MARCEL BRILLOUIN

Essai sur les lois d'élasticité d'un milieu capable de transmettre des actions en raison inverse du carré de la distance

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 201-240
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__201_0>

ESSAI

SUR

LES LOIS D'ÉLASTICITÉ

D'UN MILIEU CAPABLE DE TRANSMETTRE DES ACTIONS EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DE LA DISTANCE,

PAR M. M. BRILLOUIN,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTRODUCTION.

1. Le point de départ de ce travail se trouve dans les Chapitres V (Ire Partie) et XI (IVe Partie) du *Traité d'Électricité et de Magnétisme* de Maxwell, dont la première édition a paru en 1873. Ces Chapitres ont pour titres : *Mechanical action between electrical bodies. — Energy and stress.* Les propositions les plus importantes avaient été déjà publiées par Maxwell en 1861-62 dans le *Philosophical Magazine*, et en 1865 dans les *Transactions philosophiques*.

Précisant, pour la première fois je crois, la nature des actions élastiques d'un milieu capable de transmettre les actions électrostatiques, magnétiques et électromagnétiques, il donne l'expression des six composantes des actions élastiques (1), N, T, de Lamé, en fonction des forces électrostatique et électromagnétique ou, plus exactement, en fonction de ces forces et de l'*induction* électrostatique ou électromagnétique, pour les corps dont le pouvoir inducteur spécifique et la

(1) Dans le cas d'un milieu *magnétique*, les six composantes tangentielles ne se réduisent pas aux trois T, car le couple n'est pas nul. Dans ce cas, Maxwell a donné l'expression complète des neuf forces élastiques.

perméabilité magnétique ne sont pas des constantes. Arrivé là, il sait qu'il reste un second pas à faire, et il déclare n'y avoir pas réussi à son gré. Je cite textuellement ses paroles :

« It must be carefully borne in mind that we have made only one step in the theory of the action of the medium. We have supposed it to be in a state of stress, but we have not in any way accounted for this stress, or explained how it is maintained. This step, however, seems to me to be an important one, as it explains, by the action of the consecutive parts of the medium, phenomena wich were formerly supposed to be explicable only by direct action at a distance.

» 111. *I have not been able to make the next step*, namely to account, by mechanical considerations for this stress in the dielectric. *I therefore leave the theory at this point*, merely stating what are the other parts of the phenomenon of induction in dielectrics..... » (Vol. I, Part. I, Chap. V, p. 132, 1873, 1re éd.)

Et plus loin (Vol. II, 1re éd., Part. IV, Chap. XI, p. 257):

» 645. In explaining the electromagnetic force by means of a state of stress in a medium, we are only following out the conception of Faraday (1), that the lines of magnetic force tend to shorten themselves and that they repel each other when placed side by side. All that we have done is to express the value of the tension along the lines, and the pressure at right angles to them, in mathematical language, and to prove that the state of stress thus assumed to exist in the medium will actually produce the observed forces on the conductors wich carry electric currents.

» *We have asserted nothing as yet with respect to the mode in which this state of stress is originated and maintained in the medium.* We have merely shewn that it is possible to conceive the mutual action of electric currents to depend on a particular kind of stress in the surrounding medium, instead of being a direct and immediate action at a distance.

» *Any further explanation of the state of stress, by means of the mo-*

(1) *Exp. Res.*, 3266, 3267, 3268.

tion of the medium or otherwise must be regarded as a separate and independent part of the theory, wich may stand or fall without affecting our present position. (See art. 822.)

» In the first Part of this Treatise (art. 108) we shewed that the observed electrostatic forces may be conceived as operating through the intervention of a state of stress in the surrounding medium. We have now done the same for the electromagnetic forces, and it remains to be seen whether the conception of a medium capable of supporting these states of stress is consistent with other known phenomena, or whether we shall have to put it aside as unfruitful.

» In a field in which electrostatic as well as electromagnetic action is taking place, we must suppose the electrostatic stress described in Part I to be superposed on the electromagnetic stress wich we have been considering. »

2. Le renvoi de l'art. 822 est relatif aux quelques pages (408-417, On the hypothesis of molecular vortices) où Maxwell rappelle, en trop peu de mots, l'hypothèse particulière, sur la nature du milieu capable de transmettre les actions électriques, qu'il a développée en 1861 et 1862 dans cinq articles du *Philosophical Magazine*, articles très instructifs pour qui les étudie, malgré la complication de l'hypothèse.

La citation, lue entre les lignes, contient une remarque fondamentale, qui n'y est pas textuellement exprimée :

Le milieu capable de transmettre les actions électriques n'est pas un de ces milieux élastiques que l'on étudie dans la théorie ordinaire de l'élasticité, et dont les réactions élastiques sont proportionnelles aux déformations.

Il est impossible d'attribuer un autre sens aux phrases soulignées et d'admettre que Maxwell se soit ingénié à créer de toutes pièces un milieu convenable, alors qu'il aurait suffi d'appliquer une théorie banale. Il est en effet très facile de démontrer cette proposition.

Il reste donc à découvrir les *lois d'élasticité* d'un milieu, simple ou composé, tel que les actions élastiques puissent s'exprimer en fonction de la force électrique ou magnétique au moyen des formules de Maxwell.

C'est ce problème que je me suis proposé de traiter. Le Mémoire actuel ne contient guère que des préliminaires, et le résultat n'est pas très encourageant; mais je crois qu'il définit complètement la nature du problème et indique exactement la méthode qu'il convient de suivre pour le traiter. Je suis d'ailleurs convaincu que Maxwell devait être en possession, il y a plus de vingt-cinq ans, de tout ce qu'il y a d'exact dans les pages qui vont suivre, et que les éditeurs de ses œuvres devront en retrouver la trace dans ses papiers.

Programme.

3. L'importance de la question n'est pas philosophique. Il ne s'agit nullement de savoir si l'on peut faire disparaître de la Science toute notion de force agissant à distance, mais seulement de savoir si les forces agissant à ces distances, que le physicien nomme grandes ou finies, peuvent être remplacées par les actions élastiques d'un milieu que le physicien peut considérer comme continu, parce qu'un volume de ce milieu inférieur à tout ce qu'on peut mesurer ($< 10^{-21}$ millimètre cube, par exemple) jouit encore de toutes les propriétés d'un volume appréciable.

Ce milieu sera-t-il continu, au sens mathématique, ou formé de particules séparées? Les actions élastiques s'exerceront-elles à distance entre les particules séparées ou seulement au contact et par choc? Peu importe. La question n'en a pas moins une importance physique capitale, car il est difficile d'échapper à la conviction de l'existence d'un ou de plusieurs de ces milieux, au moins pour les phénomènes lumineux et électriques.

D'autre part, dans ses Leçons autographiées *On the molecular motions*, sir W. Thomson s'élève fortement, à plusieurs reprises, contre la théorie électromagnétique de la lumière, qu'il regarde comme un retour en arrière, parce qu'elle n'est pas une théorie purement mécanique. Qu'une hypothèse mécanique rende compte de tous les phénomènes électriques, et les objections de sir W. Thomson auront perdu toute raison d'être. Or nous n'avons aucune raison expérimentale de regarder la lumière comme liée directement aux déplacements de chaque point du milieu qui la transmet, plutôt qu'aux déformations locales de chaque élément de volume ou à toute autre quantité périodiquement variable avec les déplacements. De même, il n'existe aucune preuve expérimentale que le milieu *éther* doive suivre les lois d'élasticité des solides. L'étude de l'Optique ne nous fournit donc aucun renseignement précis sur les actions élastiques mises en jeu; l'étude de l'Électricité nous en fournit : c'est de celle-ci qu'il faut partir pour remonter de proche en proche à la définition du milieu inconnu avec le minimum d'hypothèses.

4. Quelques-unes, cependant, ne semblent pas pouvoir être évitées :

1° Le milieu inconnu est un milieu *mécanique*. Les conditions d'équilibre sont celles que fournit la Statique. Les équations du mouvement sont celles que fournit la Dynamique.

Rien ne nous autorise à croire qu'il en soit ainsi; les principes de la Statique et de la Dynamique sont des principes expérimentaux, établis pour ces corps saisissables qui sont plongés dans le milieu universel et en sont peut-être formés, suivant l'hypothèse des atomes tourbillons; il n'est point certain que ce soient des principes élémentaires, applicables à ce milieu lui-même. Si nous faisons cette hypothèse, ce n'est point pour sa vraisemblance, c'est par impuissance d'en faire une autre sans entrer dans le domaine de la fantaisie : c'est la seule hypothèse qui soit déterminée.

Si, cependant, les propriétés qu'elle impose au milieu universel rendaient l'existence de celui-ci impossible, après examen approfondi, il n'est pas certain qu'on ne puisse découvrir les lois de la Dynamique spéciale de ce milieu, nécessaires pour que son existence rende compte à la fois des phénomènes physiques et de la Dynamique particulière de la matière ordinaire.

2° Les états d'équilibre électrique ou magnétique observés sont des états d'équilibre *instantané* ou *moyen* du milieu. Ils peuvent provenir, soit de l'équilibre du milieu *à chaque instant en tout point*, soit de la *compensation entre des actions périodiques* se succédant à court intervalle. M. Bjerkness a donné des exemples nombreux de ce dernier genre d'équilibre d'un *liquide*, lorsqu'il y a un potentiel des vitesses; on sait alors que les actions sont analogues à celles qu'il s'agit d'expliquer, mais non identiques. On peut se demander si, dans un milieu où les actions tangentielles peuvent produire des mouvements qui n'ont pas de potentiel des vitesses, on n'obtiendrait pas l'analogie directe.

