ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. MARCHAND

Sur le changement de variables (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 343-388

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__343_0>

SUR LE

CHANGEMENT DE VARIABLES

(SUITE),

PAR M. E. MARCHAND,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE CARCASSONNE.

CHAPITRE III.

35. La formule générale relative au changement de la variable indépendante s'est présentée comme application immédiate de la série de Taylor.

Cauchy, par ses célèbres Mémoires sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, a montré que cette série découlait naturellement des deux formules

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{z-x}, \qquad \frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n} = \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Il est certain que ces intégrales remarquables contiennent tous les résultats qui précèdent. Je l'établirai d'abord rapidement (première Partie) en retrouvant les formules qui ont servi de point de départ.

Il y a plus. Toute formule de Calcul intégral est susceptible de nombreuses transformations dont il faut savoir profiter. C'est ce que j'ai surtout essayé de faire dans ce Chapitre en me plaçant successivement à deux points de vue différents, l'un général (deuxième Partie), l'autre plus particulier (troisième Partie).

Comme il ne s'agit ici que de ces intégrales prises le long d'un contour C, auxquelles on n'ose pas d'ordinaire appliquer couramment les méthodes classiques de l'Analyse, je me suis cru autorisé à donner au calcul tout le développement qu'il comporte.

PREMIÈRE PARTIE.

36.

$$y = f(x), \qquad f^{(n)}(x_0) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi i}\int_C \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Or, remarquant que l'intégration par parties donne

$$\int_C \frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{n+1}} = -\left[\frac{1}{n}\,\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}\right]_C + \frac{1}{n}\int_C \frac{d\,f(x)}{(x-x_0)^n},$$

on voit que $\left[\frac{1}{n}\,\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}\right]_C \equiv 0$ et qu'on peut écrire

$$(\mathrm{K}) \qquad f^{(n)}(x_0) = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i}\int_C \frac{dy}{(x-x_0)^n}.$$

Or on sait que, lorsqu'il ne s'agit comme ici que de différentielles premières dy, le choix de la variable indépendante n'influe pas sur la forme du résultat. Je puis imaginer y exprimé en fonction de u, u étant une fonction de x,

$$y = y_0 + \frac{u-u_0}{1}\left(\frac{dy}{du}\right)_0 + \frac{(u-u_0)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)_0 + \ldots + \mathrm{R}_{n+1}.$$

Remarquant que $\left(\frac{dy}{du}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{du^2}\right)_0$, $\ldots$ sont des constantes et désignant ces constantes par y', y'', $\ldots$, il vient

$$dy = y'\,\frac{d(u-u_0)}{1} + y''\,\frac{d(u-u_0)^2}{1.2} + \ldots + d\mathrm{R}_{n+1}.$$

On a l'intégrale

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i}\int_C \frac{y'\,\frac{d(u-u_0)}{1} + y''\,\frac{d(u-u_0)^2}{1.2} + \ldots + d\mathrm{R}_{n-1}}{(x-x_0)^n}.$$

Rien n'empêche de considérer u comme une fonction de x et de chercher le résidu dans cette hypothèse. Le multiplicateur de $y^{(p)}$ sera, à part le facteur numérique $1.2\ldots(n-1)$, dont je ne m'occupe pas pour l'instant, le coefficient de $(x-x_0)^{n-1}$ dans le développement par la formule de Taylor de $\frac{d(u-u_0)^p}{1.2\ldots p}$. Ce développement est, en remarquant que, pour $x = x_0$, on a

$$u = u_0,$$

ce qu'on indique par la notation $(u \doteq u_0)$

$$\frac{d(u-u_0)^p}{1.2\ldots p} = \frac{1}{1.2\ldots p} d\left\{ (u \doteq u_0)^p + \frac{x-x_0}{1}[(u-u_0)^p]^{(1)} + \ldots \right\}$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots p} d\left\{ \frac{(x-x_0)^p}{1.2\ldots p}[(u \doteq u_0)^p]^{(p)} + \ldots \right\},$$

d'après le lemme du n° 3. Ici encore, il faut tenir compte de ce que $[(u \doteq u_0)^q]^{(p)}$ doit être considéré comme coefficient constant,

$$\frac{d(u-u_0)^p}{1.2\ldots p} = \frac{1}{1.2\ldots p}\left\{ [(u-u_0)^p]^{(p)} \frac{d(x-x_0)^p}{1.2\ldots p} + \ldots \right\}.$$

Le coefficient de $(x-x_0)^{n-1}$, c'est-à-dire le résidu, sera

$$\frac{1}{1.2\ldots p}\,\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}[(u-u_0)^p]^{(n)}.$$

Nous retrouvons la formule du début

$$\text{(A)}\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = (u \doteq u_0)^{(n)}\frac{dy}{du} + \frac{[(u \doteq u_0)^2]^{(n)}}{1.2}\frac{d^2 y}{du^2} + \ldots.$$

37. Dans le cas de deux variables indépendantes, on a

$$\frac{d^n z}{dx^\alpha\, dy^\beta} = \frac{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta}{-4\pi^2}\int_C\int_{C'} \frac{z\,dx\,dy}{(x-x_0)^{\alpha+1}(y-y_0)^{\beta+1}}.$$

Imaginons d'abord z exprimé en u et v

$$z = z_0 + \frac{u-u_0}{1}\left(\frac{dz}{du}\right)_0 + \frac{v-v_0}{1}\left(\frac{dz}{dv}\right)_0 + \ldots.$$

Ici $\frac{dz}{du}$, $\frac{dz}{dv}$, $\ldots$ sont des nombres; u et v peuvent être considérés comme des fonctions de x et y

$$\frac{(u-u_0)^\lambda}{1.2\ldots\lambda}\,\frac{(v-v_0)^\mu}{1.2\ldots\mu}$$
$$= \frac{1}{1.2\ldots\lambda}\,\frac{1}{1.2\ldots\mu}\sum \frac{1}{1.2\ldots\alpha}\,\frac{1}{1.2\ldots\beta}[(u \doteq u_0)^\lambda(v \doteq v_0)^\mu]^{(n)}_{x^\alpha y^\beta}(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta.$$

Le long des deux contours fermés C et C′ ce terme donnera simplement

$$-4\pi^2 \frac{1}{1.2\ldots\lambda}\,\frac{1}{1.2\ldots\mu}\,\frac{1}{1.2\ldots\alpha}\,\frac{1}{1.2\ldots\beta}[(u-u_0)^\lambda(v-v_0)^\mu]^{(n)}_{x^\alpha y^\beta}.$$

On a donc, en simplifiant et rétablissant $\frac{d^{\lambda+\mu}z}{du^\lambda\, dv^\mu}$,

$$\text{(A)}\qquad \frac{d^n z}{dx^\alpha\, dx^\beta}=\sum\frac{1}{1.2\ldots\lambda}\,\frac{1}{1.2\ldots\mu}[(u-u_0)^\lambda(v-v_0)^\mu]^{(n)}_{x^\alpha y^\beta}\frac{d^{\lambda+\mu}z}{du^\lambda\, dv^\mu}.$$

DEUXIÈME PARTIE.

38. Je viens de rappeler que, si l'on prend les notations habituelles x, y, $y=f(x)$, on trouve

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i}\int_C\frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}}dx$$

ou, en employant l'intégration par parties,

$$\int_C\frac{f(x)\,dx}{(x-x_0)^{n+1}}=-\frac{1}{n}\left[\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}\right]_C+\frac{1}{n}\int_C\frac{d\,f(x)}{(x-x_0)^n}.$$

D'après une remarque déjà faite, si $f(x)$ est holomorphe à l'intérieur du contour C,

$$\left[\frac{f(x)}{(x-x_0)^n}\right]_C=0;$$

d'autre part, on sait que, même si x n'est pas variable indépendante,

$$f'(x)\,dx\equiv d\,f(x)\equiv f'_u\,du.$$

On a donc, pour le changement de variable

$$x=\varphi(u),\qquad x_0=\varphi(\alpha),$$

la formule

$$\text{(K)}\qquad \frac{d^n y}{dx^n}=\frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i}\int_C\frac{f'(u)\,du}{[\varphi(u)-\varphi(\alpha)]^n}.$$

Posant

$$u-\alpha=h;\qquad \text{d'où}\qquad du=dh,$$

on a à effectuer

$$\int_C \left[f'(\alpha) + \frac{h}{1} f''(\alpha) + \ldots + h^{n+1} \mathrm{R}\right] \left[h\,\varphi'(\alpha) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(\alpha) + \ldots\right]^{-n} dh.$$

Reprenant les notations habituelles,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i}\int_C \left(y' + \frac{h}{1} y'' + \ldots\right)\left(hx' + \frac{h^2}{1.2} x'' + \ldots\right)^{-n} dh.$$

Le contour C étant fermé, il suffira de calculer le coefficient A de h^{-1} et d'écrire

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 1.2\ldots(n-1)\mathrm{A}.$$

39. *Première méthode.* — On peut essayer de calculer directement A. En multipliant par h^n la quantité sous le signe $\int$, on peut écrire

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 1.2\ldots(n-1)\left(y' + \frac{h}{1} y'' + \ldots\right)\left(x' + \frac{h}{1.2} x'' + \ldots\right)^{-n},$$

à condition de ne prendre dans le second membre que le coefficient du terme en h^{n-1}.

Exemple I :

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 1.2\left(y' + \frac{h}{1} y'' + \frac{h^2}{1.2} y''' \ldots\right)\left(x' + \frac{h}{1.2} x'' + \frac{h^2}{1.2.3} x''' \ldots\right)^{-3}.$$

Puisqu'il faut calculer le terme en h^2, il suffit de se borner dans chaque parenthèse aux termes en h^2. Réduisant

$$1.2\frac{y'''}{1.2} x'^{-3}, \qquad y''' \frac{x'^2}{x'^5},$$

$$1.2\frac{y''}{1}\left(-\frac{3}{1} x'^{-4}\frac{x''}{1.2}\right), \qquad -y''\frac{3x'x''}{x'^5},$$

$$1.2y'\left(-\frac{3}{1.2.3} x'^{-4} x''' + \frac{3.4}{1.2} x'^{-5}\frac{x''^2}{4}\right), \qquad y'\frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5},$$

on obtient la formule connue

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - y'x''') + 3x''(y'x'' - x'y'')}{x'^5}.$$

Exemple II :

$$x = u^2, \qquad x' + \frac{h}{1.2}x'' + \ldots = 2u + h.$$

Il vient alors

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 1.2\ldots(n-1)\left(y' + \frac{h}{1}y''\ldots\right)(2u+h)^{-n}$$
$$= 1.2\ldots(n-1)\left(y' + \frac{h}{1}y''\ldots\right)\left[(2u)^{-n} - \frac{n}{1}(2u)^{-n-1}h\ldots\right],$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n}(-1)^{n-p}\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)}\,\frac{n(n+1)\ldots(2n-p-1)}{1.2\ldots(n-p)}(2u)^{-(2n-p)}y^{(p)}.$$

Le coefficient est sous forme de produit de facteurs.

Expression générale des coefficients. — Je rappellerai les résultats suivants :

1°
$$(a+x)^{-p} = a^{-p} - \frac{p}{1}a^{-p-1}x + \ldots$$
$$+ (-1)^{\alpha}\frac{p(p+1)\ldots(p+\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha}a^{-p-\alpha}x^{\alpha} + \ldots,$$
$$(a+x)^{-p} = \sum(-1)^{\alpha}\frac{P_{p+\alpha-1}}{P_{\alpha}P_{p-1}}a^{-p-\alpha}x^{\alpha},$$

$x < a$; α étant un entier positif pouvant s'annuler,

$$x^0 = 1, \qquad P_0 = 1;$$

2°
$$(a+b+\ldots+l)^{-p} = \sum(-1)^{\alpha}\frac{P_{p+\alpha-1}}{P_{\alpha}P_{p-1}}a^{-p-\alpha}(b+c+\ldots+l)^{\alpha}$$
$$= \sum(-1)^{\alpha}\frac{P_{p+\alpha-1}}{P_{p-1}P_{\beta}\ldots P_{\lambda}}a^{-p-\alpha}b^{\beta}\ldots l^{\lambda},$$
$$\beta + \gamma + \ldots + \lambda = \alpha;$$

3°
$$\left(a_1 + \frac{h}{1.2}a_2 + \frac{h^2}{1.2.3}a_3 + \ldots\right)^{-p}$$
$$= \sum(-1)^{\alpha}\frac{P_{p-1+\alpha}}{P_{p-1}P_{\beta}\ldots P_{\lambda}}\,\frac{1}{a_1^{p+\alpha}}\,\frac{a_2^{\beta}\ldots a_k^{\lambda}}{P_2^{\beta}\ldots P_k^{\lambda}}h^{\beta+2\gamma+\ldots+(k-1)\lambda},$$
$$\beta + \gamma + \ldots + \lambda = \alpha.$$

Si l'on veut avoir seulement le coefficient de h^{n-1}, il faudra donner à $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ des valeurs telles que

$$\beta + 2\gamma + \ldots + (k-1)\lambda = n-1,$$

et, pour chaque valeur de α qu'on en déduit par

$$\alpha = \beta + \gamma + \ldots + \lambda,$$

calculer

$$(-1)^{\alpha} \frac{P_{p-1+\alpha}}{P_{p-1} P_{\beta} \ldots P_{\lambda}} \frac{1}{P_2^{\beta} \ldots P_k^{\lambda}}.$$

On arrive à cette règle

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A_1 y' + \frac{A_2}{1} y'' + \frac{A_3}{1.2} y''' + \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots(n-1)} y^{(n)},$$

$$A_p = \sum (-1)^{\alpha} \frac{P_{n+\alpha-1}}{P_{\beta} \ldots P_{\lambda} P_2^{\beta} \ldots P_k^{\lambda}} \frac{(x'')^{\beta} \ldots (x^{(k)})^{\lambda}}{(x')^{n+\alpha}},$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant des entiers positifs tels que

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma + \ldots + (k-1)\lambda &= n-p, \\ \beta + \gamma + \ldots\ldots\ldots + \lambda &= \alpha. \end{aligned}$$

On déterminera d'abord les systèmes de valeurs de $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$ satisfaisant à la première équation; on en déduira α et, par suite, le coefficient de A_p.

