V. Jamet

# Sur les surfaces et les courbes tétraédrales symétriques

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 4 (1887), p. 3-78 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__S3_0>

# SUR LES SURFACES

ET LES

# COURBES TÉTRAÉDRALES SYMÉTRIQUES,

PAR M. V. JAMET,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES AU LYCÉE DE NANTES,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

## INTRODUCTION.

En 1865 et 1866, de la Gournerie présentait à l'Académie des Sciences trois Mémoires ayant pour objet l'étude des surfaces désignées par lui sous le nom de *surfaces tétraédrales symétriques* et représentées par l'équation

$$\text{(A)} \qquad \left(\frac{\alpha}{a}\right)^m + \left(\frac{\beta}{b}\right)^m + \left(\frac{\gamma}{c}\right)^m + \left(\frac{\delta}{d}\right)^m = 0,$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ désignent les coordonnées d'un point, mobile sur la surface, par rapport aux plans des quatre faces d'un tétraèdre, dit *tétraèdre de symétrie*. Le dernier de ces Mémoires, ayant pour objet de généraliser les résultats obtenus dans les deux Mémoires précédents, au sujet de courbes et de surfaces du quatrième et du huitième ordre, renfermait, au début, une étude des courbes planes représentées par l'équation

$$\text{(B)} \qquad \left(\frac{\alpha}{a}\right)^m + \left(\frac{\beta}{b}\right)^m + \left(\frac{\gamma}{c}\right)^m = 0,$$

courbes dites *triangulaires*. La seconde Partie était consacrée à étudier divers modes de génération des surfaces tétraédrales, leur degré, leur équation tangentielle, les droites qu'elles renferment, les systèmes de courbes triangulaires qu'on peut tracer sur ces surfaces, et enfin les systèmes de courbes à double courbure, dites *tétraédrales,* définies par l'intersection de deux surfaces tétraédrales de même exposant, ayant le même tétraèdre de symétrie. De la Gournerie était conduit à regarder une telle courbe comme l'intersection de deux surfaces coniques *triangulaires,* représentées chacune par une équation de la forme (B), où l'on supposerait que les équations $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ représentent des plans. Nous nous servirons fréquemment de cette considération.

Enfin le Mémoire dont il s'agit ici se terminait par l'étude des surfaces réglées tétraédrales et de divers modes d'association de ces surfaces.

Mais l'étude d'une catégorie de surfaces courbes est un sujet de recherches illimité, et l'on ne saurait le considérer comme épuisé tant qu'on ne connaît pas les propriétés infinitésimales de ces surfaces. Nous nous proposons d'exposer ici quelques-unes de ces propriétés : on trouvera, dans la première Partie de notre travail, une propriété des rayons de courbure des surfaces de la Gournerie : nous en déduirons un théorème relatif aux rayons de courbure des courbes triangulaires. Mais nous espérons donner à la fois plus de cohésion et d'extension à l'exposition de ces propriétés, en nous posant le problème qui nous a conduit à ce résultat, non seulement au sujet de la fonction de deux variables indépendantes définie par l'équation d'une surface, mais encore au sujet d'une fonction d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Cette manière de procéder nous conduira, d'ailleurs, à étendre le résultat obtenu à d'autres surfaces et notamment, dans un cas singulier, aux surfaces définies par l'équation

$$L_4^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} L_3^{\alpha_3} L_4^{\alpha_4} = A,$$

et aux courbes planes représentées par l'équation

$$L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} L_3^{\alpha_3} = A,$$

où l'on suppose que $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$ sont des fonctions linéaires des coordonnées, et où la somme des exposants est nulle. Ce sont des courbes et des surfaces étudiées par MM. Klein et Lie à un point de vue tout différent (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* séance du 10 juin 1870).

La propriété des courbes triangulaires, que nous avons démontrée, consiste en ceci : *Par chaque point* P *d'une courbe triangulaire passe une conique qui lui est tangente et qui est circonscrite au triangle de symétrie; les rayons de courbure de la conique et de la triangulaire sont dans un rapport constant*. La seconde Section de notre travail est consacrée à la démonstration d'un théorème qui est l'extension du précédent à la théorie des courbes tétraédrales, les coniques tangentes étant remplacées par des cubiques gauches osculatrices. On y trouvera, en outre, la recherche des points singuliers des courbes triangulaires, recherche que de la Gournerie n'avait fait qu'indiquer sommairement, puis la réduction à des types simples, des intégrales abéliennes de première espèce appartenant aux courbes triangulaires : cette réduction nous permettra de savoir à quelles conditions ces intégrales s'expriment, soit par les fonctions élémentaires, soit par les intégrales elliptiques. Nous terminerons cette Section en examinant, en particulier, quelques courbes triangulaires du troisième et du quatrième ordre, afin d'en déduire une démonstration, inédite, nous l'espérons, d'un théorème déjà démontré par MM. Bonnet et Beltrami (*Nouvelles Annales*, 2^e^ série, t. IV), et dont nous avons donné nous-même une démonstration analytique (*Comptes rendus*, mai 1885).

Les lignes asymptotiques des surfaces tétraédrales sont connues depuis longtemps (voir *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. I, notes de la page 355). Aussi n'insisterions-nous pas autrement sur la recherche de ces lignes, si cette recherche ne pouvait être rattachée à celle des lignes asymptotiques des surfaces ayant pour équation

$$f_1(\mathrm{L}, \mathrm{M}) = f_2(\mathrm{N}, \mathrm{P}), \tag{C}$$

où $f_1$, $f_2$ sont des fonctions homogènes, de même degré, L, M, N, P des fonctions linéaires des coordonnées $x$, $y$, $z$. Cette forme d'équation comprend, comme on le voit, l'équation des surfaces tétraédrales proprement dites et aussi de la plupart des surfaces qui en dérivent par la méthode exposée dans la première Section. Nous chercherons, dans la troisième Section, les lignes asymptotiques de ces surfaces limites. En outre, la recherche des lignes asymptotiques des surfaces (C) conduit à faire subir à ces surfaces une transformation d'un nouveau genre, qui s'effectue à l'aide d'intégrales de la forme $\int \frac{dt}{T^2}$, T désignant une fonction de $t$, qui dépend de l'équation (C). En appliquant cette transformation aux surfaces tétraédrales et aux surfaces qui en dérivent, nous avons été conduit à étudier les deux intégrales suivantes :

$$\int \frac{dt}{1+t^{\mu}}, \quad \int \frac{dt}{(1+t^{\mu})^{\frac{2}{\mu}}}.$$

Nous espérons qu'on trouvera quelque intérêt à voir comment celle-ci se transforme en une intégrale à différentielle rationnelle, dans le cas où $\mu$ est de la forme $\pm \frac{4}{2k+1}$.

Enfin les deux derniers paragraphes de la troisième Section sont consacrés à l'étude d'un cas particulier, où la surface représentée par l'équation (C) est du quatrième ordre, et à la recherche de la surface transformée, obtenue par la méthode dont nous venons de parler.

## PREMIÈRE SECTION.

### FORMATION DES FONCTIONS FONDAMENTALES. CONSÉQUENCES GÉOMÉTRIQUES IMMÉDIATES.

1. Soient $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_n$ $n$ fonctions linéaires de plusieurs variables $x, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$, de telle sorte qu'on ait identiquement

$$L_i = a_i x + a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{ip-1} x_{p-1}.$$

Si l'on donne les $n$ coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, l'équation

$$\sum \frac{\alpha_i}{L_i} \equiv \frac{\alpha_1}{L_1} + \frac{\alpha_2}{L_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{L_n} = 0 \tag{1}$$

définit une fonction algébrique $x$ des $p-1$ variables indépendantes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$. Si l'on donne une seconde fonction $z$ des mêmes variables indépendantes et si le nombre $n$ des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ est supérieur ou égal au nombre total $p$ des variables qui figurent dans l'équation (1), on pourra toujours, d'une ou de plusieurs manières différentes, déterminer ces coefficients, de telle sorte qu'à un système de valeurs attribués aux variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$ répondent, pour $x$ et $z$, deux valeurs égales, et que chaque dérivée partielle de la fonction $x$ ait la même valeur que la dérivée partielle de $z$ par rapport à la même variable. Car, si l'on appelle $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots, \varpi_{p-1}$ les dérivées partielles de $z$ par rapport aux variables ayant le même indice, il suffira qu'on ait

$$\sum \frac{\alpha_i}{L_i} = 0 \tag{2}$$

et en même temps

$$\left\{\begin{array}{l} \sum \dfrac{\alpha_i(a_i\varpi_1 + a_{i1})}{L_i^2} = 0, \\ \sum \dfrac{\alpha_i(a_i\varpi_2 + a_{i2})}{L_i^2} = 0, \\ \sum \dfrac{\alpha_i(a_i\varpi_3 + a_{i3})}{L_i^2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{3}$$

pourvu que, dans ces équations, la lettre $x$ désigne la valeur commune aux deux fonctions $x$ et $z$.

Or les équations (2) et (3) constituent un système de $p$ équations homogènes et du premier degré par rapport aux paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, et la détermination de ces paramètres est toujours possible. Nous allons maintenant chercher à déterminer la fonction $z$, de telle sorte qu'elle jouisse des propriétés ci-dessus énoncées et que, en outre, toutes ses dérivées du second ordre soient dans un rapport constant et donné avec les dérivées du même ordre de la fonction $z$, par rapport aux mêmes variables. Nous supposerons, d'ailleurs, le nombre $n$ inférieur ou égal à $\frac{p(p+1)}{2}$.

Désignons par $\rho_{hk}$ la dérivée, par rapport à $x_k$, de la dérivée de $z$ par rapport à $x_h$. Soient aussi $r_{hk}$ la dérivée de $x$ prise, successivement, par rapport aux mêmes variables, $m$ le rapport constant et donné, de telle sorte que $r_{hk} = m\rho_{hk}$. Dans les équations (3), on peut regarder les lettres $\varpi$ comme désignant les dérivées de la fonction $x$ par rapport aux diverses variables indépendantes, de telle sorte que

$$\frac{\partial \varpi_h}{\partial x_k} = r_{hk}.$$

On en conclut que la fonction $x$ et ses dérivées premières doivent vérifier les équations ci-après

$$\sum \alpha_i \frac{\mathrm{L}_i a_i r_{hk} - 2(a_i \varpi_h + a_{ih})(a_i \varpi_k + a_{ik})}{\mathrm{L}_i^3} = 0,$$

où l'on suppose

$$i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

$$\left.\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right\} = 1, 2, 3, \ldots, (p-1),$$

mais où l'on ne fait varier la combinaison des deux lettres $h$, $k$ que d'une équation à l'autre. Par conséquent, la fonction $z$ doit vérifier : 1° l'équation (2), où l'on aura remplacé $x$ par $z$; 2° les équations (3); 3° les équations représentées par la formule suivante

$$(4) \qquad \sum \alpha_i \frac{m a_i \mathrm{L}_i \rho_{hk} - 2(a_i \varpi_k + a_{ik})(a_i \varpi_h + a_{ih})}{\mathrm{L}_i^3} = 0,$$

pourvu qu'on remplace également $x$ par $z$ dans les équations (3) et (4). Mais le nombre des équations (4) est égal au nombre des combinaisons complètes de $p-1$ lettres deux à deux, savoir : $\frac{(p-1)p}{2}$. Donc la fonction $z$ et ses dérivées du premier et du second ordre doivent vérifier, en tout, $p + \frac{(p-1)p}{2}$ ou bien $\frac{p(p+1)}{2}$ équations, homogènes et du premier degré par rapport aux $n$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. De l'élimination de ces $n$ paramètres résulteront $\frac{p(p+1)}{2} - n + 1$ équations, que l'on pourra obtenir comme il suit : dans les équations (2) et (4), remplaçons $a_i \varpi_h + a_{ih}$ par $\frac{\partial \mathrm{L}_i}{\partial x_h}$ et $a_i \rho_{hk}$ par $\frac{\partial^2 \mathrm{L}_i}{\partial x_h \, \partial x_k}$, puis groupons $n$ quelconques des équations ainsi obtenues : le déterminant de ces $n$ équations devra être nul. Mais ce déterminant est l'un quelconque de ceux qu'on peut former avec $n$ lignes horizontales du Tableau ci-après :

$$
\left|
\begin{array}{cccc}
\dfrac{1}{L_1} & \dfrac{1}{L_2} & \cdots & \dfrac{1}{L_n} \\[2ex]
\dfrac{\dfrac{\partial L_1}{\partial x_1}}{L_1^2} & \dfrac{\dfrac{\partial L_2}{\partial x_1}}{L_2^2} & \cdots & \dfrac{\dfrac{\partial L_n}{\partial x_1}}{L_n^2} \\[3ex]
\dfrac{\dfrac{\partial L_1}{\partial x_2}}{L_1^2} & \dfrac{\dfrac{\partial L_2}{\partial x_2}}{L_2^2} & \cdots & \dfrac{\dfrac{\partial L_n}{\partial x_2}}{L_n^2} \\[3ex]
\cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots & \cdots\cdot \\[1ex]
\dfrac{\dfrac{\partial L_1}{\partial x_{p-1}}}{L_1^2} & \dfrac{\dfrac{\partial L_2}{\partial x_{p-1}}}{L_2^2} & \cdots & \dfrac{\dfrac{\partial L_n}{\partial x_{p-1}}}{L_n^2} \\[3ex]
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\[1ex]
\dfrac{m L_1 \dfrac{\partial^2 L_1}{\partial x_1^2} - 2\left(\dfrac{\partial L_1}{\partial x_1}\right)^2}{L_1^3} & \dfrac{m L_2 \dfrac{\partial^2 L_2}{\partial x_1^2} - 2\left(\dfrac{\partial L_2}{\partial x_1}\right)^2}{L_2^3} & \cdots & \dfrac{m L_n \dfrac{\partial^2 L_n}{\partial x_1^2} - 2\left(\dfrac{\partial L_n}{\partial x_1}\right)^2}{L_n^3} \\[3ex]
\dfrac{m L_1 \dfrac{\partial^2 L_1}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\dfrac{\partial L_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial L_1}{\partial x_2}}{L_1^3} & \dfrac{m L_2 \dfrac{\partial^2 L_2}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\dfrac{\partial L_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial L_2}{\partial x_2}}{L_2^3} & \cdots & \dfrac{m L_n \dfrac{\partial^2 L_n}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\dfrac{\partial L_n}{\partial x_1}\dfrac{\partial L_n}{\partial x_2}}{L_n^3} \\[3ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\[1ex]
\dfrac{m L_1 \dfrac{\partial^2 L_1}{\partial x_h \partial x_k} - 2\dfrac{\partial L_1}{\partial x_h}\dfrac{\partial L_1}{\partial x_k}}{L_1^3} & \dfrac{m L_2 \dfrac{\partial^2 L_2}{\partial x_h \partial x_k} - 2\dfrac{\partial L_2}{\partial x_h}\dfrac{\partial L_2}{\partial x_k}}{L_2^3} & \cdots & \dfrac{m L_n \dfrac{\partial^2 L_n}{\partial x_h \partial x_k} - 2\dfrac{\partial L_n}{\partial x_h}\dfrac{\partial L_n}{\partial x_k}}{L_n^3} \\[3ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\right|
$$

Nous allons voir que toutes ces équations admettent une intégrale commune, dépendant de $n-1$ constantes arbitraires. En effet, multiplions tous les éléments de la première colonne verticale d'un tel déterminant par $L_1^{\mu+1}$, de la deuxième par $L_2^{\mu+1}$, et ainsi de suite, puis observons : 1° que la première ligne horizontale du Tableau (A) ainsi modifié renferme les fonctions $L_1^{\mu}, L_2^{\mu}, L_3^{\mu}, \ldots, L_n^{\mu}$; 2° que les $p-1$ lignes suivantes renferment, dans le même ordre, les dérivées partielles, du premier ordre, des mêmes fonctions, les dérivées d'une même ligne étant prises par rapport à la même variable (nous faisons abstraction du facteur $\mu$, qui est le même pour tous les éléments d'une même ligne); 3° que chacune des lignes suivantes renfermera (à un facteur près, identique pour tous les éléments d'une même ligne) les dérivées secondes des mêmes fonctions, par rapport aux mêmes variables, si nous choisissons $\mu$, de telle sorte qu'on ait

$$\frac{m}{1} = -\frac{2}{\mu - 1}$$

ou

$$\mu = \frac{m-2}{m}.$$

Supposons donc $m$ différent de 2 et, par conséquent, $\mu$ différent de zéro; chaque ligne d'un des déterminants considérés renfermera, soit les fonctions $L_1^\mu, L_2^\mu, L_3^\mu, \ldots, L_n^\mu$, soit leurs dérivées premières par rapport à la même variable, soit leurs dérivées secondes par rapport aux deux mêmes variables. Mais, si l'on désigne par $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ $n$ constantes arbitraires, on pourra substituer à l'une quelconque des colonnes de ce déterminant une colonne formée avec la fonction

$$A_1 L_1^\mu + A_2 L_2^\mu + A_3 L_3^\mu + \ldots + A_n L_n^\mu$$

soumise aux dérivations précitées. Donc, pour que le déterminant considéré soit nul, il suffira que l'on ait

$$A_1 L_1^\mu + A_2 L_2^\mu + \ldots + A_n L_n^\mu = 0. \tag{5}$$

Telle est l'intégrale dont nous voulions établir l'existence, et telle est aussi l'équation qui définit la fonction cherchée.

2. Avant d'examiner le cas où $m = 2$, cherchons ce que devient l'une des équations tirées du Tableau (A), et aussi ce que devient son intégrale, quand, par suite d'une hypothèse faite sur les coefficients des fonctions L, deux ou plusieurs d'entre elles deviennent identiques. A cet effet, supposons que les coefficients de $L_2$, par exemple, s'expriment en fonction d'un paramètre $t$, de telle sorte qu'ils deviennent respectivement égaux à ceux de $L_1$, pour une valeur déterminée $t_0$ de ce paramètre, et soient

$$\left(\frac{da_2}{dt}\right)_{t_0} = \alpha, \quad \left(\frac{da_{21}}{dt}\right)_{t_0} = \alpha_1, \quad \left(\frac{da_{22}}{dt}\right)_{t_0} = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \left(\frac{da_{2,p-1}}{dt}\right)_{t_0} = \alpha_{p-1}.$$

Soient aussi

$$\alpha x + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{p-1} x_{p-1} = M = \left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_0 \qquad \text{et} \qquad L_2 = L_1 + \Delta L_1.$$

Alors, quand on aura multiplié par $L_1^{\mu+1}, L_2^{\mu+1}, \ldots, L_n^{\mu+1}$ les éléments de la première, de la deuxième, ..., de la $n^{\text{ième}}$ colonne verticale d'un déterminant tiré du tableau (A), la seconde colonne de ce déterminant ne contiendra que des éléments d'une des trois formes suivantes:

1° $$(L_1 + \Delta L_1)^\mu = L_1^\mu + \Delta(L_1^\mu) = L_1^\mu + \left(\frac{dL_1^\mu}{dt} + \varepsilon\right)\Delta t = L_1^\mu + (\mu L_1^{\mu-1}M + \varepsilon)\Delta t,$$

2° $$\frac{\partial(L_1 + \Delta L_1)^\mu}{\partial x_h} = \frac{\partial L_1^\mu}{\partial x_h} + \Delta\frac{\partial L_1^\mu}{\partial x_h} = \frac{\partial L_1^\mu}{\partial x_h} + \left(\frac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial x_h \partial t} + \varepsilon'\right)\Delta t$$
$$= \frac{\partial L_1^\mu}{\partial x_h} + \left[\frac{\partial\left(\dfrac{\partial L_1^\mu}{\partial t}\right)}{\partial x_h} + \varepsilon'\right]\Delta t = \frac{\partial L_1^\mu}{\partial x_h} + \left[\frac{\partial(\mu L_1^{\mu-1}M)}{\partial x_h} + \varepsilon'\right]\Delta t,$$

3° $$\frac{\partial^2(L_1 + \Delta L_1)^\mu}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial x_h \partial x_k} + \Delta\left(\frac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial x_h \partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial x_h \partial x_k} + \left(\frac{\partial^3 L_1^\mu}{\partial x_h \partial x_k \partial t} + \varepsilon''\right)\Delta t,$$
$$= \frac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial x_h \partial x_k} + \left[\frac{\partial^2\left(\dfrac{\partial L_1^\mu}{\partial t}\right)}{\partial x_h \partial x_k} + \varepsilon''\right]\Delta t = \frac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial x_h \partial x_k} + \left[\frac{\partial^2(L_1^{\mu-1}M)}{\partial x_h \partial x_k} + \varepsilon''\right]\Delta t,$$

$\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ tendant vers zéro avec $\Delta t$.