3° *Le milieu, s'il est unique, ne subit que des déplacements continus*. C'est cette condition qui exclut les milieux à réactions élastiques proportionnelles aux déformations. C'est aussi pour éviter cette condition que Maxwell, dans son hypothèse particulière (*Phil. Mag.*, 1861-1862), a imaginé un milieu complexe, formé d'une infinité de petites cellules contenant l'un des milieux, et dont les parois minces, constituées par le second milieu, sont des surfaces de discontinuité pour les vitesses du premier milieu; dans chaque cellule, le premier milieu liquide tourne autour d'un axe parallèle aux lignes de force magnétique avec une vitesse angulaire proportionnelle à la force magnétique. Les cellules s'orientent alors suivant les tubes de force, et la pression exercée par le liquide tournant sur les parois latérales de la cellule est inférieure à celle exercée sur les bases d'une quantité proportionnelle à la force centrifuge, c'est-à-dire au carré de la vitesse de rotation. Les mouvements que la matière des parois prend sous l'influence de la différence des vitesses du liquide de part et d'autre donnent lieu à un transport qui correspond aux courants électriques. On voit qu'ici la distribution des forces élastiques nécessaire n'est qu'une distribution *moyenne dans l'espace*.

4° Il semble bien difficile, au moins au début, de tenir compte de la présence du corps matériel dans lequel se produit le phénomène électrique, autrement que par la variation de certains coefficients caractéristiques de l'état du milieu universel dans les divers corps. On continuera à attribuer entièrement au milieu la charge électrique, l'aimantation, le courant, en restreignant le rôle du corps matériel à la production de discontinuités locales dans le milieu universel. C'est une hypothèse qui, comme la première, n'a pour elle que l'impossibilité d'en choisir une autre qui ne soit pas encore plus arbitraire.

5. Plan d'une étude complète : A. *Lois de Coulomb et d'Ampère. — Recherche des expressions les plus générales des forces élastiques, en fonction des quantités qui définissent l'état du champ au même point.* — Toute cette partie du problème a été traitée par Maxwell.

B. *Examen de chacun des trois modes d'explication distincts : 1° mi-*

lieu unique ou double en état d'équilibre; 2° *milieu unique ou double en état vibratoire permanent;* 3° *milieu unique ou double en état de rotation élémentaire.* — Lorsque deux milieux se pénètrent, on doit distinguer deux cas principaux : 1° milieux intimement mélangés et séparément continus en tous sens; 2° milieux occupant des portions distinctes de l'espace, et tels que la présence de l'un crée des surfaces de discontinuité nombreuses au milieu de l'autre. Je puis dire, dès à présent, que c'est cette dernière structure qui permet d'établir les relations les plus directes et les plus simples entre les quantités électriques et les déformations.

Dans chacun de ces trois cas principaux, on cherchera comment il faut particulariser les indéterminées pour que les forces élastiques, constantes ou moyennes aient les expressions données par Maxwell. On aura ainsi des relations entre les quantités électriques et les quantités géométriques ou cinématiques qui définissent la déformation ou le mouvement permanent du milieu; ces relations définiront, dans chacune des trois hypothèses principales, la *nature* géométrique ou mécanique de la masse électrique, de la force électromotrice, de l'intensité de courant, etc.

Enfin, des considérations géométriques ou cinématiques permettront d'écrire les équations à intégrer pour tirer l'état de déformation du milieu de la connaissance du champ électrique.

C. Lorsqu'on aura dressé la liste complète des hypothèses compatibles avec l'état d'équilibre électrique (et le nombre en sera très restreint), on examinera quelles conséquences elles fournissent pour le milieu en mouvement. L'emploi méthodique des lois de l'induction électrodynamique, de la loi de Joule et du principe de l'équivalence, conduira soit au rejet de l'hypothèse examinée, soit à la définition de la nature de la chaleur dans cette hypothèse. Loin de tout corps matériel ordinaire, il faudra que les équations du mouvement donnent pour lois de propagation de cette chaleur celles de la chaleur rayonnante, c'est-à-dire celles de l'optique géométrique et physique. La loi de Joule, d'une part, et les lois de la conductibilité de Fourier, de l'autre, limiteront les hypothèses possibles sur la nature des corps matériels ordinaires, en même temps qu'elles renseigneront sur ce qu'on doit entendre par *température*. On voit facilement comment devront être employées ensuite les conditions fournies par la Mécanique et la Thermodynamique.

6. En procédant de proche en proche, il semble donc que l'état actuel de la science expérimentale permette de déterminer rigoureusement et de réduire à un très petit nombre les hypothèses cosmogoniques compatibles avec nos connaissances. Si l'on pouvait être assuré d'avoir toujours fait des énumérations complètes là où le raisonnement mathématique ne pourra pas être employé, c'est-à-dire pour l'hypothèse initiale sur le milieu universel et pour l'hypothèse correspondante sur la matière ordinaire, on aurait formé toutes les hypothèses mécaniques possibles. Peut-être même les lois actuelles de la Physique comprennent-elles plus de conditions qu'il n'en faut pour que la détermination de l'hypothèse mécanique soit complète et unique. Avant d'arriver à la fin du programme de ces recherches, on resterait en présence d'une seule hypothèse; si, confrontée avec les phénomènes non utilisés pour l'établir, elle en rendait compte exactement, elle acquerrait ainsi une grande probabilité.

Quelque difficulté que doivent présenter de pareilles recherches, il m'a paru pourtant intéressant de noter l'ordre dans lequel on peut employer les lois expérimentales pour déterminer de proche en proche, avec le minimum d'arbitraire, une ou plusieurs images mécaniques du monde physique, si toutefois il en existe (n° 4).

CHAPITRE I.

LOIS DES FORCES ÉLASTIQUES EN FONCTION DE LA FORCE ÉLECTRIQUE. MAXWELL.

7. Commençons par classer les lois physiques dont il s'agit de rendre compte, d'après leur degré de certitude expérimentale.

Les phénomènes électrostatiques se déduisent rigoureusement de la loi de Coulomb et de la propriété caractéristique des corps conducteurs quand les seuls isolants qui aient un rôle appréciable sont l'air ou les gaz permanents; il en est de même s'il y a des isolants de très petites dimensions chargés d'une manière permanente, par frottement ou par contact avec un corps électrisé.

Les lois de l'électrodynamique, telles que les a formulées Ampère, s'appliquent exactement aux courants constants, lorsqu'il n'y a pas d'autre milieu magnétique que l'air, les gaz permanents, et les métaux bons conducteurs (fer, nickel, cobalt exceptés). Les lois de Coulomb et de Laplace les complètent lorsqu'il y a des aimants permanents saturés, dont l'aimantation est invariable.

Telles sont les lois dont il faut rendre compte en toute rigueur quand la transmission se fait à travers l'air, parce qu'elles sont bien établies par l'expérience. Toutefois elles n'ont été établies que pour des distances moyennes, ni très grandes, ni très petites, et rien ne nous autorise à penser qu'elles restent aussi simples aux très petites distances. Le précieux contrôle de Maxwell (Cavendish, note 19, p. 417) n'a de valeur que jusqu'à la distance minimum des surfaces voisines des deux sphères concentriques, soit $0^{m},02$ environ; bien au contraire, l'existence des différences de potentiel au contact de deux corps, les phénomènes de polarisation des électrodes, doivent mettre en garde contre une application stricte de la loi de Coulomb jusqu'aux plus petites distances. Enfin, toutes les expériences ont été faites à la surface de la Terre, et aucune observation astronomique n'a fourni jusqu'ici la moindre occasion de contrôle extra-terrestre; c'est donc par une généralisation sans fondement expérimental qu'on a l'habitude de considérer ces lois comme indépendantes du voisinage de la Terre, et les constantes numériques qu'elles contiennent comme des constantes absolues. On a toujours supposé que la pesanteur et les forces électriques sont des forces indépendantes, sans qu'on l'ait jamais démontré; il n'est nullement évident que la composante, suivant une direction, de la force totale qui agit sur un corps soit la somme de la composante de son poids, et de la composante des attractions électriques qu'il subit d'après la loi de Coulomb, sans aucun terme qui dépende à la fois des attractions électriques et newtoniennes.

8. Traiter cette composante, fonction des attractions électriques et newtoniennes, comme la somme de deux fonctions, l'une uniquement électrique, l'autre uniquement newtonienne, c'est faire une hypothèse gratuite. Pour trancher cette question, il faudrait comparer les actions internes de deux systèmes électrisés rigoureusement identiques à tous égards, sauf l'orientation par rapport à la Terre; l'un des systèmes ayant son plan de référence horizontal, l'autre vertical et la direction du mouvement possible étant horizontale dans le premier, verticale dans le deuxième. Ai-je besoin d'ajouter que jamais une expérience de ce genre n'a été faite? Fût-elle négative, elle laisserait encore en

Fig. 1.

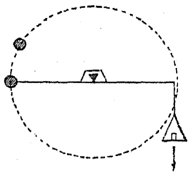
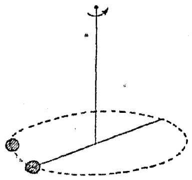


Fig. 2.

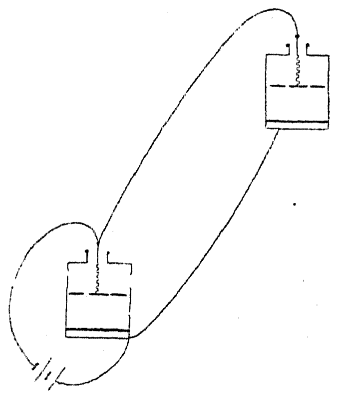


suspens une autre question : la constante de la loi de Coulomb (ou, si l'on veut, l'unité de masse électrique) est-elle indépendante de l'intensité de la pesanteur ? Des mesures absolues faites en différents lieux de la Terre pourraient seules fournir une réponse et elles ne semblent pas réalisables avec la précision nécessaire : je me contenterai d'en énoncer le principe, matériellement impraticable. Deux électromètres absolus identiques seraient installés l'un dans la plaine, l'autre au sommet d'une haute montagne; deux conducteurs de même métal que les électromètres relieraient d'une part leurs cages, d'autre part leurs conducteurs mobiles, et seraient *parfaitement isolés*. Mesurant la même différence de potentiel au moyen des deux appareils, on examinerait si les forces exercées à la même distance dans les deux appareils sont égales ou inégales. On simplifierait les mesures si l'on avait un moyen de transporter un étalon de force électromotrice ou de capacité du haut en bas de la montagne; malheureusement ces étalons sont les moins bien réalisés jusqu'à ce jour.

Les mêmes remarques s'appliquent aux lois de l'électromagnétisme. Aucune expérience faite jusqu'à ce jour ne permet d'affirmer qu'elles soient indépendantes de l'orientation du système mobile par rapport à a verticale, et de l'intensité de la pesanteur.

