ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉDOUARD GOURSAT

Sur les fonctions d'une variable analogues aux fonctions hypergéométriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 3 (1886), p. 107-136
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1886_3_3__107_0>

SUR LES

FONCTIONS D'UNE VARIABLE[1]

ANALOGUES AUX

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES,

PAR M. E. GOURSAT,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Tous les géomètres connaissent le beau Mémoire de Riemann sur les fonctions hypergéométriques. L'illustre auteur établit que ces fonctions sont définies par leurs points de ramification et les exposants de discontinuité, entre lesquels doit exister une certaine relation. Les travaux de M. Fuchs sur la théorie des équations linéaires ont rendu ces résultats immédiats et ont permis de les généraliser de différentes façons. Mais toutes ces généralisations offrent à première vue quelque chose d'arbitraire, qui tient à l'indétermination même du problème. Si, en effet, on essaye d'étendre la définition de Riemann aux intégrales d'équations linéaires d'un ordre supérieur au second ou ayant plus de trois points critiques, on voit immédiatement que cette extension ne peut se faire sans modification. Il faudra imposer aux intégrales, outre les conditions de Riemann, des conditions nouvelles, et il est évident qu'*a priori* rien n'empêche de les choisir d'une façon tout à fait arbitraire, pourvu que le problème devienne déterminé. Mais, si l'on se laisse guider par les généralisations déjà obtenues et par la théorie des intégrales régulières de M. Fuchs, on est conduit à imposer aux intégrales des conditions nouvelles d'une forme très simple. Ces conditions consistent, d'une manière générale, à supposer que, dans le domaine de quelques-uns des points critiques, il existe plusieurs branches linéairement indépendantes, telles que le quotient de deux d'entre elles est uniforme dans ce domaine.

---

(1) Les principaux résultats de ce travail ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (25 janvier 1886).

Le problème se trouve alors décomposé en deux autres. D'une part, on a à calculer les solutions en nombres entiers et positifs de certaines équations arithmétiques. Ces équations admettent deux systèmes de solutions connues qui correspondent aux fonctions de M. Pochammer (*Journal de Crelle*, t. 71) et aux séries hypergéométriques d'ordre supérieur (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. XII). Mais ces deux solutions ne sont en quelque sorte que les termes extrêmes d'une série indéfinie de solutions; ce qui montre que la question est loin d'être épuisée.

Connaissant un système de solutions des équations précédentes, la détermination des coefficients de l'équation linéaire correspondante exige des calculs algébriques, qui paraissent devoir être en général assez compliqués. En faisant une hypothèse de plus, on est conduit à un cas particulier intéressant (auquel on peut d'ailleurs ramener tous les autres), où les coefficients sont fournis par des équations du premier degré. Il y a deux types d'équations de cette espèce du troisième ordre, qui du reste sont bien connus. Il y en a six pour les équations du quatrième ordre, dont trois sont connus déjà complètement; un cas particulier d'un des autres types a été rencontré par M. Brioschi dans ses recherches sur la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques.

Toutes ces équations jouissent d'une propriété importante. On peut, par des calculs algébriques, déterminer les substitutions que subit un système fondamental d'intégrales convenablement choisi quand on fait décrire à la variable un contour fermé quelconque. Les coefficients de ces substitutions sont des fonctions *algébriques* des multiplicateurs des intégrales dans le domaine des points critiques et ne dépendent pas des points critiques eux-mêmes. Dans les cas particuliers auxquels j'ai appliqué la méthode, ces coefficients sont des fonctions *rationnelles* des multiplicateurs. Le petit nombre d'équations linéaires pour lesquelles on a pu résoudre effectivement ce problème donne, il me semble, quelque intérêt à cette proposition. On en déduit un certain nombre de conséquences, qu'il est bien facile d'apercevoir.

Pour éviter toute ambiguïté, je réserverai le nom de fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur aux fonctions que j'ai étudiées dans le travail déjà cité (*Annales de l'École Normale*).