Si donc on retranche des éléments de la deuxième colonne les éléments de la première, et qu'on divise tous les éléments de la colonne restante par $\Delta t$, on constate que cette colonne se compose d'éléments qui, lorsque $\Delta t$ tend vers zéro, tendent eux-mêmes vers l'expression $\mu L^{\mu-1}M$ et ses dérivées, du premier et du deuxième ordre, par rapport aux variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$. Donc on trouvera, par les considérations précédentes, l'intégrale

$$A_1 L_1^\mu + A_2 L_1^{\mu-1}M + A_3 L_3^\mu + \ldots + A_n L_n^\mu = 0,$$

Si plusieurs fonctions, autres que $L_2$, tendent vers $L_1$ et que leurs dérivées par rapport à $t$ soient, pour $t = t_0$, différentes de M, la recherche de l'intégrale ne présente pas de difficulté : on est conduit à remplacer, dans l'équation (5), un ou plusieurs termes par des expressions de la forme

$$A_i L_i^{\mu-1} M_i,$$

$M_i$ désignant un polynôme linéaire par rapport à $x, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. Mais, si $L_2$ et $L_3$, par exemple, tendent à devenir identiques à $L_1$, et que leurs dérivées premières par rapport à $t$ soient identiques, pour $t = t_0$, après avoir écrit chaque élément de la deuxième colonne sous l'une des formes précédentes, on écrira ceux de la troisième colonne comme il suit :

$$1^\circ \qquad (L_1 + \Delta L_1)^\mu = L_1^\mu + \Delta(L_1^\mu) = L_1^\mu + \frac{\partial L_1^\mu}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial t^2} + \varepsilon_1\right)\Delta t^2,$$

$$2^\circ \quad \frac{\partial (L_1 + \Delta L_1)^\mu}{\partial x_h} = \frac{\partial L_1^\mu}{\partial x_h} + \frac{\partial\left(\dfrac{\partial L_1^\mu}{\partial x_h}\right)}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\left(\dfrac{\partial L_1^\mu}{\partial x_h}\right)}{\partial t^2} + \varepsilon'_1\right]\Delta t^2,$$

$$3^\circ \quad \frac{\partial^2 (L_1 + \Delta L_1)^\mu}{\partial x_h \partial x_k} = \frac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial x_h \partial x_k} + \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial x_h \partial x_k}\right)}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\left(\dfrac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial x_h \partial x_k}\right)}{\partial t^2} + \varepsilon''_1\right]\Delta t^2.$$

Si maintenant on retranche des éléments de la deuxième colonne ceux de la première, puis des éléments de la troisième ceux de la première et ceux de la deuxième, et qu'on divise tous les éléments de la troisième colonne ainsi modifiée par $\frac{1}{2}\Delta t^2$ ; si l'on observe, en outre, que $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ sont infiniment petits par rapport à $\Delta t$ et que $\varepsilon_1$, $\varepsilon'_1$, $\varepsilon''_1$ sont infiniment petits avec $\Delta t$, on verra que les éléments de la troisième colonne prennent, pour $\Delta t = 0$, l'une des trois formes suivantes :

$$1^\circ \qquad \frac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial t^2},$$

$$2^\circ \qquad \frac{\partial^2\left(\dfrac{\partial L_1^\mu}{\partial x_h}\right)}{\partial t^2},$$

$$3^\circ \qquad \frac{\partial^2\left(\dfrac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial x_h \partial x_k}\right)}{\partial t^2},$$

et si l'on suppose

$$\left(\frac{\partial^2 L_1}{\partial t^2}\right)_{t_0} = \beta x + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_{p-1} x_{p-1} = N,$$

ces trois expressions deviendront, au facteur $\mu$ près,

$$1^\circ \qquad L_1^{\mu-2}[(\mu - 1)M^2 + L_1 N] = \varphi(x, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}),$$

$$2^\circ \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_h},$$

$$3^\circ \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_h \partial x_k}.$$

Donc enfin, par les mêmes considérations que précédemment, on verra que l'intégrale devient

$$A_1 L_1^\mu + A_2 L_1^{\mu-1} M + A_3 L_1^{\mu-2}[(\mu - 1)M^2 + L_1 N] + A_4 M_4^\mu + \ldots + A_n L_n^\mu = 0.$$

Ces exemples suffisent pour montrer la marche à suivre lorsque plusieurs des polynômes $L_1$, $L_2$, $L_3$, ... deviennent identiques à l'un d'eux, et que les dérivées successives de quelques-uns d'entre eux, par rapport à $t$, jusqu'à celle de l'ordre $i-1$, sont identiques pour $t = t_0$. Si, par exemple, ces polynômes sont $L_1$, $L_2$, $L_3$, ..., $L_{i+1}$, les $i+1$ premiers termes de l'équation (5) devront être remplacés par

$$A_1 L_1^\mu + A_2 \left(\frac{\partial L_1^\mu}{\partial t}\right)_{t_0} + A_3 \left(\frac{\partial^2 L_1^\mu}{\partial t^2}\right)_{t_0} + A_4 \left(\frac{\partial^3 L_1^\mu}{\partial t^3}\right)_{t_0} + \ldots + A_i \left(\frac{\partial^i L_1^\mu}{\partial t^i}\right)_{t_0},$$

et l'équation (5) ainsi modifiée sera encore une intégrale commune aux $\frac{p(p+1)}{2} - n + 1$ équations du problème.

3. Arrivons maintenant au cas où $m = 2$. Si, dans un déterminant de $n$ colonnes, tiré du Tableau (A), nous multiplions tous les éléments de la première colonne par $L_1$, de la deuxième par $L_2$, de la troisième par $L_3$, et ainsi de suite, nous aurons formé un déterminant dont tous les éléments de la première ligne seront égaux à 1, si toutefois le déterminant considéré contenait la première ligne du Tableau. Les éléments de toutes les autres lignes appartiendront à l'une des formes ci-après :

1° $$\frac{\partial(\log L_i)}{\partial x_h},$$

2° $$\frac{\partial^2(\log L_i)}{\partial x_h \partial x_k},$$

$h$ et $k$ étant les mêmes pour une même ligne. Si donc nous choisissons $n$ constantes, $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_n$ ayant entre elles la relation

(6) $$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = 0,$$

nous pourrons substituer à l'une des colonnes de ce déterminant une colonne dont tous les éléments seront identiquement nuls, si nous assujettissons la fonction $x$ à remplir la condition

$$A_1 \log L_1 + A_2 \log L_2 + A_3 \log L_3 + \ldots + A_n \log L_n = 1.$$

Cette condition renfermera $n - 1$ constantes arbitraires, et l'on pourra l'écrire comme il suit :

$$L_1^{A_1} L_2^{A_2} L_3^{A_3} \ldots L_n^{A_n} = e.$$

Si maintenant on suppose que deux des polynômes proposés deviennent identiques, sans que leurs dérivées deviennent identiques pour $t = t_0$, il faudra, dans l'équation (7), remplacer le terme qui se rapporte à l'un d'eux, $L_k$ par exemple, par la fonction $A_k\left(\frac{\partial \log L_k}{\partial t}\right)_{t_0}$. Cette fonction est de la forme $A_k \frac{M}{L_k}$, M désignant une fonction linéaire des variables $x$. Si $i+1$ polynômes, savoir $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_{i+1}$ deviennent identiques, et que leurs dérivées successives par rapport à $t$ jusqu'à celles d'ordre $i$ inclusivement deviennent identiques pour $t = t_0$, on remplacera les termes correspondants par

$$A_1 \log L_1 + A_2 \left[\frac{\partial(\log L_1)}{\partial t}\right]_{t_0} + A_3 \left[\frac{\partial^2(\log L_2)}{\partial t^2}\right]_{t_0} + \ldots + A_{i+1} \left[\frac{\partial^i(\log L_{i+1})}{\partial t^i}\right]_{t_0},$$

et l'on aura encore une intégrale commune aux $\frac{p(p+1)}{2} - n + 1$ équations du problème.

4. Dans les développements qui précèdent, nous ne pouvons pas supposer que les coefficients $\alpha_i$ de l'équation (1) restent finis quand deux ou plusieurs polynômes L deviennent identiques, car cette hypothèse reviendrait à supprimer un ou plusieurs termes de l'équation (1), et, par conséquent, autant de termes de l'équation (5) ou de l'équation (7). Mais on peut supposer que certains coefficients dépendent de $t$, de telle sorte que l'équation (1) présente des dégénérescences analogues à celles des équations (5) et (7). En effet, supposons que les deux polynômes $L_1$ et $L_2$ deviennent identiques dans les conditions indiquées ci-dessus. Posons

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_2} = \beta_i,$$

et écrivons l'équation (1) comme il suit :

$$\frac{\beta_1}{L_1}+\frac{1}{L_1+\Delta L_1}+\frac{\beta_3}{L_3}+\frac{\beta_4}{L_4}+\ldots+\frac{\beta_n}{L_n}=0$$

ou bien encore

$$\frac{\beta_1+1}{L_1}+\Delta\left(\frac{1}{L_1}\right)+\frac{\beta_3}{L_3}+\ldots+\frac{\beta_n}{L_n}=0$$

ou enfin

$$\frac{\beta_1+1}{L_1}+\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial t}+\varepsilon\right]\Delta t+\frac{\beta_3}{L_3}+\ldots+\frac{\beta_n}{L_n}=0,$$

$\varepsilon$ tendant vers zéro avec $\Delta t$.

Supposons que les coefficients

$$\beta_1+1,\quad \beta_3,\quad \beta_4,\quad \ldots,\quad \beta_n$$

soient infiniment petits avec $\Delta t$ et posons

$$\lim\frac{\beta_1+1}{\Delta t}=\gamma_1,\qquad \lim\frac{\beta_3}{\Delta t}=\gamma_3,\qquad \ldots,\qquad \lim\frac{\beta_n}{\Delta t}=\gamma_n;$$

quand $\Delta t$ tendra vers zéro, l'équation précédente se transformera comme il suit

$$\frac{\gamma_1}{L_1}-\frac{1}{L_1^2}\left(\frac{\partial L_1}{\partial t}\right)_{t_0}+\frac{\gamma_3}{L_3}+\ldots+\frac{\gamma_n}{L_n}=0,$$

et nous pourrons écrire cette dernière équation sous la forme

$$\frac{\delta_1}{L_1}+\delta_2\frac{\left(\frac{\partial L_1}{\partial t}\right)_{t_0}}{L_1^2}+\frac{\delta_3}{L_3}+\ldots+\frac{\delta_n}{L_n}=0,$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ désignant des constantes.

Supposons encore que $L_3$ devienne identique à $L_1$ et que sa dérivée par rapport à $t$ devienne identique à celle du polynôme $L_1$ pour $t=t_0$. Posons $\frac{\delta_i}{\delta_3}=\varepsilon_i$ et écrivons l'équation précédente sous la forme

$$(8)\qquad \frac{\varepsilon_1+1}{L_1}+(\varepsilon_2+\Delta t)\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial t^2}+\varepsilon'\right]\Delta t^2+\frac{\varepsilon_4}{L_4}+\ldots+\frac{\varepsilon_n}{L_n}=0.$$

Supposons $\varepsilon_1+1, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \ldots, \varepsilon_n$ infiniment petits du même ordre que $\Delta t^2$. Supposons aussi $\varepsilon_2 = -\Delta t + u\Delta t^2$, $u$ tendant vers une limite finie $u_0$ quand $\Delta t$ tend vers zéro, et posons

$$\begin{aligned}
\lim \frac{\varepsilon_1 + 1}{\Delta t^2} &= \zeta_1,\\
\lim \frac{\varepsilon_4}{\Delta t^2} &= \zeta_4,\\
\ldots&\ldots\ldots,\\
\lim \frac{\varepsilon_n}{\Delta t^2} &= \zeta_n;
\end{aligned}$$

l'équation (8) deviendra, pour $\Delta t = 0$,

$$\frac{\zeta_1}{L_1} + u_0 \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial t}\right]_{t_0} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial t^2}\right]_{t_0} + \frac{\zeta_4}{L_4} + \frac{\zeta_5}{L_5} + \ldots + \frac{\zeta_n}{L_n} = 0,$$

et nous pourrons écrire cette dernière équation sous la forme

$$\frac{\eta_1}{L_1} + \eta_2 \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial t}\right]_{t_0} + \eta_3 \left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial t^2}\right]_{t_0} + \frac{\eta_4}{L_4} + \frac{\eta_5}{L_5} + \ldots + \frac{\eta_n}{L_n} = 0,$$

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ désignant des constantes.

En continuant de la sorte, on voit qu'il est possible de faire correspondre au cas où plusieurs polynômes $L_1, L_2, \ldots, L_{i+1}$ deviennent identiques, le cas où l'équation (1) serait remplacée, dans le problème précédent, par

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1}{L_1} + \alpha_2 \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial t}\right]_{t_0} + \alpha_3 \left[\frac{\partial^2\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial t^2}\right]_{t_0} + \ldots&\\
+ \alpha_{i+1} \left[\frac{\partial^i\left(\frac{1}{L_1}\right)}{\partial t^i}\right]_{t_0} + \frac{\alpha_{i+2}}{L_{i+2}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{L_n} &= 0.
\end{aligned}$$

On peut appliquer des considérations analogues à l'équation

$$\alpha_1 L_1^\gamma + \alpha_2 L_2^\gamma + \alpha_3 L_3^\gamma + \ldots + \alpha_n L_n^\gamma = 0,$$

mais nous ne croyons pas utile de les développer plus longuement.

5. Si l'on veut maintenant appliquer les considérations précédentes

à la géométrie à trois dimensions, on fera $p=3$, $n \leqq 6$; mais on supposera aussi $n \geqq p$. Alors les équations (1) et (5) représenteront des surfaces ayant en commun les propriétés suivantes : en vertu de l'équation (2), elles auront un point commun; en vertu des équations (3), elles seront tangentes en ce point; enfin les équations (4) expriment les conditions pour qu'en ce point elles aient les mêmes directions asymptotiques, et que les rayons de courbure des deux sections faites dans ces deux surfaces par un même plan normal soient entre eux dans un rapport constant $m$. En effet, les conditions

$$\frac{r_{11}}{\rho_{11}} = \frac{r_{12}}{\rho_{12}} = \frac{r_{22}}{\rho_{22}}$$

montrent que les équations qui définissent les cosinus directeurs des tangentes aux lignes asymptotiques des deux surfaces, sont les mêmes. En outre, si l'on appelle $\alpha$ et $\beta$ les angles que fait, avec $Ox$ et $Oy$, une tangente commune aux deux surfaces, au point considéré, on voit que le rapport du rayon de courbure de la section faite dans la surface (5) par un plan normal passant par cette tangente, au rayon de courbure de la section faite dans la surface (1) par le même plan, est égal à

$$\frac{r_{11}\cos^2\alpha + 2r_{12}\cos\alpha\cos\beta + r_{22}\cos^2\beta}{\rho_{11}\cos^2\alpha + 2\rho_{12}\cos\alpha\cos\beta + \rho_{22}\cos^2\beta},$$

c'est-à-dire égal à $m$.

Ce résultat peut s'énoncer de la manière suivante :

*Étant donnée une surface représentée par l'équation*

$$\sum_{i=1}^{i=k} A_i L_i^{\mu} = 0, \tag{9}$$

*où les lettres* $A_1$, $A_2$, ... *désignent des constantes, les lettres* L *des polynômes linéaires par rapport à* $x$, $y$, $z$, *la lettre* $k$ *l'un des nombres* 3, 4, 5, 6, *par chaque point pris sur cette surface on peut faire passer une surface représentée par une équation de la forme*

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\alpha_i}{L_i} = 0, \tag{10}$$

*tangente à la première au point considéré, ayant, en ce point, les mêmes directions asymptotiques, et dont chaque section normale a un rayon de courbure dont le rapport au rayon de courbure de la section faite dans la surface par le même plan est égal à* $\frac{1-\mu}{2}$, *quel que soit le point de contact.*

Si l'on appelle $k^{\text{ième}}$ terme dégénérescent de $A_i L_i^\nu$ l'expression $A_{k+i}\left(\frac{\partial^k L_i^\nu}{\partial t^k}\right)_{t_0}$, calculée en supposant que les coefficients du polynôme $L_i$ sont des fonctions données de $t$, le théorème subsiste quand on remplace quelques-uns des termes de l'équation (9) par des termes dégénérescents de l'un d'eux, pourvu qu'on remplace aussi dans l'équation (10) les termes correspondants par les termes dégénérescents, de même rang, de $A_i L_i^{-1}$.

L'équation (7) conduit à une interprétation analogue, et l'on en déduit un théorème qui diffère du précédent, uniquement en ce que l'équation (9) y est remplacée par (7), et le rapport $\frac{1-\mu}{2}$ des rayons de courbure, par $\frac{1}{2}$. La même interprétation subsiste à l'égard des formes dégénérescentes de l'équation (7).

Si, dans l'équation (9), on suppose que le nombre de termes se réduit à quatre, on obtient les surfaces tétraédrales de la Gournerie; s'il se réduit à trois, on obtient le cône triangulaire symétrique, étudié par le même auteur.

6. Si l'on coupe les deux surfaces représentées par les équations (9) et (10) par un plan passant par leur point de contact, plan qu'on peut prendre pour plan des $x_1 x_2$ (ou des $xy$), on obtient, sur cette surface plane, deux courbes représentées par les mêmes équations, où la lettre L désigne des polynômes linéaires par rapport aux coordonnées $x$, $y$. Ces deux courbes ont, au point de contact, des rayons de courbure dont le rapport est $\frac{1-\mu}{2}$; car ils sont respectivement égaux aux projections, sur le plan sécant, des rayons de courbure des sections faites, dans les deux surfaces, par un même plan contenant leur normale commune, et la tangente commune aux deux sections. Cette remarque nous donne la solution du problème que nous nous étions posé au début. En effet, si l'on suppose que le nombre de termes se réduit

à trois, les deux équations se réduisent à

$$A_1 L_1^\mu + A_2 L_2^\mu + A_3 L_3^\mu = 0 \tag{11}$$

et

$$\frac{\alpha_1}{L_1} + \frac{\alpha_2}{L_2} + \frac{\alpha_3}{L_3} = 0.$$

De là le théorème suivant :

*Par chaque point d'une courbe plane triangulaire passe une conique circonscrite au triangle de symétrie, et tangente à la courbe : son rayon de courbure est au rayon de courbure de la courbe dans un rapport égal à* $\frac{1-\mu}{2}$, *$\mu$ désignant l'exposant de la courbe triangulaire.*

D'ailleurs il est bien clair que, si l'on cherche toutes les courbes qui jouissent de cette propriété par rapport à un triangle donné, l'équation (11) fournit la solution générale du problème, car l'équation différentielle qui définit ces courbes est du second ordre et l'équation (11) renferme deux paramètres arbitraires.

Si l'on suppose que deux polynômes $L_2$, $L_3$ deviennent identiques, on obtient un théorème analogue, relativement aux courbes définies par l'équation

$$A_1 L_1^\mu + A_2 L_2^\mu + A_3 L_2^{\mu-1} M = 0$$

et aux coniques dont l'équation générale est

$$\frac{\alpha_1}{L_1} + \frac{\alpha_2}{L_2} + \frac{\alpha_3 M}{L_2^2} = 0$$

ou bien

$$\alpha_1 L_2^2 + \alpha_2 L_1 L_2 + \alpha_3 M L_1 = 0,$$

$M$ désignant une nouvelle fonction linéaire de $x$ et de $y$. Ce sont les coniques tangentes à la droite fixe $L_1 = 0$, au point où celle-ci rencontre nne autre droite fixe $L_2 = 0$; elles passent en outre par le point fixe $L_2 = 0$, $M = 0$.

