  $A$ , sans quoi la famille  $\mathcal{F}$  serait décomposable en deux autres, les coniques d'un groupe coupant  $A$  et celles de l'autre ne la coupant pas. Donc, puisque  $A$  est quelconque, *deux coniques quelconques de  $\mathcal{F}$  se coupent.*

Si la rencontre a lieu en deux points variables, la surface est une quadrique.

En effet, trois coniques quelconques  $A, B, C$  de  $\mathcal{F}$  sont alors sur une même quadrique et toute conique de  $\mathcal{F}$  coupant  $A, B, C$  en deux points chacune coupe cette quadrique en six points; elle est donc sur la quadrique.

Reste donc le seul cas intéressant, celui où les coniques n'ont qu'un point mobile commun, qu'elles aient du reste, ou non, un point fixe commun.

Pour élucider la question, traitons d'abord le cas de  $n = 2$ .

Je considère une conique  $A$  de la famille et le paramètre  $\lambda$  qui correspond anharmoniquement aux points de la conique  $A$ . Soit  $\lambda$  le para-

---

(1) Signalons en particulier une surface réglée du cinquième ordre, dont les lignes asymptotiques sont des cubiques gauches.

mètre d'un point P;  $\mu$  celui d'un point Q, pris tous les deux sur la conique A. Par P, il passe une conique X de la famille, et par Q une autre conique Y; ces coniques X, Y se coupent en un point variable unique  $x$ , et, par suite, on a

$$\rho x_i = f_i(\lambda, \mu),$$

où  $f_i(\lambda, \mu)$  est un polynôme en  $\lambda, \mu$ . Soit réciproquement un point  $x$  sur la surface; les coniques X, Y de la famille qui se croisent en  $x$  coupent la conique A en des points P, Q respectivement; de plus, rien ne distingue l'une de l'autre les deux coniques X, Y, en sorte que l'échange de P et de Q, ou de  $\lambda, \mu$ , laisse le point  $x$  immobile. Donc les *polynômes*  $f_i$  sont *symétriques* en  $\lambda, \mu$ .

Laissons maintenant  $\lambda$  constant, la conique X se trouve fixée et le point  $x$  la décrit; comme le point  $x$  de la conique X et le point Q de la conique Y se répondent homographiquement (cela est évident), le paramètre  $\mu$  du point P répond anharmoniquement au point  $x$  et, par suite,  $f_i$  doit être du second degré en  $\mu$ ; il doit être de même du second degré en  $\lambda$ . Donc  $f_i(\lambda, \mu)$  a la forme que nous avons déjà trouvée

$$\begin{aligned} f_i(\lambda, \mu) = & + (\alpha_i \lambda^2 + b_i \lambda + c_i) \mu^2 \\ & + (\alpha'_i \lambda^2 + b'_i \lambda + c'_i) \mu \\ & + (\alpha''_i \lambda^2 + b''_i \lambda + c''_i); \end{aligned}$$

seulement  $\lambda$  et  $\mu$  entrent symétriquement. Il en résulte que, si l'on prend pour variables

$$\lambda + \mu = p, \quad \lambda \mu = q,$$

$f_i(\lambda, \mu)$  pourra se mettre sous la forme

$$A_i p^2 + A'_i q^2 + A''_i + 2B_i q + 2B'_i p + 2B''_i p q,$$

où les A et les B sont des constantes quelconques.

En résumé, la surface a la représentation suivante

$$\rho x_i = \varphi_i(p, q),$$

où  $\varphi_i(p, q)$  est un polynôme du second degré des deux variables  $p, q$ . Toute équation linéaire entre  $p$  et  $q$  représente une conique sur la surface, qui se trouve ainsi contenir une double infinité de coniques. Je

représenterai par la notation  $\odot$  toute surface dont la représentation est comprise dans ce type. Ces surfaces sont généralement des surfaces de Steiner, ou exceptionnellement des cubiques réglées, ou plus exceptionnellement encore des quadriques ou des plans.

On doit à M. Darboux d'avoir prouvé que ces surfaces sont les seules qui puissent contenir une double infinité de coniques.'