Pourtant la relation que Weber, Thomson, Maxwell ont mise en évidence entre la constante de la loi de Coulomb, celle de la loi d'Ampère (reliées par la loi d'Ohm) et une vitesse, qui est numériquement identique à la vitesse de la lumière, semble indiquer que les phénomènes électriques sont indépendants de la présence de la Terre ou bien que la dépendance est la même pour les phénomènes électrostatiques et

Fig. 3.



électrodynamiques. Cette remarque conduit à rejeter la méthode qui aurait pu paraître la plus sensible à employer pour la recherche de l'influence de l'intensité de la pesanteur : la comparaison du coefficient d'induction d'une bobine sur elle-même, d'une capacité géométrique et d'une résistance. On n'en tirerait vraisemblablement, en haut comme en bas, que la vitesse de la lumière.

Si l'on réfléchit que l'intensité de la pesanteur ne varie que de *un millième* entre la base et le sommet du pic du Midi, on doit s'avouer qu'aucun moyen d'observation ne permet actuellement d'en découvrir l'influence sur les phénomènes électriques, si elle existe. Aussi n'est-ce pas au point de vue pratique que je me suis livré à cette discussion, mais seulement au point de vue logique; car, s'il importe d'expliquer tout ce que l'on observe, il n'importe pas moins de savoir où commence le désaccord *observable* entre l'explication et la réalité. On verra, à la fin de ce Mémoire, comment certaines difficultés d'interprétation du résultat m'ont amené à cette discussion (n° 28).

9. S'il y a d'autres diélectriques que les gaz ou d'autres milieux magnétiques, les lois expérimentales sont très mal connues. On rend compte d'une partie des phénomènes présentés par ces corps, en supposant qu'ils s'électrisent ou s'aimantent sous l'influence de la force électrique ou magnétique dans la direction de cette force. On sait comment Thomson et Maxwell ont exposé cette théorie.

Si l'intensité d'aimantation était proportionnelle à la force magnétisante au même point, la constante seule de la loi d'Ampère serait changée; les actions dans un espace complètement rempli du nouveau milieu seraient proportionnelles aux actions dans l'air. Mais il n'en est pas ainsi; l'aimantation est une fonction de la force magnétisante qui croît d'abord lentement, puis très vite, et semble tendre vers un maximum. Cela est vrai non seulement pour le fer, le nickel, le cobalt, mais même, d'après des recherches récentes, pour des dissolutions de ces divers métaux; si l'on essayait d'évaluer directement les actions électrodynamiques dans ces dissolutions, en faisant abstraction du milieu, on ne retrouverait plus rien des lois d'Ampère, ni pour la direction ni pour la distance. Enfin, plusieurs de ces corps sont susceptibles d'acquérir une aimantation permanente sous l'influence des forces magnétiques, et l'hypothèse que l'aimantation *actuelle* dépende uniquement de la force magnétisante *actuelle* au même point est notoirement insuffisante. Je laisserai entièrement de côté tous les corps dont l'aimantation ne peut pas être traitée approximativement comme *rigide* et indépendante du champ magnétique actuel, faute de savoir quelle loi expérimentale leur appliquer.

Les diélectriques présentent des difficultés analogues. Le phénomène connu sous le nom d'*absorption électrique*, la variation du pouvoir inducteur spécifique avec la durée de charge, qui ne sont peut-être que deux aspects expérimentaux distincts d'une même propriété, s'ajoutent à la variation du pouvoir inducteur spécifique en fonction de la force électrique, pour rendre provisoirement impossible l'établissement de formules mathématiques correspondant aux phénomènes réels. Il faut donc laisser de côté tous ces diélectriques.

Quant aux phénomènes qui dépendent du mouvement des corps ou de variations d'intensité des courants, il est prudent de n'y point songer au début. Une structure du milieu universel, capable de rendre compte des effets statiques, donnera immédiatement les équations des mouvements lents du milieu. Si ces équations fournissent l'explication des courants induits, ce sera une assez forte présomption en faveur de ce milieu.

S'il n'en est pas ainsi, on devra tirer des lois des courants induits les variations que subissent les actions élastiques du milieu, lorsqu'elles sont rapidement variables au lieu d'être constantes.

10. *Gravitation*. — La loi de Newton donne, pour les composantes de la force appliquée à un point mobile m et provenant de points m_1, m_2, ...

$$X = -mf\sum m_1 \frac{x - x_1}{r_1^3}, \qquad \ldots,$$

en appelant f une constante qui dépend du choix des unités. On sait qu'on obtient les expressions les plus simples en introduisant le potentiel de la pesanteur Π,

$$\Pi = f\sum \frac{m_1}{r_1},$$

qui donne

$$X = +m\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \qquad Y = +m\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \qquad Z = +m\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

et qui satisfait à la condition différentielle

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = -4\pi f p,$$

en appelant p la densité de la matière au point (x, y, z).

Le travail de la gravitation sur la masse m, amenée d'une très grande distance à sa position actuelle, est

$$m\Pi,$$

si l'on suppose la position initiale assez éloignée de toutes les masses attirantes pour que le potentiel Π y soit négligeable. L'énergie de cette masse, dans le voisinage des autres, est donc

$$\mathcal{E} = E + m(\Pi_0 - \Pi),$$

Π_0 est une constante positive que la loi d'attraction newtonienne ne suffit pas à faire connaître, puisqu'elle doit être complétée pour les très petites distances, en tenant compte de la compressibilité des corps.

11. *Électrostatique.* — La loi de Coulomb

$$f = -\frac{1}{K}\frac{mm'}{r^2}$$

conduit à des résultats analogues aux précédents. Appelons

V le potentiel électrostatique;
μ la densité électrique au point (x, y, z);
K un coefficient constant dans l'air et les gaz, et qui, dans les autres milieux, correspond au pouvoir inducteur spécifique

$$V = \frac{1}{K}\sum\frac{m}{r},$$

$$K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -4\pi\mu.$$

La force sur une masse $\mu\,dx\,dy\,dz$, rapportée à l'unité de volume, est

$$X = -\mu\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\mu\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\mu\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Si l'on prend pour zéro de potentiel le potentiel à une très grande distance des masses agissantes, le travail des forces électriques lorsque la densité μ au point (x, y, z) s'accroît de $d\mu$, en prenant la masse $d\mu\,dx\,dy\,dz$ au lieu où V est nul, est

$$-V\,d\mu\,dx\,dy\,dz,$$

quel que soit le chemin suivi.

Quand toute la distribution des masses est modifiée d'une quantité infiniment petite correspondant à un accroissement dV du potentiel, on a

$$d\mu = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial^2\,dV}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\,dV}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\,dV}{\partial z^2}\right) = -\frac{K}{4\pi}\Delta_2(dV),$$

et le travail total des forces électriques est

$$dW = +\frac{K}{4\pi}\int\int\int V\,\Delta_2(dV)\,dx\,dy\,dz$$
$$= -\frac{K}{4\pi}\int\int\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial\,dV}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial\,dV}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial\,dV}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+\frac{K}{4\pi}\int\int V\frac{\partial\,dV}{\partial n}\,dS.$$

L'intégrale superficielle s'annule quand V et dV sont petits de l'ordre de $\frac{1}{r}$ à une grande distance r, et il reste

$$dW = -\frac{K}{8\pi}\,d\int\int\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Pour produire la distribution actuelle, il a donc fallu dépenser la quantité totale d'énergie E,

$$E = \frac{K}{8\pi}\int\int\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz$$

ou encore

$$E = -\frac{K}{8\pi}\int\int\int V\,\Delta_2 V\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int\int\int V\mu\,dx\,dy\,dz.$$

Ces deux expressions, mathématiquement équivalentes, correspondent à deux interprétations physiques distinctes des phénomènes électriques, si l'on regarde la distribution de l'énergie comme représentée par l'élément intégré. D'après la première expression, l'énergie est répandue dans tout l'espace proportionnellement au carré de la force électrique; l'énergie électrique a son siège dans l'espace qui environne les corps électrisés, et que l'on suppose occupé par un milieu matériel dont les actions élastiques produiraient les forces de Coulomb. La seconde expression, au contraire, donne pour siège à l'énergie la masse électrique elle-même. En l'absence de raisons expérimentales décisives, il est permis d'examiner les conséquences de la première manière de voir; j'admettrai donc, pour expression de l'énergie de l'unité de volume,

$$\frac{K}{8\pi}\Delta_1 V = \frac{K}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right],$$

en remarquant que cette expression n'est pas complète si la loi de Coulomb cesse d'être applicable aux très petites distances.

Pour un système de masses pesantes et compressibles, l'évaluation complète de l'énergie du milieu est impossible; on peut dire seulement qu'elle est la somme de trois termes, un positif dû à la compressibilité en faisant abstraction de la pesanteur, un de signe inconnu provenant à la fois de la compressibilité et de la pesanteur, et un troisième, négatif,

$$-\frac{1}{8\pi f}\left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)^2\right]$$

qui ne dépend que de la pesanteur.

12. *Électrodynamique*. — Soient u, v, w les composantes de la densité du courant au point (x, y, z), suivant les trois axes coordonnés. Je suppose que ces courants sont constants et qu'ils font partie d'un système de courants fermés; on peut alors représenter l'action du système entier sur un élément en prenant comme intermédiaire le champ magnétique produit par les courants. Je définirai la force magnétique α, β, γ en chaque point par la formule élémentaire de Laplace

$$\frac{i\,ds \sin\omega}{r^2},$$

qui donne

$$4\pi u = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \qquad 4\pi v = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \qquad 4\pi w = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

avec la condition qu'il n'y a pas de masse magnétique

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Les forces exercées sur l'unité de volume parcouru par le courant sont alors

$$X_1 = k(v\gamma - w\beta), \qquad Y_1 = k(w\alpha - u\gamma), \qquad Z_1 = k(u\beta - v\alpha);$$

k est une constante qui dépend des unités et du milieu.