7. On pourrait traiter de la même manière le cas où les trois polynômes $L_1$, $L_2$, $L_3$ deviennent identiques : mais l'interprétation des résultats obtenus sera facilitée par les considérations suivantes. Dans le

cas actuel, nous devons supposer que toutes les coniques du réseau considéré passent par un point fixe, et qu'elles ont, en ce point, la même tangente et le même rayon de courbure R. Si nous prenons ce point pour origine, et cette tangente pour axe des $x$, l'équation générale de ces coniques sera

$$x^2 - 2Ry + \alpha xy + \beta y^2 = 0$$

ou

$$\frac{x^2 - 2Ry}{y^3} + \alpha \frac{x}{y^2} + \frac{\beta}{y} = 0.$$

Or on peut regarder cette équation comme provenant de l'équation suivante :

$$\frac{\beta}{y} + \frac{\beta_1}{y_1} + \frac{\beta_2}{y_2} = 0,$$

dans l'hypothèse où les trois polynômes $y$, $y_1$, $y_2$ deviennent identiques, avec les conditions

$$\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t_0} = \left[\frac{\partial y_1}{\partial t}\right]_{t_0} = \left[\frac{\partial y_2}{\partial t}\right]_{t_0} = x,$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right]_{t_0} = 4R.$$

Mais, si l'on applique à cette équation la méthode exposée aux n$^{os}$ 1 et 2, on trouve l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} y^\mu & \left[\dfrac{\partial y^\mu}{\partial t}\right]_{t_0} & \left[\dfrac{\partial^2 y^\mu}{\partial t^2}\right]_{t_0} \\ dy^\mu & d\left[\dfrac{\partial y^\mu}{\partial t}\right]_{t_0} & d\left[\dfrac{\partial^2 y^\mu}{\partial t^2}\right]_{t_0} \\ d^2 y^\mu & d^2\left[\dfrac{\partial y^\mu}{\partial t}\right]_{t_0} & d^2\left[\dfrac{\partial^2 y^\mu}{\partial t^2}\right]_{t_0} \end{vmatrix} = 0,$$

à laquelle correspond l'intégrale

$$A_1 y^\mu + A_2\left[\frac{\partial y^\mu}{\partial t}\right]_{t_0} + A_3\left[\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial t^2}\right]_{t_0} = 0$$

ou, après réduction,

$$A_1 y^2 + A_1 xy + A_3[(\mu - 1)x^2 + 4Ry] = 0$$

ou encore

$$a_1 y^2 + a_2 xy + x^2 - 2mRy = 0,$$

$a_1$, $a_2$ désignant des constantes arbitraires.

Cette nouvelle équation représente un réseau de coniques tangentes, à l'origine, aux coniques du réseau primitif, et dont le rayon de courbure est égal à $mR$.

De là ce théorème, dont la démonstration directe ne présente pas de difficulté, et que nous énonçons en vue de nos recherches ultérieures :

*Si deux coniques sont bitangentes, leurs rayons de courbure, aux deux points de contact, forment une proportion.*

8. L'équation (8) donne lieu à une interprétation analogue. Réduite à trois termes, elle se présente sous la forme

$$a_1 \log L_1 + a_2 \log L_2 - (a_1 + a_2) \log L_3 = 1$$

ou

$$L_1^{a_1} L_2^{a_2} L_3^{-(a_1+a_2)} = e.$$

On reconnaît là les courbes qui ont fait, partiellement du moins, l'objet du Mémoire de MM. Klein et Lie, que nous avons déjà cité, et l'on voit qu'elles jouissent de la propriété suivante :

*Si par un point d'une telle courbe on fait passer une conique qui lui soit tangente et qui soit en même temps circonscrite au triangle des coordonnées* $L_1$, $L_2$, $L_3$, *le rayon de courbure de la conique au point de contact est la moitié du rayon de courbure de la courbe.*

Ce résultat simple est susceptible d'une démonstration géométrique. On sait, en effet, par les travaux de MM. Klein et Lie, que chaque tangente à cette courbe forme un faisceau harmonique avec les trois droites qui joignent le point de contact aux trois sommets du triangle fondamental, de telle sorte que les points de contact de deux tangentes menées à cette courbe par un point de son plan sont sur une conique qui passe par ce point et par les trois sommets du triangle fondamental; soient N ce point, M et M' les points de contact de deux des tangentes issues de ce point. Si on les suppose infiniment voisines, les normales en M, M' à la courbe se coupent en un point O, tel que la distance MO a pour limite le rayon de courbure de cette courbe, et que la distance ON a la même limite. Mais ON est le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère MNM′O, et celui-ci tend vers le cercle osculateur de la conique, limite de celle qui passe par les sommets du triangle des coordonnées et par les points M, M′, O. Donc le rayon de ce cercle osculateur est la moitié du rayon de courbure de la courbe : c'est ce qu'il fallait démontrer.

Ajoutons que les courbes actuellement étudiées donnent lieu aux dégénérescences suivantes, analogues à celles que nous avons déjà trouvées :

1° $$\alpha_1 \log L_1 + \alpha_2 \log L_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\frac{M}{L_2} = 1,$$

2° $$\alpha_1 \log L_1 + \alpha_2 \frac{M}{L_1} - (\alpha_1 + \alpha_2)\frac{L_1 N - M^2}{L_1^2} = 1.$$

## DEUXIÈME SECTION.

### NOUVELLES PROPOSITIONS SUR LES COURBES TRIANGULAIRES ET TÉTRAÉDRALES.

9. Nous sommes amené à nous demander si les courbes tétraédrales jouissent, relativement à leurs rayons de courbure, d'une propriété qu'on puisse considérer comme l'extension de celle que nous avons établie à l'égard des triangulaires planes. A cet effet, considérons le faisceau des cubiques gauches représentées par les équations

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha}{L} + \dfrac{\beta}{M} + \dfrac{\gamma}{N} = 0, \\ \dfrac{\alpha_1}{L} + \dfrac{\beta_1}{M} + \dfrac{\gamma_1}{P} = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ désignent des constantes arbitraires, L, M, N, P, des fonctions linéaires des coordonnées $x, y, z$. Remarquons, incidemment, que toutes ces cubiques passent par les quatre sommets du tétraèdre dont les faces sont dans les plans représentés par les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$; et proposons-nous de chercher une courbe telle que la cubique appartenant au faisceau (12), qui passe par un quelconque de ses points et lui est tangente en ce point, ait, en ce même point, le même plan osculateur, et que son rayon de courbure soit au rayon de courbure de la courbe dans un rapport constant et donné $2k$. Nous trouverons, comme on va le voir, des courbes tétraédrales. En effet, soient $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées d'un point de la courbe cherchée. Elles doivent vérifier les équations suivantes :

$$\frac{dx}{dx'} = \frac{dy}{dy'} = \frac{dz}{dz'}, \tag{13}$$

$$\frac{d^2x}{d^2x'} = \frac{d^2y}{d^2y'} = \frac{d^2z}{d^2z'}, \tag{14}$$

$$\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dx'^2+dy'^2+dz'^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(dz'\,d^2y'-dy'\,d^2z')^2+(dx'\,d^2z'-dz'\,d^2x')^2+dy'\,d^2x'-dx'\,d^2y')^2}{(dz\,d^2y-dy\,d^2z)^2+(dx\,d^2z-dz\,d^2x)^2+(dy\,d^2x-dx\,d^2y)^2}} = 2k. \tag{15}$$

Mais, si l'on désigne par $u$ la valeur commune aux trois rapports qui figurent dans les équations (13), par $v$ la valeur commune aux trois rapports qui entrent dans les équations (14), l'équation (15) se réduit à

$$u^2 = 2kv.$$

D'ailleurs, si l'on désigne aussi par $l, m, n, p$ les valeurs que prennent les polynômes L, M, N, P, quand on y remplace $x, y, z$ par $x', y', z'$, les équations (13) et (14) seront équivalentes aux équations suivantes

$$\frac{dL}{dl} = \frac{dM}{dm} = \frac{dN}{dn} = \frac{dP}{dp} = u$$

et

$$\frac{d^2L}{d^2l} = \frac{d^2M}{d^2m} = \frac{d^2N}{d^2n} = \frac{d^2P}{d^2p} = v.$$

D'ailleurs, en chaque point de la cubique, les fonctions L, M, N et leurs différentielles vérifient les équations

$$\alpha\frac{dL}{L^2} + \beta\frac{dM}{M^2} + \gamma\frac{dN}{N^2} = 0$$

et

$$\alpha\frac{L\,d^2L - 2\,dL^2}{L^3} + \beta\frac{M\,d^2M - 2\,dM^2}{M^3} + \gamma\frac{N\,d^2N - 2\,dN^2}{N^3} = 0.$$

Par conséquent, on doit trouver, en chaque point de la courbe cherchée,

$$\frac{\alpha}{l}+\frac{\beta}{m}+\frac{\gamma}{n}=0,$$

$$\alpha\frac{dl}{l^2}+\beta\frac{dm}{m^2}+\gamma\frac{dn}{n^2}=0$$

et

$$\alpha\frac{u^2\,l\,d^2 l-2v\,dl^2}{l^3}+\beta\frac{u^2 m\,d^2 m-2v\,dm^2}{m^3}+\gamma\frac{u^2 n\,d^2 n-dn^2}{n^3}=0$$

ou

$$\alpha\frac{kl\,d^2 l-dl^2}{l^3}+\beta\frac{km\,d^2 m-dm^2}{m^3}+\gamma\frac{kn\,d^2 n-dn^2}{n^3}=0.$$

Éliminant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ entre ces équations, on trouve

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{l} & \frac{1}{m} & \frac{1}{n} \\ \frac{dl}{l^2} & \frac{dm}{m^2} & \frac{dn}{n^2} \\ \frac{kl\,d^2 l-dl^2}{l^3} & \frac{km\,d^2 m-dm^2}{m^3} & \frac{kn\,d^2 n-dn^2}{n^3} \end{vmatrix}=0,$$

qui admet l'intégrale

$$al^{\mu}+bm^{\mu}+cn^{\mu}=0,$$

où $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ désignent des constantes arbitraires, $\mu$ étant égal à $\frac{k-1}{k}$.

On démontrera de même que les coordonnées de chaque point de la courbe cherchée doivent vérifier la relation

$$a_1 l^{\mu}+b_1 m^{\mu}+c_1 p^{\mu}=0,$$

dans laquelle $\frac{a_1}{c_1}$, $\frac{b_1}{c_1}$ désignent aussi des constantes arbitraires.

10. Écrivons l'équation (16) de la manière suivante :

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} l^{\mu} & m^{\mu} & n^{\mu} \\ d(l^{\mu}) & d(m^{\mu}) & d(n^{\mu}) \\ d^2(l^{\mu}) & d^2(m^{\mu}) & d^2(n^{\mu}) \end{vmatrix}=0,$$

et supposons que les deux plans définis par les équations $l=0$, $m=0$ tendent à se confondre ; en d'autres termes, que les coefficients du polynôme $m$ soient des fonctions d'un même paramètre $t$, choisies de telle sorte que, si l'on y fait $t = t_0$, ces coefficients deviennent identiques à ceux du polynôme $l$. Les cubiques du réseau passent alors par deux points fixes, et touchent une droite fixe en un point, également fixe. Appliquons à l'équation (17) la méthode exposée au n° 2 de la première Section, en y remplaçant les dérivées partielles des polynômes $l$, $m$, $n$ par leurs différentielles, calculées en regardant deux de ces variables comme des fonctions de la troisième; nous trouverons l'intégrale

$$a\,l^{\mu} + b\,l^{\mu-1}\mathrm{U} + c\,n^{\mu} = 0, \tag{18}$$

où $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ désignent deux constantes arbitraires, U une fonction linéaire des coordonnées $x, y, z$. Donc, chacune des courbes cherchée est représentée par l'équation (18) jointe à l'équation

$$a_1 l^{\mu} + b_1 l^{\mu-1}\mathrm{U} + c_1 p^{\mu} = 0,$$

que l'on établit de la même manière.

11. Si maintenant on suppose que, les deux plans $l = 0$, $m = 0$ tendant à se confondre en un seul, les deux plans $n = 0$, $p = 0$ tendent également à se confondre, de telle sorte que toutes les cubiques du réseau passent par deux points fixes et touchent, en chacun d'eux, une droite fixe, l'application de la même méthode donnera les deux équations intégrales

$$a l^{\mu} + b l^{\mu-1}\mathrm{U} + c\,n^{\mu} = 0, \tag{19}$$

$$a_1 l^{\mu} + b_1 n^{\mu} + c_1 n^{\mu-1}\mathrm{V} = 0, \tag{20}$$

et l'on remarquera que celles-ci représentent une courbe située sur une surface du second ordre, ayant pour équation

$$a l^2 + b l\mathrm{U} + c(\mathrm{U}^2 + l\mathrm{V}) = 0.$$

Cette surface contient les deux tangentes fixes au réseau des cubiques considérées.

Mais il peut arriver aussi que les trois plans $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ se confondent et que le plan $p = 0$ ne se confonde avec aucun d'eux. Alors il faudra remplacer l'équation (19) par

$$a l^2 + b l\mathrm{U} + c(\mathrm{U}^2 + l\mathrm{V}) = 0 \tag{21}$$

qui représente une surface conique du second ordre. Les équations (19) et (21) représentent alors la courbe cherchée.

Nous consacrerons, ultérieurement, un paragraphe spécial au cas où les quatre sommets du tétraèdre fondamental se confondent dans des conditions déterminées.

12. Le procédé d'intégration dont nous avons fait usage à l'égard de l'équation (16) tombe en défaut, au cas où $k=1$. Mais alors cette équation se réduit à

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{dl}{l} & \dfrac{dm}{m} & \dfrac{dn}{n} \\ \dfrac{l\,d^2l - dl^2}{l^2} & \dfrac{m\,d^2m - dm^2}{m^2} & \dfrac{n\,d^2n - dn^2}{n^2}. \end{vmatrix} = 0,$$

et, si l'on choisit deux constantes $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, telles que $a+b+c=0$, on voit que l'équation (22) admet l'intégrale

$$a\log l + b\log m + c\log n = 0$$

ou

$$l^a m^b n^{-(a+b)} = 1.$$

En outre, si l'on suppose que les deux polynômes $l$, $m$ tendent à devenir identiques dans les conditions indiquées au numéro précédent, l'équation (22) se transforme comme il suit

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{dl}{l} & d\left(\dfrac{\partial \log l}{\partial t}\right)_{t_0} & \dfrac{dn}{n} \\ \dfrac{l\,d^2l - dl^2}{l^2} & d^2\left(\dfrac{\partial \log l}{\partial t}\right)_{t_0} & \dfrac{n\,d^2n - dn^2}{n^2} \end{vmatrix} = 0,$$

et, si l'on suppose $\left(\frac{\partial l}{\partial t}\right)_{t_0} = \mathrm{U}$, on voit que l'équation (23) admet l'intégrale

$$a(\log l - \log n) + b\frac{\mathrm{U}}{l} + c = 0,$$

$\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ désignant deux paramètres arbitraires.

Si l'on suppose également que les deux plans $n = 0$, $p = 0$ tendent à se confondre, de telle sorte que les cubiques du réseau aient un second point fixe et une tangente fixe en ce point, il faudra remplacer la seconde des équations servant à définir les courbes obtenues par

$$a_1(\log l - \log n) + b_1\frac{V}{n} + c_1 = 0, \tag{24}$$

V désignant encore une fonction linéaire des coordonnées.

Mais on peut supposer aussi que trois sommets du tétraèdre fondamental tendent à se confondre en un seul. Si les trois plans qu'on suppose confondus sont $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$, on sera conduit à remplacer l'équation (23) par

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{dl}{l} & d\left(\dfrac{\partial \log l}{\partial t}\right)_{t_0} & d\left(\dfrac{\partial^2 \log l}{\partial t^2}\right)_{t_0} \\ \dfrac{l\,d^2 l - dl^2}{l^2} & d^2\left(\dfrac{\partial \log l}{\partial t}\right)_{t_0} & d^2\left(\dfrac{\partial^2 \log l}{\partial t^2}\right)_{t_0} \end{vmatrix} = 0,$$

et cette dernière équation donnera lieu à l'intégrale suivante

$$a\left(\frac{\partial \log l}{\partial t}\right)_{t_0} + b\left(\frac{\partial^2 \log l}{\partial t^2}\right)_{t_0} + c = 0,$$

$\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ étant arbitraires. Si l'on pose

$$\left(\frac{\partial l}{\partial t}\right)_{t_0} = \mathrm{U}, \qquad \left(\frac{\partial^2 l}{\partial t^2}\right)_{t_0} = \mathrm{W},$$

cette dernière équation deviendra

$$a\frac{\mathrm{U}}{l} + b\frac{l\mathrm{W} - \mathrm{U}^2}{l^2} + c = 0$$

ou

$$al\mathrm{U} + b(l\mathrm{W} - \mathrm{U}^2) + cl^2 = 0, \tag{24 bis}$$

et l'on reconnaît que cette dernière équation représente un cône du second ordre. Quant à l'équation (24), il faudra la remplacer par l'intégrale provenant de

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{dl}{l} & d\left(\dfrac{\partial \log l}{\partial t}\right)_{t_0} & \dfrac{dp}{p} \\ \dfrac{l\,d^2 l - dl^2}{l^2} & d^2\left(\dfrac{\partial \log l}{\partial t}\right)_{t_0} & \dfrac{p\,d^2 p - dp^2}{p^2} \end{vmatrix} = 0,$$

savoir

$$a_1 \log \frac{l}{p} + b_1 \frac{\mathrm{U}}{l} + c_1 = 0. \tag{25}$$

Chacune des courbes cherchées est alors définie par deux équations, telles que (24 *bis*) et (25).

13. Revenons maintenant au cas où trois des sommets du tétraèdre fondamental sont confondus en un seul. On doit supposer qu'en ce point toutes les cubiques du réseau ont le même plan osculateur et la même tangente, de telle sorte que, si l'on prend pour axes des $x$, des $y$ et des $z$, la tangente, la normale principale et la binormale communes à toutes ces cubiques, en ce point, chacune d'elles sera sur un cône du second ordre, tangent, suivant $Ox$, au plan $xOy$, et contenant la droite qui joint l'origine O au quatrième sommet A du tétraèdre fondamental. Soient $a$, $b$, $c$ les trois coordonnées de ce point, l'équation de ce cône sera de la forme

$$ac(\mathrm{A}y^2 + \mathrm{A}'z^2 + \mathrm{B}yz) - (\mathrm{A}b^2 + \mathrm{A}'c^2 + \mathrm{B}bc)xz = 0$$

ou

$$\frac{c}{a^3}y^2 - \frac{b^2}{a^4}xz + \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}}\frac{c}{a^3}z\left(z - \frac{c}{a}x\right) + \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\frac{c}{a^3}z\left(y - \frac{b}{a}\right) = 0.$$

Supposons que le point A se rapproche du point O en décrivant une courbe, osculée, en ce point, par le plan $xOy$, et soient alors

$$\lim \frac{c}{a^3} = \alpha, \qquad \lim \frac{b}{a^2} = \beta, \qquad \frac{\mathrm{A}'}{\mathrm{A}} = u, \qquad \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = v,$$

l'équation d'un tel cône prendra la forme suivante

$$\alpha y^2 - \beta^2 xz + u\alpha z^2 + v\alpha zy = 0$$

ou

$$my^2 - xz + uz^2 + vzy = 0, \tag{26}$$

$m$ désignant la constante $\frac{\alpha}{\beta^2}$. Je dis que toute cubique gauche, tracée sur ce cône, tangente à l'origine à la droite $Ox$ et admettant le plan $xOy$ pour plan osculateur, a, en ce point, un rayon de courbure et un rayon de torsion dont le rapport est constant. En effet, soit $r$ son rayon de courbure au point O; la perspective d'une telle cubique, sur le plan $xOy$, par rapport au point où elle coupe la génératrice du cône (26) qui est située dans le plan $xOz$, sera une conique osculatrice au cercle dont les équations sont

$$z = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2ry = 0,$$

et, si l'on désigne par $h$ l'ordonnée $z$ du sommet du cône projetant, l'équation de ce cône sera

$$h(x - uz)^2 + \alpha_1 h(x - uz)y + \beta_1 hy^2 - 2r(h - z)y = 0. \tag{27}$$

Posons

$$z = \theta y,$$

l'équation (26) devient

$$x = \frac{(m + v\theta + u\theta^2)y}{\theta};$$

d'où

$$x - uz = \frac{(m + v\theta)y}{\theta}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (27), il vient

$$y = \frac{2r\theta^2}{m^2 + (2r + \alpha_1)m\theta + (v^2 + \alpha_1 v + \beta_1 h)\theta^2 + \frac{2r}{h}\theta^3}$$

ou

$$y = \frac{2r\theta^2}{m^2 + A\theta + B\theta^2 + C\theta^3},$$

A, B, C désignant des constantes.

On en conclut

$$z = \frac{2r\theta^3}{m^2 + A\theta^2 + B\theta^2 + C\theta^3}, \qquad x = \frac{2r\theta(m + v\theta + u\theta^3)}{m^2 + A\theta + B\theta^2 + C\theta^3}.$$

On en conclut aussi que, pour $\theta = 0$,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2r}{m}, \qquad \frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{2r}{m^2}, \qquad \frac{d^3z}{d\theta^3} = \frac{12r}{m^2}.$$

Or, en vertu de nos hypothèses, l'expression du rayon de torsion se réduit à

$$\frac{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)_0 \left(\frac{d^2y}{d\theta^2}\right)_0}{\left(\frac{d^3z}{d\theta^3}\right)_0},$$

c'est-à-dire à $\frac{2}{3}\frac{r}{m}$.