40. *Deuxième méthode.* — En posant

$$F(h) = \left(y' + \frac{h}{1} y'' \ldots\right) \left(h x' + \frac{h^2}{1.2} x'' \ldots\right)^{-n},$$

on a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i} \int_C F(h)\, dh = 1.2\ldots(n-1) A,$$

A étant le résidu par rapport à h de $F(h)$. Or on sait que

$$F(h) = \frac{A_n}{h^n} + \ldots + \frac{A}{h} + \varphi(h),$$

$$h_n F(h) = A_n + A_{n-1} h + \ldots + A h^{n-1} + h^n \varphi(h).$$

Il devient évident que

$$(\mathrm{H})\qquad 1.2\ldots(n-1)\mathrm{A}=\left\{\frac{d^{n-1}[h^n\,\mathrm{F}(h)]}{dh^{n-1}}\right\}_{h=0}.$$

On peut écrire ainsi cette formule, déjà signalée (19),

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\left\{\frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}}\left[\left(y'+\frac{h}{1}y''\ldots\right)\left(x'+\frac{h}{1.2}x''\ldots\right)^{-n}\right]\right\}_{h=0}.$$

Pour développer le calcul, je poserai

$$u=y'+\frac{h}{1}y''+\ldots,\qquad v=x'+\frac{h}{1.2}x''+\ldots,\qquad \mathrm{V}=v^{-n}.$$

On a

$$\frac{d^{n-1}(u\mathrm{V})}{dh^{n-1}}=u\frac{d^{n-1}\mathrm{V}}{dh^{n-1}}+\frac{n-1}{1}\frac{du}{dh}\frac{d^{n-2}\mathrm{V}}{dh^{n-2}}+\ldots+\mathrm{V}\frac{d^{n-1}u}{dh^{n-1}}.$$

Mais ici on a

$$\mathrm{V}=f(v),\qquad v=\varphi(h);$$

donc

$$\frac{d^p\mathrm{V}}{dh^p}=(\dot{v})^{(p)}\frac{d\mathrm{V}}{dv}+\frac{1}{1.2}(\dot{v}^2)^{(p)}\frac{d^2\mathrm{V}}{dv^2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots p}(\dot{v}^p)^{(p)}\frac{d^p\mathrm{V}}{dv^p}.$$

Comme il faut faire $h=0$ dans le résultat, les quantités $\left(\dfrac{d^i\mathrm{V}}{dv^i}\right)_{h=0}$ se calculent sans peine

$$\frac{1}{1.2\ldots i}\left(\frac{d^i\mathrm{V}}{dv^i}\right)_{h=0}=(-1)^i\frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{1.2\ldots i}(v^{-n-i})_{h=0}$$
$$=(-1)^i\frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{1.2\ldots i}\frac{1}{x'^{n+i}}.$$

D'autre part, $(\dot{v}^q)^{(p)}$ étant la dérivée d'ordre p d'un produit de q facteurs

$$(v^q)^{(p)}=\sum\frac{1.2\ldots p}{1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta\ldots1.2\ldots\lambda}(v^{(\alpha)}v^{(\beta)}\ldots v^{(\lambda)})_{h=0}.$$

Or on sait que

$$(v^{(\alpha)})_{h=0}=\frac{x^{(\alpha+1)}}{\alpha+1};$$

donc on a

$$(\dot{v}^q)^{(p)}=\sum\frac{1.2\ldots p}{1.2\ldots\alpha\ldots1.2\ldots\lambda}\frac{x^{(\alpha+1)}\ldots x^{(\lambda+1)}}{(\alpha+1)\ldots(\lambda+1)},$$
$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=p.$$

D'ailleurs, par suite de l'hypothèse

$$\varphi^{(0)} = \dot{\varphi} \equiv 0,$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont q entiers positifs non nuls.

En résumé, nous arrivons à

$$\frac{d^n y}{dx^n} = y' \mathrm{V}_{n-1} + \frac{n-1}{1} y'' \mathrm{V}_{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} y''' \mathrm{V}_{n-3} + \ldots + y^{(n)} \mathrm{V},$$

$$\mathrm{V}_p = -n \frac{(\dot{\varphi})^{(p)}}{x'^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{1.2} \frac{(\dot{\varphi}^2)^{(p)}}{x'^{n+2}} - \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots p} \frac{(\dot{\varphi}^p)^{(p)}}{x'^{n+p}},$$

$$\mathrm{V}_0 = \mathrm{V} = \frac{1}{x'^n},$$

$$(\dot{\varphi}^q)^{(p)} = \sum \frac{\mathrm{P}_p}{\mathrm{P}_{\alpha+1}\ldots \mathrm{P}_{\lambda+1}} x^{(\alpha+1)} \ldots x^{(\lambda+1)},$$
$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = p,$$

$\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ étant q entiers positifs non nuls.

Le calcul de V_p peut être présenté ainsi

$$\mathrm{V}_p = -\frac{n}{1} \frac{(\dot{\varphi})^{(p)}}{x'^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{1.2} \frac{(\dot{\varphi}^2)^{(p)}}{x'^{n+2}} + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots p} \frac{(\dot{\varphi}^p)^{(p)}}{x'^{n+p}}.$$

Or $(\dot{\varphi})^{(p)}$ contient un seul facteur $\varphi^{(p)}$; $(\dot{\varphi}^2)^{(p)}$ contient deux facteurs $\varphi^{(\alpha)}$ dans chacun de ses termes; $(\dot{\varphi}^3)^{(p)}$ en contient 3, ... Si alors on forme

$$(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_q)^p,$$

qu'on multiplie les termes qui ne contiennent qu'un facteur par $-\frac{n}{x'^{n+1}}$, ceux qui en contiennent deux par $\frac{n(n+1)}{1.2} \frac{1}{x'^{n+2}}$, ..., et qu'on remplace $\varphi^{(\alpha)}$ par $\frac{x^{(\alpha+1)}}{\alpha+1}$, on aura le développement.

On est conduit à la règle suivante :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{y_1}{(x')^n} (y_1 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1})^{n-1}.$$

On développera la puissance $(n-1)^{\text{ième}}$ et l'on remplacera $(y_1)^\alpha$ par $y^{(\alpha)}$, $(v_q)^\alpha$ par $-\dfrac{x^{(\alpha+1)}}{(\alpha+1)x'}$. Par cette substitution, tous les termes qui se déduisent les uns des autres par la permutation des indices inférieurs $1, 2, \ldots, n-1$ des quantités v deviennent identiques; il suffira d'en calculer un seul

$$\frac{P_{n-1}}{P_\alpha \ldots P_\lambda} v_1^\alpha \ldots v_q,$$

et de multiplier non par leur nombre, mais par le facteur

$$D_n^p = \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots p},$$

p étant le nombre des facteurs v différents.

Exemple :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{y_1}{(x')^3}(y_1 + v_1 + v_2)^2.$$

Terme ne contenant ni v_1 ni v_2 :

$$\frac{y_1^3}{(x')^3}, \quad \text{d'où} \quad \frac{y'''}{(x')^3}.$$

Termes contenant un seul facteur v :

$$2y_1^2 v, \quad y_1 v_1^2, \quad D_3^1 = \tfrac{3}{1}, \qquad \text{d'où} \qquad -\frac{3}{x'^4}\left(2y''\frac{x''}{2} + y'\frac{x'''}{3}\right).$$

Terme contenant deux facteurs v différents :

$$2v_1v_2y_1, \quad D_3^2 = \frac{3.4}{1.2};$$

on a donc

$$\frac{3.4}{1.2} 2y'\left(\frac{x''}{2}\right)^2 \frac{1}{(x')^5}.$$

On retrouve bien, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(y'''x' - x'''y') + 3x''(y'x'' - x'y'')}{(x')^5}.$$

L'analogie avec le développement de la puissance d'un polynôme est complètement mise en évidence. On est en droit d'affirmer que le calcul est du même ordre de difficulté.

41. S'il ne s'agissait que de calculer les coefficients numériques de l'expression de $\frac{d^n y}{dx^n}$ en fonction de $x', x'', \ldots, y', y'', \ldots$ ou d'établir la parenté avec la formule du binôme, il n'y aurait plus rien à ajouter. Mais on serait tenté de reprocher à la première méthode d'exiger la résolution des équations

$$\beta + 2\gamma + \ldots + (k-1)\lambda = n - p, \qquad \alpha = \beta + \gamma + \ldots + \lambda,$$

et à la deuxième méthode de forcer à calculer avec les quantités v, sauf à remplacer ultérieurement v_1 par $\frac{x''}{2}$, $v_1 v_2$ par $\frac{x'''}{3}$, $\ldots$, ce qui empêche de faire, dans un exemple particulier, les réductions qui pourraient abréger le calcul.

Il est heureux que, grâce aux nombreuses transformations auxquelles peut se prêter une intégrale, la formule puisse acquérir beaucoup d'expressions distinctes. Je me bornerai à en indiquer une. Je pourrais partir successivement de la première méthode et de la deuxième méthode, ce qui établirait nettement le lien nécessaire qui doit permettre de passer de l'une à l'autre. Je ne transcrirai cependant qu'une seule démonstration, afin de ne pas trop m'attarder dans ces calculs théoriques, et de réserver plus de place aux applications particulières.

42. Dans la première méthode, $\frac{d^n y}{dx^n}$ se déduit de

$$1.2\ldots(n-1)\left[y' + \frac{h}{1}y'' + \ldots\right]\left[x' + \frac{h}{1.2}x'' + \ldots\right]^{-n}.$$

Le calcul consistera à prendre la puissance $-n$ d'une série entière.

S'il ne s'agissait que d'une puissance positive quelconque, le résultat s'obtiendrait immédiatement. La série de Taylor, qui a donné

$$x - x_0 = \frac{h}{1}x' + \frac{h^2}{1.2}x'' + \ldots,$$

donne aussi

$$(x - x_0)^p = [(x \dot{-} x_0)^p] + \frac{h}{1}[(x \dot{-} x_0)^p]^{(1)} + \ldots,$$

le point placé au-dessus de $x \dot{-} x_0$ signifiant toujours que l'on devra remplacer x par x_0.

D'après le lemme du n° 3, ceci se réduit à

$$(x-x_0)^p = \frac{h^p}{1.2\ldots p}[(x-x_0)^p]^{(p)} + \frac{h^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}[(x-x_0)^p]^{(p+1)} + \ldots.$$

Appliquant une remarque (n° 5) exposée plus haut avec détail, on peut aussi écrire

$$(x-x_0)^p = \frac{h^p}{1.2\ldots p}(x^p)^{(p)} + \frac{h^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}(x^p)^{(p+1)} + \ldots.$$

On a donc, pour une puissance positive,

$$h^p\left[x' + \frac{h}{1.2}x'' + \ldots\right]^p = \frac{h^p}{1.2\ldots p}(x^p)^{(p)} + \frac{h^{p+1}}{1.2\ldots(p+1)}(x^p)^{(p+1)} + \ldots.$$

Or : « Lorsqu'on a formé les puissances entières et positives d'une » série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable x, » on peut en déduire facilement le développement d'une puissance » quelconque

$$u = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots.$$

» Si l'on désigne par $B_{m,n}$ le coefficient de x^n dans le développement » de u^m, on aura

$$\begin{aligned}
B_{(m,n)} = {} & m B_{(1,n)} A_0^{m-1}\left[1-(m-1)+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}-\ldots\pm\frac{(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\right] \\
+ {} & \frac{m(m-1)}{1.2} B_{(2,n)} A_0^{m-2}\left[1-(m-2)+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}-\ldots\pm\frac{(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-2)}\right] \\
+ {} & \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} B_{(3,n)} A_0^{m-3}\left[1-(m-3)+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}-\ldots\pm\frac{(m-3)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots(n-3)}\right] \\
+ {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ {} & \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} A_0^{m-n} B_{(n,n)}
\end{aligned}$$

» ou, en sommant les coefficients placés entre parenthèses,

$$\begin{aligned}
B_{(m,n)} = {} & m B_{(1,n)} A_0^{m-1}\left[\frac{(2-m)(3-m)\ldots(n-m)}{1.2\ldots(n-1)}\right] \\
& + \frac{m(m-1)}{1.2} B_{(2,n)} A_0^{m-2}\left[\frac{(3-m)(4-m)\ldots(n-m)}{1.2\ldots(n-2)}\right] + \ldots \\
& + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} A_0^{m-n} B_{(n,n)}. \text{ »}
\end{aligned}$$

(*Traité de Calcul différentiel,* par M. J. Bertrand, n° 332.)