Les courants sont fermés ou indéfinis; car, lorsqu'on admet la loi électromagnétique de Laplace, les expressions de u, v, w en α, β, γ

satisfont à la condition (¹)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

L'évaluation du travail n'est pas aussi simple que pour une masse électrique; la condition que les courants restent fermés oblige à faire croître la densité du courant, non pas dans un élément de volume seulement, mais à la fois dans un tube fermé ou indéfini, avec une loi déterminée de distribution de l'intensité. La répartition du travail total entre les divers éléments est nécessairement arbitraire. Enfin, on doit écrire que l'intensité du courant dans le tube reste constante pendant tout le mouvement; si la section varie, la densité du courant doit varier en raison inverse de la section. En tenant compte de ces deux conditions, on trouve que le travail nécessaire pour amener de l'infini dans le champ un courant fermé d'intensité très petite $d\mathrm{I}$ a pour expression, comme on le voit, par une application facile du théorème de Stokes,

$$d\mathrm{I}\int\left(\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial s}+\mathrm{G}\frac{\partial y}{\partial s}+\mathrm{H}\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds,$$

en posant

$$k\alpha=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}-\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial z},\qquad k\beta=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x},\qquad k\gamma=\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}-\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}=0,$$

ce qui donne

$$4\pi ku=-\Delta_2\mathrm{F},\qquad 4\pi kv=-\Delta_2\mathrm{G},\qquad 4\pi kw=-\Delta_2\mathrm{H}.$$

Ce travail est la différentielle d'une fonction déterminée uniquement par la distribution des forces magnétiques dans le champ et la position qu'y occupe le circuit fermé. La production du champ total

(¹) Si la loi de Laplace subsistait lorsque les courants sont variables, aucune accumulation d'électricité ne pourrait se produire sur un conducteur. C'est cette contradiction qui est l'origine des diverses hypothèses complémentaires de plusieurs physiciens éminents anglais et allemands.

exigera donc une dépense d'énergie

$$\frac{1}{8\pi}\int\int\int(\mathrm{F}u+\mathrm{G}v+\mathrm{H}w)\,dx\,dy\,dz=\frac{k}{8\pi}\int\int\int(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,dx\,dy\,dz$$

correspondant à la disposition des courants les uns par rapport aux autres, quels que soient les conducteurs dans lesquels ils circulent. L'entretien de ces courants dans des conducteurs de nature déterminée exige une dépense de *puissance* en relation avec la nature des conducteurs; mais, si l'on a soin de maintenir l'intensité invariable, cette dépense ne joue aucun rôle direct dans les actions à distance dont je veux seulement m'occuper. Ici, comme au n° 11, deux formes de l'énergie correspondent aux deux conceptions principales du mode d'action mutuelle, avec cette différence, pourtant, que la partie de l'énergie relative à un élément de courant n'appartient à celui-ci que s'il fait partie d'un courant d'intensité uniforme, fermé ou indéfini, dont la forme est d'ailleurs arbitraire. Adoptant la seconde expression, j'examinerai ses conséquences pour la nature du milieu interposé.

13. En résumé, l'expérience nous fournit deux résultats : l'un, direct, relatif aux forces qui agissent sur un élément de volume; l'autre, résultant d'une interprétation, relatif à l'énergie de l'unité de volume.

Les composantes de la force sur l'unité de volume sont les sommes des termes $p\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}-\mu\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}+k(v\gamma-w\beta)$ et de termes complémentaires inconnus lorsque les masses agissantes sont extrêmement voisines.

L'énergie totale de l'unité de volume est la somme des termes

$$-\frac{1}{8\pi f}\Delta_1\mathrm{H}+\frac{\mathrm{K}}{8\pi}\Delta_1\mathrm{V}+\frac{k}{8\pi}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

et d'un terme considérable qui dépend principalement de l'état de condensation de la matière pesante.

Mais, si la nature de ces diverses actions n'est pas entièrement distincte, il peut se faire qu'on n'ait pas là les expressions complètes des forces et de l'énergie, et qu'il y manque des termes correspondant aux actions mutuelles de la matière pesante et des corps électrisés, des corps électrisés et des courants, etc. Parmi les nombreuses hypothèses qu'on peut faire sur ce sujet, je me bornerai à signaler la plus remarquable : c'est celle qui donne à l'énergie la forme suivante

$$\frac{1}{8\pi}\sum_{(x,y,z)}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\sqrt{K}\pm\alpha\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\sqrt{K}\pm\alpha\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)$$

et aux forces la forme

$$X=p\frac{\partial \Pi}{\partial x}-\mu\frac{\partial V}{\partial x}+k(v\gamma-w\beta)\pm\left[-\mu\alpha\sqrt{\frac{k}{K}}+\sqrt{Kk}\left(v\frac{\partial V}{\partial z}-w\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right],$$

les signes supérieurs et inférieurs se correspondant.

14. Considérons un milieu élastique dont les actions tangentielles sont égales deux à deux, incapable, par conséquent, de résister à un couple proportionnel à l'élément de volume et de rendre compte des actions magnétiques élémentaires, ni même des actions électrodynamiques, si l'hypothèse de Helmholtz est exacte (1). C'est le seul cas dont il sera question dans le présent Mémoire. Maxwell a montré (*El.*, t. I, n° 107; t. II, n° 141. — *Phil. Mag.*, 1861-62), et il est facile de contrôler que des actions élastiques

$$N_1=\frac{1}{8\pi f}\left[\Delta_1\Pi-2\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{K}{8\pi}\left[\Delta_1 V-2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{k}{8\pi}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2),$$

$$T_1=\frac{-1}{4\pi f}\frac{\partial \Pi}{\partial y}\frac{\partial \Pi}{\partial z}+\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{k}{4\pi}\beta\gamma$$

produisent sur l'élément de volume les forces observées. Il suffit, pour s'en assurer, de former les expressions

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial T_3}{\partial y}+\frac{\partial T_2}{\partial z},$$

en tenant compte de la définition différentielle de p, μ, u, v, w.

---

(1) Cette hypothèse, d'ailleurs, attribuant à chaque élément de courant sa part d'énergie indépendamment du reste du courant fermé, paraît plutôt conforme à la conception d'actions directes à distance qu'à celle de transmission par un milieu.

Considérons, en particulier, un quelconque des trois systèmes de forces élastiques dont le système complet n'est que la superposition, et rapportons-le aux *lignes de force* correspondantes. Les quadriques des forces élastiques sont de révolution autour des lignes de force; sur tout plan méridien, la force élastique est pour la pesanteur une traction $\frac{\Delta_1 \Pi}{8\pi}$, pour l'électricité une pression $\left[\frac{K\,\Delta_1 V}{8\pi}, \frac{k(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{8\pi}\right]$; sur l'équateur, c'est une force égale en grandeur, pression pour la pesanteur, traction pour l'électricité.

Si, en électricité, les lignes de force tendent à se raccourcir et à s'élargir, selon le langage de Faraday, c'est l'inverse en pesanteur.

On pourrait, d'après cela, penser que les déformations du milieu auront la même symétrie et que, en présence d'un seul système de forces, les ellipsoïdes de déformation seront de révolution autour des lignes de force. Après plusieurs tentatives infructueuses, j'ai dû reconnaître qu'il est impossible de trouver une déformation permanente d'un milieu continu, douée de cette symétrie et satisfaisant aux conditions du problème (n° 25).

15. Avant d'aller plus loin, j'ai voulu m'assurer que les expressions de Maxwell, pour les forces élastiques, sont les plus générales qui puissent rendre compte des actions à distance de Coulomb et d'Ampère. Cela est facile : on obtiendra, en effet, toutes les forces élastiques admissibles en ajoutant aux expressions de Maxwell d'autres forces élastiques N′, T′, qui laissent le milieu en équilibre, car elles doivent satisfaire séparément aux équations

$$\frac{\partial N'_1}{\partial x} + \frac{\partial T'_3}{\partial y} + \frac{\partial T'_2}{\partial z} = 0.$$

L'hypothèse fondamentale est que les forces élastiques ne dépendent pas de p, μ, u, v, w, mais seulement des forces $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $\ldots$, γ. Écrivons donc que les N′, T′ sont des fonctions implicites de x, y, z, qui ne dépendent directement que de $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$, $\ldots$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, α, β, γ. Ordonnons les trois équations en tenant compte de la relation différentielle en

α, β, γ, le résultat devra être identiquement nul. On trouve ainsi, pour satisfaire à la première équation, que

$$
\begin{array}{llll}
N'_1 & \text{ne peut dépendre que de} & \dfrac{\partial \Pi}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial x}, \beta, \gamma; \\
T'_2 & \quad » \quad » \quad » & \dfrac{\partial \Pi}{\partial z}, \dfrac{\partial V}{\partial z}, \alpha, \beta; \\
T'_3 & \quad » \quad » \quad » & \dfrac{\partial \Pi}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial y}, \alpha, \gamma,
\end{array}
$$

avec les conditions

$$\frac{-\partial N'_1}{\partial\left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial x}\right)} = \frac{\partial T'_3}{\partial\left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial y}\right)} = \frac{\partial T'_2}{\partial\left(\dfrac{\partial \Pi}{\partial z}\right)}, \qquad \frac{-\partial N'_1}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)} = \frac{\partial T'_3}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)} = \frac{\partial T'_2}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)};$$

$$\frac{\partial N'_1}{\partial \beta} = \frac{\partial T'_3}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial N'_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial T'_2}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial T'_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial T'_2}{\partial \beta} = 0.$$

Les deux autres équations imposent de nouvelles conditions suffisamment indiquées par la symétrie :

$$
\begin{array}{llll}
T'_1 & \text{ne peut dépendre que de} & \alpha, \\
T'_2 & \quad » \quad » \quad » & \beta, \\
T'_3 & \quad » \quad » \quad » & \gamma.
\end{array}
$$

Il en résulte d'abord que les N' se réduisent à des constantes et, par la cinquième condition, qu'il en est de même des T'.

Ainsi les expressions les plus générales sont celles de Maxwell, augmentées chacune d'une constante arbitraire qui correspond à une déformation homogène du milieu produite par des causes extérieures quelconques.