Donc le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion se réduit à $\frac{3m}{2}$, ce qui démontre l'énoncé. Donc, en définitive, les équations (26) et (27), où l'on suppose que $r$, $m$ sont des constantes, définissent un réseau de cubiques, tangentes, au point O, à la droite O$x$, admettant le plan $x$O$y$ pour plan osculateur en ce point et, d'ailleurs, ayant toutes le même rayon de courbure et le même rayon de torsion en ce point. En outre, l'équation (26),

$$my^2 - xz + uz^2 + vzy = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{u}{z} + \frac{vy}{z^2} + \frac{my^2 - xz}{z^3} = 0,$$

peut être regardée comme provenant, par voie de dégénérescence (Ire Section, n° 4), de l'équation

$$\frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha_1}{z_1} + \frac{\alpha_2}{z_2} = 0$$

dans l'hypothèse où les trois polynômes $z$, $z_1$, $z_2$ deviennent identiques, avec les conditions

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial z_1}{\partial t}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial z_2}{\partial t}\right)_{t_0} = y \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_0 = \frac{2}{m}x.$$

Mais l'équation ci-dessus, traitée par la méthode dont on a déjà parlé aux nos 2 et 10, donne lieu à l'intégrale

$$A_1 z^\mu + A_2 \left(\frac{\partial z^\mu}{\partial t}\right)_{t_0} + A_3 \left(\frac{\partial^2 z^\mu}{\partial t^2}\right)_{t_0} = 0$$

ou bien

$$A_1 z^2 + A_2 zy + A_3 \left[\frac{2xz}{m} + (\mu - 1) y^2\right] = 0$$

ou encore

$$(28) \qquad my^2 - kxz + u_1 z^2 + v_1 zy = 0.$$

14. Cette équation ayant été établie indépendamment de l'équation (27), nous avons à nous demander si celle-ci donne lieu à une nouvelle intégrale, ou si toute courbe tracée sur le cône représenté par l'équation (28) remplit toutes les conditions du problème vis-à-vis des cubiques représentées par les équations (26) et (27). Je dis qu'on doit s'arrêter à cette dernière conclusion. En effet, traçons sur le cône (28) une courbe quelconque. Soit M un point de cette courbe, et soit $y - \lambda z = 0$ l'équation du plan $MOx$.

Écrivons l'équation (28) comme il suit

$$m(y - \lambda z)^2 - kxz + (u_1 - m\lambda^2) z^2 + (v_1 + 2m\lambda) zy = 0.$$

Nous voyons que le plan, tangent suivant OM, a pour équation

$$-kx + (u_1 - m\lambda^2) z + (v_1 + 2m\lambda) y = 0,$$

et, si l'on veut que le cône (26) soit tangent à celui-ci suivant la même droite OM, il faut et il suffit que

$$\frac{1}{k} = \frac{u - m\lambda^2}{u_1 - m\lambda^2} = \frac{v + 2m\lambda}{v_1 + 2m\lambda}.$$

Ces conditions permettent de déterminer $u$, $v$ en fonction de $u_1$, $v_1$ et de $\lambda$, de telle sorte que les surfaces (26) et (28) se touchent suivant la droite OM, et, par conséquent, pour qu'on puisse trouver sur le cône (26) une cubique, tangente, en M, à la courbe donnée. Soit T la trace de la tangente, en M, à cette courbe, sur le plan $xOy$. On obtiendra une cubique osculatrice à la courbe donnée au point M, en coupant le cône (26) par un second cône du second ordre, tangent, suivant MT, au plan, osculateur en M à la courbe donnée; la trace de ce cône sur le plan $xOy$ touchera, en T, la trace de ce plan osculateur, et, si on l'assujettit, en outre, à toucher au point O la droite $Ox$, de manière que son rayon de courbure en ce point soit égal à $r$, on obtiendra une des cubiques du réseau (26), (27). Je dis que le rapport du rayon de courbure, au point M, de la courbe considérée, au rayon de courbure, au même point, de la cubique considérée, est égal à $2k$. Il résulte, en effet, du théorème de Meusnier, que le rapport de ces deux rayons de courbure est égal à celui des rayons de courbure des sections faites dans les deux surfaces par leur plan normal commun au point M, ce plan contenant la droite MT. Mais, d'après le mode de détermination de la surface (28), ce rapport est égal à $2k$.

15. En résumé, les développements précédents nous ont fait connaître une nouvelle propriété des surfaces tétraédrales, des courbes gauches tétraédrales et des courbes planes triangulaires, étudiées, comme nous l'avons déjà dit, par de la Gournerie. Dans un travail de cette nature, il n'y a pas lieu de revenir sur les résultats antérieurement acquis par cet éminent géomètre, à moins que ce ne soit pour présenter sous un nouvel aspect certains points de la théorie, ou pour compléter quelques points de cette étude à peine indiqués. Aussi nous proposons-nous d'étudier les points singuliers des courbes triangulaires algébriques, en appliquant un procédé de calcul, qu'on ne trouve pas dans les Mémoires originaux, à la recherche des points singuliers situés sur les côtés du triangle de symétrie : nous y ajouterons la recherche des points doubles non situés sur les côtés du triangle, recherche qui n'a été faite que dans un cas particulier.

16. Supposons, en premier lieu, $\mu = + \frac{p}{q}$, $p$, $q$ étant des nombres entiers premiers entre eux; et observons que la courbe dont il s'agit peut être regardée comme la figure homographique d'une courbe définie par l'équation

$$x^{\frac{p}{q}} + y^{\frac{p}{q}} = 1.$$

Celle-ci coupe l'axe des $x$ en des points dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$x^p = 1.$$

(Un seul de ces points est réel, ou deux seulement sont réels, suivant que $p$ est ou n'est pas un nombre impair.) Soit $x_0$ l'une de ces racines; posons

$$x = x_0 + x',$$

l'équation de la courbe se transformera comme il suit :

$$y^{\frac{p}{q}} = 1 - (x_0 + x')^{\frac{p}{q}},$$

$$(29) \qquad y^p = \left[1 - x_0^{\frac{p}{q}}\left(1 + \frac{x'}{x_0}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^q.$$

Parmi les diverses déterminations de

$$x_0^{\frac{p}{q}}\left(1 + \frac{x'}{x_0}\right)^{\frac{p}{q}},$$

nous n'avons à considérer ici que celle qui, pour $x' = 0$, se réduit à 1, et nous pourrons désigner celle-ci par

$$\left(\left(1 + \frac{x'}{x_0}\right)\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Or, on peut toujours supposer le module de $x'$ inférieur à celui de $x_0$, et par conséquent développer cette expression comme il suit :

$$\left(\left(1 + \frac{x'}{x_0}\right)\right)^{\frac{p}{q}} = 1 + \frac{p}{q}\frac{x'}{x_0} + \frac{p(p-q)}{1.2.q^2}\frac{x'^2}{x_0^2} + \frac{p(p-q)(p-2q)}{1.2.3.q^3}\frac{x'^3}{x_0^3} + \ldots.$$

Alors l'équation (29) deviendra

$$y^p = \left(\frac{p}{q}\right)^q \left(\frac{x'}{x_0}\right)^q \left[-1 - \frac{p-q}{1.2.q}\frac{x'}{x_0} - \frac{(p-q)(p-2q)}{1.2.3.q^2}\frac{x'^2}{x_0^2} - \ldots\right]^q.$$

Or, dans le second membre, la série écrite entre parenthèses représente une fonction uniforme de $x'$. En élevant cette fonction à la puissance $q$, on trouvera une nouvelle fonction uniforme de la même variable, et l'on pourra écrire l'équation précédente comme il suit :

$$y^p = x'^q(\alpha_0 + \alpha_1 x' + \alpha_2 x'^2 + \ldots).$$

Donc, l'ordre de multiplicité d'un tel point est le plus petit des deux nombres $p$, $q$. Il n'y a, en ce point, qu'une seule tangente, parallèle à $Oy$ ou confondue avec $Ox$, suivant que $p$ est supérieur ou inférieur à $q$. Dans le premier cas, elle peut être regardée comme la réunion de $p$ tangentes et a $p$ points communs avec la courbe, confondus en ce point. Dans le second cas, elle représente aussi $p$ tangentes confondues, mais elle a, au point de contact, $q$ points communs avec la courbe. Enfin, le point analytique dont il s'agit est, par rapport à la fonction $y$, un point critique autour duquel $p$ valeurs de la fonction forment un système circulaire unique.

Si $\mu = -\frac{p}{q}$, on écrira l'équation de la triangulaire sous la forme

$$X_3^{\frac{p}{q}} X_2^{\frac{p}{q}} + X_1^{\frac{p}{q}} X_3^{\frac{p}{q}} + X_2^{\frac{p}{q}} X_1^{\frac{p}{q}} = 0.$$

$X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$ sont ici les équations des côtés du triangle de symétrie. On voit que la courbe passe par les trois sommets du triangle et n'a aucun autre point commun avec ses côtés. L'équation des tangentes, au sommet $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, se réduit à

$$X_2^{\frac{p}{q}} + X_3^{\frac{p}{q}} = 0.$$

Le nombre des tangentes est donc $p$, et comme la classe de la courbe est $p(p+q)$ [1], chacune d'elles représente $p+q$ tangentes confondues. En outre, si l'on suppose que l'équation de l'une d'elles est $X_2 = tX_3$, on voit que le coefficient $t$ remplit la condition

$$t^p + (-1)^q = 0. \tag{30}$$

Cela posé, cherchons les points d'intersection de la courbe avec une droite représentée par l'équation

$$X_2 = \theta X_3.$$

Ces points font partie du lieu géométrique ayant pour équation

$$\theta^{\frac{p}{q}} X_3^{\frac{2p}{q}} + \left(1 + \theta^{\frac{p}{q}}\right) X_1^{\frac{p}{q}} X_3^{\frac{p}{q}} = 0$$

---

[1] De la Gournerie, *Recherches sur les surfaces tétraédrales*, p. 199, formule (5).

ou

$$\theta^p X_3^p = (-1)^q \left(1 + \theta^{\frac{p}{q}}\right)^q X_1^p = 0.$$

Si $\theta$ est donné, cette équation représente $q$ groupes de $p$ droites issues du point $X_1 = 0$, $X_3 = 0$, chaque groupe répondant à l'une des déterminations de $\theta^{\frac{p}{q}}$. Donc le nombre total de ces points est $pq$.

Mais le degré de la courbe étant égal à $2pq$ [1], le point considéré compte pour $pq$ points d'intersection avec la droite.

Si, $\theta^{\frac{p}{q}}$ étant choisi, on fait varier $\theta$ d'une manière continue, de telle sorte que ce coefficient tende vers l'une des racines de l'équation (30), on voit que les $p$ droites correspondantes tendent à se confondre en une seule, $X_3 = 0$, et la tangente qui correspond à cette racine a avec la courbe $p$ points communs de plus que toute autre droite issue du même point singulier. En tout $p(q+1)$ points communs.

Considérons maintenant la courbe

$$x^{\frac{p}{q}} + y^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{p}{q}} y^{\frac{p}{q}}$$

homographique de la proposée, et résolvons son équation par rapport à $y$. Nous trouvons

$$y = (-1)^{\frac{q}{p}} \left(1 - x^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}} x$$

ou

$$y = t_0 x \left(1 - x^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{p}},$$

$t_0$ désignant une des racines de l'équation (30). Si nous observons que $\left(\left(1 - x^{\frac{p}{q}}\right)\right)^{\frac{q}{p}}$ est une fonction uniforme de $x^{\frac{p}{q}}$, nous en concluons qu'à chaque valeur de $t_0$ correspondent $q$ valeurs de $y$ formant un système circulaire. Donc l'origine est, par rapport à la fonction $y$, un point critique autour duquel on trouve $p$ systèmes circulaires de $q$ racines, ou bien *à chacune des tangentes à l'origine, réelles ou imaginaires, correspondent $q$ branches, réelles ou imaginaires, de la courbe.*

---

(1) DE LA GOURNERIE, *Recherches sur les surfaces tétraédrales*, p. 202.

C'est ainsi que l'hypocycloïde à trois rebroussements a, aux trois sommets du triangle de symétrie, trois points de rebroussement ordinaires.

17. Au sujet des points multiples des triangulaires non situées sur les côtés du triangle de symétrie, de la Gournerie s'exprime ainsi : « En comparant l'ordre d'une courbe à celui de sa corrélative, on reconnaît que toutes les triangulaires possèdent des points multiples, sauf celles qui ont pour exposant $\frac{1}{2}$, $-1$, ou bien un nombre entier et positif. » Nous allons montrer, en effet, que toute triangulaire, d'exposant $\pm\frac{p}{q}$, a $\frac{p^2(q-1)(q-2)}{2}$ points doubles, non situés sur les côtés du triangle de symétrie. Étant donnée une triangulaire d'exposant $\pm\frac{p}{q}$, écrivons son équation comme il suit

$$X_1^{\pm\frac{p}{q}} + X_2^{\pm\frac{p}{q}} + X_3^{\pm\frac{p}{q}} = 0$$

et posons

$$X_1 = X_3 u^{\pm q}, \qquad X_2 = X_3 v^{\pm q},$$

il vient

$$u^p + v^p + 1 = 0.$$

Pour qu'il y ait, en un point de la courbe, deux tangentes distinctes, il faut que ce point corresponde, séparément, à deux systèmes de valeurs $(u_0, v_0)$, $(u_1, v_1)$ de $u$ et de $v$, remplissant les conditions suivantes :

$$(31) \qquad \begin{aligned} u_0^q = u_1^q, &\qquad v_0^q = v_1^q, \\ u_0^p + v_0^p &+ 1 = 0, \\ u_1^p + v_1^p &+ 1 = 0. \end{aligned}$$

Or de ces quatre équations les deux premières donnent

$$u_1 = u_0\alpha, \qquad v_1 = v_0\beta,$$

$\alpha$, $\beta$ désignant deux racines de l'équation $z^q = 1$, différentes l'une et l'autre de $1$.

Substituant ces deux valeurs de $u_1$, $v_1$, dans la quatrième équation, puis retranchant membre à membre, l'équation obtenue et la troisième équation du système ci-dessus, on trouve

$$(32) \qquad (1-\alpha^p)u_0^p + (1-\beta^p)v_0^p = 0.$$

Dès lors, on trouvera les valeurs cherchées de $u_0$, $v_0$ en résolvant le système formé des équations (31) et (32). D'ailleurs, on vérifie sans difficulté que la courbe représentée par l'équation (31), où l'on regarde $u_0$, $v_0$ comme des coordonnées cartésiennes, n'a aucun point multiple, et que les tangentes menées de l'origine à cette courbe sont représentées par l'équation (32) où l'on a fait $\alpha = \beta$. Donc les valeurs de $u_0$, $v_0$, correspondant à $\alpha = \beta$ doivent être exclues de notre recherche. Donc le nombre des équations de la forme (32) qui doivent entrer en ligne de compte est égal au nombre d'arrangements de $q-1$ objets deux à deux. Mais chacune d'elles fournit $p^2$ systèmes de valeurs de $u_0$, $v_0$, vérifiant ensemble les équations (31) et (32). Le nombre total de ces systèmes est donc $p^2(q-1)(q-2)$. Toutefois, si l'on élimine $v_0$, par exemple, entre (31) et (32), et que l'on répète la même opération en faisant varier $\alpha$ et $\beta$ de toutes les manières possibles dans l'équation (32); si l'on fait ensuite le produit des premiers membres des équations obtenues, ce produit s'annulera quand on y remplacera l'inconnue soit par la valeur $u_0$, soit par la valeur $u_1$ correspondant à l'un des points doubles cherchés, car l'équation

$$u_1 = u_0 \alpha$$

donne

$$u_0 = u_1 \alpha',$$

$\alpha'$ désignant comme $\alpha$ une racine de l'équation $z^q = 1$. Donc le nombre des racines de l'équation résultante sera deux fois plus grand que le nombre des points doubles cherchés. Donc ce nombre sera, comme nous l'avons annoncé,

$$\frac{p^2(q-1)(q-2)}{2}.$$

18. Du résultat que nous venons d'obtenir on peut déduire, par voie de dualité, le nombre des tangentes doubles d'une courbe triangulaire. Il résulte, en effet, des recherches de de la Gournerie, que toute triangulaire d'exposant $\mu$ est corrélative d'une autre triangulaire dont l'exposant est $\frac{\mu}{\mu-1}$. Si donc la triangulaire donnée a pour exposant $+\frac{p}{q}$, la triangulaire corrélative a pour exposant $\frac{p}{p-q}$; et si $p$ est supérieur à $q$, le nombre de ses points doubles, non situés sur le

*tangente à la première au point considéré, ayant, en ce point, les mêmes directions asymptotiques, et dont chaque section normale a un rayon de courbure dont le rapport au rayon de courbure de la section faite dans la surface par le même plan est égal à* $\frac{1-\mu}{2}$, *quel que soit le point de contact.*

Si l'on appelle $k^{\text{ième}}$ terme dégénérescent de $A_i L_i^\nu$ l'expression $A_{k+i}\left(\frac{\partial^k L_i^\nu}{\partial t^k}\right)_{t_0}$, calculée en supposant que les coefficients du polynôme $L_i$ sont des fonctions données de $t$, le théorème subsiste quand on remplace quelques-uns des termes de l'équation (9) par des termes dégénérescents de l'un d'eux, pourvu qu'on remplace aussi dans l'équation (10) les termes correspondants par les termes dégénérescents, de même rang, de $A_i L_i^{-1}$.

L'équation (7) conduit à une interprétation analogue, et l'on en déduit un théorème qui diffère du précédent, uniquement en ce que l'équation (9) y est remplacée par (7), et le rapport $\frac{1-\mu}{2}$ des rayons de courbure, par $\frac{1}{2}$. La même interprétation subsiste à l'égard des formes dégénérescentes de l'équation (7).

Si, dans l'équation (9), on suppose que le nombre de termes se réduit à quatre, on obtient les surfaces tétraédrales de la Gournerie; s'il se réduit à trois, on obtient le cône triangulaire symétrique, étudié par le même auteur.

6. Si l'on coupe les deux surfaces représentées par les équations (9) et (10) par un plan passant par leur point de contact, plan qu'on peut prendre pour plan des $x_1 x_2$ (ou des $xy$), on obtient, sur cette surface plane, deux courbes représentées par les mêmes équations, où la lettre L désigne des polynômes linéaires par rapport aux coordonnées $x, y$. Ces deux courbes ont, au point de contact, des rayons de courbure dont le rapport est $\frac{1-\mu}{2}$; car ils sont respectivement égaux aux projections, sur le plan sécant, des rayons de courbure des sections faites, dans les deux surfaces, par un même plan contenant leur normale commune, et la tangente commune aux deux sections. Cette remarque nous donne la solution du problème que nous nous étions posé au début. En effet, si l'on suppose que le nombre de termes se réduit

constante égale à 1, de telle sorte que

$$X_1 = \frac{u^q}{A u^q + B v^q + C}, \qquad X_2 = \frac{v^q}{A u^q + B v^q + C}, \qquad X_3 = \frac{1}{A u^q + B v^q + C}.$$

Résolvant deux de ces équations par rapport à $x$, $y$, on trouve

$$x = \frac{A_1 u^q + B_1 v^q + C_1}{A u^q + B v^q + C}, \qquad y = \frac{A_2 u^q + B_2 v^q + C_2}{A u^q + B v^q + C},$$

puis

$$dx = \frac{q(A u^q + B v^q + C)(A_1 u^{q-1} du + B_1 v^{q-1} dv) - q(A_1 u^q + B_1 v^q + C_1)(A u^{q-1} du + B v^{q-1} dv)}{(A u^q + B v^q + C)^2},$$

et, comme

$$(34) \qquad u^p + v^p + 1 = 0,$$

on pourra remplacer $dv$ par $-\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}} du$, et, par suite, transformer l'intégrale proposée en une autre intégrale de la forme

$$\int F(u, v) \frac{du}{v^{p-1}},$$

F désignant une fonction rationnelle des variables $u$, $v$, assujetties à vérifier l'équation (34).