1. Soit

$$\Phi(y) = 0$$

une équation linéaire à coefficients rationnels et à intégrales régulières, ayant en tout ρ points singuliers, $a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}, a_\rho$, y compris le point $x = \infty$, que nous supposerons toujours un point véritablement singulier, de sorte que l'on posera $a_\rho = \infty$. La forme générale de cette équation sera, comme on sait,

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi(y) = [\psi(x)]^m \dfrac{d^m y}{dx^m} + [\psi(x)]^{m-1} F_{\rho-2}(x) \dfrac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \\ \qquad + [\psi(x)]^{m-2} F_{2(\rho-2)}(x) \dfrac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + F_{m(\rho-2)}(x)\, y = 0, \end{cases}$$

où

$$\psi(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{\rho-1})$$

et où $F_{\rho-2}(x), \ldots, F_{m(\rho-2)}(x)$ sont des polynômes d'un degré marqué par leur indice ou de degré moindre. Le nombre total de coefficients arbitraires que contient l'équation la plus générale de cette espèce, quand on regarde les points critiques comme donnés, est donc égal à

$$\rho - 2 + 1 + 2(\rho - 2) + 1 + \ldots + m(\rho - 2) + 1 = (\rho - 2)\frac{m(m+1)}{2} + m.$$

Considérons les diverses équations déterminantes fondamentales relatives aux points critiques $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ de l'équation (1), la somme des racines de ces ρ équations ne dépend pas des coefficients de l'équation (1). On a en effet la relation suivante, qu'il est bien aisé d'établir,

$$(2)\qquad \Sigma r = \frac{m(m-1)(\rho-2)}{2}.$$

Il suit de là que de ces $m\rho$ racines $m\rho - 1$ seulement peuvent être prises arbitrairement, et la dernière sera alors déterminée par la relation (2). La connaissance de ces $m\rho - 1$ racines entraîne $m\rho - 1$ équations de condition bien connues entre les coefficients de l'équation (1), nombre inférieur au nombre total des coefficients dès que m est supérieur à 2 ou ρ supérieur à 3. Supposons, pour prendre le cas général, que, parmi les racines de chaque équation déterminante, il n'y en ait pas deux dont la différence soit un nombre entier; les coefficients de l'équation (1) étant choisis de façon à satisfaire aux conditions précédentes, cette équation possédera bien, dans le domaine de chacun des points critiques, m intégrales appartenant respectivement aux exposants voulus. Mais, comme il reste encore un certain nombre de coefficients arbitraires, on voit que, quand on se donne la forme d'un système fondamental d'intégrales dans le domaine de chacun des points critiques, cela ne suffit pas pour déterminer complètement l'équation ni par suite ses intégrales. Les intégrales de l'équation linéaire la plus générale d'ordre m ayant ρ points singuliers, de la forme écrite plus haut, ne sont donc pas susceptibles d'une définition analogue à celle de Riemann pour les fonctions hypergéométriques de Gauss.

2. Il est donc nécessaire, pour généraliser le problème, d'imposer aux intégrales de nouvelles conditions. On pourrait, par exemple, faire intervenir les relations linéaires entre les différents systèmes d'intégrales (*voir* RIEMANN, *Gesammelte Werke*, p. 357); mais les généralisations connues jusqu'ici reposent sur des principes tout différents, que la théorie générale de M. Fuchs permet encore d'exposer très simplement. Supposons qu'une ou plusieurs des équations déterminantes contiennent des groupes de racines, dont les différences mutuelles sont des nombres entiers tous différents de zéro. Si on laisse aux coefficients restés arbitraires toute leur indétermination, il s'introduira forcément des termes logarithmiques dans le groupe d'intégrales correspondant; et, si l'on veut faire disparaître ces termes logarithmiques, on sera amené à introduire de nouvelles équations de condition entre les coefficients. Pour plus de précision, soit $x = a$ un point singulier quelconque d'une équation linéaire analogue à l'équation (1) et

$$r, \quad r+n_1, \quad r+n_2, \quad \ldots \quad r-n_{\lambda-1},$$

un groupe de λ racines de l'équation déterminante relative à ce point, où $n_1, n_2, \ldots, n_{\lambda-1}$ sont des nombres entiers positifs tous différents, rangés par ordre de grandeur croissante; admettons en outre que, pour une autre racine r' ne faisant pas partie du groupe, la différence $r'-r$ n'est jamais un nombre entier. Pour que l'équation proposée admette, dans le domaine du point $x=a$, λ intégrales linéairement distinctes de la forme

$$(x-a)^r \mathrm{P}(x-a), \quad (x-a)^{r+n_1}\mathrm{P}_1(x-a), \quad \ldots,$$

où $P(x-a)$, $P_1(x-a)$, ... désignent des fonctions holomorphes dans ce domaine et différentes de zéro pour $x=a$, il faudra que les coefficients de l'équation proposée vérifient en outre