Pour ne pas compliquer inutilement les premières recherches, je m'occuperai d'abord du cas où un seul système de forces entièrement arbitraires, α, β, γ, existe dans le milieu, sans imposer aucune restriction particulière. On a alors

$$N_1 = \frac{-k}{8\pi}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2) + N'_1, \qquad T_1 = \frac{k}{4\pi}\beta\gamma + T'_1, \qquad \varphi^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

$$\mathcal{E} = +\frac{k}{8\pi}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \mathcal{E}' = \frac{k}{8\pi}\varphi^2 + \mathcal{E}'.$$

Je chercherai quelles déformations continues sont compatibles avec les

N_1, T_1, sans tenir compte de l'expression de l'énergie; puis quelles limites cette expression de l'énergie impose. Enfin, je terminerai en examinant s'il est possible de rendre compte, au moyen d'un seul milieu, de deux ou plusieurs des systèmes de forces newtoniennes et électriques.

CHAPITRE II.

RECHERCHE DES LOIS D'ÉLASTICITÉ DU MILIEU.

16. *Propositions générales.* — Dans ce Chapitre, je supposerai le milieu homogène et isotrope, conformément aux lois généralement admises pour les actions électriques entre des corps plongés dans un milieu matériel, lui-même homogène et isotrope, et je vais chercher par quelles relations les forces élastiques doivent être liées aux déformations du milieu pour transmettre des actions en raison inverse du carré de la distance. On pourrait être tenté d'attribuer au milieu inconnu une partie des propriétés des corps élastiques à actions proportionnelles aux déformations; je vais montrer d'abord que cela n'est pas permis en général.

1° *Le milieu inconnu n'est pas un milieu élastique ordinaire à actions élastiques proportionnelles aux déformations.*

C'est ce dont on peut s'assurer de bien des manières : j'en indiquerai plusieurs à cause de l'importance de la proposition.

A. Les six forces élastiques sont définies en fonction des trois composantes α, β, γ de la force électrique. Éliminons α, β, γ; il reste trois relations finies entre les six forces élastiques. L'une d'elles est

$$(N_1 + N_3 - N'_1 - N'_3)(N_1 + N_2 - N'_1 - N'_2) - (T_1 - T'_1)^2 = 0.$$

Introduisons les expressions de Lamé pour les forces élastiques des corps isotropes; il vient

$$\begin{aligned}&\lambda(\lambda+\mu)\theta^2+\mu(\lambda+\mu)\theta\,D_x+\mu^2(D_yD_z-\tfrac{1}{4}G_x^2)\\&\quad-2(2N'_1+N'_2+N'_3)(\lambda+\mu)\theta+2\mu(N'_1+N'_2)D_y\\&\quad+2\mu(N'_1+N'_3)D_z+2\mu T'_1G_x+(N'_1+N'_2)(N'_1+N'_3)-T'^2_1=0.\end{aligned}$$

Cette relation doit être satisfaite, quelle que soit la direction des axes, ce qui ne peut avoir lieu que si les expressions de Lamé pour les forces élastiques sont constamment et identiquement nulles; car on doit avoir

$$\begin{gathered}T'_1=T'_2=T'_3=0,\qquad N'_1=N'_2=N'_3=0,\\ \mu=0,\qquad (\lambda+\mu)(D_x+D_y+D_z)=0.\end{gathered}$$

B. L'énergie de déformation des milieux ordinaires est une fonction du second degré des forces élastiques

$$A(N_1+N_2+N_3)^2+B(N_1N_2+N_1N_3+N_2N_3-T_1^2-T_2^2-T_3^2).$$

Celle du milieu inconnu est, au contraire, une fonction linéaire

$$\mathcal{A}(N_1+N_2+N_3).$$

Ces remarques paraissent avoir échappé à M. Vaschy (*Comptes rendus*, 1886-1887).

C. Les forces élastiques des corps ordinaires satisfont à six équations aux dérivées partielles du second ordre, faciles à former. Les six déformations

$$D_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \ldots,\qquad G_x=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\qquad \ldots$$

sont des dérivées des trois déplacements u, v, w. En éliminant ces trois déplacements, on trouve

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 D_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 D_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 G_z}{\partial x\,\partial y},\qquad 2\frac{\partial^2 D_x}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial G_x}{\partial x}+\frac{\partial G_y}{\partial y}+\frac{\partial G_z}{\partial z}\right),$$

et deux couples d'équations symétriques.

D'autre part, les milieux isotropes ordinaires donnent

$$2\mu D_x=N_1-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}(N_1+N_2+N_3),\qquad 2\mu G_x=2T_1,$$

et les N_1, T_1 des milieux ordinaires doivent satisfaire aux six équations différentielles

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(N_1+N_2+N_3)=2\frac{\partial^2 T_3}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial y\,\partial z}+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial y\,\partial z}(N_1+N_2+N_3)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial T_1}{\partial x}+\frac{\partial T_2}{\partial y}+\frac{\partial T_3}{\partial z}\right).$$

Il n'y a qu'à substituer dans ces six équations les expressions de $N_1, \ldots, T_3$ en α, β, γ pour reconnaître qu'elles ne sont satisfaites, ni quand α, β, γ est entièrement arbitraire, ni quand il est soumis à la condition restrictive électromagnétique

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0$$

ou à celles de l'électrostatique

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial\beta}{\partial x},\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial z}=\frac{\partial\gamma}{\partial x},\qquad \frac{\partial\beta}{\partial z}=\frac{\partial\gamma}{\partial y}.$$

Le résultat de la substitution est

$$\mu\left[\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$=(\lambda+2\mu)\left[\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}+\beta\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial x\,\partial y}+\beta\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right]$$

et

$$\mu\left(\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$
$$=(\lambda+2\mu)\left(\alpha\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\beta\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}-2\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial x}-\gamma\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^2\gamma}{\partial x\,\partial y}+\alpha\frac{\partial^2\beta}{\partial x\,\partial z}\right.$$
$$\left.+\gamma\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y}+\beta\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial z}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right).$$

Ces six *identités* sont incompatibles avec des valeurs de α, β, γ, qui ne se réduisent pas à de simples constantes.

17. 2° Plus généralement, *il est impossible de trouver une expression directe des déformations* D_x, D_y, D_z, G_x, G_y, G_z *en fonction de la force au même point* α, β, γ.

On s'en assure en écrivant que les D, G, dans les équations (1), ne dépendent de x, y, z que par l'intermédiaire de la force α, β, γ. On trouve ainsi

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
0 = {} & \frac{\partial D_x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial D_x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{\partial D_x}{\partial \gamma}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \frac{\partial D_y}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial D_y}{\partial \beta}\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial D_y}{\partial \gamma}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} \\
& + \frac{\partial^2 D_x}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 D_x}{\partial \beta^2}\left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 + \ldots + \frac{\partial^2 D_y}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \ldots \\
& + 2\frac{\partial^2 D_x}{\partial \alpha\,\partial \beta}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \ldots + 2\frac{\partial^2 D_y}{\partial \alpha\,\partial \beta}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \ldots \\
& - \frac{\partial G_z}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x\,\partial y} - \ldots - \frac{\partial^2 G_z}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \ldots - \frac{\partial^2 G_z}{\partial \alpha\,\partial \beta}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x}\right) - \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Les équations du second type ne sont pas moins compliquées. En ordonnant et écrivant que α, β, γ sont des fonctions arbitraires de x, y, z et que, par conséquent, il n'y a aucune relation finie entre leurs dérivées, sauf celles du magnétisme ou de l'électricité, il faut que les coefficients de toutes ces dérivées soient nuls. On trouve ainsi que toutes les dérivées de D_x, ..., G_z en α, β, γ doivent être nulles isolément et que, par suite, la déformation est indépendante du champ de force.

J'insisterai un peu pour éviter toute confusion : il est bien évident que, dans chaque cas particulier, D_x, ..., G_z sont des fonctions de x, y, z, qu'il en est de même de α, β, γ et qu'en général on pourra éliminer x, y, z entre ces équations et en tirer des expressions finies de D_x, ..., G_z en α, β, γ. Mais ces expressions n'auront de valeur que pour la distribution de force particulière α, β, γ qui a servi à les établir; ce sont celles qui résulteraient de l'intégration des six équations telles que (2) après substitution, à la place des $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, ..., de leurs expressions particulières en α, β, γ. Mais ce ne sont pas des expressions caractéristiques du milieu, et exprimant la loi de déformation en fonction de la force. Ce que je viens de démontrer, c'est qu'il est impossible de supposer que les six déformations soient entièrement déterminées par la force au même point.

Ainsi *la déformation locale n'est pas entièrement déterminée par les six composantes de la force élastique. La connaissance des forces élastiques n'équivaut pas à celle des déformations.*

Cette propriété de pouvoir remonter des forces élastiques aux déformations sans intégration est particulière aux milieux solides ordinaires, à déformations proportionnelles aux forces : elle n'est pas générale.

Le propriété générale, pour tous les milieux à élasticité parfaite, sans frottement interne, c'est la propriété inverse : *les forces élastiques sont des fonctions entièrement déterminées des déformations locales actuelles.* Mais l'exemple des fluides (liquides ou gaz) montre bien que les forces élastiques peuvent ne dépendre que *d'une partie des déformations;* par conséquent, une infinité de déformations peuvent produire les mêmes forces élastiques.

Pour achever de déterminer la déformation, il faut tenir compte des conditions de continuité et connaître, par conséquent, la distribution des forces élastiques. Des intégrations sont nécessaires.

Les déplacements continus u, v, w sont entièrement déterminés par les six équations (1), n° 16, et *trois* relations finies *caractéristiques du milieu* entre les six déformations D_x, ..., G_z et les forces α, β, γ.

Dans tout ce qui précède [n° 17 et équation (1), n° 16], les déplacements u, v, w et leurs dérivées, que j'ai appelées *les déformations* D_x, ..., G_z, ne sont astreintes à aucune limitation de grandeur.