Sur la fonction $F(u, v)$, effectuons la transformation qui permet de la remplacer par une autre fonction rationnelle dont le dénominateur ne renferme que la variable $u$, et dont le numérateur est de degré $p - 1$. (*Voir* Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 663 et suiv.). Nous verrons même, au cours de notre calcul, et conformément à une remarque faite par les mêmes auteurs, qu'on peut la supposer de degré $p - 2$. Supposons ensuite la nouvelle fonction rationnelle décomposée en une somme de termes, dont les uns sont de la forme

$$A u^m v^n,$$

les autres

$$\frac{V}{(u - u_0)^h},$$

A, $u_0$ désignant des constantes, $h$ un nombre entier, V une fonction entière de $v$; et sous le signe $\int$, considérons, en particulier, le terme suivant :

$$A \frac{u^m}{v^{p-n-1}} du. \tag{34}$$

Si $n = p - 1$, ce terme est la différentielle de $A \frac{u^{m+1}}{m+1}$, et nous pourrons faire abstraction des termes où $v$ entre avec l'exposant $p - 1$. Dans le cas contraire, $n$ est inférieur à $p - 1$; donc $p - n - 1$ est positif et inférieur à $p - 1$; soit $p - n - 1 = r$.

Considérons aussi l'identité

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\left[u^k(1+u^p)^{\frac{p-r}{p}}\right] &= ku^{k-1}(1+u^p)^{\frac{p-r}{p}} + (p-r)\frac{u^{k+p-1}}{(1+u^p)^{\frac{r}{p}}} \\ &= \frac{ku^{k-1} + (k+p-r)\,u^{k+p-1}}{(1+u^p)^{\frac{r}{p}}},\end{aligned}$$

remplaçons-y $k + p - 1$ par $m$ et, par conséquent, $k$ par $m + 1 - p$; nous trouvons

$$\frac{d}{du}\left[u^{m+1-p}(1+u^p)^{\frac{p-r}{p}}\right] = \frac{(m+1-p)\,u^{m-p} + (m+1-r)\,u^m}{(1+u^p)^{\frac{r}{p}}},$$

puis, en intégrant,

$$u^{m+1-p}(1+u^p)^{\frac{p-r}{p}} = (m+1-p)\int\frac{u^{m-p}\,du}{(1+u^p)^{\frac{r}{p}}} + (m+1-r)\int\frac{u^m}{(1+u^p)^{\frac{r}{p}}}\,du$$

et, par suite,

$$(m+1-r)\int\frac{u^m\,du}{(1+u^p)^{\frac{r}{p}}} = u^{m+1-p}(1+u^p)^{\frac{r}{p}} - (m+1-p)\int\frac{u^{m-p}\,du}{(1+u^p)^{\frac{r}{p}}}. \tag{35}$$

Sur l'intégrale qui figure dans le second membre de cette nouvelle égalité, opérons la même réduction plusieurs fois de suite, jusqu'à ce que nous trouvions une intégrale de la forme

$$\int\frac{u^k\,du}{(1+u^p)^{\frac{r}{p}}},$$

$k$ étant plus petit que $p$; nous en conclurons que toutes les intégrales analogues à celle qui figure dans le premier membre de l'égalité (35) se ramènent à des intégrales de même forme, où $m$ est remplacé par un nombre entier qui lui est inférieur. Si toutefois $m$ est de la forme $ap - 1$, nous saurons, par là même, évaluer l'intégrale proposée en termes finis.

Si maintenant nous observons qu'une telle intégrale admet pour différentielle le terme (34) du développement considéré, on en conclut que toutes les intégrales abéliennes de première espèce, appartenant à la courbe donnée, admettent, pour partie non intégrée, une fonction linéaire d'intégrales de la forme

$$\int \frac{u^k}{(1+u^p)^{\frac{r}{p}}} du,$$

où $r$ peut recevoir les valeurs $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$, et $k$ les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, (p-2)$. En outre, une telle intégrale ne devra devenir infinie que par l'addition d'un nombre infini de périodes. Si l'on suppose, comme cela est toujours possible, que sa limite inférieure soit zéro, elle restera finie pour toutes les valeurs de $u$ égales aux racines $p^{\text{ièmes}}$ de $-1$ et ne pourra devenir infinie qu'avec la variable indépendante. Posons donc $u = \frac{1}{t}$, l'intégrale ci-dessus va se transformer en

$$-\int \frac{dt}{t^{k+2-r}(t^p+1)^{\frac{r}{p}}},$$

et, pour qu'elle reste finie lorsque $t$ devient nul, il faut que $k+1-r$ soit négatif, et que, par conséquent, on ait

$$k < r - 1.$$

Donc

| | | |
|---|---|---|
| $r = 1$ | ne donne pas de solution, | |
| $r = 2$ | donne la solution | $k = 0$, |
| $r = 3$ | donne les solutions | $k = 0,\ k = 1$, |
| $r = 4$ | » | $k = 0,\ k = 1,\ k = 2$, |
| ........ | ........ | ........, |
| $r = p - 1$ | » | $k = 0,\ k = 1,\ k = 2,\ \ldots,\ k = p - 3$. |

Le nombre total des intégrales qui restent finies sur toute la sphère est donc

$$1+2+3+\ldots+(p-2)=\frac{(p-2)(p-1)}{2}.$$

20. M. Halphen a démontré (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1833 et suiv., année 1874) que, si l'on désigne par $m$ le degré d'une courbe algébrique, par $c$ sa classe, par $\mathfrak{M}$ la somme des multiplicités de ses points singuliers, par T la somme des nombres de systèmes circulaires qui leur correspondent, par $g$ son genre, on doit toujours trouver

$$2(g-1)=c-2m+\mathfrak{M}-\mathrm{T}.$$

Vérifions la concordance des résultats précédents avec le fait général que nous venons de signaler :

1° Supposons $\mu$ positif et plus petit que 1, et soit $\mu=+\frac{p}{q}$. Alors, $m=pq$, $c=2p(q-p)$ : les $3p$ points multiples situés sur les côtés du triangle de référence sont de multiplicité $p$; les $\frac{p^2(q-1)(q-2)}{2}$ autres points singuliers sont des points doubles ordinaires, de sorte que

$$\mathfrak{M}=3p^2+p^2(q-1)(q-2).$$

A chacun des $3p$ points singuliers situés sur les côtés du triangle des coordonnées correspond un seul système circulaire : à chacun des autres points correspondent deux systèmes formés chacun d'une seule racine; donc

$$\mathrm{T}=3p+p^2(q-1)(q-2).$$

Donc, d'après la formule de M. Halphen,

$$2(g-1)=p(p-3), \qquad g=\frac{(p-1)(p-2)}{2},$$

ce qui confirme notre résultat.

2° Si $\mu=+\frac{p}{q}$ et si $p$ est $>q$, nous trouvons

$$m=pq, \qquad c=p(p-q), \qquad \mathfrak{M}=3pq+p^2(q-1)(q-2),$$
$$\mathrm{T}=3p+p^2(q-1)(q-2),$$

et nous trouvons encore

$$2(g-1)=p(p-3).$$

3° Si $\mu=-\dfrac{p}{q}$,

$$m=2pq, \qquad c=p(p+q), \qquad \mathcal{N}=3pq+p^2(q-1)(q-2),$$
$$\mathrm{T}=3p+p^2(q-1)(q-2);$$

d'où

$$2(g-1)=p(p-3).$$

Si maintenant nous voulons savoir pour combien de points doubles il faut compter chacun des points singuliers situés sur les côtés du triangle de référence, nous désignerons par $\delta$ le nombre cherché, et nous supposerons successivement

1° $$\mu=+\frac{p}{q},$$

2° $$\mu=-\frac{p}{q}.$$

En vertu d'une formule connue, qui complète celles de Plücker, nous aurons

1° $$\frac{(p-1)(p-2)}{2}=\frac{(pq-1)(pq-2)}{2}-\frac{p^2(q-1)(q-2)}{2}-3p\delta,$$
$$\delta=\frac{(p-1)(q-1)}{2};$$

2° $$\frac{(p-1)(p-2)}{2}=\frac{(2pq-1)(2pq-2)}{2}-\frac{p^2(q-1)(q-2)}{2}-3\delta,$$
$$\delta=\frac{p(pq^2+pq-2q-p+1)}{2}.$$

21. De la formule établie au n° 19, il résulte que la courbe (33) est du genre zéro, si $p=1$ ou si $p=2$; il est facile, dans ces deux cas, d'exprimer les deux coordonnées d'un point de la courbe par des fonctions rationnelles d'un même paramètre. En effet, 1° si $p=1$, l'équation (34) devient

$$u+v+1=0$$

et l'on trouve, entre $x$ et $y$, l'une des deux séries de relations

$$(a) \qquad X_1 = u^q X_2, \qquad X_2 = (-1)^q (1+u)^q X_3;$$
$$(b) \qquad X_3 = u^q X_1 = (-1)^q (1+u)^q,$$

suivant que $\mu$ est positif ou négatif.

2° Si $p = 2$, $x$ et $y$ sont des fonctions rationnelles de deux variables $u$, $v$, entre lesquelles il y a la relation

$$u^2 + v^2 + 1 = 0,$$

relation qui sera vérifiée identiquement si l'on fait

$$u = \frac{2\theta\sqrt{-1}}{1+\theta^2}, \qquad v = \frac{(1-\theta^2)\sqrt{-1}}{1+\theta^2}.$$

Donc $x$ et $y$ seront des fonctions rationnelles de $\theta$.

On voit encore que la courbe sera du genre 1, si $p = 3$. Conformément à un théorème de Clebsch (*Journal de Crelle*, t. 64, p. 210), nous chercherons à exprimer $x$ et $y$ en fonction rationnelle d'un paramètre, et de la racine carrée d'un polynôme entier, du quatrième degré par rapport à ce paramètre. Évidemment, il suffit d'exprimer ainsi les deux variables $u$, $v$, qui vérifient la relation

$$u^3 + v^3 + 1 = 0.$$

A cet effet, posons

$$u = \frac{\mu + \lambda}{-\sqrt[3]{2}(\mu+1)}, \qquad v = \frac{\mu - \lambda}{-\sqrt[3]{2}(\mu+1)}.$$

Pour que l'équation précédente soit vérifiée, il faut qu'il y ait, entre $\lambda$ et $\mu$, la relation

$$3\mu^2 + 3(1-\lambda^2)\mu + 1 = 0,$$

équivalente à

$$\mu = \frac{3(\lambda^2 - 1) \pm \sqrt{3[3(1-\lambda^2)^2 - 4]}}{6}.$$

Les variables $u$, $v$, par conséquent aussi les variables $x$, $y$, seront des fonctions rationnelles de $\lambda$ et de

$$\sqrt{[\sqrt{3} + (2-\sqrt{3})\lambda^2][\sqrt{3} - (2+\sqrt{3})\lambda^2]}.$$

Dès lors, toute intégrale abélienne appartenant à la courbe donnée se décompose en une somme d'intégrales qu'on peut exprimer, les unes par des fonctions élémentaires (algébriques, circulaires et logarithmiques), les autres à l'aide d'une des trois intégrales elliptiques simples

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{[\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})\lambda^2][\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\lambda^2]}},$$

$$\int \frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{[\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})\lambda^2][\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\lambda^2]}},$$

$$\int \frac{d\lambda}{(\lambda^2-\lambda_0^2)\sqrt{[\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})\lambda^2][\sqrt{3}-(2+\sqrt{3})\lambda^2]}}.$$

En vue du calcul numérique, on transformera ces intégrales en d'autres intégrales ayant un module réel et plus petit que 1, par la substitution

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}\sqrt{\xi^2-1},$$

$\xi$ désignant une nouvelle variable, et l'on trouvera de nouvelles intégrales ayant pour module

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \sin 75^\circ = 0,965928\ldots.$$

22. Comme nous l'avons annoncé, nous terminerons cette partie de notre travail en examinant quelques cas particuliers relatifs aux courbes du troisième et du quatrième ordre.

Soient $m = \frac{4}{3}$ et, par conséquent, $\mu = -\frac{1}{2}$. Nous obtenons alors une courbe du quatrième ordre à trois rebroussements, et nous concluons que le rayon de courbure d'une telle courbe, en chacun de ses points, est égal aux $\frac{4}{3}$ du rayon de courbure de la conique qui la touche en ce point et passe par les trois points de rebroussement.

Si les deux polynômes $L_1, L_2$ tendent à devenir identiques, l'équation du faisceau de courbes du quatrième ordre dégénère en

$$(36) \qquad A_1 L_1^{-\frac{1}{2}} + A_2 L_1^{-\frac{3}{2}} M + A_3 L_2^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

et l'équation du faisceau de coniques, en

$$(37) \qquad \frac{\alpha_1}{L_1} + \frac{\alpha_2}{L_2} + \frac{\alpha_3 M}{L_2^2} = 0.$$

On voit que l'équation (36) représente le faisceau des coniques tangentes, en un point fixe, à une droite fixe ($L_2 = 0$). Elles passent, en outre, par un point fixe $L_2 = 0$, $M = 0$.

Enfin, si les trois polynômes deviennent identiques, l'équation (37) devient

$$\frac{\alpha_1}{L_1} + \frac{\alpha_2(L_1 N - 2M^2)}{L_1^3} + \frac{\alpha_3 M}{L_1^2} = 0 \tag{38}$$

et, après réduction,

$$\alpha_1 L_1^2 + \alpha_2(L_1 N - 2M^2) + \alpha_3 M L_1 = 0. \tag{39}$$

De même, l'équation (36) devient

$$A_1 L_1^2 + A_2(L_1 N - \tfrac{3}{2}M^2) + A_1 L_1 M = 0. \tag{40}$$

Les coniques représentées par l'équation (39) ont, au point $L_1 = 0$, $M = 0$, un rayon de courbure constant, et, conformément au théorème du n° 7, les courbes représentées par l'équation (40) ont, au même point, un rayon de courbure égal aux $\frac{4}{3}$ de ce rayon constant.

23. Considérons maintenant une cubique gauche S, et soit $\Sigma$ la surface développable qui admet cette cubique pour arête de rebroussement. Toute section plane de $\Sigma$ est une courbe du quatrième ordre ayant trois points de rebroussement, situés aux trois points où son plan coupe la courbe S. La projection conique de celle-ci, faite, par rapport à l'un quelconque, P, de ses points, sur le plan de la section est une conique passant par les trois points de rebroussement de la quartique considérée, et tangente à celle-ci, au point où son plan est rencontré par la tangente en P à la cubique; son rayon de courbure, en ce point, est égal aux $\frac{3}{4}$ du rayon de courbure de la quartique; mais, si les trois points d'intersection du plan considéré avec la cubique tendent à se confondre, de manière que ce plan devienne osculateur à la cubique, la quartique dégénère en une droite double (tangente à la cubique) et une conique C, bitangente à la conique suivant laquelle la cubique est projetée. Aux deux points de contact le rapport des rayons de courbure de ces deux coniques est le même, savoir $\frac{4}{3}$. Mais la co-

nique perspective de la cubique a, au point de contact avec celle-ci, le même rayon de courbure; car elle est l'intersection du plan osculateur de la cubique, avec le cône du second ordre sur lequel elle est tracée. Donc *tout plan osculateur à une cubique gauche coupe la surface développable dont elle est l'arête de rebroussement suivant une conique dont le rayon de courbure, au point de contact, est égal aux $\frac{4}{3}$ du rayon de courbure de la cubique.*

Le théorème de MM. Bonnet et Beltrami, auquel nous avons fait allusion, consiste en ce que le rayon de courbure de la section faite dans une surface développable par un de ses plans tangents est, au point de contact de cette section avec l'arête de rebroussement, égal aux $\frac{4}{3}$ du rayon de courbure de l'arête. La proposition que nous venons de démontrer en est, on le voit, un cas particulier, et l'on peut en déduire, comme il suit, la proposition générale : considérons le plan osculateur, en un point O, à une courbe gauche S, et la cubique S' qui rencontre cette courbe en un point P la touche en un second point A, et passe par trois points $O_1$, $O_2$, $O_3$ pris sur la courbe dans le voisinage du point O. Si ces trois points tendent à se confondre avec O, la courbe S et la cubique limite auront, au point O, le même plan osculateur et le même rayon de courbure. En outre, les sections faites par ce même plan osculateur dans les deux surfaces développables, ayant pour arêtes de rebroussement les courbes S et S', auront un second point commun $p$, trace de la tangente commune en P sur le plan osculateur en O. Les sections faites par ce dernier plan dans les deux cônes, ayant pour sommet A et pour directrices S et S', passeront aussi par un même point $\pi_0$, perspective du point P par rapport au point A. Si P tend à se confondre avec O, les sections faites dans les deux développables obtenues auront, en ce même point, même rayon de courbure, et les sections faites dans les deux surfaces coniques auront aussi le même rayon de courbure, lequel est égal, d'une part, au rayon de courbure de la cubique, et d'autre part, à celui de la courbe S. Donc enfin ce rayon de courbure est égal aux $\frac{3}{4}$ du rayon de courbure de la section faite dans la surface développable considérée, par son plan tangent.

# TROISIÈME SECTION.

## DES LIGNES ASYMPTOTIQUES DES SURFACES TÉTRAÉDRALES : GÉNÉRALISATION.

---

24. Nous nous proposons maintenant de former l'équation différentielle des lignes asymptotiques des surfaces définies par l'équation (9). Dans le cas particulier des surfaces tétraédrales, cas où le nombre de ses termes est égal à quatre, on sait en effectuer l'intégration, comme l'a montré M. Darboux (*Bulletin*, tome I, notes de la page 355). Aussi, après avoir montré comment cette intégration résulte immédiatement de la forme de l'équation différentielle à laquelle nous parviendrons, nous montrerons encore comment on peut la rattacher à l'équation d'une classe de surfaces assez étendue, surfaces dont on sait déterminer les lignes asymptotiques, et dont les dégénérescences de la surface (9) sont des cas particuliers. Soient donc, suivant une notation consacrée, $p$, $q$ les dérivées partielles, par rapport à $x$, $y$, de la fonction $z$ définie par l'équation (9). De cette équation, nous déduirons

$$\Sigma\alpha_i L_i^{\mu-1}(a_i + c_i p) = 0, \qquad \Sigma\alpha_i(b_i + c_i q) = 0,$$

puis

$$\Sigma\alpha_i L_i^{\mu-1} c_i\, dp + (\mu - 1)\Sigma\alpha_i L_i^{\mu-2}(a_i + c_i p)\, dL_i = 0 \tag{41}$$

et

$$\Sigma\alpha_i L_i^{\mu-1} c_i\, dq + (\mu - 1)\Sigma\alpha_i L_i^{\mu-2}(b_i + c_i q)\, dL_i = 0. \tag{42}$$

Multipliant les deux membres de l'équation (41) par $dx$, de l'équation (42) par $dy$ et observant que, tout le long d'une même ligne asymptotique, on doit avoir

$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

on trouve

$$\Sigma\alpha_i L_i^{\mu-2}\, dL_i^2 = 0.$$

Telle est l'équation différentielle cherchée.

Si l'on écrit l'équation (9) sous la forme $\Sigma X_i^\mu = 0$, et si l'on pose $X_i^\mu = \xi_i^2$, on reconnaît que cette équation différentielle se réduit à

$$\Sigma d\xi_i^2 = 0.$$

Si, d'autre part, le nombre de ses termes est égal à quatre, l'équation (9) se réduit à

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0, \tag{43}$$

et l'équation différentielle de ses lignes asymptotiques à

$$d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + d\xi_4^2 = 0. \tag{44}$$

Or l'équation (43) est vérifiée si l'on y fait

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1 + \xi_2\sqrt{-1} = k(\xi_3 + \xi_4\sqrt{-1}) \\ \quad \text{et, en même temps,} \\ \xi_1 - \xi_2\sqrt{-1} = \dfrac{-1}{k}(\xi_3 - \xi_4\sqrt{-1}), \end{array}\right. \tag{45}$$

$k$ désignant une constante, choisie à volonté. Mais les différentielles des coordonnées d'un point, mobile sur la courbe définie par ces deux dernières équations, vérifient les équations ci-après

$$d\xi_1 - d\xi_2\sqrt{-1} = k(d\xi_3 + d\xi_4\sqrt{-1}),$$
$$d\xi_1 - d\xi_2\sqrt{-1} = \frac{-1}{k}(d\xi_3 - d\xi_4\sqrt{-1})$$

et, par suite, aussi l'équation (44). Donc les équations (45) représentent une ligne asymptotique de la surface (43). Si l'on y regarde $k$ comme une constante arbitraire, on obtient une première série de lignes asymptotiques. Les lignes de la seconde série sont représentées par l'une ou l'autre des deux équations

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_1 + \xi_2\sqrt{-1} = h(\xi_3 - \xi_4\sqrt{-1}), \\ \xi_1 - \xi_2\sqrt{-1} = \dfrac{-1}{h}(\xi_3 + \xi_4\sqrt{-1}), \end{array}\right. \tag{46}$$

où $h$ désigne une constante arbitraire.