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$$

équations de condition qui, jointes aux λ relations qui expriment que r, $r+n_1$, ..., $r+n_{\lambda-1}$ sont racines de l'équation déterminante, donnent en tout

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

équations entre les coefficients de l'équation proposée. Si l'on pose

$$\omega = e^{2i\pi r},$$

on voit que toutes les intégrales précédentes sont multipliées par le facteur ω lorsque la variable décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x=a$; je dirai, pour abréger, que ces intégrales ont le même *multiplicateur*. Ainsi l'existence d'un groupe de λ intégrales ayant le même multiplicateur dans le domaine d'un point critique et appartenant respectivement à des exposants déterminés entraîne

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

équations de condition entre les coefficients de l'équation (1).

En particulier, si l'on suppose $\lambda=m$, toutes les intégrales auront, dans les environs du point $x=a$, le même multiplicateur, et ce point ne sera qu'un point singulier apparent ou du moins on pourra le ramener à être tel par un changement bien connu de fonction. On peut remarquer que l'existence de ce point singulier apparent exige

$$\frac{m(m+1)}{2}$$

équations de condition et que le nombre des coefficients de l'équation (1) augmente d'autant lorsque le nombre des points critiques augmente d'une unité. La présence d'un point singulier apparent *connu* n'introduit par conséquent aucun nouveau paramètre.

3. Cela posé, nous partagerons les racines de l'équation déterminante, relative à un point singulier a_i, en λ_i groupes, deux racines d'un même groupe ne différant que par un nombre entier, toujours différent de zéro, et deux racines de deux groupes distincts ne différant jamais d'un nombre entier. Supposons de plus que, dans chacun de ces groupes, il n'y ait pas deux racines égales, et soient $m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \ldots, m_{\lambda_i}^{(i)}$ les nombres respectifs de racines dans chacun d'eux.

Nous avons vu que les $m_1^{(i)}$ intégrales correspondant aux racines du premier groupe contiendront des termes logarithmiques, à moins que les coefficients ne vérifient $\frac{m_1^{(i)}(m_1^{(i)}+1)}{2}$ équations de condition, et de même pour chacun des autres groupes.

Si l'on applique ceci à tous les points critiques $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ de l'équation (1), le nombre total des équations de condition sera

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\sum_{k=1}^{k=\lambda_i}\frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)}+1)}{2}-1;$$

car, en vertu de la relation (2), une des équations se trouve satisfaite identiquement. Pour que l'équation (1) soit complètement déterminée, il faudra donc que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\sum_{k=1}^{k=\lambda_i}\frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)}+1)}{2}-1=m\left[\frac{(m+1)(\rho-2)}{2}+1\right]; \tag{3}$$

à la relation (3) nous devrons joindre aussi les relations évidentes

$$\sum_{k=1}^{k=\lambda_i}m_k^{(i)}=m \qquad (i=1,2,\ldots,\rho). \tag{4}$$

4. Toute équation de la forme (1), qui est complètement déterminée par la forme de ses intégrales dans le voisinage des points critiques, correspond à un système de solutions en nombres entiers et positifs des équations (3) et (4). Nous sommes ainsi conduits à rechercher en premier lieu tous les systèmes de solutions de ces équations.

Je remarque d'abord qu'étant donnée une solution, on peut en déduire une autre en changeant ρ en $\rho+1$ et en posant $m_1^{\rho+1}=m$; cela revient à supposer que l'équation (1) possède un point singulier de plus et que ce point est un point singulier apparent. Comme on peut répéter cette opération autant de fois qu'on le veut, on voit que de toute solution des équations (3) et (4), on peut en déduire une infinité. En d'autres termes, à toute équation de la forme (1) jouissant de la propriété voulue, il correspond une infinité d'équations linéaires jouissant de la même propriété et ayant un nombre quelconque de points singuliers apparents, outre les points critiques de la première. Inversement, si l'on connaît un système de solutions des équations (3) et (4), où un ou plusieurs des nombres m_k^i soient égaux à m, on peut en déduire un autre système de solutions où tous les nombres m_k^i seront inférieurs à m. On peut donc se borner à rechercher ces systèmes de solutions; chaque suite, telle que $m_1^i, m_2^i, \ldots, m_{\lambda_i}^i$ se composera au moins de deux nombres.