18. *Recherche de la loi d'élasticité.* — Supposons maintenant que les déformations sont très petites; un accroissement infiniment petit dD_x, ..., dG_z de la déformation exige un travail

$$N_1\, dD_x + N_2\, dD_y + N_3\, dD_z + T_1\, dG_x + T_2\, dG_y + T_3\, dG_z.$$

et N_1, ..., T_3 sont les dérivées partielles d'une même fonction par rapport à D_x, ..., G_z. Comme nous connaissons les expressions des N, ..., T en α, β, γ, nous tirerons de là quinze équations du premier ordre entre les dérivées des α, β, γ par rapport aux D_x, ..., G_z :

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial N_1}{\partial D_y} = \dfrac{\partial N_2}{\partial D_x}, & \ldots, & \dfrac{\partial T_1}{\partial G_y} = \dfrac{\partial T_2}{\partial G_x}, & \ldots, \\
\dfrac{\partial N_1}{\partial G_x} = \dfrac{\partial T_1}{\partial D_x}, & \dfrac{\partial N_1}{\partial G_y} = \dfrac{\partial T_2}{\partial D_x}, & \ldots, & \ldots, \\
\dfrac{\partial N_2}{\partial G_x} = \dfrac{\partial T_1}{\partial D_y}, & \ldots, & \ldots, & \ldots.
\end{array}$$

Ces quinze équations expriment les conditions d'existence de l'énergie, sans aucune hypothèse sur sa forme.

Pour rendre l'intégration abordable, il est commode de tenir compte à l'avance des remarques suivantes :

Le milieu, avant sa déformation, est isotrope : l'énergie, aussi bien que la grandeur de la force φ, ne peuvent dépendre que de la grandeur de la déformation et non de son orientation. Elles ne dépendent pas des six variables $D_x, \ldots, G_z$, mais seulement des trois invariants de l'ellipsoïde de déformation

$$(3)\qquad \begin{cases} I_1 = D_x + D_y + D_z, \\ I_2 = D_y D_z - \frac{1}{4}G_x^2 + D_x D_z - \frac{1}{4}G_y^2 + D_x D_y - \frac{1}{4}G_z^2, \\ I_3 = D_x D_y D_z - \frac{1}{4}D_x G_x^2 - \frac{1}{4}D_y G_y^2 - \frac{1}{4}D_z G_z^2 + \frac{1}{4}G_x G_y G_z. \end{cases}$$

Les dilatations principales sont les racines de l'équation

$$(4)\qquad D^3 - I_1 D^2 + I_2 D - I_3 = 0.$$

J'écris immédiatement deux identités dont j'aurai besoin plus loin

$$(5)\qquad \begin{cases} D_y(D_x D_y - \frac{1}{4}G_z^2) + D_z(D_x D_z - \frac{1}{4}G_y^2) - \frac{1}{4}G_x G_y G_z + \frac{1}{2}D_x G_x^2 \\ \quad = I_1 I_2 - I_3 - I_2 D_x - I_1(D_y D_z - \frac{1}{4}G_x^2), \\ (D_x D_y - \frac{1}{4}G_z^2)(D_x D_z - \frac{1}{4}G_y^2) - \frac{1}{4}(\frac{1}{2}G_y G_z - D_x G_x)^2 = I_3 D_x. \end{cases}$$

Puisque l'énergie de la déformation $\mathcal{E}$ ne peut dépendre que de I_1, I_2, I_3, les composantes des forces élastiques sont

$$(6)\qquad \begin{cases} N_1 = \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial D_x} = \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_1} + (I_1 - D_x)\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_2} + (D_y D_z - \frac{1}{4}G_x^2)\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3}, \\ T_1 = \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial G_x} = -\frac{1}{2}G_x \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_2} + (\frac{1}{4}G_y G_z - \frac{1}{2}D_x G_x)\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3}. \end{cases}$$

19. Égalons ces valeurs à celles qu'exigent les actions newtoniennes, il vient

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_1} + (I_1 - D_x)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_2} + (D_y D_z - \tfrac{1}{4}G_x^2)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3} = \frac{k}{8\pi}(2\alpha^2 - \varphi^2) + N_1',$$

$$-\tfrac{1}{2}G_x \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_2} + (\tfrac{1}{4}G_y G_z - \tfrac{1}{2}D_x G_x)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3} = \frac{k}{8\pi} 2\beta\gamma + T_1'.$$

Ces six relations entre les trois composantes α, β, γ de la force ne sauraient être distinctes; les dérivées de l'énergie doivent satisfaire à trois relations qui résultent de l'élimination des composantes de la force α, β, γ. Pour les obtenir sous la forme la plus simple, remarquons que l'on a, en formant $N_1 + N_2 + N_3$,

$$(7) \qquad -\frac{k}{8\pi}\varphi^2 = 3\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_1} + 2 I_1 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_2} + I_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3} - (N'_1 + N'_2 + N'_3),$$

et, par suite, au moyen de N_1,

$$\frac{k}{4\pi}\alpha^2 = -2\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_1} - I_1 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_2} - I_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3} + N'_2 + N'_3 - D_x \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_2} + (D_y D_z - \tfrac{1}{4} G_x^2)\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3}.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$(7') \qquad \left\{ \begin{aligned} & A = -2\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_1} - I_1 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_2} - I_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3} + N'_2 + N'_3 + N'_1, \\ & B = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_2}, \qquad C = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3}. \end{aligned} \right.$$

On obtient les trois relations indépendantes de α, β, γ en égalant l'expression de $\beta^2\gamma^2$ tirée de N_2, N_3 et celle tirée de T_1

$$\begin{aligned} & [A + BD_y + C(D_x D_z - \tfrac{1}{4} G_y^2) - N'_2][A + BD_z + C(D_x D_y - \tfrac{1}{4} G_z^2) - N'_3] \\ & \quad = \left[\frac{B}{2} G_x + \left(\frac{G_y G_z}{4} - \frac{D_x G_z}{2}\right) C - T'_1\right]^2. \end{aligned}$$

En effectuant les multiplications et le carré, on trouve

$$\begin{aligned} & A^2 + AB(D_z + D_y) + AC(D_x D_z - \tfrac{1}{4} G_y^2 + D_x D_y - \tfrac{1}{4} G_z^2) + B_2(D_z D_y - \tfrac{1}{4} G_x^2) \\ & \quad + BC[D_y(D_x D_y - \tfrac{1}{4} G_z^2) + D_z(D_x D_z - \tfrac{1}{4} G_y^2) - G_x(\tfrac{1}{4} G_y G_z - \tfrac{1}{2} D_x G_x)] \\ & \quad + C^2[(D_x D_y - \tfrac{1}{4} G_z^2)(D_x D_z - \tfrac{1}{4} G_y^2) - (\tfrac{1}{4} G_y G_z - \tfrac{1}{2} D_x G_x)^2] \\ & \quad + N'_2 N'_3 - A(N'_2 + N'_3) - B(N'_2 D_z + N'_3 D_y - T'_1 G_x) - T'^2_1 \\ & \quad - C[N'_2(D_x D_y - \tfrac{1}{4} G_z^2) + N'_3(D_x D_z - \tfrac{1}{4} G_y^2) - T'_1(\tfrac{1}{2} G_y G_z - D_x G_x)] = 0, \end{aligned}$$

et, toutes réductions faites, au moyen des équations (5),

$$\begin{aligned} & A^2 + ABI_1 + ACI_2 + BC(I_1 I_2 - I_3) + N'_2 N'_3 - T'^2_1 - A(N'_2 + N'_3) \\ & \quad + D_x(-AB - BCI_2 + C^2 I_3) - N'_3 BD_y - N'_2 BD_z + T'_1 BG_x \\ & \quad + (D_y D_z - \tfrac{1}{4} G_x^2)(-AC + B^2 - BCI_1) \\ & \quad - C[N'_2(D_x D_y - \tfrac{1}{4} G_z^2) + N'_3(D_x D_z - \tfrac{1}{4} G_y^2) - T'_1(\tfrac{1}{2} G_y G_z - D_x G_x)] = 0. \end{aligned}$$

Cette relation doit être indépendante de l'orientation des axes coordonnés. On voit facilement qu'il n'en peut être ainsi que si les pressions constantes N'_1, ..., T'_3 se réduisent à une pression uniforme en tous sens, P :

$$N'_1 = N'_2 = N'_3 = P, \qquad T'_1 = T'_2 = T'_3 = 0.$$

Les trois équations indépendantes de l'orientation des axes sont alors

$$\begin{gathered} A^2 + ABI_1 + ACI_2 + BC(I_1 I_2 - I_3) + P^2 - AP - PBI_1 - PCI_2 = 0, \\ -AB - BCI_2 + C^2 I_3 + PB = 0, \\ -AC + B^2 - BCI_1 + PC = 0, \end{gathered}$$

ou

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & (A-P)^2 + (A-P)BI_1 + (A-P)CI_2 + BC(I_1 I_2 - I_3) = 0, \\ & -(A-P)B - BCI_2 + C^2 I_3 = 0, \\ & -(A-P)C + B^2 - BCI_1 = 0. \end{aligned} \right.$$

20. Pour que les équations (8), homogènes en $(A - P)$, B, C soient compatibles, il faut que l'une d'elles soit la conséquence des deux autres. On trouve, en effet, une identité en ajoutant la première multipliée par $+C$, la deuxième par $+B$, la troisième par $+(A - P + CI_2)$.

Éliminons $(A - P)$ entre les deux dernières équations (8), il vient

$$B^3 - B^2 CI_1 + BC^2 I_2 - I_3 C^3 = 0.$$

Ainsi le rapport $\frac{B}{C}$ est égal à l'une des dilatations principales, quels que soient les trois invariants.