A cause de la relation $X_i^\mu = \alpha_i L_i^\mu = \xi_i^2$, on peut écrire les équations (45) sous la forme

$$\sqrt{\alpha_1}\,L_1^{\frac{\mu}{2}}+\sqrt{-\alpha_2}\,L_2^{\frac{\mu}{2}}= \quad k\left(\sqrt{\alpha_3}\,L_3^{\frac{\mu}{2}}+\sqrt{-\alpha_4}\,L_4^{\frac{\mu}{2}}\right),$$
$$\sqrt{\alpha_1}\,L_1^{\frac{\mu}{2}}-\sqrt{-\alpha_2}\,L_2^{\frac{\mu}{2}}=\frac{-1}{k}\left(\sqrt{\alpha^3}\,L_3^{\frac{\mu}{2}}-\sqrt{-\alpha_4}\,L_4^{\frac{\mu}{2}}\right),$$

et les équations (46)

$$\sqrt{\alpha_1}\,L_1^{\frac{\mu}{2}}+\sqrt{-\alpha_2}\,L_2^{\frac{\mu}{2}}= \quad h\left(\sqrt{\alpha_3}\,L_3^{\frac{\mu}{2}}-\sqrt{-\alpha_4}\,L_4^{\frac{\mu}{2}}\right),$$
$$\sqrt{\alpha_1}\,L_1^{\frac{\mu}{2}}-\sqrt{-\alpha_2}\,L_2^{\frac{\mu}{2}}=\frac{-1}{h}\left(\sqrt{\alpha_3}\,L_3^{\frac{\mu}{2}}+\sqrt{-\alpha_4}\,L_4^{\frac{\mu}{2}}\right).$$

25. Les surfaces auxquelles nous avons fait allusion dans le numéro précédent sont représentées par l'équation

$$f_1(L, M) = f_2(N, P), \tag{47}$$

où $f_1, f_2$ désignent deux fonctions homogènes, de même degré, des polynômes L, M, N, P, linéaires par rapport à $x$, $y$, $z$. On voit immédiatement que les surfaces tétraédrales sont représentées par une équation de cette forme, et nous allons montrer comment la recherche des lignes asymptotiques des surfaces définies par une telle équation se ramène à deux quadratures. A cet effet, posons $M = tL$, $P = uN$, et soit $m$ le degré commun aux deux fonctions $f_1, f_2$. Soient aussi

$$[f_1(1, t)]^{\frac{1}{m}} = T, \qquad [f_2(1, u)]^{\frac{1}{m}} = U;$$

l'équation (47) équivaut à l'équation suivante

$$TL = UN. \tag{48}$$

Désignons par T′, T″, U′, U″ les dérivées des deux premiers ordres, de T par rapport à $t$, de U par rapport à $u$. En nous servant des notations précédemment adoptées, nous trouverons

$$T(a_1 + c_1 p) + LT' \frac{\partial t}{\partial x} = U(a_3 + c_3 p) + NU' \frac{\partial u}{\partial x}.$$

D'ailleurs,

$$a_2 + c_2 p = t(a_1 + c_1 p) + L\frac{\partial t}{\partial x}$$

et

$$a_4 + c_4 p = u(a_3 + c_3 p) + \mathrm{N}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Donc on peut remplacer l'équation précédente par

$$\begin{aligned}\mathrm{T}(a_1 + c_1 p) &+ \mathrm{T}'[a_2 + c_2 p - t(b_1 + c_1 p)]\\ &= \mathrm{U}(b_3 + c_3 q) + \mathrm{U}'[b_4 + c_4 q - u(b_3 + c_3 q)].\end{aligned}$$

On en déduit, par différentiation,

$$\begin{aligned}\mathrm{T}c_1\,dp &+ \mathrm{T}'(c_2 - c_1 t)\,dp + \mathrm{T}''[a_2 + c_2 p - t(a_1 + c_1 p)]\,dt\\ &= \mathrm{U}\mathrm{C}_3\,dp + \mathrm{U}'(c_4 - c_3 u)\,dp + \mathrm{U}''[a_4 + c_4 p - u(a_3 + c_3 p)]\,dt.\end{aligned}$$

On trouverait, de la même manière,

$$\begin{aligned}\mathrm{T}c_1\,dq &+ \mathrm{T}'(c_2 - c_1 t)\,dq + \mathrm{T}''[b_2 + c_2 q - t(b_1 + c_1 q)]\,dt\\ &= \mathrm{U}c_3\,dq + \mathrm{U}'(c_4 - c_3 u)\,dq + \mathrm{U}''[b_4 + c_4 q - u(b_3 + c_3 q)]\,du.\end{aligned}$$

Multipliant les deux membres de la première équation par $dx$, de la seconde par $dy$, et ajoutant membre à membre; observant, en outre, qu'on doit avoir, en tous les points d'une même ligne asymptotique,

$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

on trouve

$$\mathrm{T}''(d\mathrm{M} - t\,d\mathrm{L})\,dt = \mathrm{U}''(d\mathrm{P} - u\,d\mathrm{N})\,du$$

ou

$$\mathrm{T}''\mathrm{L}\,dt^2 = \mathrm{U}''\mathrm{N}\,du^2$$

et, à cause de la relation (47),

$$\frac{\mathrm{T}''}{\mathrm{T}}dt^2 = \frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}du^2$$

ou

$$\sqrt{\frac{\mathrm{T}''}{\mathrm{T}}}\,dt = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}}\,du.$$

26. Telle est l'équation différentielle cherchée. Comme nous l'avons annoncé, elle permet de ramener la recherche qui nous occupe au calcul des deux intégrales

$$\int\sqrt{\frac{\mathrm{T}''}{\mathrm{T}}}\,dt, \qquad \int\sqrt{\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}}}\,du,$$

intégrales qu'il est facile de connaître, en tant qu'il s'agit des surfaces tétraédrales, et des dégénérescences qu'elles présentent, quand on leur applique la méthode indiquée au n° 4. En effet, 1° on peut supposer l'équation d'une surface tétraédrale mise sous la forme

$$L^{\mu}+M^{\mu}=N^{\mu}+P^{\mu}.$$

Ici

$$T=(1+t^{\mu})^{\frac{1}{\mu}},\qquad T'=(1+t^{\mu})^{\frac{1}{\mu}-1}t^{\mu-1},\qquad T''=(\mu-1)(1+t^{\mu})^{\frac{1}{\mu}-2}t^{\mu-2}.$$

De même,

$$U=(1+u^{\mu})^{\frac{1}{\mu}},\qquad U''=(\mu-1)(1+u^{\mu})^{\frac{1}{\mu}-2}u^{\mu-2}.$$

De là l'équation différentielle

$$\frac{t^{\frac{\mu}{2}-1}dt}{1+t^{\mu}}=\frac{u^{\frac{\mu}{2}-1}du}{1+u^{\mu}}.$$

Si l'on pose $t^{\mu}=\theta^2$, $u^{\mu}=\zeta^2$, cette équation devient

$$\frac{d\theta}{1+\theta^2}=\pm\frac{d\zeta}{1+\zeta^2},$$

et l'on trouve, en intégrant,

$$\operatorname{arc\,tang}\theta\pm\operatorname{arc\,tang}\zeta=\operatorname{arc\,tang}k,$$

$k$ désignant une constante arbitraire.

On en déduit

$$\frac{\theta\mp\zeta}{1\pm\theta\zeta}=k$$

ou

$$\frac{t^{\frac{\mu}{2}}\mp u^{\frac{\mu}{2}}}{1\pm t^{\frac{\mu}{2}}u^{\frac{\mu}{2}}}=k$$

ou enfin

$$L^{\frac{\mu}{2}}N^{\frac{\mu}{2}}\pm P^{\frac{\mu}{2}}M^{\frac{\mu}{2}}=k\left(M^{\frac{\mu}{2}}N^{\frac{\mu}{2}}\mp P^{\frac{\mu}{2}}L^{\frac{\mu}{2}}\right),$$

et cette forme est identique à celle que l'on trouve en multipliant membre à membre les deux équations

$$L^{\frac{\mu}{2}}+\sqrt{-1}\,M^{\frac{\mu}{2}}=h\left(N^{\frac{\mu}{2}}+\sqrt{-1}\,P^{\frac{\mu}{2}}\right),$$

$$\frac{1}{h}\left(N^{\frac{\mu}{2}}-\sqrt{-1}\,P^{\frac{\mu}{2}}\right)=L^{\frac{\mu}{2}}-\sqrt{-1}\,M^{\frac{\mu}{2}},$$

obtenues par la méthode précédente.

2° Une des formes dégénérescentes de l'équation considérée est

$$L^{\mu}+L^{\mu-1}R=N^{\mu}+P^{\mu}, \tag{49}$$

R désignant une nouvelle fonction linéaire des coordonnées $x, y, z$. Ici je pose $R=tL$, et je trouve

$$T=(1+t)^{\frac{1}{\mu}},\qquad U=(1+u^{\mu})^{\frac{1}{\mu}}.$$

J'en déduis

$$T''=\frac{1-\mu}{\mu^2}(1+t)^{\frac{1}{\mu}-2},\qquad U''=(\mu-1)(1+u^{\mu})^{\frac{1}{\mu}-2}u^{\mu-2};$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques est alors

$$\frac{\sqrt{-1}}{\mu}\,\frac{dt}{1+t}=\pm\frac{u^{\frac{\mu}{2}-1}\,du}{1+u^{\mu}},$$

et l'on obtient immédiatement l'intégrale

$$\frac{\sqrt{-1}}{\mu}\log(1+t)=\pm\operatorname{arc\,tang} u^{\frac{\mu}{2}}+\frac{\sqrt{-1}}{\mu}\log C,$$

C désignant une constante arbitraire.

On en déduit

$$1+t=Ce^{\pm\mu\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tang} u^{\frac{\mu}{2}}};$$

d'où

$$L+R=C.Le^{\pm\mu\sqrt{-1}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{N}{P}\right)^{\frac{\mu}{2}}}.$$

On remarquera que cette équation est algébrique, chaque fois que le nombre $\mu$ est commensurable; car, si l'on pose $\operatorname{arc\,tang} u^{\frac{\mu}{2}}=\varphi$, on trouve

$$1+t=C(\cos\mu\varphi\pm\sqrt{-1}\sin\mu\varphi).$$

D'ailleurs, $\cos\mu\varphi$ et $\sin\mu\varphi$ sont, ici, des fonctions algébriques de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$, par conséquent aussi des fonctions algébriques de $\tan\varphi$, par conséquent aussi des fonctions algébriques de $u$.

3° Une seconde forme dégénérescente est

$$\text{(50)} \qquad L^{\mu} + L^{\mu-1}R = N^{\mu} + N^{\mu-1}S,$$

dans laquelle R, S désignent encore des fonctions linéaires des coordonnées.

Nous trouvons ici des surfaces réglées, car on peut considérer l'équation ci-dessus comme résultant de l'élimination d'un paramètre $\theta$ entre les deux équations suivantes

$$L + R = \theta(N + S), \qquad L^{\mu-1} = \frac{1}{\theta} N^{\mu-1}.$$

La dernière représente des plans, dont deux au plus sont réels. On voit, en outre, que les génératrices d'une telle surface rencontrent deux droites fixes : la détermination des lignes asymptotiques des surfaces réglées jouissant de cette propriété a été faite par Cremona (*Annali di Matematica pura ed applicata*, t. I) et généralisée par M. Picard, dans son Mémoire : *Sur l'application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces réglées* (1877). Dans le cas simple qui nous occupe, la méthode que nous avons exposée nous conduit à faire

$$R = tL, \qquad S = uN, \qquad T = (1 + t)^{\frac{1}{\mu}}, \qquad U = (1 + u)^{\frac{1}{\mu}},$$

et nous trouvons immédiatement, pour l'équation différentielle des lignes asymptotiques,

$$\frac{dt}{1+t} = \pm \frac{du}{1+u},$$

puis, en intégrant,

$$\log(1 + t) \pm \log(1 + u) = \log C.$$

Cette formule donne, outre la série des génératrices rectilignes, les courbes dont l'équation générale est

$$(1 + t)(1 + u) = C$$

ou

$$(R + L)(N + S) = CLN,$$

situées, chacune, sur un hyperboloïde à une nappe. Tous ces hyperboloïdes ont deux couples de génératrices fixes, appartenant chacune à deux systèmes différents, savoir :

$$\text{Premier couple.......} \begin{cases} 1^\circ & R = 0, & L = 0; \\ 2^\circ & S = 0, & N = 0. \end{cases}$$

$$\text{Second couple........} \begin{cases} 1^\circ & R + L = 0, & N = 0; \\ 2^\circ & N + S = 0, & L = 0. \end{cases}$$

4° Enfin, si les trois polynômes L, M, N deviennent identiques dans les conditions indiquées au n° 4, l'équation de la surface tétraédrale va dégénérer en

$$L^\mu + L^{\mu-1}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{t_0} + L^{\mu-1}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\right)_{t_0} + (\mu - 1)L^{\mu-2}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 + P^\mu = 0,$$

et l'on peut transformer cette dernière équation comme il suit

$$L^{\mu-2}(L^2 - SR) + P^\mu = 0,$$

S, R désignant deux polynômes linéaires en $x$, $y$, $z$.

Celle-ci se transforme, à son tour, en

$$SR = \frac{L^\mu + P^\mu}{L^{\mu-2}}, \tag{51}$$

et les deux membres de cette équation sont des fonctions homogènes, du second degré, de deux polynômes linéaires. Conformément à notre méthode, nous poserons

$$R = tS, \qquad P = uL$$

et, par conséquent,

$$T = t^{\frac{1}{2}}, \qquad U = (1 + u^\mu)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent aussi,

$$T'' = -\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}, \qquad U'' = \frac{\mu}{4}\,\frac{2(\mu - 1)u^{\mu-2} + (\mu - 2)u^{2\mu-2}}{(1 + u^\mu)^{\frac{2}{\mu}}}.$$

Donc l'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$\sqrt{-1}\,\frac{dt}{t} = \pm\sqrt{\mu}\,\frac{\sqrt{2(\mu - 1)u^{\mu-2} + (\mu - 2)u^{2\mu-2}}}{1 + u^\mu}\,du$$

ou bien

$$\sqrt{-1}\,\frac{dt}{t} = \pm\sqrt{\mu(\mu-2)}\,\frac{\sqrt{a+u^{\mu}}}{1+u^{\mu}}\,u^{\frac{\mu}{2}-1}\,du,$$

où l'on a fait $\frac{2(\mu-1)}{\mu-2} = a$. De là une première transformation, $u^{\frac{\mu}{2}} = \theta$, qui nous donne

$$\frac{dt}{t} = \pm\sqrt{\mu(2-\mu)}\,\frac{\sqrt{a+\theta^2}}{1+\theta^2}\,d\theta;$$

puis, par la nouvelle transformation $\theta = \sqrt{a}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{dt}{t} &= \pm 2\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}\,\frac{a\,d\xi}{[1-(1-a)\xi^2](1-\xi^2)}\\ &= \pm 2\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}\left[\frac{(a-1)\,d\xi}{1+(a-1)\xi^2} + \frac{d\xi}{1-\xi^2}\right]\end{aligned}$$

et, en intégrant,

$$\begin{aligned}\log t - \log t_0 &= \pm 2\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}\left(\sqrt{a-1}\,\text{arc tang}\,\xi + \frac{1}{2}\log\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)\\ &= \pm 2\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}\left(\sqrt{\frac{\mu}{\mu-2}}\,\text{arc tang}\,\xi + \log\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}\right)\end{aligned}$$

ou

$$t = t_0\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\pm\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}} e^{2\,\text{arc tang}\,\xi\sqrt{-1}} = t_0\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{\pm\sqrt{\frac{2-\mu}{\mu}}}\frac{1-\xi^2+2\xi\sqrt{-1}}{1+\xi^2}.$$

D'après cela, on trouve des lignes asymptotiques algébriques, chaque fois que le nombre $\frac{2-\mu}{\mu}$ est de la forme $\frac{p^2}{q^2}$, ce qui exige que

$$\mu = \frac{2q^2}{p^2+q^2},$$

$p$, $q$ étant deux nombres entiers, qu'on peut toujours supposer premiers entre eux.

D'ailleurs, la surface dont il s'agit ici peut être regardée comme engendrée par le mouvement d'une conique définie par les équations

$$P = \lambda L, \qquad SR = (1+\lambda^{\mu})L^2,$$

où $\lambda$ représente un paramètre arbitraire. Cette conique est constamment tangente aux deux plans fixes $R = 0$, $S = 0$, en deux points fixes, situés sur la droite $L = 0$, $P = 0$, et s'appuie sur la courbe définie par les deux équations $S = kR$, $kR^2 = \frac{L^\mu + P^\mu}{L^{\mu-2}}$, où $k$ désigne une constante, choisie à volonté.

27. Nous avons étudié, en second lieu, les surfaces définies par l'équation

$$L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} L_3^{\alpha_3} L_4^{\alpha_4} \ldots L_n^{\alpha_n} = A,$$

où l'on suppose $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = 0$. Dans le cas particulier où $n = 4$, notre méthode permet encore de trouver leurs lignes asymptotiques. En effet, si l'on suppose, comme cela est toujours possible, $A = 1$, on sera conduit à étudier les surfaces représentées par l'équation

$$(52) \qquad L^{\alpha_1} M^{\alpha_2} = N^{-\alpha_3} P^{-\alpha_4},$$

et, à cause de l'hypothèse faite sur les exposants, les deux membres de cette équation seront du même degré $\alpha_1 + \alpha_2$. Dès lors, on sera conduit à poser $T = t^k$, $U = u^{k'}$, après avoir fait, pour abréger,

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = k, \qquad \frac{\alpha_4}{\alpha_3 + \alpha_4} = k',$$

et l'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$\sqrt{k(k-1)}\frac{dt}{t} = \pm\sqrt{k'(k'-1)}\frac{du}{u}.$$

On trouvera immédiatement l'intégrale

$$t^{\sqrt{k(k-1)}} = C\,u^{\sqrt{k'(k'-1)}}$$

ou

$$\left(\frac{L}{M}\right)^{\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}} = C\left(\frac{P}{N}\right)^{\pm\sqrt{-\alpha_3\alpha_4}},$$

C désignant une constante arbitraire.

28. Mais l'équation (52) présente, en vertu des remarques faites au n° 3, diverses formes dégénérescentes que nous allons étudier.

1° Si l'on suppose que deux des polynômes linéaires qui y figurent deviennent identiques, on obtient une première forme dégénérescente

$$\alpha_1 \log \mathrm{L} + \alpha_2 \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}} + \alpha_3 \log \mathrm{N} + \alpha_4 \log \mathrm{P} = \log \mathrm{A},$$

et cette équation est équivalente à

$$\mathrm{L}^{\alpha_1} \mathrm{N}^{\alpha_3} \mathrm{P}^{\alpha_4} e^{\alpha_4 \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}} = \mathrm{A}.$$

On ne trouve plus ici la forme

$$f_1(\mathrm{L}, \mathrm{M}) = f_2(\mathrm{N}, \mathrm{P})$$

ou, du moins, les deux fonctions homogènes, auxquelles on peut ramener les deux membres de l'équation, ne sont plus de même degré. Mais les propriétés des figures homographiques vont nous permettre de simplifier la recherche des lignes asymptotiques. En effet, si l'on applique ce mode de transformation, en faisant correspondre au polynôme L une constante, aux polynômes N, P, R les nouvelles variables $x$, $y$, $z$, et si l'on pose

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = -a, \qquad \frac{\alpha_4}{\alpha_2} = -b,$$

on est conduit à chercher les lignes asymptotiques de la surface ayant pour équation

$$x^a y^b = \mathrm{A} e^z,$$

équation d'où l'on déduit

$$a x^{a-1} y^b = \mathrm{A} e^z p = x^a y^b p;$$

d'où

$$p = \frac{a}{x}.$$

De même,

$$q = \frac{b}{y}.$$

Donc on trouve, pour l'équation différentielle des lignes asymptotiques,

$$a \frac{dx^2}{x^2} + b \frac{dy^2}{y^2} = 0$$

ou

$$\sqrt{a}\frac{dx}{x} \pm \sqrt{-b}\frac{dy}{y} = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$x^{\sqrt{a}} y^{\pm\sqrt{-b}} = \mathrm{C},$$

C désignant une constante arbitraire.