Ainsi, dans le cas de  $n = 2$ , nous trouvons les surfaces  $\odot$  comme solution de notre problème; *mais il est évident que ces surfaces rentrent dans le type conicoïde.*

D'ailleurs, si l'on prend arbitrairement une surface  $\odot$ , une surface de Steiner par exemple, et si l'on considère une développable de la classe  $m$ , circonscrite à la surface, les plans tangents à cette développable couperont chacun la surface  $\odot$  suivant deux coniques; or les coniques ainsi définies engendrent une famille  $\mathcal{F}$  qui recouvre  $m$  fois la surface.

Il en résulte qu'avec une surface  $\odot$  quelconque on peut réaliser le fait d'une surface recouverte par une famille de coniques un nombre de fois aussi grand qu'on le voudra. Le problème de la recherche des surfaces qui sont recouvertes plusieurs fois (1) par des coniques possède donc déjà une infinité de solutions très effectives; reste à savoir si les surfaces  $\odot$  les fournissent toutes.

(1) M. Nœther, dans ses belles recherches, a laissé de côté le cas où la surface est recouverte plusieurs fois par la famille de courbes unicursales génératrices, ou du moins je n'ai pas connaissance que cette question ait été traitée dans toute sa généralité par cet éminent géomètre ni par d'autres. Pour montrer ici par un exemple que la question possède des solutions qui invitent à les rechercher toutes, je prendrai la surface générale du huitième ordre qui a été définie dès le début. Le plan d'une conique la coupe, outre la conique, suivant une courbe unicursale du sixième degré; or, les plans des coniques d'une famille enveloppent une développable de la sixième classe. Par tout point P de la surface du huitième ordre, il passe donc six de ces plans: un contient la conique de la famille qui passe en P, et les cinq autres contiennent cinq courbes sextiques qui se croisent en ce point. Ainsi, comme il y a deux familles de coniques, on peut énoncer le théorème suivant:

*Une conicoïde est le lieu de deux familles de courbes planes unicursales du sixième ordre qui recouvrent chacune cinq fois la surface.*

Il est d'ailleurs bien aisé de voir qu'on peut construire sur toute surface représentable sur le plan autant de familles de courbes unicursales que l'on voudra qui les recouvrent chacune plusieurs fois; la difficulté n'existerait que si l'on voulait imposer à certaines de ces courbes un degré déterminé, comme nous faisons ici.

Traisons le cas où la surface est représentable point par point sur le plan.

Soient  $p, q$  les deux variables dont dépend rationnellement chaque point de la surface, et soit  $A$  une conique de la famille; les  $n$  coniques qui se croisent au point  $(p, q)$  vont couper la conique  $A$  en  $n$  points  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , dont je désignerai par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les paramètres. Les quantités  $\lambda_i$  sont racines d'une équation d'ordre  $n$ , dont les coefficients sont des polynômes entiers en  $p, q$ , soit

$$(E) \quad G(p, q, \lambda) = G_0(p, q)\lambda^n + G_1(p, q)\lambda^{n-1} + \dots + G_{n-1}(p, q)\lambda + G_n(p, q) = 0.$$

Or attribuons à  $\lambda$  une valeur constante, l'équation ci-dessus sera vérifiée pour tous les points  $(p, q)$  des  $(n - 1)$  coniques qui passent au point  $P$  de  $A$ , dont  $\lambda$  est la valeur paramétrale. Cette équation (E), lorsqu'on y regarde  $\lambda$  comme constant, représente donc ces  $(n - 1)$  coniques et se décompose en un produit

$$G(p, q, \lambda) = H_1(p, q) H_2(p, q) \dots H_{n-1}(p, q),$$

où les  $H_i(p, q)$  sont des polynômes entiers en  $p, q$ , dont les coefficients dépendent *algébriquement*, mais non rationnellement, de  $\lambda$ ; en introduisant un nouveau paramètre  $\Lambda$ , on pourra écrire

$$G(p, q, \lambda) = K(p, q, \lambda, \Lambda_1) K(p, q, \lambda, \Lambda_2) \dots K(p, q, \lambda, \Lambda_{n-1}),$$

où  $K(p, q, \lambda, \Lambda_i)$  est un polynôme en  $p, q$ , dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de  $\lambda, \Lambda_i$ ; quant à  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{n-1}$ , ce sont les  $(n - 1)$  racines d'une équation irréductible

$$g_0(\lambda)\Lambda^{n-1} + g_1(\lambda)\Lambda^{n-2} + \dots + g_{n-2}(\lambda)\Lambda + g_{n-1}(\lambda) = 0,$$

où les  $g_i(\lambda)$  sont des polynômes entiers en  $\lambda$ .