Ici nous avons

$$u = x' + \frac{h}{1.2}x''\ldots,\qquad A_\alpha = \frac{x^{(\alpha+1)}}{1.2\ldots(\alpha+1)},$$

$$\begin{aligned}B_{(-n,p)} = &-\frac{n}{1}\frac{B_{(1,p)}}{x'^{n+1}}\frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+p)}{1.2\ldots(p-1)}\\ &+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{B_{(2,p)}}{x'^{n+2}}\frac{(n+3)(n+4)\ldots(n+p)}{1.2\ldots(p-2)}-\ldots\\ &+(-1)^p\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{1.2\ldots p}\frac{B_{(p,p)}}{x'^{n+p}},\end{aligned}$$

$$B_{(q,p)} = \frac{(\dot{x}^q)^{(p+q)}}{1.2\ldots(p+q)}.$$

Remplaçant p par $n-p$, on a, pour le coefficient de $\frac{y^{(p)}}{1.2\ldots(p-1)}$, l'expression suivante :

$$\begin{aligned}1.2\ldots(n-1)\Big[&-\frac{n}{1}\frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n-p)}{1.2\ldots(n-p-1)}\frac{1}{x'^{n+1}}\frac{(\dot{x}^1)^{(n-p+1)}}{1.2\ldots(n-p+1)}\\ &+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{(n+3)(n+4)\ldots(2n-p)}{1.2\ldots(n-p-2)}\frac{1}{x'^{n+2}}\frac{(\dot{x}^2)^{(n-p+2)}}{1.2\ldots(n-p+2)}-\ldots\\ &+(-1)^{n-p}\frac{n(n+1)\ldots(2n-p-1)}{1.2\ldots(n-p)}\frac{1}{x'^{2n-p}}\frac{(\dot{x}^{n-p})^{2(n-p)}}{1.2\ldots2(n-p)}\Big].\end{aligned}$$

Je ferai observer en passant que, ayant

$$B_{(m,n)} = mB_{(1,n)}A_0^{m-1}\left[\frac{\ldots}{1.2\ldots(n-1)}\right]+\ldots,$$

on n'a pas le droit de faire $n=0$ ou $n=1$.

On peut voir directement que

$$B_{(m,0)} = A_0^m,\qquad B_{(m,1)} = \frac{m}{1}A_0^{m-1}A_1,$$

et il en résulte que, pour généraliser la formule, il n'y a qu'à adopter les conventions

« $N(n,m) = \frac{(m+1)\ldots(m+n)}{1.2\ldots n} = \frac{1.2\ldots(m+n)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}$,

$N(0,m)=1$ si $m>0$, $\qquad N(n,0)=1$ si $n>0$.

» Si m ou n est négatif, $N(n,m)=0$, lors même que l'autre quan-
» tité serait nulle (*Algèbre supérieure*, par J.-A. Serret). »

Remarque. — Nous avons démontré au début de ce travail qu'on a (n^{os} 4 et 5)

$$(\dot{x}^p)^{(q)} = [(x - x_0)^p]^{(q)} = (x^p)^{(q)} - \frac{p}{1}(x^{p-1})^{(q)} x + \ldots.$$

On aurait donc une expression algébrique des coefficients du changement de la variable indépendante, qui n'exige plus la résolution d'équations indéterminées

$$\beta + 2\gamma + \ldots = n - p, \qquad \alpha = \beta + \gamma + \ldots.$$

TROISIÈME PARTIE.

43. Du moment que nous avons obtenu la formule

$$\left\{\begin{array}{l} u = \varphi(x), \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = (\dot{u}^1)^{(n)} \dfrac{dy}{du} + \ldots + \dfrac{(\dot{u}^n)^{(n)}}{1.2\ldots n} \dfrac{d^n y}{du^n}, \end{array}\right.$$

comme conséquence de l'intégrale définie, nous pourrions renvoyer purement et simplement aux applications faites dans les deux premiers Chapitres.

Mais je tiens à bien montrer comment, dans chaque exemple particulier, on peut transformer directement l'intégrale en lui appliquant les méthodes générales que l'on possède actuellement.

On sait qu'il existe des méthodes remarquables pour le cas des fractions rationnelles et pour celui des fractions rationnelles de $\sin x$ et de $\cos x$. Je vais en profiter dans cette troisième Partie.

Je rappelle ce résultat relatif aux fractions rationnelles

$$« \int \frac{\mathfrak{M}}{N^{n+1}} dx = \int \frac{U}{N} dx + \frac{V}{N^n},$$

$$BN - N'A = 1;$$

$$\begin{array}{ll} nV_0 = A\mathfrak{M} \quad - NK, & \mathfrak{M}_1 = B\mathfrak{M} \quad - N'K \quad - V'_0, \\ (n-1)V_1 = A\mathfrak{M}_1 \quad - NK_1, & \mathfrak{M}_2 = B\mathfrak{M}_1 \quad - N'K_1 \quad - V'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_{n-1} = A\mathfrak{M}_{n-1} - NK_{n-1}, & \mathfrak{M}_n = B\mathfrak{M}_{n-1} - N'K_{n-1} - V'_{n-1}, \end{array}$$

$$U = \mathfrak{M}_n,$$

» K, K_1, ..., K_{n-1} étant des polynômes complètement arbitraires. » (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* par M. Ch. Hermite, p. 267-268).

Si l'on intègre le long d'un contour fermé C, $\left[\frac{V}{N^n}\right]_C$ s'annulera, puisque la fonction $\frac{V}{N^n}$ est visiblement holomorphe à l'intérieur du contour

$$\int_C \frac{\mathfrak{M}}{N^{n+1}}\,dx = \int_C \frac{U}{N}\,dx.$$

Je suppose $K = K_1 = \ldots \equiv 0$ et $B = \text{const.}$; on a

$$\mathfrak{M}_1 = B\mathfrak{M} - \frac{1}{n}(A\mathfrak{M})',$$

$$\mathfrak{M}_2 = B^2\mathfrak{M} - \frac{B}{n}(A\mathfrak{M})' - \frac{1}{(n-1)}(A\mathfrak{M}_1)'$$
$$= B^2\mathfrak{M} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)B(A\mathfrak{M})' + \frac{1}{n(n-1)}[A(A\mathfrak{M})']'.$$

Supposant démontré que

$$\mathfrak{M}_k = B^k\mathfrak{M} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-k+1}\right)B^{k-1}(A\mathfrak{M})'$$
$$+ \left[\frac{1}{n(n-1)} + \ldots\right]B^{k-2}[A(A\mathfrak{M})']' - \ldots,$$

les coefficients étant la somme des produits 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ... de $\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-k+1}$, on a

$$\mathfrak{M}_{k+1} = B^{k+1}\mathfrak{M} - \left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n-k+1}\right)B^k(A\mathfrak{M})' + \ldots - \frac{(A\mathfrak{M}_k)'}{n-k}$$
$$= B^{k+1}\mathfrak{M} - \left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n-k}\right)B^k(A\mathfrak{M})' + \ldots.$$

La loi se trouve démontrée,

$$U = B^n\mathfrak{M} - s_1 B^{n-1}(A\mathfrak{M})' + s_2 B^{n-2}[A(A\mathfrak{M})']' - s_3 B^{n-3}\{A[A(A\mathfrak{M})']'\}' + \ldots,$$

s_1 étant la somme des inverses des n premiers nombres, s_2 la somme des produits deux à deux de ces inverses, etc.

D'autre part, remarquant la loi de formation de ces expressions $(A\mathfrak{M})'$, $[A(A\mathfrak{M})']'$, ..., on voit que, si l'on posait

$$\mathfrak{M} = y', \qquad A = \frac{1}{x'},$$

on aurait

$$(A\mathfrak{M}) = \frac{y'}{x'} \equiv \frac{dy}{dx}, \qquad A(A\mathfrak{M})' = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$A[A(A\mathfrak{M})']' = \frac{d^3y}{dx^3}, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots,$$

la variable indépendante étant une quantité quelconque u. Par suite,

$$[A(A\mathfrak{M})']' = \frac{d}{du}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right],$$

$$\{A[A(A\mathfrak{M})']'\}' = \frac{d}{du}\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right].$$

Cette loi de formation sera d'ailleurs appliquée dans le second exemple, ce qui la rendra plus nette à l'esprit. Il faut évidemment supposer que, dans chaque exemple où l'on applique cette formule, il ait été possible d'exprimer $\frac{d^py}{dx^p}$ en fonction de la variable indépendante u.

44. *Premier exemple :*

$$x = e^u.$$

On a

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1.2\dots(n-1)}{2\pi i}\int_C \frac{dy}{(e^{u_0+u} - e^{u_0})^n}.$$

On met d'abord en facteur $\frac{1}{e^{u_0 n}} = \frac{1}{x_0^n}$, et le coefficient de $\frac{d^py}{du^p}$ est

$$\frac{1}{x_0^n}\,\frac{1.2\dots(n-1)}{2\pi i}\int_C \frac{u^{p-1}}{1.2\dots(p-1)}\,\frac{1}{(e^u-1)^n}\,du.$$

Bien que e^u ne soit pas un polynôme entier, il est facile d'appliquer la formule qui vient d'être écrite,

$$N = e^u - 1.$$

De $BN - N'A = 1$, on tire

$$B = A = -1.$$

On a

$$\mathfrak{N} = u^{p-1},$$
$$(-1)^{n-1}\,\mathrm{U} = u^{p-1} - s_1(u^{p-1})' + s_2(u^{p-1})'' + \ldots + (-1)^{p-1} s_{p-1}(u^{p-1})^{(p-1)};$$

le dénominateur de l'intégrale est ramené à

$$\frac{1}{(e^u - 1)} = \frac{1}{\dfrac{u}{1} + \ldots}.$$

Tout terme du numérateur qui contiendra u permettra de diviser le dénominateur et le numérateur par u; la quantité sous le signe $\int$ restant finie, l'intégrale prise le long du contour fermé C sera nulle. Le résidu sera fourni par le terme

$$(-1)^{p-1} s_{p-1}(u^{p-1})^{(p-1)} = (-1)^{p-1}\, 1.2\ldots(p-1) s_{p-1};$$

donc

$$(-1)^{n-1}\,\mathrm{U} = (-1)^{p-1}\, 1.2\ldots(p-1) s_{p-1},$$
$$\int_{\mathrm{C}} \frac{u^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} \frac{1}{(e^u-1)^n}\, du = (-1)^{n-1} \int_{\mathrm{C}} \frac{(-1)^{p-1} s_{p-1}}{e^{u-1}}\, du = 2\pi i (-1)^{n+p} s_{p-1}.$$

On retrouve le résultat déjà obtenu au n° 17. En effet, on a d'abord

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = 1.2\ldots(n-1) \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n+p} s_{p-1} \frac{d^p y}{du^p}.$$

Or s_{p-1} étant la somme des produits $p-1$ à $p-1$ des inverses des $(n-1)$ premiers nombres, $1.2\ldots(n-1)s_{p-1}$ est la somme des produits $(n-p)$ à $(n-p)$ de ces $(n-1)$ premiers nombres. Désignant par S_n^p la somme des produits p à p des n premiers nombres naturels, on a

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} (-1)^{n+p}\, \mathrm{S}_{n-1}^{n-p} \frac{d^p y}{du^p};$$

c'est-à-dire

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left[\frac{d}{du} - (n-1)\right]\left[\frac{d}{du} - (n-2)\right]\ldots\left(\frac{d}{du} - 1\right)\frac{dy}{du};$$

mais il faut remarquer que cette formule générale ne donne tous les cas particuliers que si l'on adopte quelques conventions spéciales simples. Quel que soit n, si l'on fait $p = n$, on est conduit à écrire S^0_{n-1} et l'on constate directement que ce coefficient est égal à 1.

Il y a plus. Si l'on fait $n = 0$, il vient

$$x^0 \frac{d^0 y}{dx^0} = S^0_{-1} \frac{d^0 y}{du^0};$$

Cette formule sera exacte si l'on prend les définitions suivantes $\frac{d^0 y}{dx^0} = y$, $\frac{d^0 y}{du^0} = y$,

$$S^0_{-1} = 1.$$

Ce résultat, qui peut paraître étrange, nous servira plus loin.

45. *Deuxième exemple :*

$$x = u^\mu.$$

On a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i} \int_C \frac{dy}{[(u+u_0)^\mu - u_0^\mu]^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{A_p y^{(p)}}{1.2\ldots(p-1)},$$

$$A_p = \int_C \frac{u^{p-1}\, du}{[(u+u_0)^\mu - u_0^\mu]^n}.$$

Cette intégrale se ramènera à une autre de la forme

$$\int_C \frac{U\, du}{(u+u_0)^\mu - u_0^\mu} = \int_C \frac{U\, du}{\frac{\mu}{1} u_0^{\mu-1}\, u(1+\varepsilon)}.$$

Remarquant que U est un polynôme entier, on aperçoit que le résidu ne peut être produit que par le terme constant de U. Il s'agit de trouver ce terme constant.