Appelons D_1 cette racine; A et B ont pour valeurs

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} & B = CD_1, \qquad A = P - CD_1 I_1 + CD_1^2 \\ & \quad \text{et, par suite,} \\ & \frac{k}{4\pi}\varphi^2 = 3A - 3P + BI_1 + CI_2 = C(3D_1^2 - 2D_1 I_1 + I_2). \end{aligned} \right.$$

Pour intégrer ces équations, formons les dérivées de D_1 par rapport à I_1, I_2, I_3 :

$$\begin{aligned} (3D_1^2 - 2D_1 I_1 + I_2)\frac{\partial D_1}{\partial I_1} &= D_1^2, \\ (3D_1^2 - 2D_1 I_1 + I_2)\frac{\partial D_1}{\partial I_2} &= -D_1, \\ (3D_1^2 - 2D_1 I_1 + I_2)\frac{\partial D_1}{\partial I_3} &= 1. \end{aligned}$$

De ces équations combinées avec les équations (7') et (9), on tire

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_1} = +P + \frac{k}{4\pi}\varphi^2\left(\frac{\partial D_1}{\partial I_1} - \frac{1}{2}\right), \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_2} = \frac{k}{4\pi}\varphi^2\frac{\partial D_1}{\partial I_2}, \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3} = \frac{k}{4\pi}\varphi^2\frac{\partial D_1}{\partial I_3}$$

ou encore

$$\frac{\partial(\mathcal{E} - PI_1)}{\partial I_1} = \frac{k}{4\pi}\varphi^2\frac{\partial(D_1 - \frac{1}{2}I_1)}{\partial I_1},$$

$$\frac{\partial(\mathcal{E} - PI_1)}{\partial I_2} = \frac{k}{4\pi}\varphi^2\frac{\partial(D_1 - \frac{1}{2}I_1)}{\partial I_2},$$

$$\frac{\partial(\mathcal{E} - PI_1)}{\partial I_3} = \frac{k}{4\pi}\varphi^2\frac{\partial(D_1 - \frac{1}{2}I_1)}{\partial I_3}.$$

Pour que ces trois équations soient compatibles, il faut et il suffit que φ^2 soit fonction uniquement de $2D_1 - I_1$, et il en sera de même de $\mathcal{E} - PI_1$. On a donc

$$(10) \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + PI_1 + \mathcal{F}(2D_1 - I_1) \quad \text{et} \quad \frac{k}{4\pi}\varphi^2 = +2\mathcal{F}'(2D_1 - I_1),$$

$\mathcal{F}$ désignant une fonction quelconque de sa variable $2D_1 - I_1$ et $\mathcal{F}'$ la dérivée de cette fonction. L'énergie ne peut donc dépendre que de la dilatation cubique I_1 et de la force électrique φ. Il importe de remarquer que jusqu'ici les expressions de Maxwell, pour les forces élastiques en α, β, γ (10, 11, 12, 13), ont seules été employées, mais non les expressions de l'énergie électrique (13). Celles-ci vont servir à particulariser la fonction $\mathcal{F}$, mais les forces apparentes sont en raison inverse du carré de la distance, quelle que soit cette fonction.

Pour retrouver l'expression simple de l'énergie

$$\mathcal{E} = \frac{k}{2\pi}\varphi^2 + \mathcal{E}_1,$$

il faut déterminer $\mathcal{F}$ par l'équation

$$\mathcal{F}(2D_1 - I_1) + \mathcal{E}_0 + PI_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{F}'(2D_1 - I_1).$$

Le terme PI_1 ne peut pas exister dans un milieu où la dilatation cubique I_1 et la dilatation principale D_1 sont indépendantes l'une de l'autre, P est nul; on a, en intégrant,

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathcal{F} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 + \mathcal{F}_0 \mathcal{E}^{2D_1 - I_1}, \\ \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{F}_0 \mathcal{E}^{2D_1 - I_1}, \qquad \dfrac{k}{8\pi}\varphi^2 = \mathcal{F}_0 \mathcal{E}^{2D_1 - I_1}. \end{cases}$$

21. Peut-il exister une relation entre les invariants limitant les formes possibles des ellipsoïdes de déformation?

Ces relations peuvent être de deux genres :

1° Un des trois invariants constamment nul;

2° Une relation finie entre les trois invariants.

Examinons d'abord ce dernier cas, en reprenant tous les raisonnements du n° 19.

Si la relation contient I_3, on pourra la supposer résolue par rapport à I_3 et l'on prendra comme variables indépendantes I_1 et I_2. L'énergie n'est plus fonction explicite que des deux variables indépendantes I_1, I_2; on a donc

$$C = 0.$$

Mais les équations (8) [n° 19] sont toujours nécessaires, et il résulte alors de la dernière

$$B = 0,$$

puis

$$A = P \qquad \text{et} \qquad \frac{k}{4\pi}\varphi^2 = 0.$$

On arriverait au même résultat en prenant I_1 et I_3 comme variables indépendantes, au même résultat encore en supposant I_2 ou I_3 constamment nuls:

Donc, dans un milieu qui transmet des actions en raison inverse du carré de la distance :

Il ne peut exister aucune relation définie par la nature du milieu entre les trois invariants de la déformation.

En particulier, on ne peut pas supposer que deux des dilatations principales soient constamment égales.

Aucun des trois invariants I_1, I_2, I_3 *ne peut être constamment nul. Le milieu n'est pas incompressible.*

Pour I_1, la démonstration est un peu différente. Aux conditions générales s'ajoute, quand I_1 est nul, la condition

$$CI_3 = 2\,PD_1,$$

qui provient des équations (7'), jointes à la deuxième équation (8). Il reste à mettre cette condition d'accord avec le résultat du calcul général : il faut donc que l'on ait, en se rappelant que C est égal à $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial I_3}$,

$$2\,\frac{\partial D_1}{\partial I_3}\,\mathcal{F}'(2\,D_1) = 2\,P\,\frac{D_1}{I_3}$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial D_1}{\partial I_3}$ par sa valeur $\frac{1}{3\,D_1^2 + I_2}$,

$$\mathcal{F}'(2\,D_1) = P\,\frac{D_1}{I_3}\,(3\,D_1^2 + I_2).$$

Éliminant I_2 au moyen de l'équation (4) qui détermine D_1, il reste

$$\mathcal{F}'(2\,D_1) = P\left(1 + \frac{2\,D_1^3}{I_3}\right),$$

équation impossible, puisque le premier membre doit être indépendant de I_3.

22. La dilatation principale D_1 a la direction de la force α, β, γ au même point, quelle que soit la fonction $\mathcal{F}$ qui entre dans l'expression de l'énergie.

Soient l, m, n, l', m', n', l'', m'', n'' les cosinus directeurs des trois dilatations principales D_1, D_2, D_3. On sait que l'on a

$$D_x = l^2 D_1 + l'^2 D_2 + l''^2 D_3,$$
$$G_x = 2\,mn\,D_1 + 2\,m'n'\,D_2 + 2\,m''n''\,D_3.$$

Portons ces valeurs dans l'expression de α^2, qui est, quels que soient

$\mathcal{F}$ et P, (7') (p. 228) et (9) (p. 229)

$$\frac{k}{4\pi}\alpha^2 = C(D_1^2 - D_1 I_1 + D_1 D_x + D_y D_z - \tfrac{1}{4} G_x^2),$$

et nous trouverons, toutes réductions faites,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{k}{4\pi}\alpha^2 &= l^2 C(D_1^2 + D_2 D_3 - D_1 D_2 - D_1 D_3) \\ &= l^2 C(3D_1^2 - 2 I_1 D_1 + I_2) \\ &= l^2 \frac{k}{4\pi}\varphi^2 \end{aligned}\right.$$

ou

$$\alpha = \pm l\varphi, \qquad \beta = \pm m\varphi, \qquad \gamma = \pm n\varphi,$$

et l'on doit prendre tous les signes + ensemble ou tous les signes —, comme le montre la considération des forces tangentielles.

23. Ainsi le champ électrique α, β, γ détermine en chaque point :

1° La direction $\frac{\alpha}{\varphi}$, $\frac{\beta}{\varphi}$, $\frac{\gamma}{\varphi}$ de l'une des dilatations principales, D_1;

2° L'excès de cette dilatation principale sur la somme des deux autres, $2D_1 - I_1$, par l'équation

$$\mathcal{F}(2D_1 - I_1) = \frac{k}{8\pi}\varphi^2.$$

Ce sont là les seules relations fournies par la *nature* du milieu, par la loi de compressibilité du milieu. Quand on connaît seulement la force α, β, γ en un point, on ne peut rien dire sur la grandeur de la dilatation cubique I_1, ni séparément sur celles des dilatations principales D_1, D_2, D_3, ou sur la direction de ces deux dernières dans le plan normal à D_1. Ce sont les conditions de continuité du milieu qui seules achèvent cette détermination.

Pour les trouver, il faut intégrer les trois équations différentielles en u, v, w que fournit la nature du milieu :

1° Si la fonction $\mathcal{F}$ est connue, par la nature même du milieu, on peut résoudre l'équation en sens inverse, et l'on aura

$$D_1 = \frac{I_1}{2} + f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right),$$

et, pour que ce soit une dilatation principale, il faut que l'on ait [18, éq (4)] .

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + 2f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right)\right]^3 \\
&- 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + 2f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right)\right]^2 \\
&+ 4\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \ldots\right]\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + 2f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right)\right] \\
&- 8\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \ldots + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].
\end{aligned}
$$

2° La direction de la dilatation principale D_1 est celle de la force α, β, γ,

$$
\begin{aligned}
&\alpha\left\{\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right)\right]\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\} \\
&= \beta\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} + 2f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right)\right]\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\} \\
&= \gamma\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} + 2f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right)\right]\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Voilà les trois équations qu'il faudrait intégrer pour avoir u, v, w, connaissant α, β, γ et $f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right)$.

Il est bien évident que cette intégration ne doit pas être abordée de front dans le cas général; c'est une nouvelle question à ajouter à toutes celles dont la Physique mathématique donne l'énoncé plus facilement que la solution.

L'énoncé général serait le suivant :

Étant données en chaque point de l'espace :
1° *La direction de l'un des systèmes de dilatations principales,*
2° *Une relation entre les trois dilatations principales,*
Trouver les déplacements correspondants.

La difficulté sera plus ou moins grande, suivant la forme sous laquelle sera donnée la direction de l'une des dilatations principales.

Dans le cas particulier où cette direction est partout normale à une famille de surfaces faisant partie d'un système triple orthogonal, il est bien probable que les deux autres dilatations principales seront déterminées en direction par les deux autres familles de surfaces, ce qui avancera d'autant la solution du problème.