L'équation (3) peut s'écrire, en tenant compte des équations (4),

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\sum_{k=1}^{k=\lambda_i}(m_k^{(i)})^2+m\rho=2+m(\rho m+\rho-2m),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\sum_{k=1}^{k=\lambda_i}(m_k^{(i)})^2=2+m^2(\rho-2); \tag{5}$$

on peut encore la mettre sous la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=\rho}\left[m^2-\sum_{k=1}^{k=\lambda_i}(m_k^{(i)})^2\right]=2(m^2-1). \tag{6}$$

La somme $\Sigma(m_k^i)^2$ aura sa plus grande valeur lorsque la suite des nombres $m_1^i, m_2^i, \ldots, m_{\lambda_i}^i$ se réduira à deux nombres, l'un égal à $m-1$, l'autre à l'unité. On aura donc

$$\Sigma(m_k^i)^2\leqq m^2-2m+2,$$

et le premier membre de l'équation (6) sera au moins égal à

$$2\rho(m-1).$$

On aura, par conséquent,

$$2(m^2-1)\geqq 2\rho(m-1)$$

et, par suite,

$$\rho \leqq m + 1.$$

Ainsi, *pour une valeur donnée de m, le nombre des points critiques non apparents ne pourra dépasser* $m+1$. Si cette limite est atteinte, on aura pour chaque point singulier $r_1^i = m-1$, $r_2^i = 1$, c'est-à-dire que $m-1$ intégrales auront le même multiplicateur dans le domaine de chaque point critique. C'est à ce type que se rattachent les équations de M. Pochammer (*Journal de Crelle*, t. 71), et nous verrons plus loin que toutes les équations du même type peuvent se ramener à celles-là.

On obtient encore une solution en prenant, quel que soit m,

$$\rho = 3 \begin{cases} m_1^{(1)} = m_2^{(1)} = \ldots = m_m^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = m_2^{(2)} = \ldots = m_m^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = m - 1, \qquad m_2^{(3)} = 1. \end{cases}$$

C'est à cette solution que se rattachent les séries hypergéométriques d'ordre supérieur, et j'ai fait voir (*loc. cit.*, p. 412) que toute autre équation du même type pouvait se ramener à une équation hypergéométrique; mais il est clair que nous n'avons là que des solutions tout à fait particulières du problème.

L'équation (5), jointe à la condition $\rho \leqq m+1$, montre que, pour une valeur donnée de m, il n'y a qu'un nombre limité de systèmes de solutions, abstraction faite de ceux que l'on peut en déduire par le procédé indiqué plus haut. La recherche de ces solutions nous amène à considérer toutes les décompositions possibles en une somme de carrés du nombre entier $2 + m^2(\rho - 2)$, pourvu qu'elles soient compatibles avec les équations (4). Je laisse de côté pour le moment la discussion de ce système, et je me borne à reproduire les solutions pour $m = 3$ et $m = 4$.

$$m = 3.$$

(I) $$\rho = 3 \begin{cases} m_1^{(1)} = m_2^{(1)} = m_3^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = m_2^{(2)} = m_3^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = 2, \qquad m_2^{(3)} = 1; \end{cases}$$

(II) $$\rho = 4 \begin{cases} m_1^{(1)} = m_1^{(2)} = m_1^{(3)} = m_1^{(4)} = 2, \\ m_2^{(1)} = m_2^{(2)} = m_2^{(3)} = m_2^{(4)} = 1. \end{cases}$$

$$m = 4.$$

$$\text{(I)} \qquad \rho = 3 \left\{ \begin{array}{l} m_1^{(1)} = m_2^{(1)} = m_3^{(1)} = m_4^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = m_2^{(2)} = m_3^{(2)} = m_4^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = 3, \qquad m_2^{(3)} = 1; \end{array} \right.$$

$$\text{(II)} \qquad \rho = 3 \left\{ \begin{array}{l} m_1^{(1)} = m_2^{(1)} = m_3^{(1)} = m_4^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = 2, \qquad m_2^{(2)} = m_3^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = m_2^{(3)} = 2; \end{array} \right.$$

$$\text{(III)} \qquad \rho = 3 \left\{ \begin{array}{l} m_1^{(1)} = 2, \qquad m_2^{(1)} = m_3^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = 2, \qquad m_2^{(2)} = m_3^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = 2, \qquad m_2^{(3)} = m_3^{(3)} = 1; \end{array} \right.$$