De l'égalité

$$B[(u+u_0)^\mu - u_0^\mu] - A\mu(u+u_0)^{\mu-1} = 1,$$

on tire immédiatement

$$B = -\frac{1}{u_0^\mu}, \qquad A = -\frac{u+u_0}{\mu u_0^\mu}.$$

On a vu que

$$U = B^{n-1}\mathfrak{M} - s_1 B^{n-2}(A\mathfrak{M})' + \ldots.$$

On peut mettre en facteur $\left(\frac{1}{u_0^\mu}\right)^{n-1} = \frac{1}{x_0^{n-1}}$, et si l'on fait $A = u + u_0$, il vient

$$(-1)^{n-1} x_0^{n-1}\,U = \mathfrak{M} - \frac{s_1}{\mu}(A\mathfrak{M})' + \frac{s^2}{\mu^2}[A(A\mathfrak{M})']' - \ldots.$$

D'après une remarque déjà faite, si l'on pose

$$\mathfrak{M} = y', \qquad A = \frac{1}{x'},$$

on a

$$[A(A\mathfrak{M})']' = \frac{d}{du}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \qquad \ldots.$$

Ici l'on a

$$A = u + u_0 = \frac{1}{x'},$$

$$x = L(u + u_0), \qquad u = -u_0 + e^x.$$

Comme d'ailleurs

$$y' = u^{p-1}, \qquad y = \frac{u^p}{p},$$

on a

$$y = \frac{(e^x - u_0)^p}{p} = \frac{e^{px}}{p} - \frac{p}{1} u_0 \frac{e^{(p-1)x}}{p} + \frac{p(p-1)}{1.2} u_0^2 \frac{e^{(p-2)x}}{p} - \ldots,$$

$$y_{x^k}^{(k)} = \frac{1}{p}\left[p^k e^{px} - \frac{p}{1}(p-1)^k u_0 e^{(p-1)x} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{p}\left[p^k (u + u_0)^p - \frac{p}{1}(p-1)^k u_0 (u + u_0)^{p-1} + \ldots\right],$$

$$(y_{x^k}^{(k)})'_u = \frac{1}{p}\left[p^{k+1}(u + u_0)^{p-1} - \frac{p}{1}(p-1)^{k+1} u_0 (u + u_0)^{p-2} + \ldots\right].$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1} x_0^{n-1}\,U = u^{p-1} &- \frac{s_1}{\mu}\frac{1}{p}\left[p^2(u + u_0)^{p-1} - \frac{p}{1}(p-1)^2 u_0 (u + u_0)^{p-2}\ldots\right] \\ &+ \frac{s_2}{\mu^2}\frac{1}{p}\left[p^3(u + u_0)^{p-1} - \frac{p}{1}(p-1)^3 u_0 (u + u_0)^{p-2}\ldots\right] - \ldots.\end{aligned}$$

Le résidu s'obtient dès lors à simple vue,

$$\begin{aligned}\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots p} \frac{u_0^{p-1}}{x_0^{n-1}\,\mu\, u_0^{\mu-1}} \Bigg\{ &- \frac{s_1}{\mu}\left[p^2 - \frac{p}{1}(p-1)^2\ldots\right] \\ &+ \frac{s_2}{\mu_2}\left[p^3 - \frac{p}{1}(p-1)^3\ldots\right]\ldots\Bigg\} \frac{d^p y}{du^p}.\end{aligned}$$

Combinant avec la parenthèse le coefficient $(-1)^{n-1}\dfrac{1.2\ldots(n-1)}{\mu}$ et appelant $S_1, S_2, \ldots$ les sommes des produits $(n-1)-1$ à $(n-1)-1$, $(n-1)-2$ à $(n-1)-2$, ... des $(n-1)$ premiers nombres, il vient

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\mu}\left\{-\frac{S_1}{\mu}\left[p^2-\frac{p}{1}(p-1)^2+\ldots\right]+\frac{S_2}{\mu_2}\left[p^3-\frac{p}{1}(p-1)^3+\ldots\right]-\ldots\right\}.$$

Or, posant $f(z)=z^2$, l'accroissement ξ donné à z étant 1, les différences étant régressives, on a

$$\Delta^p f(z)=z^2-\frac{p}{1}(z-1)^2+\frac{p(p-1)}{1.2}(z-2)^2-\ldots.$$

Introduisant, pour rendre la formule plus symétrique, le terme nul $\dfrac{S_0}{\mu_0}\Delta^p z$, on a

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^{n-1}}{\mu}\left\{-\frac{S_1}{\mu}[p^2-\frac{p}{1}(p-1)^2\ldots]\ldots\right\},\\ &\equiv\frac{(-1)^{n-1}}{\mu}\left[\frac{S_0}{\mu^0}\Delta^p z-\frac{S_1}{\mu^1}\Delta^p z^2+\ldots\right]_{z=p}.\end{aligned}$$

La différence d'une somme étant la somme des différences des termes, on a

$$\begin{aligned}&\left[\frac{S_{n-1}}{\mu^n}\Delta^p z^n-\frac{S_{n-2}}{\mu^{n-1}}\Delta^p z^{n-1}+\ldots\right]\\ &=\Delta^p\left[S_{n-1}\frac{z^n}{\mu^n}-\ldots\right]=\Delta^p\left[\frac{z}{\mu}\left(\frac{z}{\mu}-1\right)\ldots\left(\frac{z}{\mu}-n+1\right)\right].\end{aligned}$$

Posant, d'après les notations des factorielles,

$$\frac{z}{\mu}\left(\frac{z}{\mu}-1\right)\ldots\left(\frac{z}{\mu}-n+1\right)=\frac{1}{\mu^n}z^{n|-\mu},$$

on retrouve le résultat établi plus haut (n° 24),

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sum_{p=1}^{p=n}u^{p-n\mu}\frac{1}{\mu^n}\frac{\Delta^p p^{n|-\mu}}{1.2\ldots p}\frac{d^p y}{du^p}.$$

46. *Troisième exemple :*

$$x=\sin u.$$

On a

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i}\int_C\frac{dy}{[\sin(u+u_0)-\sin u_0]^n}.$$

Je rappellerai d'abord la méthode générale d'intégration relative à une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$.

« On pose

$$e^{x\sqrt{-1}} = z.$$

» De là résulte

$$\sin x = \frac{z^2 - 1}{2z\sqrt{-1}}, \qquad \cos x = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

» de sorte qu'on peut faire

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{F_1(z)}{F(z)},$$

» $F(z)$ et $F_1(z)$ désignant des polynômes entiers en z. » (*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* par M. Hermite, p. 321.)

Dans le problème actuel, je poserai

$$e^{ui} = z, \qquad e^{u_0 i} = z_0;$$

on a

$$\sin(u + u_0) = \frac{z^2 z_0^2 - 1}{2 z_0 z i},$$

$$\sin(u + u_0) - \sin u_0 = \frac{z^2 z_0^2 - 1}{2 z_0 z i} - \frac{z_0^2 - 1}{2 z_0 i} = \frac{(z-1)(2 z_0^2 + 1)}{2 z z_0 i}.$$

Le coefficient de $\dfrac{d^p y}{du^p}$ est

$$\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)} \frac{2^n z_0^n i^n}{2\pi i} \int_C \frac{z^n u^{p-1}\, du}{(z-1)^n [z_0^2 z + 1]^n}.$$

Je m'en vais prendre z comme nouvelle variable. Le contour sera choisi de manière à contenir le seul point critique $z = 1$, la seconde racine du dénominateur $z_0^2 z + 1 = 0$ lui étant extérieure.

$$u^{p-1}\, du = \frac{1}{i^{p-1}} (\mathrm{L} z)^{p-1} \frac{1}{i} \frac{dz}{z} \equiv \frac{1}{i^p} (\mathrm{L} z)^{p-1} \frac{dz}{z}.$$

On arrive donc tout naturellement à

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)} \frac{2^n}{z_0^n} i^{n-p} \int \frac{z^{n-1} (\mathrm{L} z)^{p-1}\, dz}{(z-1)^n \left(z + \frac{1}{z_0^2}\right)^n}.$$

Je m'appuierai sur le résultat suivant. On donne la fonction rationnelle

$$\text{« } \frac{1}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}}.$$

» Soit, pour abréger,

$$(m,n) = (-1)^n \frac{1.2\ldots(m+n)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n},$$

» les multiplicateurs des facteurs

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{(x-a)^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{(x-a)^{\alpha+1}}$$

» seront

$$\frac{(\beta,\alpha)}{(a-b)^{\alpha+\beta+1}}, \quad \frac{(\beta,\alpha-1)}{(a-b)^{\alpha+\beta}}, \quad \ldots, \quad \frac{(\beta,0)}{(a-b)^{\beta+1}} \text{ »}$$

(*Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Hermite, p. 5.)

Ici

$$a-b = 1+\frac{1}{z_0^2} = \frac{2\cos u_0}{z_0}.$$

Si donc on pose

$$z^{n-1}(\mathrm{L}z)^{p-1} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1(z-1) + \mathrm{A}_2(z-1)^2 + \ldots + \mathrm{A}_n(z-1)^n + \ldots,$$

on aura, pour le coefficient de $\frac{d^p y}{du^p}$,

$$\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)} \frac{2^n}{z_0^n} i^{n-p} \left[\frac{(n-1,n-1)\mathrm{A}_0}{\left(\frac{2\cos u_0}{z_0}\right)^{2n-1}} + \frac{(n-1,n-2)\mathrm{A}_1}{\left(\frac{2\cos u_0}{z_0}\right)^{2n-2}} + \ldots \right]$$

ou encore

$$i^{n-p} \frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)} \left[\frac{(n-1,n-1)\mathrm{A}_0 z_0^{n-1}}{2^{n-1}\cos u_0^{2n-1}} \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1,n-2)\mathrm{A}_1 z_0^{n-1}}{2^{n-2}\cos u_0^{2n-2}} + \ldots + \frac{(n-1,0)\mathrm{A}_{n-1}}{\cos u_0^n} \right].$$

Si maintenant on remplace z_0 par sa valeur $\cos u_0 + i\sin u_0$ et, par suite, z_0^p par $\cos pu_0 + i\sin pu_0$, il est évident, d'après la nature de la question, que le résultat ne doit pas contenir le facteur i. On est donc en droit d'écrire

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum C_p \frac{d^p y}{du^p},$$

$$\left\{\begin{aligned} & p = n - 2k, \\ & C_p = (-1)^k \frac{1}{\cos^n u} \frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)} \Big[A_{n-1}(n-1, 0) + A_{n-2}(n-1, 1) \frac{\cos u}{2 \cos u} \\ & \qquad + A_{n-3}(n-1, 2) \frac{\cos 2u}{2^2 \cos^2 u} + \ldots \Big], \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & p = n - (2k+1), \\ & C_p = (-1)^{k+1} \frac{1}{\cos^n u} \frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)} \Big[A_{n-2}(n-1, 1) \frac{\sin u}{2 \cos u} \\ & \qquad + A_{n-3}(n-1, 2) \frac{\sin 2u}{2^2 \cos^2 u} + \ldots \Big]. \end{aligned}\right.$$

On a, pour les coefficients A_0, A_1, ...,

$$\begin{aligned} 1.2\ldots\varepsilon A_\varepsilon &= \left[\frac{d^\varepsilon (z^{n-1} L^{p-1} z)}{dz^\varepsilon} \right]_{z=1} \\ &= z^{n-1} (L^{p-1} z)^{(\varepsilon)}_{z=1} + \frac{\varepsilon}{1} (n-1) z^{n-2} (L^{p-1} z)^{(\varepsilon-1)} + \ldots. \end{aligned}$$

Or remarquons que, si l'on avait calculé la formule relative au changement de variable $x = e^u$ par la formule

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (\dot{u})^{(n)} \frac{dy}{du} + \frac{(\dot{u}^2)^{(n)}}{1.2} \frac{d^2 y}{du^2} + \cdots,$$

on aurait été amené à ce résultat

$$(L^p \dot{x})^{(n)} = (-1)^{n-p} P_p S_{n-1}^{n-p} x^{-n},$$

S_{n-1}^{n-p} étant la somme des produits $n-p$ à $n-p$ des $n-1$ premiers nombres naturels $1, 2, \ldots, (n-1)$.

L'hypothèse $z = 1$ correspondant à $Lz = 0$, on a

$$[L^p z]^{(n)}_{z=1} = (-1)^{n-p} P_p S_{n-1}^{n-p}.$$

On obtiendra donc aisément ce résultat

$$\begin{aligned} 1.2\ldots\varepsilon A_\varepsilon = P_{p-1} \Big[& S_{\varepsilon-1}^{\varepsilon-p+1} + \frac{\varepsilon}{1} (n-1) S_{\varepsilon-2}^{\varepsilon-p} \\ & + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{1.2} (n-1)(n-2) S_{\varepsilon-3}^{\varepsilon-p-1} + \ldots \Big], \end{aligned}$$

$$\varepsilon \geq p - 1, \qquad S_\lambda^\mu = (-1)^\mu \Pi_\lambda^\mu,$$

Π_λ^μ étant la somme des produits μ à μ des λ premiers nombres 1, 2, ..., λ.

Nous avons, d'ailleurs, remarqué (n° 44) que l'on doit faire $S_{-1}^{0} = 1$. Ce fait est très important ici. Tant que $p > 1$, comme $\varepsilon \geq p - 1$, A_0 n'entre pas dans la formule et $S_{\varepsilon-1}^{\varepsilon-p+1}$ a son exposant supérieur au plus égal à son exposant inférieur. Si $p = 1$, il faut conserver A_0 et remarquer aussi que, dans tous les termes $S_{\varepsilon-1}^{\varepsilon}$, l'indice supérieur surpasse de 1 l'indice inférieur; il faut alors pousser jusqu'à S_{-1}^{0} et ne conserver que ce terme, comme je vais le vérifier.