Considérons les courbes, au nombre de  $(n - 1)$ , qui, en coordonnées rectilignes planes  $p, q$ , seraient représentées par les équations

$$K(p, q, \lambda, \Lambda_i) = 0 \quad [i = 1, 2, \dots, (n - 1)];$$

chacune de ces courbes est l'image de l'une des  $(n - 1)$  coniques qui se coupent au point  $P$  de la conique  $A$ . Les points communs à deux quelconques de ces courbes ne peuvent être que des points de base ou le

point qui correspond au point P; ils sont dès lors communs à toutes ces courbes qui font ainsi partie d'un même faisceau. On pourra donc toujours, par un choix convenable du paramètre  $\Lambda$ , ramener ces courbes à la forme

$$L(p, q, \lambda) + \Lambda_i M(p, q, \lambda) = 0,$$

où L et M sont des polynômes en  $p, q, \lambda$ .

Considérons maintenant deux courbes

$$L(p, q, \lambda) + \Lambda_i M(p, q, \lambda) = 0,$$

$$L(p, q, \lambda') + \Lambda'_k M(p, q, \lambda') = 0$$

qui correspondent à deux valeurs différentes de  $\lambda'$ ; elles ne doivent se couper qu'en un point variable avec  $\lambda, \lambda'$ .

Or, soit  $\alpha$  le degré des courbes

$$L(p, q, \lambda) + \Lambda M(p, q, \lambda) = 0,$$

où l'on a  $g_0(\lambda)\Lambda^{\alpha-1} + \dots = 0$ , et  $\beta$  le nombre des points fixes communs à toutes les courbes de cette famille; deux quelconques se couperont encore en  $\alpha^2 - \beta$  points variables. Il nous faut avoir ici

$$\beta = \alpha^2 - 1.$$

Or des courbes de degré  $\alpha$  qui ont un total de rencontres fixes égal à  $\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - 1$  forment un faisceau et n'ont pas de point variable commun; il faut donc, pour la possibilité des hypothèses, que

$$\alpha^2 - 1 < \frac{\alpha(\alpha+3)}{2} - 1,$$

c'est-à-dire  $\alpha \leq 2$ . Donc, il n'y a que deux cas possibles :  $\alpha = 1$  ou  $\alpha = 2$ .

Si  $\alpha = 1$ , les lignes planes représentatrices des coniques de la surface sont des droites tangentes à une courbe du plan.

Si  $\alpha = 2$ , ce sont des coniques qui ont trois points fixes.

Mais alors, en prenant pour référence dans le plan le triangle formé par ces trois points, l'équation de ces coniques prend la forme

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{q} + C = 0,$$



en sorte que, en prenant  $\frac{1}{p}$ ,  $\frac{1}{q}$  pour paramètres, on retrouve la forme linéaire. Donc, on peut toujours supposer  $\alpha = 1$ .

On a alors

$$L(p, q, \lambda) + \Lambda' M(p, q, \lambda) = (lp + l'q + l'') + \Lambda'(mp + m'q + m''),$$

où  $l, l', l'', m, m', m''$  sont des polynômes entiers en  $\lambda$ .

Mais revenons aux formules

$$\rho x_i = f_i(p, q);$$

pour avoir les points de rencontre avec le plan

$$\sum \xi_i x_i = 0$$

de la conique représentée par l'équation

$$(lp + l'q + l'') + \Lambda'(mp + m'q + m'') = 0,$$

il faudra joindre à cette équation linéaire l'équation

$$\sum \xi_i f_i(p, q) = 0.$$

Toute courbe de ce réseau ne doit donc être coupée qu'en deux points par toutes les droites qui représentent les coniques, et, comme ces droites sont tangentes à une courbe<sup>(1)</sup>, il est nécessaire que les courbes du réseau soient seulement du second degré. Donc les polynômes  $f_i(p, q)$  sont du second degré en  $p, q$ , et notre surface est ainsi encore une surface  $\mathcal{O}$ .

(A suivre.)

---

(1) Il est impossible qu'elles forment un faisceau, car alors les coniques représentées n'auraient plus de point variable commun et ne pourraient recouvrir plusieurs fois la surface.