$$\text{(IV)} \qquad \rho = 4 \left\{ \begin{array}{l} m_1^{(1)} = 3, \qquad m_2^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = 3, \qquad m_2^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = 3, \qquad m_2^{(3)} = 1, \\ m_1^{(4)} = m_2^{(4)} = m_3^{(4)} = m_4^{(4)} = 1; \end{array} \right.$$

$$\text{(V)} \qquad \rho = 4 \left\{ \begin{array}{l} m_1^{(1)} = 3, \qquad m_2^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = 3, \qquad m_2^{(2)} = 1, \\ m_1^{(3)} = m_2^{(3)} = 2, \\ m_1^{(4)} = 2, \qquad m_2^{(4)} = m_3^{(4)} = 1; \end{array} \right.$$

$$\text{(VI)} \qquad \rho = 4 \left\{ \begin{array}{l} m_1^{(1)} = 3 = m_2^{(1)} = 1, \\ m_1^{(2)} = m_2^{(2)} = 2, \\ m_1^{(3)} = m_2^{(3)} = 2, \\ m_1^{(4)} = m_2^{(4)} = 2; \end{array} \right.$$

$$\text{(VII)} \qquad \rho = 5 \left\{ \begin{array}{l} m_1^{(1)} = m_1^{(2)} = m_1^{(3)} = m_1^{(4)} = m_1^{(5)} = 3, \\ m_2^{(1)} = m_2^{(2)} = m_2^{(3)} = m_2^{(4)} = m_2^{(5)} = 1. \end{array} \right.$$

5. Supposons connu un système de solutions des équations (3) et (4), et donnons-nous arbitrairement les points $a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}$ ainsi que les exposants de discontinuité, en supposant qu'on puisse les partager en groupes, comme il a été expliqué plus haut, et qu'ils vérifient la relation (2). Pour que l'équation (1) admette dans le domaine de chacun de ces points singuliers un système fondamental d'intégrales appartenant aux exposants choisis et ne contenant pas de logarithmes, les coefficients des polynômes F doivent satisfaire à des relations dont

le nombre est précisément égal au nombre de ces coefficients, de sorte que le problème est *déterminé*.

Il est aisé de voir que les coefficients des polynômes F seront donnés par des équations algébriques; mais la discussion de ces équations dans le cas général paraît très compliquée, au moins si l'on veut l'aborder par des méthodes directes. Dans ce qui suit, je considère un cas particulièrement intéressant, où les coefficients sont fournis par des équations linéaires dont la formation est très simple. Je démontre plus loin, du reste, que les autres cas ne sont pas essentiellement distincts de celui-là.

Admettons que les racines de chacun des groupes relatifs à l'un quelconque des points singuliers forment une progression arithmétique ayant pour raison l'unité telle que r, $r+1$, ..., $r+n-1$. Cette hypothèse exclut, comme l'on voit, l'existence de points singuliers apparents pour l'équation (1), car une transformation telle que $y=(x-a)^r u$ les ramènerait à des points ordinaires. Si la condition précédente est satisfaite pour tous les points singuliers de l'équation (1), y compris le point $x=\infty$, nous allons voir que la détermination des coefficients se fera au moyen d'équations du premier degré. Je m'appuierai pour cela sur le théorème suivant, que j'ai démontré dans le travail déjà cité (*Annales de l'École Normale*, 2e série, t. XII, p. 265).

Pour qu'une équation différentielle linéaire d'ordre m admette une intégrale holomorphe dans le domaine du point a, la valeur de cette intégrale et de ses $p-1$ premières dérivées pouvant être prises arbitrairement pour $x=a$, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-a)^{m-p}\frac{d^m y}{dx^m}+Q_1(x)(x-a)^{m-p-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\dots\\ &\qquad+(x-a)Q_{m-p+1}(x)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}\\ &\qquad+Q_{m-p}(x)\frac{d^p y}{dx^p}+\dots+Q_m(x)y=0,\end{aligned}\right.$$

Q_1, Q_2, ..., Q_m *étant des fonctions holomorphes de x dans le domaine du point a, et que l'équation*

$$\varphi(r)=(r-p)\dots(r-m+1)-Q_1(a)(r-p)\dots(r-m+2)\dots-Q^{m-p}(a)=0$$

n'admette pour racine aucun nombre entier positif supérieur à $p-1$.