Application numérique :

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = \sum C_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

1° $\qquad \equiv p = 1, \qquad n = 5, \qquad$ d'où $\qquad k = 2;$

on a

$$C_1 = (-1)^2 \frac{1}{\cos^5 u} \frac{1.2.3.4}{1} \left[A_4(n-1, 0) + A_3(n-1, 1)\frac{\cos u}{2\cos u} + A_2(n-1, 2)\frac{\cos 2u}{2^2\cos^2 u} + A_1(n-1, 3)\frac{\cos 3u}{2^3\cos^3 u} + A_0(n-1, 4)\frac{\cos 4u}{2^4\cos^4 u}\right].$$

On a d'abord

$$1.2.3.4 A_4 = S_3^4 + \frac{4}{1} 4 S_2^3 + \ldots + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} 4.3.2.1 S_{-1}^{0} = 1.2.3.4 S_{-1}^{0},$$

$$1.2.3 A_3 = S_2^3 + \frac{3}{1} 4 S_1^2 + \ldots + \frac{3.2.1}{1.2.3} 4.3.2 S_{-1}^{0} = 1.2.3.4 S_{-1}^{0},$$

$$1.2 A_2 = S_1^2 + \frac{2}{1} 4 S_0^1 + \frac{2.1}{1.2} 4.3 S_{-1}^{0} = 3.4 S_{-1}^{0},$$

$$1 A_1 = S_0^1 + \frac{1}{1} 4 S_{-1}^{0} = 4 S_{-1}^{0},$$

$$A_0 = S_{-1}^{0} = S_{-1}^{0},$$

$$A_4 = 1, \qquad A_3 = 4, \qquad A_2 = 6, \qquad A_1 = 4, \qquad A_0 = 1,$$

$$(4, 0) = 1, \qquad (4, 1) = -\frac{5}{1}, \qquad (4, 2) = \frac{5.6}{1.2}, \qquad (4, 3) = -\frac{5.6.7}{1.2.3},$$

$$(4, 4) = \frac{5.6.7.8}{1.2.3.4}.$$

On a donc

$$C_1 = \frac{24}{\cos^5 u}\left[1 - 10\frac{\cos u}{\cos u} + \frac{45}{2}\frac{\cos 2u}{\cos^2 u} - \frac{35}{2}\frac{\cos 3u}{\cos^3 u} + \frac{35}{8}\frac{\cos 4u}{\cos^4 u}\right].$$

2° $$\equiv p = 2, \qquad n = 5, \qquad k = 1,$$

$$C_2 = \frac{(-1)^2}{\cos^5 u}\,\frac{1.2.3.4}{1}\left[A_3(4,1)\frac{\sin u}{2\cos u} + A_2(4,2)\frac{\sin 2u}{2^2\cos^2 u}\right.$$
$$\left. + A_1(4,3)\frac{\sin 3u}{2^3\cos^3 u} + A_0(4,4)\frac{\sin 4u}{2^4\cos^4 u}\right].$$

On a

$$1.2.3 A_3 = S_2^{3-2+1} + \frac{3}{1}4S_1^1 + \frac{3.2}{1.2}4.3S_0^0 = 2 - 12 + 36 = 26,$$

$$1.2 A_2 = S_1^1 \qquad + \frac{2}{1}4S_0^0 \qquad = \; -1 + 8 = 7,$$

$$1\, A_1 = S_0^0 \qquad = 1,$$

$$A_0 \qquad = 0,$$

$$A_3 = \frac{13}{3}, \qquad A_2 = \frac{7}{2}, \qquad A_1 = 1,$$

$$(4,1) = -\frac{5}{1}, \qquad (4,2) = \frac{5.6}{1.2}, \qquad (4,3) = -\frac{5.6.7}{1.2.3}.$$

Il vient donc

$$C_2 = \frac{1}{\cos^5 u}\left[-260\frac{\sin u}{\cos u} + 315\frac{\sin 2u}{\cos^2 u} - 105\frac{\sin 3u}{\cos^3 u}\right].$$

3° $$\equiv p = 3, \qquad n = 5, \qquad k = 1,$$

$$C_3 = -\frac{1}{\cos^5 u}\,\frac{1.2.3.4}{1.2}\left[A_4(4,0) + A_3(4,1)\frac{\cos u}{2\cos u} + A_2(4,2)\frac{\cos 2u}{2^2\cos^2 u} + \ldots\right.$$

Or

$$1.2.3.4 A_4 = 1.2\left[S_3^{4-3+1} + \frac{4}{1}4S_2^1 + \frac{4.3}{1.2}4.3\,S_1^0\right] = 1.2[11 - 3.16 + 3.24],$$

$$1.2.3 A_3 = 1.2\left[S_2^1 + \frac{3}{1}4S_1^0\right] = 1.2[-3 + 12],$$

$$1.2 A_2 = 1.2\, S_1^0,$$

$$A_4 = \frac{35}{12}, \qquad A_3 = 3, \qquad A_2 = 1,$$

d'où

$$C_3 = \frac{1}{\cos^5 u}\left[-35 + 90\frac{\cos u}{\cos u} - 45\frac{\cos 2u}{\cos^2 u}\right].$$

4° $$\equiv p = 4, \qquad n = 5, \qquad k = 0,$$

$$C_4 = -1\,\frac{1}{\cos^5 u}\,\frac{1.2.3.4}{1.2.3}[A_3(4,1)]\frac{\sin u}{2\cos u},$$

$$1.2.3 A_3 = 1.2.3 S_2^0, \qquad A_3 = 1,$$

$$C_4 = \frac{10\sin u}{\cos^6 u}.$$

5° $$\equiv p = 5, \qquad n = 5, \qquad k = 0,$$

$$C_5 = \frac{1}{\cos^5 u}\,\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}[A_4(4,0)],$$

$$1.2.3.4 A_4 = 1.2.3.4 S_3^0, \qquad A_4 = 1,$$

$$C_5 = \frac{1}{\cos^5 u}.$$

Il est très facile maintenant d'exprimer tout en fonction de $\sin u$ et de $\cos u$. Le calcul ne présente pas assez d'intérêt pour que je le transcrive. On retrouverait le résultat qui se calcule directement

$$\begin{aligned}\frac{d^5 y}{dx^5} = \frac{1}{\cos^5 u}\frac{d^5 y}{du^5} + \frac{10\sin u}{\cos^6 u}\frac{d^4 y}{du^4} + \frac{10\cos^2 u + 45\sin^2 u}{\cos^7 u}\frac{d^3 y}{du^3} \\ + \frac{55\sin u\cos^2 u + 105\sin^3 u}{\cos^8 u}\frac{d^2 y}{du^2} \\ + \frac{9\cos^4 u + 90\sin^2 u\cos^2 u + 105\sin^4 u}{\cos^9 u}\frac{dy}{du}.\end{aligned}$$

47. *Quatrième exemple :*

$$x = \cos u.$$

Le résultat se déduit immédiatement du précédent. Posant

$$x = \sin\theta, \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - u,$$

on a

$$\frac{d^n y}{d\theta^n} = (\dot{u})^{(n)}\frac{dy}{du} + \frac{(\dot{u}^2)^{(n)}}{1.2}\frac{d^2 y}{du^2} + \ldots + \frac{(\dot{u}^n)^{(n)}}{1.2\ldots n}\frac{d^n y}{du^n}.$$

Comme $u = \frac{\pi}{2} - \theta$, $u' = -1$, $u'' = u''' = \ldots = 0$, il ne faut donc conserver à chaque coefficient $(u^p)^{(n)}$ que les dérivées premières; il ne restera qu'un coefficient

$$(u^n)^{(n)} = 1.2\ldots n(u')^n, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{(u^n)^{(n)}}{1.2\ldots n} = (-1)^n.$$

Il vient donc

$$\frac{d^{2\mu}y}{d\theta^{2\mu}} = \frac{d^{2\mu}y}{du^{2\mu}}, \qquad \frac{d^{2\mu+1}y}{d\theta^{2\mu+1}} = -\frac{d^{2\mu+1}}{du^{2\mu+1}}.$$

Alors, puisque

$$x = \sin\theta, \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \sum C_p \frac{d^p y}{d\theta^p},$$

on a

$$p = n - 2k, \qquad C_p = \frac{(-1)^k}{\cos^n\theta}\left[B_0 + B_1\frac{\cos\theta}{\cos\theta} + B_2\frac{\cos 2\theta}{\cos^2\theta} + \ldots\right],$$

$$p = n - (2k+1), \qquad C_p = \frac{(-1)^{k+1}}{\cos^n\theta}\left[B_1\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + B_2\frac{\sin 2\theta}{\cos^2\theta} + \ldots\right];$$

il en résulte

$$x = \cos u, \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \sum (-1)^p C_p \frac{d^p y}{du^p},$$

$$p = n - 2k, \qquad C_p = \frac{(-1)^k}{\sin^n u}\left[B_0 + B_1\frac{\sin u}{\sin u} - B_2\frac{\cos 2u}{\sin^2 u} - B_3\frac{\sin 3u}{\sin^3 u} + B_4\frac{\cos 4u}{\sin^4 u} + B_5\frac{\sin 5u}{\sin^5 u} - \ldots\right],$$

$$p = n - (2k+1), \qquad C_p = \frac{(-1)^{k+1}}{\sin^n u}\left[B_1\frac{\cos u}{\sin u} + B_2\frac{\sin 2u}{\sin^2 u} - \ldots\right].$$

Le calcul sera le même que dans le cas précédent. J'indique rapidement la marche.

Application numérique :

$$\frac{d^4 y}{dx^4}.$$

Comme coefficient de $\frac{dy}{du}$, on a

$$p = 1, \qquad k = 1,$$

$$\frac{-1}{\sin^4 u}\left[B_1\frac{\cos u}{\sin u} + B_2\frac{\sin 2u}{\sin^2 u} - B_3\frac{\cos 3u}{\sin^3 u} - \ldots\right],$$

$$B_1 = -\frac{1.2.3}{1}\,\frac{2.3}{1.2}\,\frac{4}{2}, \qquad B_2 = \frac{1.2.3}{1}\,3\,\frac{4.5}{1.2}\,\frac{1}{2^2}, \qquad B_3 = -\frac{1.2.3}{1}\,\frac{4.5.6}{1.2.3}\,\frac{1}{2^3};$$

$$B_1 = -36, \qquad B_2 = 45, \qquad B_3 = -15.$$

Le coefficient de $\frac{d^2 y}{du^2}$ est

$$p = 2, \qquad k = 1,$$

$$-\frac{1}{\sin^4 u}\left[\mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 \frac{\sin u}{\sin u} - \mathrm{B}_2 \frac{\cos 2u}{\sin^2 u}\right],$$

$$\mathrm{B}_0 = 11, \qquad \mathrm{B}_1 = -30, \qquad \mathrm{B}_2 = 15.$$

Enfin, pour $\frac{d^3 y}{du^3}$, on a

$$p = 3, \qquad k = 0,$$

$$\frac{1}{\sin^4 u}\left[\mathrm{B}_1 \frac{\cos u}{\sin u}\right], \qquad \mathrm{B}_1 = -\frac{1.2.3}{1.2} 1 \frac{4}{2} = -6.$$

On repasserait facilement de cette expression à

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{1}{\sin^4 u}\frac{d^4 y}{du^4} - \frac{6\cos u}{\sin^5 u}\frac{d^3 y}{du^3}$$
$$+ \frac{4\sin^2 u + 15\cos^2 u}{\sin^6 u}\frac{d^2 y}{du^2} - \frac{9\sin^2 u \cos u + 15\cos^3 u}{\sin^7 u}\frac{dy}{du}.$$

48. *Cinquième exemple :*

$$x = \operatorname{tang} u.$$

On a

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i}\int_{(\mathrm{C})} \frac{dy}{[\operatorname{tang}(u+u_0) - \operatorname{tang} u_0]^n}.$$

Or on sait que

$$z = e^{ui}, \qquad \operatorname{tang} u = i\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$\operatorname{tang}(u+u_0) - \operatorname{tang} u_0 = i\frac{2z_0^2(1-z^2)}{(1+z_0)^2(1+z^2 z_0^2)}.$$

En posant, pour abréger, l'écriture $\alpha = \frac{1}{z_0^2}$, on voit sans peine que le coefficient de $\frac{d^p y}{du^p}$, qui était

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)}\int_{(\mathrm{C})} \frac{u^{p-1}\,du}{[\operatorname{tang}(u+u_0) - \operatorname{tang} u_0)]^n},$$

deviendra

$$(-1)^n \frac{1}{2\pi i}\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)p}(-i)^{n+p}\frac{(1+z_0^2)^n}{2^n}\int_{\mathrm{C}} \frac{(z^2+\alpha)^n}{(z^2-1)^n}\,d(\mathrm{L}z)^p.$$

Posant

$$z^2 = \xi, \qquad d(\mathrm{L}z)^p = \frac{1}{2^p} d(\mathrm{L}\xi)^p,$$

on a

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots p}(-1)^n(-i)^{n+p}\,\frac{(1+z_0^2)^n}{2^{n+p}}\int_{\mathrm{C}}\frac{(\xi+\alpha)^n\dfrac{d(\mathrm{L}\xi)^p}{d\xi}}{(\xi-1)^n}\,d\xi.$$

Écrivant, pour abréger,

$$(\xi+\alpha)^n\,\frac{d(\mathrm{L}\xi)^p}{d\xi} = \mathrm{F}(\xi),$$

on a

$$\mathrm{F}(\xi) = \mathrm{F}(1) + \frac{\xi-1}{1}\mathrm{F}'(1) + \ldots + \frac{(\xi-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\mathrm{F}^{(n-1)}(1) + \ldots;$$

on voit que le coefficient $\dfrac{d^p y}{du^p}$ devient

$$(-1)^p(i)^{n+p}\,\frac{1}{1.2\ldots p}\,\frac{(1+z_0^2)^n}{2^{n+p}}\,\mathrm{F}^{(n-1)}(1).$$

Tout revient au calcul de $\mathrm{F}^{(n-1)}(1)$; or

$$\mathrm{F}^{(n-1)}(\xi) = (\alpha+\xi)^n\,\frac{d^n(\mathrm{L}\xi)^p}{d\xi^n} + \frac{n-1}{1}\,n(\alpha+\xi)^{n-1}\,\frac{d^{n-1}(\mathrm{L}\xi)^p}{d\xi^{n-1}} + \ldots.$$

Or nous avons déjà remarqué que, pour $\xi = 1$, on a

$$\frac{d^q(\mathrm{L}\xi)^p}{d\xi^q} = \mathrm{S}_{q-1}^{q-p}, \qquad \mathrm{S}_{q-1}^{q-p} = (-1)^{q-p}\,\Pi_{q-1}^{q-p},$$

en désignant par Π_λ^μ la somme des produits μ à μ des λ premiers nombres naturels.