2° Si l'on suppose que les deux polynômes L, N deviennent identiques, ainsi que les deux polynômes N, P, on trouve l'équation suivante :

$$\mathrm{L}^{\alpha_1} e^{\alpha_2 \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}} = \mathrm{A}\mathrm{N}^{-\alpha_3} e^{-\alpha_4 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}},$$

où R, S désignent deux polynômes entiers et linéaires. On remarquera d'abord que cette équation représente une surface réglée; car le plan qui a pour équation $\mathrm{N} = t\mathrm{L}$ coupe la surface suivant une ligne, définie par l'équation suivante :

$$1^{\alpha_1} e^{\alpha_2 \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}} = \mathrm{A}t^{-\alpha_3} e^{-\alpha_4 \frac{\mathrm{S}}{t\mathrm{L}}}$$

ou

$$\alpha_2 \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}} + \alpha_4 \frac{\mathrm{L}}{t\mathrm{L}} = \mathrm{H},$$

H désignant un coefficient qui dépend uniquement de $t$. A chaque détermination de H correspond une droite, rencontrant la droite fixe

$$\mathrm{L} = 0, \qquad \mathrm{N} = 0,$$

et la surface considérée a une directrice rectiligne. Donc elle appartient à une catégorie de surfaces dont on sait, d'après M. Picard (*loc. cit.*), déterminer les lignes asymptotiques. Dans le cas particulier actuel, il suffit de faire correspondre, par voie d'homographie, au polynôme L une constante, aux polynômes R, N, S les nouvelles variables $z, x, y$. On est alors ramené à déterminer les lignes asymptotiques d'une surface définie par une équation de la forme

$$x^a e^{\frac{y}{x}} = \mathrm{A} e^z.$$

On trouve alors

$$e^{\frac{y}{x}}(a x^{a-1} - x^{a-2} y) = \mathrm{A} e^z p = x^a e^{\frac{y}{x}} p,$$

d'où

$$ax - y = px^2.$$

De même

$$x^{a-1} e^{\frac{y}{x}} = A e^z q = x^a e^{\frac{y}{x}} q,$$

d'où

$$qx = 1.$$

Par conséquent,

$$dp = \frac{(y - ax)\,dx - x\,dy}{x^3}, \qquad dq = -\frac{dx}{x^2},$$

et l'équation des lignes asymptotiques devient, après la suppression du facteur $dx$,

$$(2y - ax)\,dx - 2x\,dy = 0$$

ou

$$2\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + a\frac{dx}{x} = 0,$$

et l'on trouve, en intégrant,

$$\frac{2y}{x} + a\log x = \log C$$

ou bien

$$x^a e^{\frac{2y}{x}} = C,$$

C désignant une constante arbitraire.

De la comparaison de cette équation avec celle de la surface proposée, il résulte que chacune des lignes asymptotiques de la surface est sur une surface du second degré, définie par une équation de la forme

$$y - C_1 x + xz = 0,$$

$C_1$ désignant une nouvelle constante, qu'on peut regarder comme arbitraire, à condition d'en faire dépendre C.

3° Enfin, si les trois polynômes L, M, N deviennent identiques dans les conditions précitées, on trouve l'équation

$$L^{\alpha_1} e^{\alpha_2 \frac{R}{L} + \alpha_3 \frac{LS - R^2}{L^2}} = AP^{-\alpha_4},$$

et, si l'on pose $-\frac{\alpha_1}{\alpha_4} = a$, puis si l'on considère une surface homographique de la surface donnée, telle qu'au plan $L = 0$ corresponde le plan de l'infini, aux plans $P = 0$, $\alpha_2 R + \alpha_3 S = 0$, $R = 0$, les plans $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, on est ramené à chercher les lignes asymptotiques de la surface définie par une équation de la forme

$$e^{\alpha x + \beta y^2} = A z.$$

En chaque point d'une telle surface, on trouve

$$\alpha e^{\alpha x + \beta y^2} = A p,$$
$$2\beta y e^{\alpha x + \beta y^2} = A q;$$

d'où

$$\alpha e^{\alpha x + \beta y^2}(\alpha\, dx + 2\beta\, dy) = A\, dp,$$
$$2\beta\, e^{\alpha x + \beta y^2}(dy + \alpha y\, dx + 2\beta y^2 dy) = A\, dq.$$

Donc, en tout point d'une même ligne asymptotique, on doit avoir

$$\alpha(\alpha\, dx^2 + 2\beta y\, dx\, dy) + 2\beta(dy^2 + \alpha y\, dx\, dy + 2\beta y^2 dy^2) = 0$$

ou

$$(\alpha\, dx + 2\beta y\, dy)^2 + 2\beta\, dy^2 = 0$$

ou encore

$$\alpha dx + 2\beta y dy \pm \sqrt{-2\beta}\, dy = 0$$

ou enfin

$$\alpha x + \beta y^2 \pm \sqrt{-2\beta}\, y = C.$$

Les projections des lignes asymptotiques, sur le plan des $xy$, sont des paraboles : sur le plan des $zy$, on trouve la courbe représentative de la fonction exponentielle.

29. L'équation

$$f_1(L, M) = f_2(N, P) \tag{53}$$

comprend, au nombre de ses formes particulières, l'équation des surfaces tétraédrales, et aussi les équations (50), (51), (52). Les surfaces définies par cette équation jouissent, relativement à leurs plans tangents, d'une propriété remarquable, qu'on peut énoncer ainsi : « Tous les plans tangents à cette surface, aux divers points d'une section faite par un plan passant par la droite $N = 0$, $P = 0$, coupent, en un même point, la droite ayant pour équations $L = 0$, $M = 0$. »

En effet, soient $l$, $m$, $n$, $p$ les coordonnées d'un point de la surface;

le plan tangent en ce point est représenté par l'équation

$$\frac{\partial f_1}{\partial l}\mathrm{L}+\frac{\partial f_1}{\partial m}\mathrm{M}=\frac{\partial f_2}{\partial n}\mathrm{N}+\frac{\partial f_2}{\partial p}\mathrm{P}.$$

Ce plan coupe la droite $\mathrm{L}=0$, $\mathrm{M}=0$ en un point situé dans le plan qui a pour équation

$$\frac{\partial f_2}{\partial n}\mathrm{N}+\frac{\partial f_2}{\partial p}\mathrm{P}=0,$$

et la direction de celui-ci, autour de la droite $\mathrm{N}=0$, $\mathrm{P}=0$, ne dépend que du rapport $\frac{n}{p}$ : ce qui démontre l'énoncé.

La réciproque de ce théorème est vraie : pour la démontrer, choisissons pour axe des $z$ la droite $\mathrm{L}=0$, $\mathrm{M}=0$ et supposons la droite $\mathrm{N}=0$, $\mathrm{P}=0$ située dans le plan $x\mathrm{O}y$, parallèlement à l'axe $\mathrm{O}y$, de telle sorte que ses équations soient $z=0$, $x-a=0$. Si l'on désigne, comme précédemment, par $p$, $q$ les dérivées partielles, par rapport à $x$, $y$, de la fonction $z$ définie par l'équation de la surface, on voit que le plan tangent au point $x$, $y$, $z$ coupe l'axe des $z$ à une distance de l'origine égale à

$$z-px-qy.$$

Donc, pour que les plans, tangents à la surface aux divers points de la section faite par un plan passant par la seconde droite donnée coupent l'axe des $z$ au même point, il faut que

$$z-px-qy=f\left(\frac{z}{x-a}\right),$$

$f$ désignant une fonction donnée.

Avant d'intégrer cette équation aux dérivées partielles, nous poserons

$$z=t(x-a)$$

et nous la transformerons comme il suit :

$$(54)\qquad -tx+(x-a)\left(t-x\frac{\partial t}{\partial x}-y\frac{\partial t}{\partial y}\right)=f(t).$$

Alors nous serons conduit à intégrer le système des équations différentielles simultanées

$$\frac{dx}{x(x-a)} = \frac{dy}{y(x-a)} = \frac{-dt}{at+f(t)}$$

ou

$$(55)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}, \\ \dfrac{dx}{x(x-a)} = \dfrac{-dt}{at+f(t)}. \end{cases}$$

La première des équations (55) admet pour intégrale

$$y = Cx,$$

et la seconde

$$\frac{x}{x-a} = C_1 e^{\int \frac{a\,dt}{at+f(t)}},$$

C, $C_1$ désignant deux constantes arbitraires.

Donc l'intégrale de l'équation (54) est

$$\frac{x}{x-a} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) e^{\int \frac{a\,dt}{at+f(t)}},$$

$\varphi$ désignant une fonction arbitraire. Si maintenant on pose

$$e^{-\int \frac{a\,dt}{at+f(t)}} = \psi(t) = \psi\left(\frac{z}{x-a}\right),$$

on pourra mettre l'équation précédente sous la forme

$$\frac{1}{x-a}\,\psi\left(\frac{z}{x-a}\right) = \frac{1}{x}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et l'on voit que les deux membres de cette dernière équation sont des fonctions homogènes, de degré $-1$, le premier de $z$ et de $x-a$, le second de $x$ et de $y$; ce qui démontre l'énoncé.

De plus, la forme même de l'équation (53) montre que les deux droites $L=0$, $M=0$ sont réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que *toute surface dont l'équation est de la forme* (53) *peut, de deux manières différentes, être considérée comme l'enveloppe d'un cône dont le sommet se meut sur une droite fixe, tandis que la courbe de contact est dans un plan,* *mobile autour d'une autre droite fixe*. C'est là l'extension d'une propriété des surfaces tétraédrales, démontrée par de la Gournerie.

On déduit aussi, de la proposition ci-dessus, la propriété suivante des lignes asymptotiques des surfaces (53) :

*Les plans osculateurs à une telle ligne, aux points où elle est coupée par un plan passant par l'une des droites* FONDAMENTALES, *rencontrent l'autre droite au même point*.

30. Revenons maintenant à l'équation

$$\sqrt{\frac{T''}{T}}\,dt = \pm\sqrt{\frac{U''}{U}}\,du,$$

qui représente les lignes asymptotiques des surfaces définies par l'équation (53). Chaque fois que nous saurons intégrer cette équation, nous saurons trouver les lignes asymptotiques, non seulement de la surface proposée, mais aussi d'une autre surface dont l'équation sera de la même forme, mais où l'une, au moins, des fonctions T, U aura été remplacée par une fonction $\varpi$ de $t$ ou par une fonction $\mho$ de $u$, remplissant la condition suivante :

$$\frac{\varpi''}{\varpi} = \frac{T''}{T} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mho''}{\mho} = \frac{U''}{U}.$$

La recherche des surfaces transformées dépend donc de l'intégration des équations ci-dessus, et l'intégration de chacune d'elles dépend, comme on va le voir, d'une seule quadrature. En effet, l'équation

$$\frac{\varpi''}{\varpi} = \frac{T''}{T}$$

équivaut à

$$T\varpi'' - \varpi T'' = 0$$

ou

$$T\varpi' - \varpi T' = A,$$

A désignant une constante arbitraire. On en déduit

$$\frac{T\varpi' - \varpi T'}{T^2}\,dt = \frac{A}{T^2}\,dt$$

et, par conséquent,

$$\varpi = \mathrm{AT}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\mathrm{T}^2},$$

$t_0$ désignant une nouvelle constante arbitraire.

En définitive, la recherche des surfaces transformées se ramène au calcul de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\mathrm{T}^2},$$

et nous nous proposons d'effectuer ce calcul, dans les divers cas étudiés précédemment, en commençant par ceux où la détermination de notre intégrale est la plus simple.

31. L'étude de l'équation (50) nous a conduit à poser

$$\mathrm{T} = (1+t)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Ici, l'on trouve

$$\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\mathrm{T}^2} = \int_{t_0}^{t}(1+t)^{-\frac{2}{\mu}}dt = \frac{\mu}{\mu-2}\left[(1+t)^{\frac{\mu-2}{\mu}} - (1+t_0)^{\frac{\mu-2}{\mu}}\right],$$

et la fonction $\varpi$ correspondante est

$$\varpi = \mathrm{A}(1+t)^{\frac{\mu-1}{\mu}} + \mathrm{B}(1+t)^{\frac{1}{\mu}},$$

A, B désignant deux constantes arbitraires.

Cette conclusion tombe en défaut, au cas où $\mu = 2$. Mais alors on a

$$\varpi = \mathrm{A}\sqrt{1+t}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{1+t} = \mathrm{A}\left(\log\frac{1+t}{1+t_0}\right)\sqrt{1+t}.$$

Nous avons également rencontré, à propos de l'équation (51), la fonction $\mathrm{T} = \sqrt{t}$; nous en déduisons

$$\varpi = \mathrm{A}\sqrt{t}\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{t} = \mathrm{A}\sqrt{t}\log\frac{t}{t_0}.$$

Plus généralement, à propos de l'équation (53), nous avons trouvé

$$\mathrm{T} = t^k;$$

d'où

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\mathrm{T}^2} = \int_{t_0}^{t} t^{-2k}\,dt = \frac{1}{1-2k}\left(t^{1-2k} - t_0^{1-2k}\right)$$

et

$$\mathfrak{T} = \mathrm{A}\,t^{1-k} + \mathrm{B}\,t^k.$$

32. Pour étudier l'équation (53)

$$\mathrm{RS} = \frac{\mathrm{L}^{\mu} + \mathrm{P}^{\mu}}{\mathrm{L}^{\mu-2}},$$

nous avons fait

$$\mathrm{U} = \sqrt{1+u^{\mu}}.$$

Nous en déduisons

$$\mathfrak{V} = \mathrm{A}\sqrt{1+u^{\mu}}\int_{u_0}^{u} \frac{du}{1+u^{\mu}}.$$

Pour les valeurs incommensurables de $\mu$, l'intégrale qui figure dans cette équation ne peut pas s'exprimer en termes finis : nous nous proposons : 1° de montrer qu'il est possible de l'exprimer en termes finis, chaque fois que $\mu$ est commensurable; 2° en dehors de cette hypothèse, de la développer en série convergente, dans divers cas où ce développement est possible.

1° Si $\mu = +\frac{p}{q}$ ($p$, $q$ étant deux entiers premiers entre eux), nous poserons $u = \theta^q$, et nous obtiendrons

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{1+u^{\mu}} = q\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\theta^{q-1}\,d\theta}{1+\theta^p}.$$

Si $\mu = -\frac{p}{q}$, nous écrirons l'intégrale proposée sous la forme

$$\int_{u_0}^{u} \frac{u^{\frac{p}{q}}}{1+u^{\frac{p}{q}}}\,du,$$

et nous poserons encore $u = \theta^q$. Nous trouverons, pour l'intégrale proposée, l'expression

$$q\int_{\theta_0}^{0}\frac{\theta^{p+q-1}\,d\theta}{1+\theta^p}.$$

Dans les deux cas, nous sommes amenés à calculer l'intégrale d'une différentielle rationnelle.

2° Si le nombre $\mu$ n'est pas commensurable, nous supposerons d'abord qu'il est positif, et nous écrirons l'identité

$$\frac{1}{1+u^\mu}=1-u^\mu+u^{2\mu}-u^{3\mu}+\ldots+(-1)^n\frac{u^{n\mu}}{1+u^\mu},$$

d'où

$$\int_0^u\frac{du}{1+u^\mu}=u-\frac{u^{\mu+1}}{\mu+1}+\frac{u^{2\mu+1}}{2\mu+1}-\frac{u^{3\mu+1}}{3\mu+1}+\ldots+(-1)^n\int_0^u\frac{u^{n\mu}}{1+u^\mu}du.$$

Si l'on suppose le module de $u$ inférieur à l'unité, la série

$$u-\frac{u^{\mu+1}}{\mu+1}+\frac{u^{2\mu+1}}{2\mu+1}-\ldots$$

est convergente, et l'intégrale

$$\int_0^u\frac{u^{n\mu}}{1+u^\mu}du$$

tend vers zéro, quand $n$ est de plus en plus grand. Donc la série précédente définit une fonction de $u$, égale à l'intégrale proposée.

Si l'on attribue à $u$ une valeur dont le module est égal à 1, on obtient une série dont les termes ont des modules qui vont en décroissant, mais forment une série divergente; en effet, si $\mu$ est inférieur à 1, les termes de la série

$$1+\frac{1}{\mu+1}+\frac{1}{2\mu+1}+\frac{1}{3\mu+1}+\ldots$$

sont respectivement plus grands que les termes de la série harmonique. Si, au contraire, $\mu$ est supérieur à 1, on constate que $n\mu+1$ est inférieur, quel que soit $n$, à $(n+1)\mu$; de là l'inégalité

$$\frac{1}{n\mu+1}>\frac{1}{(n+1)\mu}.$$

Donc la somme des modules des $p$ premiers termes est plus grande que

$$1+\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{p}\right),$$

ce qui démontre la proposition.

De la divergence de la série précédente, on ne peut rien conclure, eu égard à cette circonstance, que ses termes tendent vers zéro, quand leur rang est de plus en plus élevé. Toutefois, il est facile de voir que l'intégrale proposée devient infinie, quand $u$ tend vers l'une des racines de l'équation $u^\mu+1=0$. En effet, soit $u_0$ cette racine, et soit

$$1+u^\mu=\frac{z}{1+z}.$$

On trouve

$$\int_0^{u_0}\frac{du}{1+u^\mu}=\frac{(-1)^{\frac{1}{\mu}}}{\mu}\int_\infty^0\frac{dz}{z(1+z)^{\frac{1}{\mu}}},$$

et l'on reconnaît sans difficulté que cette dernière intégrale est infinie.

Le développement précédent permet de calculer l'intégrale proposée, entre deux limites $u_1$ et $u_2$, dont le module est inférieur à $1$. Il suffit de remarquer que l'intégrale, prise le long du contour $\mathrm{O}u_1u_2\mathrm{O}$ est nulle, et que, par conséquent, l'intégrale, prise dans les limites considérées, est égale à la différence des valeurs de l'intégrale, prise entre O et $u_2$ d'une part, O et $u_1$ d'autre part.

Nous pouvons aussi développer l'intégrale proposée en série convergente pour les valeurs de $u$ dont le module est supérieur à l'unité, pourvu qu'on ait en même temps $\mu>1$. En effet, posons $u=\frac{u_0}{t}$, $u_0$ désignant l'une quelconque des racines de l'équation $1+u^\mu=0$, nous trouvons

$$\int_\infty^u\frac{du}{1+u^\mu}=u_0\int_0^t\frac{t^{\mu-2}\,dt}{1+t^\mu}.$$

Mais

$$\frac{t^{\mu-2}}{1+t^\mu}=t^{\mu-2}-t^{2\mu-2}+t^{3\mu-2}-\ldots+(-1)^n\frac{t^{n\mu-2}}{1+t^\mu};$$

donc

$$\int_0^t\frac{t^{\mu-2}\,dt}{1+t^\mu}=\frac{t^{\mu-1}}{\mu-1}-\frac{t^{2\mu-1}}{2\mu-1}+\frac{t^{3\mu-1}}{3\mu-1}-\ldots+(-1)^n\int_0^t\frac{t^{n\mu-2}\,dt}{1+t^\mu}.$$

D'ailleurs, le dernier terme du second membre tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et l'intégrale proposée est égale à la somme de la série convergente

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{n\mu-1}}{n\mu-1}.$$

Ceci permet, comme précédemment, de calculer la valeur de l'intégrale prise entre deux limites dont les modules sont supérieurs à 1.

Enfin, si $\mu$ est négatif et égal à $-\nu$, on a

$$\int_0^u \frac{du}{1+u^{\mu}} = \int_0^u \frac{u^{\nu}\,du}{1+u^{\nu}}.$$

D'ailleurs

$$\frac{u^{\nu}}{1+u^{\nu}} = u^{\nu} - u^{2\nu} + u^{3\nu} - \ldots + (-1)^n \frac{u^{n\nu}}{1+u^{\nu}},$$

donc

$$\int_0^u \frac{u^{\nu}\,du}{1+u^{\nu}} = \frac{u^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{u^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \frac{u^{3\nu+1}}{3\nu+1} - \ldots + (-1)^n \int_0^u \frac{u^{n\nu}\,du}{1+u^{\nu}}.$$

Or, pour les valeurs de $u$ dont le module est inférieur à 1, $\int_0^u \frac{u^{n\nu}\,du}{1+u^{\nu}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Donc

$$\int_0^u \frac{u^{\nu}\,du}{1+u^{\nu}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^{n\nu+1}}{n\nu+1}.$$

33. A propos des surfaces tétraédrales proprement dites, nous avons posé

$$T = (1+t^{\mu})^{\frac{1}{\mu}},$$

et nous trouvons

$$\mathfrak{T} = A(1+t^{\mu})^{\frac{1}{\mu}} \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{(1+t^{\mu})^{\frac{2}{\mu}}}.$$

L'intégrale qui entre dans cette équation peut se transformer comme il suit : si $v$ est une variable, dépendant de $t$ par la relation

$$1 + t^{\mu} + v^{\mu} = 0,$$

l'intégrale est égale à $\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\rho^2}$, et, par conséquent, si $\mu=\pm\frac{1}{p}$ ou si $\mu=\pm\frac{2}{p}$ ($p$ désignant au nombre entier), on peut la ramener au calcul d'une intégrale à différentielle rationnelle (*voir* n° 21). De même, on peut la calculer à l'aide d'intégrales elliptiques, si $\mu=\pm\frac{3}{p}$.