Remarquons qu'une intégrale holomorphe dont la valeur est arbitraire, ainsi que celles de ses $p-1$ premières dérivées, pour $x=a$, équivaut en réalité à p intégrales holomorphes linéairement distinctes appartenant respectivement aux exposants $0, 1, 2, \ldots, p-1$. L'équation $\varphi(r)=0$ n'est autre chose que l'équation déterminante fondamentale relative au point $x=a$ quand on a divisé le premier membre par le produit $r(r-1)\ldots(r-p+1)$. La seconde condition sera donc satisfaite si cette équation n'admet pas d'autre racine entière.

Pour qu'une équation linéaire d'ordre m admette dans le domaine du point a une intégrale de la forme

$$(x-a)^r \mathrm{P}(x-a),$$

où $\mathrm{P}(x-a)$ désigne une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $x-a$, dont les p premiers coefficients sont arbitraires, il faudra qu'en faisant la transformation

$$y=(x-a)^r u,$$

l'équation en u soit de la même forme que l'équation (7). Cette condition sera suffisante pourvu que l'équation déterminante relative au point a n'ait pas d'autre racine faisant partie du groupe $r, r+1, \ldots, r+p-1$. Si le point critique coïncide avec le point $x=\frac{1}{x'}=\infty$, on commencera par le ramener à l'origine en posant $x=\frac{1}{t}$.

6. Le problème de Riemann généralisé pourra alors être posé comme il suit. Considérons un système de m fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$ d'une variable x, assujetties aux conditions suivantes:

1° Chacune de ces fonctions est holomorphe dans le voisinage de toute valeur de x, sauf dans le voisinage des points $a_1, a_2, \ldots a_{\rho-1}, \infty$;

2° Quand on fait décrire à la variable x un chemin fermé quelconque, ne passant par aucun des points critiques, les valeurs finales de nos fonctions sont liées aux valeurs initiales par des relations linéaires et homogènes à coefficients constants;

3° Dans le domaine du point singulier $a_i (i=1, 2, \ldots, \rho)$ on a m branches linéairement indépendantes qui se partagent en λ_i groupes, comprenant respectivement $m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \ldots, m_{\lambda_i}^{(i)}$ fonctions. Les branches du $k^{\text{ième}}$ groupe sont de la forme

$$y = (x - a_i)^{r_k^{(i)}} P_k(x - a_i),$$

où $P_k(x - a_i)$ représente une série convergente ordonnée suivant les puissances positives et croissantes de $x - a_i$, les $m_k^{(i)}$ premiers coefficients pouvant être pris arbitrairement; aucun des nombres $r_k^{(i)} - r_{k'}^{(i)}$ n'est un nombre entier. Dans cet énoncé on devra remplacer $x - \infty$ par $\frac{1}{x}$.

4° Les nombres $m_k^{(i)}$ vérifient les équations (3) et (4), et entre les exposants $r_k^{(i)}$ on a la relation

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{i=\rho} \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} \left[m_k^{(i)} r_k^{(i)} + \frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)} - 1)}{2} \right] = \frac{m(m-1)(\rho-2)}{2}.$$

Il existe, en général, un système de fonctions y satisfaisant à ces conditions, et ce système est unique, en ne regardant pas comme distincts les systèmes obtenus en prenant des combinaisons linéaires et homogènes des premières fonctions.

Les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_m$, si elles existent, forment évidemment un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire d'ordre m à coefficients rationnels de la forme (1). Cette équation ne pourra présenter comme points singuliers, outre les points $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, que des points singuliers apparents. Supposons qu'elle admette q points singuliers apparents; la somme des racines des équations déterminantes relatives à ces points sera forcément supérieure à $q\frac{m(m-1)}{2}$. En désignant par ΣR cette somme, on aura

$$(10) \qquad \Sigma R > q\frac{m(m-1)}{2}.$$

La relation (2) nous donne alors

$$(11) \qquad \Sigma R + \sum_{i=1}^{i=\rho} \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} \left[m_k^{(i)} r_k^{(i)} + \frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)} - 1)}{2} \right] = \frac{m(m-1)(\rho+q-2)}{2},$$

relation incompatible avec la relation donnée (9) et l'inégalité (10). On aura donc $q = 0$ et l'équation cherchée sera exactement de la forme (1).