24. Ainsi lorsque la composante γ de la force est nulle partout, α, β étant indépendants de z, la dilatation D_3 parallèle à z est évidemment nulle et la dilatation D_2 perpendiculaire à D_1 dans le plan xy. Les équations se réduisent alors à

$$w = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\varphi^2} f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4\alpha\beta}{\varphi^2} f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right),$$

comme il est facile de s'en assurer en remarquant que l'on a

$$D_1 - D_2 = 2D_1 - I_1 = 2f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi_2\right),$$

$$D_x = \frac{\alpha^2}{\varphi^2}(D_1 - D_2) + D_2, \qquad D_y = \frac{\beta^2}{\varphi^2}(D_1 - D_2) + D_2,$$

$$G_z = 2\frac{\alpha\beta}{\varphi^2}(D_1 - D_2).$$

Changeant de variables et posant

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x},$$

les équations à intégrer sont

$$\Delta_2 P = 2\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\varphi^2} f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right), \qquad \Delta_2 Q = 4\frac{\alpha\beta}{\varphi^2} f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right),$$

et si les valeurs de α, β sont continues et nulles d'ordre convenable (suivant la fonction f) à l'infini, P et Q sont donnés par

$$P = 2\int\int \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\varphi^2} f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right) \log r \, dx\, dy,$$

$$Q = 4\int\int \frac{\alpha\beta}{\varphi^2} f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right) \log r \, dx\, dy.$$

On devra compléter ces intégrales étendues à tout le plan par des intégrales curvilignes le long des lignes de discontinuité (cylindres) de α, β, qu'il est facile de former; mais c'est une discussion que je ne veux pas entreprendre ici. Je me contenterai d'écrire la valeur de D_2,

$$2 D_2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + 2 f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right),$$

$$2 D_2 = 2 f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right) + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial y},$$

qu'on ne peut connaître qu'une fois l'intégration faite; car il n'est pas permis, en général, de supposer la dilatation cubique nulle.

25. Soient u, v, w les déplacements correspondant à une certaine distribution α, β, γ de la force électrique φ. On aura un nouvel état d'équilibre semblable au premier, avec des déplacements au, av, aw, a étant une constante, si la force électrique en chaque point est devenue ψ, de même direction que φ, telle que

$$f\left(\frac{k}{8\pi}\psi^2\right) = a f\left(\frac{k}{8\pi}\varphi^2\right).$$

Comme la fonction f n'est sûrement pas linéaire, on voit que le champ électrique nouveau n'est pas semblable au premier. La densité électrostatique en chaque point ou bien les densités des courants ont changé inégalement, mais de manière à ne pas changer la forme des lignes de force.

Inversement, si le champ de force change de grandeur absolue sans changer de distribution, les déplacements u, v, w ne conservent pas des rapports de grandeur invariables; la distribution des déplacements change.

D'ailleurs les forces élastiques ne croissent pas proportionnellement au champ électrique, mais au carré du champ électrique. Soient N', T', N'', T'' les forces élastiques correspondant à des champs α', β', γ', α'', β'', γ'', et N, T les forces élastiques qui correspondent au champ résultant α, β, γ, avec

$$\alpha = \alpha' + \alpha'', \qquad \beta = \beta' + \beta'', \qquad \gamma = \gamma' + \gamma'';$$

les expressions de Maxwell donnent

$$N_2 + N_3 = N'_2 + N''_2 + N'_3 + N''_3 + 2\sqrt{(N'_2 + N'_3)(N''_2 + N''_3)}.$$

26. Revenons en arrière et examinons la forme que ces lois de compressibilité donnent aux forces élastiques exprimées en fonction de la déformation. Pour cela, dans les expressions (6), remplaçons les dérivées de l'énergie par leurs valeurs tirées de (10), il vient

$$N_1 = P + \frac{\mathcal{F}'(2D_1 - I_1)}{3D_1^2 - 2D_1I_1 + I_2}(2D_yD_z - \tfrac{1}{2}G_x^2 + 2D_1D_x - D_1^2 - I_2),$$

$$T_1 = \frac{\mathcal{F}'(2D_1 - I_1)}{3D_1^2 - 2D_1I_1 + I_2}[(D_1 - D_x)G_x + \tfrac{1}{2}G_yG_z];$$

on obtient les N_2, N_3, T_2, T_3 en effectuant une permutation circulaire sur $D_x \ldots G_z$, mais non sur D_1.

On voit combien ces expressions diffèrent des formules linéaires relatives aux corps solides. Leur interprétation générale n'est pas sans difficulté ; une des dilatations principales D_1 joue un rôle prépondérant qui le distingue des deux autres. Lorsque la déformation est arbitraire, à quel caractère reconnaîtra-t-on celle des dilatations principales qu'on doit prendre pour D_1? Toutes les conditions (8) sont satisfaites, quelle que soit celle des trois dilatations que l'on choisit pour D_1 ; c'est donc à une condition nouvelle et non encore exprimée qu'il faut demander la réponse (1). Pour une même déformation, les forces élastiques seraient différentes, suivant la dilatation principale D_1, D_2, D_3 à laquelle on ferait jouer un rôle prépondérant. D'ailleurs, comme l'équation en $\frac{B}{C}$ doit être satisfaite, on ne peut pas combiner les forces élastiques correspondant à deux dilatations principales différentes.

(1) On a vu (n° 21) qu'il n'y a pas de relation finie entre les trois invariants, telle que serait, par exemple, l'égalité de deux des dilatations principales D_2, D_3. Cette supposition d'ailleurs n'aurait pas suffi pour lever la difficulté, à moins que la relation ne soit donnée, non sous la forme rationnelle, mais sous la forme particulière qui correspond à l'une des trois racines; ou encore, que, pour chaque système de valeurs réelles de I_1, I_3, il n'y ait qu'une seule valeur admissible pour I_2.

27. *Énergie.* — Les expressions générales (10) ou particulières (11) [n° 20] de l'énergie et de la force φ^2 doivent conserver un signe constant, quelle que soit la déformation *très petite*.

1er CAS : *Pesanteur.* — $k < 0$.

$$(10)' \qquad \mathcal{E}_0 + \mathrm{PI}_1 + \mathcal{F}(2\mathrm{D}_1 - \mathrm{I}_1) > 0, \qquad \mathcal{F}'(2\mathrm{D}_1 - \mathrm{I}_1) < 0.$$

Il faut que la fonction $\mathcal{F}$ soit décroissante et la constante $\mathcal{E}_0$ suffisamment grande.

$$(11)' \qquad \mathcal{E}_1 + \mathcal{F}_0 e^{2\mathrm{D}_1 - \mathrm{I}_1} > 0, \qquad \mathcal{F}_0 e^{2\mathrm{D}_1 - \mathrm{I}_1} < 0.$$

Comme l'exponentielle ne change pas de signe, il faut que $\mathcal{F}_0$ soit négatif et $\mathcal{E}_1$ suffisamment grand.

2e CAS : *Électrostatique ou électromagnétisme.* — $k > 0$. Il faut que la fonction $\mathcal{F}$ soit croissante; que $\mathcal{F}_0$ soit positif. $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ peuvent être nuls.

Mais ici se présente une objection insurmontable contre la formule (11) de l'énergie : *Quand la déformation est nulle, la force φ ne s'annule pas, elle devient seulement uniforme et égale à* $\sqrt{\dfrac{8\pi\mathcal{F}_0}{k}}$.

La conclusion qu'il en faut tirer est toute négative :

Si les lois de Coulomb et d'Ampère représentent en toute rigueur mathématique et à toute distance *les lois d'action de masses électriques ou de courants situés en un point quelconque de l'univers, il est impossible de rendre compte de l'un ou l'autre de ces systèmes de forces par la déformation* statique permanente, infiniment petite, d'un milieu unique.

28. Il ne faut pas oublier les restrictions de cette conclusion négative, et tout d'abord celle qui est relative à la grandeur des déformations. J'ai examiné, dans ce premier Mémoire, le cas où des déformations infiniment petites correspondraient à des forces électrostatiques ou électromagnétiques finies, parce que ce cas est particulièrement facile à étudier. Puisqu'il ne conduit pas au but, j'examinerai, dans un

prochain Mémoire, le cas de déformations finies; la principale modification portant sur la forme de l'énergie, il y a lieu d'espérer que la même impossibilité ne se retrouvera pas; toutefois, la difficulté relative au rôle prépondérant de l'une des dilatations principales subsiste entièrement.

A un autre point de vue, on peut se demander si les lois élémentaires admises sont l'expression complète de la réalité et si l'absurdité du résultat ne serait pas due à des actions non encore révélées par l'expérience. Tout d'abord, la loi de Newton n'exprime qu'incomplètement les actions mutuelles de deux masses matérielles, comme le montrent les propriétés physiques des solides élastiques; ce n'est qu'après avoir examiné l'influence des termes complémentaires indispensables qu'on pourra décider si l'impossibilité signalée plus haut doit être étendue aux actions des masses matérielles.

D'autre part, l'absurdité du résultat pour les phénomènes électriques disparaît s'il existe entre eux et la gravitation universelle un lien de nature convenable; le champ uniforme qui correspond à l'absence de déformation peut être le seul champ de force uniforme à la surface de la terre, celui de la pesanteur. C'est précisément à cause de ce résultat que j'ai essayé de montrer (n° 8) qu'aucun fait d'expérience ne s'oppose à l'existence d'un lien entre les phénomènes électriques et la pesanteur; mais, s'il en est ainsi, l'étude actuelle est insuffisante; il faut la reprendre en supposant le milieu non plus isotrope, mais doué d'un axe de symétrie. Outre les trois invariants de l'ellipsoïde de déformation, il faut introduire dans l'expression de l'énergie les deux angles qui définissent l'orientation de l'ellipsoïde par rapport à la direction de la pesanteur.

Enfin, il est impossible d'expliquer à la fois les actions électrodynamiques et les actions électrostatiques par les déformations d'un même milieu si elles sont indépendantes; mais l'impossibilité disparaît si elles sont liées, comme cela est indiqué au n° 13. L'action d'un champ magnétique sur une masse électrique immobile, celle d'un champ électrostatique sur un courant permanent, définies par ces relations, sont assez petites pour avoir échappé jusqu'ici à l'observation; je crois pourtant que, avec les moyens d'étude dont on dispose actuellement, des expériences décisives ne sont nullement impossibles.

Je me suis décidé à publier dès à présent ce Mémoire, sans attendre d'avoir terminé les recherches complémentaires que je viens d'indiquer; malgré le caractère négatif des conclusions immédiates, j'espère qu'il rendra quelques services en précisant l'ordre et la nature des difficultés de ce problème, dont la solution, abandonnée par Maxwell, reste encore à découvrir.