Nous signalerons encore un cas où le calcul de cette intégrale se ramène au calcul d'intégrales elliptiques; c'est celui où $\mu=\pm\frac{4}{2k+1}$. En effet, si $\mu=+\frac{4}{2k+1}$, on trouve

$$\omega=\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{(1+t^{\mu})^{\frac{2}{\mu}}}=\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\left(1+t^{\frac{4}{2k+1}}\right)^{k}\sqrt{1+t^{\frac{4}{2k+1}}}},$$

et, si l'on pose $t=\theta^{2k+1}$,

$$\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{(1+t^{\mu})^{\frac{2}{\mu}}}=(2k+1)\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\theta^{2k}\,d\theta}{(1+\theta^4)^k\sqrt{1+\theta^4}}$$

$$=(2k+1)\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\theta\left(\theta^2+\frac{1}{\theta^2}\right)^k\sqrt{\theta^2+\frac{1}{\theta^2}}}.$$

Posons encore

$$\theta=\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z},$$

nous trouverons

$$\frac{d\theta}{\theta}=-\frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}},\qquad \theta+\frac{1}{\theta}=\frac{2}{z},\qquad \theta^2+\frac{1}{\theta^2}=\frac{4}{z^2}-2$$

et

$$\omega=-\frac{2k+1}{2}\int_{z_0}^{z}\left(\frac{z^2}{4-2z^2}\right)^k\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{1}{2}z^2)}}$$

$$=-\frac{2k+1}{2}\int_{z_0}^{z}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2-z^2}\right)^k\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{1}{2}z^2)}};$$

dès lors il n'y a plus de difficulté à décomposer cette intégrale en une somme d'intégrales elliptiques de première et de troisième espèce, de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si $\mu = \frac{-4}{2k+1}$, on trouve

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{(1+t^{\mu})^{\frac{2}{\mu}}} = \int_{t_0}^{t} \left(1 + t^{\frac{4}{2k+1}}\right)^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2},$$

et, si l'on pose

$$t = \theta^{2k+1},$$

l'intégrale proposée devient

$$(2k+1)\int_{\theta_0}^{\theta} (1+\theta^4)^k \sqrt{1+\theta^4}\, \frac{d\theta}{\theta^{2(k+1)}} = (2k+1)\int_{\theta_0}^{\theta} \left(\theta^2 + \frac{1}{\theta^2}\right)^k \sqrt{\theta^2 + \frac{1}{\theta^2}}\, \frac{d\theta}{\theta},$$

puis, par la substitution $\theta = \frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}$,

$$\frac{2k+1}{2}\int_{z_0}^{z} \left(\frac{4-2z^2}{z^2}\right)^{k+1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{1}{2}z^2)}},$$

et l'on trouve encore une somme d'intégrales elliptiques, de première et de troisième espèce, et de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Enfin il sera possible d'effectuer l'intégration par les séries, chaque fois que $\mu$ sera positif. En effet, donnons d'abord à $t$ une valeur dont le module soit inférieur à 1.

Nous savons que

$$(1+t^{\mu})^{-\frac{2}{\mu}} = 1 - \frac{2}{\mu}t^{\mu} + \frac{\frac{2}{\mu}\left(\frac{2}{\mu}+1\right)}{1.2}t^{2\mu} - \frac{\frac{2}{\mu}\left(\frac{2}{\mu}+1\right)\left(\frac{2}{\mu}+2\right)}{1.2.3}t^{3\mu} + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{\frac{2}{\mu}\left(\frac{2}{\mu}+1\right)\ldots\left(\frac{2}{\mu}+n-1\right)}{1.2.3\ldots n} t^{n\mu}(1+\varepsilon),$$

$\varepsilon$ étant une fonction de $t$, qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Donc

$$\int_0^t (1+t^\mu)^{-\frac{2}{\mu}} dt = t - \frac{2}{\mu}\frac{t^{\mu+1}}{\mu+1} + \frac{\frac{2}{\mu}\left(\frac{2}{\mu}+1\right)}{1.2}\frac{t^{2\mu+1}}{2\mu+1} - \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{\frac{2}{\mu}\left(\frac{2}{\mu}+1\right)\ldots\left(\frac{2}{\mu}+n-1\right)}{1.2.3\ldots n}\int_0 t^{n\mu}(1+\varepsilon)\, dt.$$

On voit immédiatement que la série ainsi définie est convergente; on voit aussi que le dernier terme du second membre tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; car, si l'on désigne par R la plus grande valeur que prenne le module de $1+\varepsilon$ quand $t$ varie depuis zéro jusqu'à la limite de l'intégration, le terme considéré a un module plus petit que celui de

$$R\,\frac{\frac{2}{\mu}\left(\frac{2}{\mu}+1\right)\left(\frac{2}{\mu}+2\right)\ldots\left(\frac{2}{\mu}+n-1\right)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{t^{n\mu+1}}{n\mu+1},$$

et cette expression est le terme général d'une série convergente. Donc on peut regarder l'intégrale proposée comme une fonction de $t$, égale à la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \frac{\frac{2}{\mu}\left(\frac{2}{\mu}+1\right)\left(\frac{2}{\mu}+2\right)\ldots\left(\frac{2}{\mu}+n-1\right)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{t^{n\mu+1}}{n\mu+1}.$$

Parmi les valeurs de $t$ dont le module est 1, il en est qui permettent de ramener le calcul de l'intégrale proposée à celui d'une intégrale eulérienne de première espèce, ou de deux intégrales de seconde espèce; ce sont les racines de l'équation $t^\mu + 1 = 0$. Posons, en effet,

$$1 + t^\mu = \theta,$$

et soit $t_0$ l'une des racines de l'équation ci-dessus; nous trouvons

$$\int_0^{t_0}(1+t^\mu)^{-\frac{2}{\mu}} dt = -\frac{1}{\mu}\int_0^1 \theta^{-\frac{2}{\mu}}(\theta-1)^{\frac{1}{\mu}-1}\, d\theta$$
$$= -\frac{1}{\mu}(-1)^{\frac{1}{\mu}-1}\int_0^1 \theta^{-\frac{2}{\mu}}(1-\theta)^{\frac{2}{\mu}-1}\, d\theta$$
$$= -\frac{1}{\mu}(-1)^{\frac{1}{\mu}-1}\mathrm{B}\left(1-\frac{2}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right).$$

Mais

$$\mathrm{B}\left(1-\frac{2}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right)=\frac{\Gamma\left(1-\frac{2}{\mu}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{\mu}\right)}=\Gamma\left(1-\frac{2}{\mu}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]^2\frac{\sin\frac{\pi}{\mu}}{\pi}.$$

Donc on trouve, pour l'intégrale proposée,

$$(-1)^{\frac{1}{\mu}-1}\frac{1}{\mu}\,\frac{\sin\frac{\pi}{\mu}}{\pi}\Gamma\left(1-\frac{2}{\mu}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]^2.$$

Dans le cas où le module de $t$ est supérieur à $1$, on ramène, comme il suit, le calcul de l'intégrale au calcul précédemment effectué. Soit $t=\frac{t_0}{\theta}$ ($t_0$ désignant encore une racine de l'équation $1+t^\mu=0$); on trouve

$$\int_0^t \frac{dt}{(1+t^\mu)^{\frac{2}{\mu}}}=-\int_\infty^\theta \frac{t_0\,d\theta}{(1+\theta^\mu)^{\frac{2}{\mu}}}.$$

Donc, si l'on adopte comme limites de l'intégration deux valeurs de $\theta$ dont les modules sont compris entre $+1$ et $+\infty$, on sera conduit à multiplier par $t_0$ la différence de deux des valeurs de l'intégrale que nous venons de développer en série convergente. Supposons, en particulier, que $\mu$ soit commensurable : la transformation faite au n° 19 montre qu'en chaque point du plan l'intégrale proposée a autant de valeurs distinctes qu'il y a d'unités au numérateur de la fraction $\mu$, mais que deux d'entre elles diffèrent uniquement par un facteur égal à l'une des racines de l'équation $1+t^\mu=0$; la même conclusion subsiste dans le cas actuel. Si $\mu$ est incommensurable, le nombre des valeurs distinctes de l'intégrale, en chaque point du plan, est infini; deux quelconques d'entre elles ont un rapport égal à $\cos\frac{2h\pi}{\mu}+\sqrt{-1}\sin\frac{2h\pi}{\mu}$, $h$ désignant un nombre entier positif ou négatif.

34. Nous terminerons cette Partie de notre travail en signalant un cas où la surface définie par une équation algébrique de la forme

$$f_1(\mathrm{L}, \mathrm{M})=f_2(\mathrm{N}, \mathrm{P})$$

a des lignes asymptotiques algébriques dont la connaissance permet de connaître aussi les lignes asymptotiques d'une autre surface, dont l'équation est transcendante. Supposons, en adoptant les mêmes notations que precédemment, qu'il y ait, entre T et $t$, une relation résultant de l'élimination d'un paramètre $\theta$ entre les deux équations

$$(58)\qquad T=\frac{a_1\theta^2+2b_1\theta+c_1}{\alpha\theta^2+2\beta\theta+\gamma},\qquad t=\frac{a_2\theta^2+2b_2\theta+c_2}{\alpha\theta^2+2\beta\theta+\gamma}.$$

Posons, pour abréger,

$$a_1\theta^2+2b_1\theta+c_1=G,\qquad a_2\theta^2+2b_2\theta+c_2=H,\qquad \alpha\theta^2+2\beta\theta+\gamma=K,$$

et soient

$$\begin{aligned} 2(a_1\theta+b_1)&=G', & 2(a_2\theta+b_2)&=H', & 2(\alpha\theta+\beta)&=K',\\ 2a_1&=G'', & 2a_2&=H'', & 2\alpha&=K''. \end{aligned}$$

Nous trouverons

$$T'=\frac{dT}{d\theta}:\frac{dt}{d\theta}=\frac{KG'-GK'}{KH'-HK'},$$

$$T''=\frac{(KH'-HK')(KG''-GK'')-(KG'-GK')(KH''-HK'')}{(KH'-HK')^3}K^2$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} G & H & K\\ G' & H' & K'\\ G'' & H'' & K''\end{vmatrix}K^3}{(KH'-HK')^3},$$

puis

$$\sqrt{\frac{T''}{T}}\,dt=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} G & H & K\\ G' & H' & K'\\ G'' & H'' & K''\end{vmatrix}}}{\sqrt{(KH'-HK')G}}\,d\theta.$$

Or

$$\begin{vmatrix} G & H & K\\ G' & H' & K'\\ G'' & H'' & K''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1\theta^2+2b_1\theta+c_1 & a_2\theta^2+2b^2\theta+c_2 & \alpha\theta^2+2\beta\theta+\gamma\\ 2(a_1\theta+b_1) & 2(a_2\theta+b_2) & 2(\alpha\theta+\beta)\\ 2a_1 & 2a_2 & 2\alpha\end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} b_1\theta+c_1 & b_2\theta+c_2 & \beta\theta+\gamma\\ b_1 & b_2 & \beta\\ a_1 & a_2 & \alpha\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \alpha\\ b_1 & b_2 & \beta\\ c_1 & c_2 & \gamma\end{vmatrix}.$$

D'ailleurs, l'expression

$$(KH' - HK')G$$

est, par rapport à $\theta$, une fonction entière du quatrième degré. Si on l'écrit sous la forme

$$A + B\theta + C\theta^2 + D\theta^3 + E\theta^4 = F(\theta),$$

on en conclut que la différentielle $\sqrt{\frac{T''}{T}}\,dt$ est de la forme

$$\frac{m\,d\theta}{\sqrt{A + B\theta + C\theta^2 + D\theta^3 + E\theta^4}}.$$

Si maintenant on suppose qu'il y ait, entre U et $u$, une relation provenant de l'élimination du paramètre $\sigma$ entre les équations

$$U = k\frac{a_1\sigma^2 + 2b_1\sigma + c_1}{\alpha\sigma^2 + 2\beta\sigma + \gamma}, \qquad u = k\frac{a_2\sigma^2 + 2b_2\sigma + c_2}{\alpha\sigma^2 + 2\beta\sigma + \gamma},$$

on trouve, pour l'équation des lignes asymptotiques,

$$\frac{d\theta}{\sqrt{A + B\theta + C\theta^2 + D\theta^3 + E\theta^4}} = \frac{\pm\,d\sigma}{\sqrt{A + B\sigma + C\sigma^2 + D\sigma^3 + E\sigma^4}},$$

et l'on sait que l'intégrale de cette équation est

$$\sqrt{F(\theta)} \pm \sqrt{F(\sigma)} = (\theta - \sigma)\sqrt{a + D(\theta + \sigma) + E(\theta + \sigma)^2},$$

$a$ désignant une constante arbitraire.

On se rend compte, comme il suit, du mode de génération de cette surface; des équations (58) résulte, entre T et $t$, une relation de la forme

$$\mathrm{a}T^2 + 2\mathrm{b}Tt + \mathrm{c}t^2 + 2\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}T + \mathrm{f} = 0,$$

et, puisque $t = \frac{M}{L}$, on en déduit

$$(\mathrm{a}T^2 + 2\mathrm{e}t + \mathrm{f})L^2 + 2(\mathrm{b}T + \mathrm{d})LM + \mathrm{c}M^2 = 0.$$

D'autre part, $TL = UN$; on en déduit aussi

$$\mathrm{a}U^2N^2 + 2\mathrm{e}UNL + \mathrm{f}L^2 + 2\mathrm{b}UNM + 2\mathrm{d}LM + \mathrm{c}M^2 = 0$$

ou bien

$$aU^2N^2 + 2(eNL + bNM)U + fL^2 + 2dLM + cM^2 = o.$$

ou enfin

$$(aUN + eL + bM)^2 + a(fL^2 + 2dLM + cM^2) - (eL + bM)^2 = o.$$

Cette équation est celle d'un cône du second ordre, qui touche les deux plans fixes représentés par l'équation

$$(59) \qquad a(fL^2 + 2dLM + cM^2) - (eL + bM)^2 = o.$$

Le sommet de ce cône est le point d'intersection des trois plans fixes $L = o$, $M = o$, $N = o$. Sur ce cône et sur la surface cherchée est située une conique, dont le plan a pour équation $P = uN$. Ce plan passe par une droite fixe, $P = o$, $N = o$; celle-ci coupe la surface du cône en deux points fixes, situés dans les deux plans définis par l'équation

$$fL^2 + 2dLM + cM'^2 = o.$$

Donc la surface considérée est décrite par une conique passant par deux points fixes, et tangente à deux plans fixes : pour définir entièrement le mouvement de cette conique, il suffit de connaître le lieu des points où elle touche l'un de ces plans. Or les points de contact de cette conique avec les deux plans représentés par l'équation (59) se trouvent dans deux plans qui ont pour équations, l'un

$$aUN + eL + bM = o,$$

l'autre

$$P = uN.$$

Entre U et $u$ il existe une relation du second degré

$$\varphi(U, u) = o,$$

et l'élimination de U, $u$, entre ces trois dernières équations, conduira nécessairement à l'équation d'un cône du second degré, sur lequel se trouvera le lieu cherché. Donc enfin la surface dont il s'agit est engendrée par le mouvement d'une conique qui se déplace en passant par deux points fixes et touchant deux plans fixes, chacun, en un point situé sur une conique, fixe dans ce plan. Ces deux coniques sont en perspective par rapport à l'un des points doubles de l'involution définie par les deux points fixes A, B, qui appartiennent aux deux coniques génératrices, et les deux points où la droite AB rencontre les deux plans fixes.

La réciprocité des droites $L = 0$, $M = 0$ et $N = 0$, $P = 0$ montre que la surface a quatre plans tangents singuliers; sur chacun d'eux le contact a lieu suivant une conique : les deux points A, B, et les deux points $A_1$, $B_1$ qui leur correspondent sur la droite $L = 0$, $M = 0$, sont des points coniques de la surface; en chacun d'eux, le cône des tangentes est du second degré.

35. L'équation

$$\sqrt{F(\theta)} \pm \sqrt{F(\sigma)} = (\theta - \sigma)\sqrt{\alpha + D(\theta + \sigma) + E(\theta + \sigma)^2}$$

conviendra également aux lignes asymptotiques de la surface définie par les équations

$$M = tL, \qquad P = uN, \qquad \mathfrak{T} L = \mathfrak{V} N,$$

avec les conditions

$$\mathfrak{T} = A\frac{G}{K}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{KH' - GH'}{G^2}\, d\theta, \qquad \mathfrak{V} = A_1\frac{G_1}{K_1}\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{K_1 H_1' - G_1 H_1'}{G_1^2}\, d\sigma,$$

où l'on a conservé les mêmes notations que précédemment, et où l'on a fait, en outre,

$$k(a_1\sigma^2 + 2b_1\sigma + c_1) = G_1,$$
$$k(a_2\sigma^2 + 2b_2\sigma + c_2) = H_1,$$
$$\alpha\sigma^2 + 2\beta\sigma + \gamma = K_1.$$

Si l'on pose

$$G = a_1(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2),$$

et si l'on décompose en une somme de fractions simples la fraction rationnelle écrite sous le signe $\int$, on voit que cette somme de fractions simples est de la forme

$$\frac{\mathcal{A}}{(\theta - \theta_1)^2} + \frac{\mathcal{B}}{(\theta - \theta_2)^2} + \mathcal{C}\left(\frac{1}{\theta - \theta_1} - \frac{1}{\theta - \theta_2}\right);$$

donc

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(KH' - HK')\, d\theta}{G^2} = -\frac{\mathcal{A}}{\theta - \theta_1} - \frac{\mathcal{B}}{\theta - \theta_2} + \mathcal{C}\log\frac{\theta - \theta_1}{\theta - \theta_2} + C$$

(C désignant une constante, qui dépend de $\theta_0$), et

$$\varpi = A\frac{G}{K}\left(\frac{-\mathcal{A}}{\theta-\theta_1} - \frac{\mathcal{B}}{\theta-\theta_2} - \mathcal{C}\log\frac{\theta-\theta_2}{\theta-\theta_1} + C\right).$$

En désignant par $A_1$, $B_1$ deux nouvelles constantes arbitraires, on peut écrire cette équation comme il suit

$$2(A_1\varpi K + B_1 G) = \frac{\mathcal{A}}{\theta-\theta_1} + \frac{\mathcal{B}}{\theta-\theta_2} + \mathcal{C}\log\frac{\theta-\theta_2}{\theta-\theta_1}.$$

D'ailleurs, la recherche des coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ donne lieu aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
2(a_1\beta - b_1\alpha) &= \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}(\theta_1+\theta_2),\\
2(a_1\gamma - c_1\alpha) &= -2\mathcal{A}\theta_2 - 2\mathcal{B}\theta_1 + \mathcal{C}(\theta_2^2-\theta_1^2),\\
2(b_1\gamma - c_1\beta) &= \mathcal{A}\theta_2^2 + \mathcal{B}\theta_1^2 - \mathcal{C}\theta_1\theta_2(\theta_2-\theta_1);
\end{aligned}$$

et la fonction $\varpi$ est définie par l'équation

$$\begin{vmatrix}
A_1\varpi K + B_1 G & \dfrac{1}{\theta-\theta_1} & \dfrac{1}{\theta-\theta_2} & \log\dfrac{\theta-\theta_2}{\theta-\theta_1}\\
\alpha_1\beta - b_1\alpha & 1 & 1 & \theta_1+\theta_2\\
\alpha_1\gamma - c_1\alpha & -2\theta_2 & -2\theta_1 & \theta_2^2-\theta_1^2\\
b_1\gamma - c_1\beta & \theta_2^2 & \theta_1^2 & -\theta_1\theta_2(\theta_2-\theta_1)
\end{vmatrix} = 0,$$

la fonction $\mho$ par une équation analogue

$$\begin{vmatrix}
A_2\mho K_1 + B_2 G_1 & \dfrac{1}{\sigma-\sigma_1} & \dfrac{1}{\sigma-\sigma_2} & \log\dfrac{\sigma-\sigma_2}{\sigma-\sigma_1}\\
a_1\beta - b_1\alpha & 1 & 1 & \sigma_1+\sigma_2\\
a_1\gamma - c_1\alpha & -2\sigma_2 & -2\sigma_1 & \sigma_2^2-\sigma_1^2\\
b_1\gamma - c_1\beta & \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & -\sigma_1\sigma_2(\sigma_2-\sigma_1)
\end{vmatrix} = 0.$$