Considérons d'abord un point singulier a_i à distance finie ; pour qu'il existe dans le domaine de ce point un groupe de $m_k^{(i)}$ intégrales de la forme $(x-a)^{r_k^{(i)}} P_k(x-a_i)$, il faudra, comme on l'a vu tout à l'heure, qu'en posant $y = (x-a_i)^{r_k^{(i)}} u$, la nouvelle équation en u ait la forme (7), où $p = m_k^{(i)}$. Or, quand on fait cette transformation dans l'équation (1), on obtient une équation de même forme

$$(12)\quad \Phi^{(1)}(u) = [\psi(x)]^m \frac{d^m u}{dx^m} + [\psi(x)]^{m-1} F_{\rho-2}^{(1)}(x) \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \ldots + F_{m(\rho-2)}^{(1)}(x)\, u = 0,$$

où $F_{\rho-2}^{(1)}, F_{2(\rho-2)}^{(1)}, \ldots, F_{m(\rho-2)}^{(1)}$ sont des polynômes entiers en x d'un degré marqué par leur indice, qui s'expriment linéairement au moyen des polynômes $F_{\rho-2}, \ldots, F_{m(\rho-2)}$ et de quantités connues. Il faudra donc que $F_{m(\rho-2)}^{(1)}(x)$ soit divisible par $(x-a_i)^{m_k^{(i)}}$, le polynôme précédent par $(x-a)^{m_k^{(i)}-1}$, ... et enfin $F_{m-m_k^{(i)}+1}^{(1)}$ par $(x-a_i)$. Il en résulte, pour les coefficients de l'équation (1), un nombre de relations égal à $\frac{m_k^{(i)}(m_k^{(i)}+1)}{2}$, et ces relations sont *linéaires* par rapport aux coefficients inconnus.

Pour le point $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on posera d'abord $x = \frac{1}{t}$; les coefficients de l'équation en t sont des fonctions linéaires des coefficients de la première, et la conclusion s'applique encore à ce cas.

Ainsi, si les équations (3), (4) et (9) sont vérifiées par les nombres $m_k^{(i)}$ et $r_k^{(i)}$, *les coefficients inconnus de l'équation* (1) *seront déterminés par un système d'équations linéaires en nombre égal à celui de ces coefficients.*

7. Nous pouvons conclure de là qu'en général le problème admettra une solution et une seule ; dans chaque cas particulier que l'on voudra étudier, on pourra effectuer le calcul des coefficients sans être jamais arrêté par la résolution d'une équation algébrique. Les seuls cas singuliers que l'on pourra rencontrer sont ceux qui se présentent normalement dans la résolution d'un système de n équations linéaires à un nombre égal d'inconnues. Il paraît évident, d'après la nature de la

question, qu'il ne pourra y avoir indétermination, au moins si on laisse aux paramètres restés arbitraires, tels que les a_i et les $r_k^{(i)}$, toute leur généralité. Mais il pourra y avoir incompatibilité. Je vais en donner un exemple, qui nous fournira en même temps une relation d'inégalité importante que doivent vérifier les nombres $m_k^{(i)}$. Soit M_i le plus grand des nombres $m_1^{(i)}, \ldots, m_{\lambda_i}^{(i)}$, et $M_1, M_2, \ldots, M_\rho$ les nombres analogues pour les ρ points critiques. Supposons, ce que l'on peut toujours faire, qu'aucun de ces nombres n'est inférieur à M_ρ et posons

$$\mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{i=\rho-1} M_i ;$$

les équations précédentes seront incompatibles toutes les fois que $\mathfrak{M}$ sera plus grand que $m(\rho - 2)$. En effet, par une transformation déjà employée plusieurs fois, on pourra supposer que l'équation (1) admet une intégrale holomorphe dans le domaine du point $x = a_i$, la valeur de cette intégrale et de ses $M_i - 1$ premières dérivées pouvant être prise arbitrairement pour $x = a_i$. Le coefficient de y devra donc être divisible par le produit $\prod_{i=1}^{i=\rho-1} (x - a_i)^{M_i}$, c'est-à-dire par un polynôme de degré $\mathfrak{M}$. Comme ce coefficient est de degré $m(\rho - 2)$, il sera identiquement nul. Il suit de là que l'équation déterminante relative au point ∞ devra admettre une racine nulle au moins et, si cette condition est remplie, l'équation (1) ne sera pas complètement déterminée. C'est ainsi que, parmi les solutions données plus haut pour les équations (3) et (4) dans le cas où $m = 4$, on devra exclure la quatrième.