D'autre part, pour $\xi = 1$, on a

$$\alpha + 1 = \frac{z_0^2+1}{z_0^2}.$$

Le coefficient de $\dfrac{d^p y}{du^p}$ devient alors, en groupant les termes,

$$(-1)^p(i)^{n+p}\,2^{n-p}\left\{\left(\frac{z_0^2+1}{2z_0}\right)^{2n}\mathrm{S}_{n-1}^{n-p} + \frac{n-1}{1}\,n\left(\frac{z_0^2+1}{2z_0}\right)^{2n-1}\mathrm{S}_{n-2}^{n-p-1}\,\frac{z_0}{2} + \ldots\right\}.$$

Remarquant, comme plus haut, que le résultat ne doit pas contenir i, on obtient, en repassant à $\sin u$ et $\cos u$,

$$\frac{z_0^2+1}{2z_0}=\cos u, \qquad z_0^p=\cos pu+i\sin pu.$$

On aura

$$x=\operatorname{tang} u, \qquad \frac{d^n y}{dx^n}=\sum D_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

1° $n+p=2k$:

$$D_p=(-1)^{p+k}2^{n-p}\Bigg[S_{n-1}^{n-p}\cos^{2n}u+\frac{n-1}{1}n\,S_{n-2}^{n-p-1}\cos^{2n-1}u\frac{\cos u}{2}$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}n(n-1)\,S_{n-3}^{n-p-2}\cos^{2n-2}u\frac{\cos 2u}{2^2}+\ldots\Bigg];$$

2° $n+p=2k+1$:

$$D_p=-(-1)^{p+k}2^{n-p}\Bigg[\frac{n-1}{1}n\,S_{n-2}^{n-p-1}\cos^{2n-1}u\frac{\sin u}{2}$$
$$+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}n(n-1)\,S_{n-3}^{n-p-2}\cos^{2n-2}u\frac{\sin 2u}{2^2}+\ldots\Bigg].$$

Application numérique :

$$\frac{d^4 y}{dx^4}=\sum D_p\frac{d^p y}{du^p}.$$

On a

$$n=4, \qquad p=1, \qquad n+p=5, \qquad k=2;$$

$$D_1=-(-1)^3 2^3\Bigg[\frac{3}{1}4\,S_2^2\cos^7 u\frac{\sin u}{2}$$
$$+\frac{3.2}{1.2}4.3\,S_1^1\cos^6 u\frac{\sin 2u}{2^2}+\frac{3.2.1}{1.2.3}4.3.2\,S_0^0\cos^5 u\frac{\sin 3u}{2^3}\Bigg];$$

$$n=4, \qquad p=2, \qquad n+p=6, \qquad k=3;$$

$$D_2=(-1)^5 2^2\Bigg[S_3^2\cos^8 u+\frac{3}{1}4\,S_2^1\cos^7 u\frac{\cos u}{2}+\frac{3.2}{1.2}4.3\,S_1^0\cos^6 u\frac{\cos 2u}{2^2}\Bigg];$$

$$n=4, \qquad p=3, \qquad n+p=7, \qquad k=3,$$

$$-(-1)^6\Bigg[\frac{3}{1}4\,S_2^0\cos^7 u\sin u\Bigg],$$

$$n=4, \qquad p=4, \qquad n+p=8, \qquad k=4;$$

$$(-1)^8 2^0 S_3^0\cos^8 u.$$

49. *Sixième exemple :*

$$x = \cot u.$$

Il me semble inutile d'insister à nouveau sur les remarques presque évidentes qui ont permis de passer du cas de $x = \sin u$ à celui de $x = \cos u$. On aura

$$x = \cot u, \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \sum \mathrm{E}_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

1° $n + p = 2k$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_p = (-1)^{2p+k} 2^{n-p} \Big[& \mathrm{S}_{n-1}^{n-p} \sin^{2n} u + \frac{n-1}{1} n \, \mathrm{S}_{n-2}^{n-p-1} \sin^{2n-1} u \frac{\sin u}{2} \\ & - \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} n(n-1) \, \mathrm{S}_{n-3}^{n-p-2} \sin^{2n-2} u \frac{\cos 2u}{2^2} \\ & - \ldots \sin^{2n-3} u \frac{\sin 3u}{2^3} + \ldots \sin^{2n-4} u \frac{\cos 4u}{2^4} + \ldots \Big].\end{aligned}$$

2° $n + p = 2k + 1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_p = (-1)^{2p+k+1} 2^{n-p} \Big[& \frac{n-1}{1} n \, \mathrm{S}_{n-2}^{n-p-1} \sin^{2n-1} u \frac{\cos u}{2} \\ & + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} n(n-1) \, \mathrm{S}_{n-3}^{n-p-2} \sin^{2n-2} u \frac{\sin 2u}{2^2} \\ & - \ldots \sin^{2n-3} u \frac{\cos 3u}{2^3} - \ldots \sin^{2n-4} u \frac{\cos 4u}{2^4} + \ldots \Big].\end{aligned}$$

Application numérique :

$$\frac{d^5 y}{dx^5} = \sum \mathrm{E}_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

On a, pour $n = 5$, $p = 1$, $n + p = 6$, $k = 3$,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_1 = (-1)^{2+3} 2^4 \Big[& \mathrm{S}_4^4 \sin^{10} u + \frac{4}{1} 5 \, \mathrm{S}_3^3 \sin^9 u \frac{\sin u}{2} - \frac{4.3}{1.2} 5.4 \, \mathrm{S}_2^2 \sin^8 u \frac{\cos 2u}{2^2} \\ & - \frac{4.3.2}{1.2.3} 5.4.3 \, \mathrm{S}_1^1 \frac{\sin 3u}{2^3} + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} 5.4.3.2 \, \mathrm{S}_0^0 \frac{\cos 4u}{2^4} \Big];\end{aligned}$$

$$\mathrm{S}_4^4 = 1.2.3.4 = 24, \qquad \mathrm{S}_3^3 = -1.2.3 = -6, \qquad \mathrm{S}_2^2 = 1.2, \qquad \mathrm{S}_0^0 = 1.$$

On a

$$-24[2^4\sin^{10}u - 2^3.5\sin^{10}u - 2^3.5\sin^8 u\cos 2u + 5.4\sin 3u + 5\cos 4u].$$

Pour $n=5$, $p=2$, $n+p=7$, $k=3$,

$$\begin{aligned}E_2 = (-1)^{4+3+1}2^3\Bigg[\frac{4}{1}5S_3^2\sin^9 u\frac{\cos u}{2} + \frac{4.3}{1.2}5.4S_2^1\sin^8 u\frac{\sin 2u}{2^2}\\ - \frac{4.3.2}{1.2.3}5.4.3S_1^0\sin^7 u\frac{\cos 3u}{2^3}\Bigg],\end{aligned}$$

$$S_3^2 = 1.2+1.3+2.3 = 11,\qquad S_2^1 = -(1+2) = -3,\qquad S_1^0 = 1.$$

Pour $n=5$, $p=3$, $n+p=8$, $k=4$,

$$D_3 = (-1)^{6+4}2^2\left[S_4^2\sin^{10}u + \frac{4}{1}5S_3^1\sin^9 u\frac{\sin u}{2} - \frac{4.3}{1.2}5.4S_2^0\sin^8 u\frac{\cos 2u}{2^2}\right],$$

$$\begin{aligned}&S_4^2 = 1.2+1.3+1.4+2.3+2.4+3.4 = 35,\\ &S_3^1 = -(1+2+3) = -6,\\ &S_2^0 = 1.\end{aligned}$$

Pour $n=5$, $p=4$, $n+p=9$, $k=4$,

$$D_4 = (-1)^{8+4+1}2\left[\frac{4}{1}5S_3^0\sin^9 u\frac{\cos u}{2}\right],\qquad S_3^0 = 1.$$

Pour $n=5$, $p=5$, $n+p=10$, $k=5$,

$$D_5 = (-1)^{10+5}2^0S_4^0\sin^{10}u = -\sin^{10}u.$$

Revenant à $\sin u$ et à $\cos u$, on obtiendrait le résultat obtenu par un calcul de proche en proche,

$$\begin{aligned}\frac{d^5y}{dx^5} &= 24\sin^6 u[-\ \ 5\cos^4 u + 10\sin^2 u\cos^2 u - \sin^4 u]\frac{dy}{du}\\ &+\ \ 8\sin^7 u[-30\cos^3 u + 20\sin^2 u\cos u]\frac{d^2y}{du^2}\\ &+20\sin^8 u[-\ \ 6\cos^2 u + \sin^2 u]\frac{d^3y}{du^3}\\ &-20\sin^9 u\cos u\frac{d^4y}{du^4} - \sin^{10}u\frac{d^5y}{du^5}.\end{aligned}$$

50. *Septième exemple :*

$$x = \operatorname{arc}\sin u.$$

Je ferai d'abord la remarque suivante. Dans le Chapitre II, on a démontré que

$$x = \mathrm{L}u, \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \sum \frac{\Delta^\lambda 0^n}{1.2\ldots\lambda} u^\lambda \frac{d^\lambda y}{du^\lambda}.$$

Or, si l'on appliquait la méthode que j'utilise présentement, le coefficient de $\frac{d^\lambda y}{du^\lambda}$ serait

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(\lambda-1)} \int_C \frac{(u-u_0)^{\lambda-1}}{(\mathrm{L}u - \mathrm{L}u_0)^n} du.$$

On a donc l'identité suivante

$$\frac{1.2\ldots(n-1)}{2\pi i} \int_C \frac{(u-u_0)^{\lambda-1}\,du}{(\mathrm{L}u - \mathrm{L}u_0)^n} = \frac{\Delta^\lambda 0^n}{\lambda} u_0^\lambda.$$

Revenant au problème actuel,

$$x = \arcsin u, \qquad u = \sin x,$$

le coefficient de $\frac{d^p y}{du^p}$ sera l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots p} \int_C \frac{d(u-u_0)^p}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{2\pi i} \frac{(n-1)!}{p!} \int_C \frac{d(\sin x - \sin x_0)^p}{(x-x_0)^n}.$$

Il a déjà souvent été remarqué que rien n'empêche de changer la variable sous le signe $\int$. J'emploierai encore la formule

$$z = e^{xi}, \qquad \sin x = \frac{z^2-1}{2zi}, \qquad x = -i\mathrm{L}z.$$

Substituant, on obtiendra

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)p} \frac{(i)^{n-p}}{(2z_0)^p} \int_C \frac{\frac{d}{dz}\left[(z-z_0)\left(z_0+\frac{1}{z}\right)\right]^p}{(\mathrm{L}z - \mathrm{L}z_0)^n} dz.$$

Si l'on pose

$$\frac{d\left[(z-z_0)\left(z_0+\frac{1}{z}\right)\right]^p}{dz} = \mathrm{F}(z),$$

on est ramené au calcul suivant :

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(z_0) + \frac{z-z_0}{1}\mathrm{F}'(z_0) + \ldots.$$

Il s'agit d'obtenir un certain nombre de termes de la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)p}\frac{(i)^{n-p}}{(2z_0)^p}\frac{F^{(\lambda-1)}(z_0)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\int_C\frac{(z-z_0)^{\lambda-1}\,dz}{(Lz-Lz_0)^n}$$

ou encore, d'après la remarque initiale,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\frac{1.2\ldots(n-1)}{1.2\ldots(p-1)p}\frac{(i)^{n-p}}{(2z_0)^p}\frac{F^{(\lambda-1)}(z_0)}{1.2\ldots(\lambda-1)}\frac{2\pi i}{1.2\ldots(n-1)}\frac{\Delta^\lambda 0^n}{\lambda}z_0^\lambda\\&=\frac{i^{n-p}z_0^{\lambda-p}}{P_p P_\lambda 2^p}F^{(\lambda-1)}(z_0)\,\Delta^\lambda 0^n.\end{aligned}$$

Revenant au développement de $F^{(\lambda-1)}(z_0)$, on a à effectuer ce calcul

$$\frac{d^\lambda\left[(z-z_0)\left(z_0+\frac{1}{z}\right)\right]^p}{dz^\lambda}=\sum\frac{P_\lambda}{P_\alpha P_{\lambda-\alpha}}[(z-z_0)^p]^{(\alpha)}\left[\left(z_0+\frac{1}{z}\right)^p\right]^{(\lambda-\alpha)}.$$

Comme il faudra faire $z=z_0$, on ne peut prendre que la valeur $\alpha=p$,

$$F^{(\lambda-1)}(z_0)=\frac{P_\lambda}{P_p P_{\lambda-p}}P_p\left[\left(z_0+\frac{1}{z}\right)^p\right]^{(\lambda-p)}.$$

On voit d'abord qu'il est nécessaire que λ soit au moins égal à p. Il reste à calculer

$$\sum_{\lambda=p}^{\lambda=n}\frac{i^{n-p}}{2^p}\frac{\Delta^\lambda 0^n}{P_p P_{\lambda-p}}z_0^{\lambda-p}\left[\left(\frac{zz_0+1}{z}\right)^p\right]^{(\lambda-p)}_{z=z_0}.$$

Or on a

$$\left(\frac{zz_0+1}{z}\right)^p=z_0^p+\frac{p_1}{1}z_0^{p-1}\frac{1}{z}+\frac{p(p-1)}{1.2}z_0^{p-2}\frac{1}{z^2}+\ldots.$$

Il serait facile de prendre la dérivée d'ordre $\lambda-p$ de cette expression, et, en remplaçant z_0 par $\cos x_0+i\sin x_0$ et z_0^μ par $\cos\mu x_0+i\sin\mu x_0$, on obtiendrait (en ne conservant que la partie réelle), une expression algébrique générale du coefficient $\frac{d^p y}{du^p}$. Cette formule théorique me paraissant presque inapplicable, je ne la développerai pas. Je me bornerai à faire le calcul dans le cas de $x=\operatorname{arc\,tang} u$, ce qui montrera clairement ce qu'il resterait à faire ici.

51. *Huitième exemple :*

$$x = \text{arc tang}\, u.$$

Le coefficient de $\frac{d^p y}{du^p}$ sera

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{P_{n-1}}{P_p}\int_C \frac{d(u-u_0)^p}{[\text{arc tang}\, u - \text{arc tang}\, u_0]^n}$$

ou encore

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{P_{n-1}}{P_p}\int_C \frac{d[\text{tang}\, x - \text{tang}\, x_0]^p}{(x-x_0)^n}.$$

Or

$$\text{tang}\, x = -i\,\frac{e^{2xi}-1}{e^{2xi}+1}.$$

Posant $e^{2xi} = z$,

$$\text{tang}\, x - \text{tang}\, x_0 = -2i\,\frac{z-z_0}{(z_0+1)(z+1)}, \qquad x = \frac{1}{2i}\mathrm{L}z.$$

Il vient

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{P_{n-1}}{P_p}(2i)^n\frac{(-2i)^p}{(z_0+1)^p}\int_C \frac{d\left(\frac{z-z_0}{z+1}\right)^p}{(\mathrm{L}z-\mathrm{L}z_0)^n}.$$

Posant, pour abréger,

$$\frac{\partial\left(\frac{z-z_0}{z+1}\right)^p}{\partial z} = \mathrm{F}(z),$$

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(z_0) + \frac{z-z_0}{1}\mathrm{F}'(z_0) + \ldots + \frac{(z-z_0)^{\lambda-1}}{1.2\ldots(\lambda-1)}\mathrm{F}^{(\lambda-1)}(z_0) + \ldots;$$

le coefficient cherché sera une somme de termes de la forme

$$\frac{1}{2\pi i}(-1)^p\frac{(2i)^{n+p}}{(z_0+1)^p}\frac{P_{n-1}}{P_p}\frac{\mathrm{F}^{(\lambda-1)}(z_0)}{P_{\lambda-1}}\int\frac{(z-z_0)^{\lambda-1}\,dz}{(\mathrm{L}z-\mathrm{L}z_0)^n}.$$

D'après la remarque faite dans l'exemple précédent, on peut encore écrire

$$(-1)^p\frac{(2i)^{n+p}}{P_p}\frac{\Delta^\lambda 0^n}{P_\lambda}\frac{z_0^\lambda\,\mathrm{F}^{(\lambda-1)}(z_0)}{(z_0+1)^p}.$$

Reste à développer le calcul de $\mathrm{F}^{(\lambda-1)}(z_0)$ qui nous permettra de reconnaître immédiatement que λ, quantité inférieure ou égale à n, n'est jamais inférieure à p. En effet,

$$\frac{\partial^\lambda \left(\frac{z-z_0}{z+1}\right)^p}{\partial z^\lambda} = \sum \frac{P_\lambda}{P_\alpha P_{\lambda-\alpha}} [(z-z_0)^p]^{(\alpha)} [(z+1)^{-p}]^{(\lambda-\alpha)}.$$

Comme on doit faire ultérieurement $z = z_0$, on ne peut prendre que la valeur $\alpha = p$, ce qui n'est évidemment possible que si $\lambda \geq p$. Il reste

$$\frac{P_\lambda}{P_p P_{\lambda-p}} P_p [(z+1)^{-p}]^{(\lambda-p)}_{z=z_0} = (-1)^{\lambda-p} \frac{P_\lambda}{P_{\lambda-p}} \frac{p(p+1)\ldots(\lambda-1)}{(z_0+1)^\lambda},$$

c'est-à-dire

$$(-1)^\lambda \frac{(2i)^{n+p}}{P_p} \frac{\Delta^\lambda 0^n}{P_{\lambda-p}} p(p+1)\ldots(\lambda-1) \frac{z_0^\lambda}{(z_0+1)^{\lambda+p}}.$$

Revenant à x,

$$\frac{z_0}{z_0+1} = \frac{e^{2x_0 i}}{e^{2x_0 i}+1} = \frac{2e^{x_0 i}}{e^{2x_0 i}+1} \frac{e^{x_0 i}}{2} = \frac{e^{x_0 i}}{2\cos x_0},$$

$$\frac{1}{z_0+1} = \frac{1}{e^{2x_0 i}+1} = \frac{2e^{x_0 i}}{e^{2x_0 i}+1} \frac{1}{2e^{x_0 i}} = \frac{e^{-x_0 i}}{2\cos x_0}.$$

Supprimant l'indice de x_0 qui est inutile,

$$(-1)^\lambda (2i)^{n+p} \frac{P_{\lambda-1}}{P_{p-1} P_p P_{\lambda-p}} \Delta^\lambda 0^n \frac{e^{(\lambda-p)xi}}{2^{\lambda+p} \cos^{\lambda+p} x}.$$

Si maintenant on ne prend que la partie réelle qui doit seule rester dans le résultat, il vient

$$x = \operatorname{arc\,tang} u, \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \sum G_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

1° $n+p = 2k$:

$$G_p = \sum_{\lambda=p}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda+k} \frac{2^n}{2^\lambda} \frac{P_{\lambda-1}}{P_{p-1} P_p P_{\lambda-p}} \Delta^\lambda 0^n \frac{\cos(\lambda-p)x}{\cos^{\lambda+p} x};$$

2° $n+p = 2k+1$:

$$G_p = \sum_{\lambda=p}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda+k+1} \frac{2^n}{2^\lambda} \frac{P_{\lambda-1}}{P_{p-1} P_p P_{\lambda-p}} \Delta^\lambda 0^n \frac{\sin(\lambda-p)x}{\cos^{\lambda+p} x}.$$

Application numérique :

$$\frac{d^4y}{dx^4}.$$

En faisant successivement $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, $\lambda = 4$, on a :

1° Pour $n = 4$, $p = 1$, $n + p = 5$, $k = 2$,

$$\begin{array}{lllll}
\lambda = 1 \ldots\ldots & \lambda - p = 0, & \sin 0 = 0, & & \\
\lambda = 2 \ldots\ldots & (-1)^5 \dfrac{2^4}{2^2} \dfrac{P_1}{P_0 P_1 P_1} & \Delta^2 0^4 \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} & = - & 4.14 \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}, \\
\lambda = 3 \ldots\ldots & (-1)^6 \dfrac{2^4}{2^3} \dfrac{P_2}{P_1 P_0 P_2} & \Delta^3 0^4 \dfrac{\sin 2x}{\cos^4 x} & = & 2.36 \dfrac{\sin 2x}{\cos^4 x}, \\
\lambda = 4 \ldots\ldots & - & \Delta^4 0^4 \dfrac{\sin 3x}{\cos^5 x} & = - & 24 \dfrac{\sin 3x}{\cos^5 x};
\end{array}$$

2° Pour $n = 4$, $p = 2$, $n + p = 6$, $k = 3$,

$$\begin{array}{lllll}
\lambda = 2 \ldots\ldots & (-1)^{2+3} \dfrac{2^4}{2^2} \dfrac{P_1}{P_1 P_2 P_0} & \Delta^2 0^4 \dfrac{1}{\cos^4 x} & = - & 2.14 \dfrac{1}{\cos^4 x}, \\
\lambda = 3 \ldots\ldots & \dfrac{2^4}{2^3} \dfrac{P_2}{P_1 P_2 P_1} & \Delta^3 0^4 \dfrac{\cos x}{\cos^5 x} & = & 2.36 \dfrac{\cos x}{\cos^5 x}, \\
\lambda = 4 \ldots\ldots & - \quad \dfrac{P_3}{P_1 P_2 P_2} & \Delta^4 0^4 \dfrac{\cos 2x}{\cos^6 x} & = - & 36 \dfrac{\cos 2x}{\cos^6 x};
\end{array}$$

3° Pour $n = 4$, $p = 3$, $n + p = 7$, $k = 3$,

$$\begin{array}{ll}
\lambda = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots & \sin 0 = 0, \\
\lambda = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots & (-1)^8 \dfrac{P_3}{P_2 P_3 P_1} \Delta^4 0^4 \dfrac{\sin x}{\cos^7 x} = 12 \dfrac{\sin x}{\cos^7 x};
\end{array}$$

4° Pour $n = 4$, $p = 4$, $n + p = 8$,

$$\lambda = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (-1)^8 \frac{P_3}{P_3 P_4 P_0} \Delta^4 0^4 \frac{1}{\cos^8 x} = \frac{1}{\cos^8 x}.$$

52. *Neuvième exemple :*

$$x = \operatorname{arc} \cos u \qquad \text{ou} \qquad x = \operatorname{arc} \cot u.$$

La méthode étant la même dans les deux cas, je ferai le raisonnement en partant de

$$x = \operatorname{arc} \cot u.$$

On a

$$x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tang} u.$$

Posant

$$x_1 = \frac{\pi}{2} - x \qquad \text{ou encore} \qquad x = \frac{\pi}{2} - x_1,$$

on a

$$x_1 = \operatorname{arc\,tang} u.$$

Nous avons calculé dans l'exemple précédent les coefficients G, tels que

$$\frac{d^n y}{dx_1^n} = \sum G_p \frac{d^p y}{du^p},$$

G_p étant exprimé en fonction des sinus et des cosinus des multiples de x_1.

Or nous avons démontré, pour passer du cas du sinus à celui du cosinus (n° 47), que

$$\frac{d^n y}{dx_1^n} = (-1)^n \frac{d^n y}{dx^n}.$$

On aura donc actuellement

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \sum G_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Il faudra toutefois prendre la précaution de remplacer x par $\frac{\pi}{2} - x$ dans l'expression écrite plus haut (n° 51) des coefficients G_p.

RÉSUMÉ.

53. La formule du changement de variable indépendante peut être soit mise sous forme de déterminant, soit développée sans terme inutile.

$$y = f(x), \qquad x = \varphi(u):$$

1°

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} (x)^{(1)} & (x^2)^{(1)} & \ldots & (x^{m-1})^{(1)} & y^{(1)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ (x)^{(m)} & (x^2)^{(m)} & \ldots & (x^{m-1})^{(m)} & y^{(m)} \end{vmatrix}}{1.1.2.1.2.3\ldots1.2\ldots m(x')^{1+2+\ldots+m}};$$

2°

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{A_p}{1.2\ldots(p-1)} y^{(p)},$$

$$A_p = \sum (-1)^\alpha \frac{P_{n+\alpha-1}}{P_\beta \ldots P_\lambda P_2^\beta \ldots P_k^\lambda} \frac{(x'')^\beta \ldots (x^{(k)})^\lambda}{(x')^{n+\alpha}},$$

$$\beta + 2\gamma + \ldots + (k-1)\lambda = n - p,$$
$$\beta + \gamma + \ldots + \lambda = \alpha.$$

Si $\varphi(u)$ est une des fonctions usuelles u^μ, e^μ, Lu, $\sin u$, $\operatorname{tang} u$, $\arcsin u$, $\operatorname{arc\,tang} u$, on possède des formules qui peuvent être compliquées, mais qui ne contiennent que des coefficients numériques à expression générale connue.

1° $x = u^\mu$:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{\mu^n} \frac{\Delta_{-1}^p p^{n'-\mu}}{1.2\ldots p} u^p \frac{d^p y}{du^p};$$

2° $x = e^u$:

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} = \left[\frac{d}{du} - (n-1)\right]\left[\frac{d}{du} - (n-2)\right]\ldots\left(\frac{d}{du} - 1\right)\frac{dy}{du};$$

3° $x = Lu$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\Delta^p 0^n}{1.2\ldots p} u^p \frac{d^p y}{du^p};$$

4° $x = \sin u$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} C_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Pour $p = n - 2k$,

$$C_p = \frac{(-1)^k}{\cos^n u} \frac{P_{n-1}}{P_{p-1}} \left[A_{n-1}(n-1, 0) + A_{n-2}(n-1, 1) \frac{\cos u}{2\cos u} + A_{n-3}(n-1, 2) \frac{\cos 2u}{2^2 \cos^2 u} \ldots \right],$$

Pour $p = n - (2k+1)$,

$$C_p = \frac{(-1)^{k+1}}{\cos^n u} \frac{P_{n-1}}{P_{p-1}} \left[A_{n-2}(n-1, 1) \frac{\sin u}{2\cos u} + A_{n-3}(n-1, 2) \frac{\sin 2u}{2^2 \cos^2 u} \ldots \right],$$

$$(n-1, q) = (-1)^q \frac{1.2.3\ldots(n-1+q)}{1.2\ldots(n-1)\,1.2\ldots q},$$

Pour $\varepsilon \geq p-1$,

$$1.2\ldots\varepsilon A_\varepsilon = P_{p-1}\left[S_{\varepsilon-1}^{\varepsilon-p+1} + \frac{\varepsilon}{1}(n-1)S_{\varepsilon-2}^{\varepsilon-p} + \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{1.2}(n-1)(n-2)S_{\varepsilon-3}^{\varepsilon-p-1}\ldots\right],$$

$$S_\mu^\lambda = (-1)^\mu \Pi_\lambda^\mu,$$

$\Pi_\lambda^\mu = \Sigma$ des produits μ à μ de $1, 2, \ldots, \lambda$;

5° $x = \tang u$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} D_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Pour $n+p=2k$,

$$D_p = (-1)^{p+k} 2^{n-p}\left[S_{n-1}^{n-p}\cos^{2n}u + \frac{n-1}{1} n S_{n-2}^{n-p-1}\cos^{2n-1}u\frac{\cos u}{2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} n(n-1) S_{n-3}^{n-p-2}\cos^{2n-2}u\frac{\cos 2u}{2^2}\ldots\right],$$

Pour $n+p=2k+1$,

$$D_p = (-1)^{p+k+1} 2^{n-p}\left[\frac{n-1}{1} n S_{n-2}^{n-p-1}\cos^{2n-1}u\frac{\sin u}{2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} n(n-1) S_{n-3}^{n-p-2}\cos^{2n-2}u\frac{\sin 2u}{2^2}\ldots\right];$$

6° $x = \arcsin u$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{p=1}^{p=n} A_p \frac{d^p y}{du^p},$$

$$A_p = \sum 1.2\ldots n \frac{(\cos x)^{h_1}}{1.2\ldots h_1} \frac{\left(\frac{-\sin x}{1.2}\right)^{h_2}}{1.2\ldots h_2} \frac{\left(\frac{-\cos x}{1.2.3}\right)^{h_3}}{1.2\ldots h_3}\cdots\frac{\left[\frac{\sin\left(x+\alpha\frac{\pi}{2}\right)}{1.2\ldots\alpha}\right]^{h_\alpha}}{1.2\ldots h_\alpha},$$

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_\alpha = p,$$
$$h_1 + 2h_2 + \ldots + \alpha h_\alpha = n;$$

7° $x = \operatorname{arc\,tang} u$:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} G_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Pour $n+p=2k$,

$$G_p=\sum_{\lambda=p}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda+k}\frac{2^n}{2^\lambda}\frac{P_{\lambda-1}}{P_{p-1}P_pP_{\lambda-p}}\Delta^\lambda 0^n\frac{\cos(\lambda-p)x}{\cos^{\lambda+p}x}.$$

Pour $n+p=2k+1$,

$$G_p=\sum_{\lambda=p}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda+k+1}\frac{2^n}{2^\lambda}\frac{P_{\lambda-1}}{P_{p-1}P_pP_{\lambda-p}}\Delta^\lambda 0^n\frac{\sin(\lambda-p)x}{\cos^{\lambda+p}x}.$$

J'ai démontré très simplement que les cas de $x=\cos u$, $x=\cot u$, ainsi que ceux de $x=\operatorname{arc}\cos u$, $x=\operatorname{arc}\cot u$ rentraient dans les cas précédents.

Tous les résultats annoncés étant obtenus par application directe et systématique des formules générales, je me bornerai à quelques observations générales avant de terminer ce trop long travail.

54. Avant d'aller plus loin, je ferai remarquer que, si l'on remplace x et u par les expressions plus générales $ax+b$ et $cu+d$, les résultats précédents ne sont pas sensiblement changés. Toute explication vraie pour le premier cas subsiste pour le second. Cette observation est tellement évidente que je me bornerai à l'appliquer, sans en prévenir, quand l'occasion s'en présentera.

55. Le changement de la variable indépendante peut être employé en Analyse pour ramener certaines équations différentielles à d'autres plus simples.

Pour fixer les idées, je suppose qu'on veuille trouver des équations différentielles se ramenant aux équations linéaires à coefficients constants. Afin de découvrir le caractère particulier présenté par de pareilles équations, j'imaginerai que l'on veuille inversement repasser de l'équation à coefficients constants à l'équation à coefficients variables.

On part donc de

$$A_0\frac{d^ny}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+A_ny=0,$$

A_0, A_1, ..., A_n étant des nombres arbitraires.

Si l'on effectue la substitution

$$x = \mathrm{L}u,$$

on a, en posant, pour abréger, $\dfrac{\Delta^p 0^n}{1.2\ldots p} = b_{np}$,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = b_{n1} \quad u\frac{dy}{du} + b_{n2} \quad u^2\frac{d^2 y}{du^2} + \ldots + b_{nn} \quad u^n \frac{d^n y}{du^n},$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = b_{(n-1)1}\, u\frac{dy}{du} + b_{n-1,2}\, u^2\frac{d^2 y}{du^2} + \ldots + b_{n-1,n-1}\, u^{n-1}\frac{d^{n-1} y}{du^{n-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On arrivera à

$$\mathrm{B}_0 u^n \frac{d^n y}{du^n} + \mathrm{B}_1 u^{n-1}\frac{d^{n-1} y}{du^{n-1}} + \ldots + \mathrm{B}_n y = 0,$$

$$\mathrm{B}_p = \mathrm{A}_0 b_{np} + \mathrm{A}_1 b_{n-1,p} + \ldots + \mathrm{A}_{n-p} b_{pp}.$$

Les quantités A étant arbitraires, il est facile de voir qu'on peut en disposer de manière à donner aux coefficients B des valeurs quelconques.

Par suite, toute équation de la forme

$$\mathrm{A}_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{A}_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \mathrm{A}_n y = 0$$

pourra être ramenée à une équation linéaire à coefficients constants par la substitution inverse

$$x = e^u.$$

On retrouve un résultat très connu qui s'énonce ordinairement ainsi. Désignant par $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ des constantes, l'équation linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{\mathrm{A}_1}{ax+b}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_n}{(ax+b)^n} y = 0$$

se ramène à la forme à coefficients constants par la substitution

$$ax + b = e^u.$$

56. Cette propriété, très simple, tient donc à la forme particulière que prend la formule du changement de variable pour $x = \mathrm{L}u$; tous les autres changements simples $x = u^\mu, \ldots$ sont visiblement incapables de donner le même résultat. Ils ne pourront ramener à avoir ses coef-

ficients constants qu'une équation linéaire satisfaisant à deux conditions. Premièrement elle doit rentrer dans un type donné. Deuxièmement ses coefficients numériques doivent vérifier certaines équations bien déterminées.

Par exemple, on a trouvé

$$x = u^\mu,$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{u^{n\mu}}\left[b_{n,1}\,u\frac{dy}{du} + b_{n,2}\,u^2\frac{d^2y}{du^2} + \ldots + b_{n,n}\,u^n\frac{d^ny}{du^n}\right].$$

Il en résulte que l'expression générale des équations qui se ramènent à l'équation linéaire à coefficients constants par la substitution

$$u = x^\mu$$

est

$$\frac{\lambda_0}{x^{n\mu}}\left[b_{nn}\,x^n\frac{d^ny}{dx^n} + \ldots + b_{n1}\,x\frac{dy}{dx}\right]$$
$$+ \frac{\lambda_1}{x^{(n-1)\mu}}\left[b_{n-1,\,n-1}\,x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\right] + \ldots + \frac{\lambda_{n-1}}{x^\mu}\left[\frac{1}{\mu}\,x\frac{dy}{dx}\right] + \lambda_n y = 0.$$

b_{nn}, ... étant des nombres dont nous avons trouvé l'expression générale; λ_0, λ_1, ... étant n quantités arbitraires.

Si donc on a commencé par mettre partout en évidence $\left(x\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ..., $\left(x^n\frac{d^ny}{dx^n}\right)$, le coefficient de $\left(x^n\frac{d^ny}{dx^n}\right)$ sert à déterminer μ; les coefficients de $\frac{1}{x^{n\mu}}$ dans les multiplicateurs de $\left(x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$, ..., $\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(x\frac{dy}{dx}\right)$ doivent prendre des valeurs numériques déterminées, quand on aura pris arbitrairement le coefficient de $\frac{1}{x^{n\mu}}\left(x^n\frac{d^ny}{dx^n}\right)$. Si maintenant on choisit arbitrairement le coefficient de $\frac{1}{x^{(n-1)\mu}}$ dans un seul des $(n-1)$ termes qui contiennent cette quantité, les coefficients seront déterminés dans les $(n-2)$ autres termes. Continuant ainsi, on verrait qu'on ne peut prendre, une fois μ déterminé, que n coefficients arbitraires, un pour $\frac{1}{x^{n\mu}}$, un pour $\frac{1}{x^{(n-1)\mu}}$, ..., et enfin un pour $\frac{1}{x^\mu}$.

Chacun des autres changements simples $x = e^u$, $x = \sin u$, ... fournirait immédiatement un calcul analogue. Il est d'ailleurs inutile de récrire sous une autre forme des résultats connus.

57. Il semble, au premier abord, que la question n'ait guère avancé. Mais, si l'on réfléchit au résultat précédent, on s'aperçoit qu'on a gagné de ne plus être tenté d'essayer les substitutions élémentaires indiquées plus haut lorsque l'équation ne rentre pas dans un certain type facile à reconnaître.

Il resterait à calculer effectivement les coefficients numériques, relatifs aux changements élémentaires, pour les valeurs de n les plus simples, et à ramener une équation différentielle donnée à une autre du même degré déjà étudiée, linéaire ou non. Je laisserai de côté ce calcul, plutôt long que difficile, qui n'exige, d'ailleurs, la connaissance d'aucun résultat général, en me bornant à un exemple.

Si l'on a $n = 2$, l'équation

$$\frac{\lambda}{x^{2\mu}}\left[b_{22}x^2\frac{d^2y}{dx^2} + b_{21}x\frac{dy}{dx}\right] + \frac{\lambda_1}{x^\mu}x\frac{dy}{dx} + \lambda_2 y = f(x)$$

se transformera en une équation linéaire à coefficients constants par la substitution

$$u = x^\mu.$$

On vérifie facilement que cette équation peut s'écrire

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Bx^\mu - (\mu-1)A}{x}\frac{dy}{dx} + Cx^{2\mu-2}y = f_1(x),$$

en désignant par A, B, C trois paramètres constants.

D'une manière un peu plus générale, on peut dire que l'équation

$$A\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{B(ax+b)^\mu - Aa(\mu-1)}{ax+b} + C(ax+b)^{2\mu-2}y = f(x),$$

où A, B, C sont des constantes, se ramènera à l'équation linéaire à coefficients constants par la substitution

$$u = (ax+b)^\mu.$$

On obtiendrait le même résultat avec la substitution un peu plus générale

$$cu + d = (ax+b)^\mu.$$

58. Enfin, si, sans s'occuper des applications, on veut arriver à des formules algébriques, difficiles à vérifier directement, rien n'est plus facile.

Je donnerai un seul exemple.

Nous avons trouvé, pour le cas de $x = \cos u$, les résultats suivants (n° 47) :

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum (-1)^p \mathrm{C}_p \frac{d^p y}{du^p}.$$

Pour $p = m - 2k$,

$$\mathrm{C}_p = \frac{(-1)^k}{\sin^m u}\left[\mathrm{B}_0 + \mathrm{B}_1 \frac{\sin u}{\sin u} - \mathrm{B}_2 \frac{\cos 2u}{\sin^2 u} \cdots\right].$$

Pour $p = m - (2k+1)$,

$$\mathrm{C}_p = \frac{(-1)^{k+1}}{\sin^m u}\left[\mathrm{B}_1 \frac{\cos u}{\sin u} + \mathrm{B}_2 \frac{\sin 2u}{\sin^2 u} \cdots\right].$$

L'expression générale des coefficients B a été donnée explicitement.

Or, si l'on veut traiter le même changement de variable par le déterminant de Wronski, on obtient d'abord

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} d\cos u & d\cos^2 u & d\cos^3 u & \ldots & d\cos^{m-1} u & dy \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ d^m \cos u & d^m \cos^2 u & d^m \cos^3 u & \ldots & d^m \cos^{m-1} u & d^m y \end{vmatrix}}{1.1.2\ldots 1.2\ldots m(d\cos u)^{1+2+\ldots+m}}.$$

Je rappellerai la formule

$$2^{n-1}\cos^n a = \cos na + \frac{n}{1}\cos(n-2)a + \ldots.$$

Remplaçant $\cos^p u$ par cette valeur, il est évident que par des combinaisons de colonnes on se ramènera à

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\frac{d^m y}{dx^m} = \frac{\begin{vmatrix} d\cos u & d\cos 2u & \ldots & d\cos(m-1)u & dy \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ d^m \cos u & d^m \cos 2u & \ldots & d^m \cos(m-1)u & d^m y \end{vmatrix}}{2^{1+2+\ldots+(m-2)}\,1.1.2\ldots 1.2\ldots m(d\cos u)^{1+2+\ldots+m}}.$$

Développant le déterminant suivant les éléments de la dernière colonne, on aura

$$(-1)^p C_p = \frac{(-1)^{m+p}\begin{vmatrix} (\cos u)^{(1)} & \dots & [\cos(m-1)u]^{(1)} \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ (\cos u)^{(p-1)} & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ (\cos u)^{(p+1)} & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ (\cos u)^{(m)} & \dots & [\cos(m-1)u]^{(m)} \end{vmatrix}}{2^{\frac{(m-2)(m-1)}{2}}\, 1.2.1.2.3\dots 1.2\dots(m-1)(-\sin u)^{1+2+\dots+m}}.$$

On a donc obtenu explicitement le développement de déterminants à forme très symétrique suivant les multiples de $\sin u$ et de $\cos u$.

59. L'exemple géométrique traité dans la deuxième Partie du Chapitre II (nos 28 et 29) montre qu'il y aurait de nombreux développements à obtenir si l'on s'adressait à la théorie des courbes gauches et à celle des surfaces. Je me borne à le rappeler au souvenir.

60. Je laisserai de côté tous les développements analogues aux précédents qu'il serait facile de tirer soit de l'Analyse pure, soit de ses applications géométriques.

Le but que je me suis proposé me paraît atteint. Non seulement des formules générales ont été indiquées; mais encore la plupart d'entre elles ont été appliquées à quelque exemple et toujours le calcul a été fait systématiquement jusqu'au bout. La possibilité d'utiliser les formules ne peut plus, dès lors, être mise en doute, et c'est ce que je tenais à établir.