Si, pour un système de valeurs attribuées aux nombres m, ρ, $m_k^{(i)}$, les équations (3) et (4) sont vérifiées et si les équations linéaires qui déterminent les coefficients n'offrent ni incompatibilité ni indétermination, on aura un *type* d'équations linéaires d'ordre m ayant ρ points critiques, analogue à l'équation du second ordre qui admet pour intégrale la série hypergéométrique de Gauss. On aura dans ce type, comme paramètres arbitraires, les $\rho - 1$ points critiques $a_1, a_2, \ldots, a_{\rho-1}$ et les exposants $r_k^{(i)}$ assujettis à vérifier la relation (9) ; le nombre total de ces paramètres sera donc

$$\rho - 1 + \sum_{i=1}^{i=\rho} \lambda_i - 1.$$

On peut, sans diminuer la généralité, supposer $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $r_1^i = 0 (i = 1, 2, \ldots, \rho - 1)$, ce qui diminue le nombre des arbitraires de $\rho + 1$ unités. Le nombre total des paramètres contenus dans ce type sera donc égal à

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \lambda_i - 3,$$

ou au nombre des groupes d'intégrales diminué de trois unités. Je remarque que les fonctions de M. Pochammer et les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur sont des intégrales d'équations linéaires qui constituent des types particuliers de cette espèce. Pour chacun d'eux, le nombre des paramètres arbitraires est $2m - 1$.

8. Pour en finir avec les généralités, je démontrerai maintenant une propriété importante du groupe de ces équations. Supposons que l'on ait obtenu un type d'équations, tel que ceux que nous venons de définir, et laissons aux paramètres qui entrent dans cette équation toute leur généralité, de sorte que l'on pourra écarter toute relation algébrique ou transcendante qui ne serait pas une conséquence des conditions déjà établies. En particulier, nous écarterons les cas singuliers où l'équation ne serait pas irréductible. Cela posé, je dis que la recherche du groupe de l'équation se ramène à des calculs algébriques. Pour fixer les idées, supposons tous les points singuliers de l'équation à distance finie, de façon que l'intégrale générale soit uniforme et continue dans le domaine du point $x = \infty$. Dans le voisinage du point $x = a_i$, on a m intégrales linéairement distinctes $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots, y_m^{(i)}$ qui se partagent en λ_i groupes ; les intégrales d'un même groupe sont multipliées par le facteur

$$\omega_k^{(i)} = e^{2\pi r_k^{(i)} \sqrt{-1}}$$

lorsque x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x = a_i$. Par chaque point critique menons une coupure s'étendant jusqu'à l'infini, de façon que deux de ces coupures ne se croisent pas entre elles ; toutes les intégrales $y_k^{(i)}$ deviennent, grâce à ces coupures, des fonctions uniformes de la variable dans toute l'étendue du plan. Cela fait, entre les ρ systèmes d'intégrales, on a $\rho - 1$ systèmes de relations linéaires et homogènes que j'écris sous la forme suivante :

$$
(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1^{(1)} = a_1^{(i)} y_1^{(i)} + a_2^{(i)} y_2^{(i)} + \ldots + a_m^{(i)} y_m^{(i)}, \\ y_2^{(1)} = b_1^{(i)} y_1^{(i)} + b_2^{(i)} y_2^{(i)} + \ldots + b_m^{(i)} y_m^{(i)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m^{(1)} = l_1^{(i)} y_1^{(i)} + l_2^{(i)} y_2^{(i)} + \ldots + l_m^{(i)} y_m^{(i)}, \end{array} \right\} \quad (i = 2, 3, \ldots, \rho);
$$

le nombre total des coefficients constants $a, b, \ldots, l$ est $m^2(\rho - 1)$. Il est évident que le groupe de l'équation ne dépend que de ces coefficients et des multiplicateurs ω_k^i.

Soit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ un groupe de n intégrales linéairement indépendantes ayant un même multiplicateur ω dans le voisinage d'un quelconque des points singuliers a. Si l'on pose

$$
(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \alpha_1^{(1)} Z_1 + \alpha_2^{(1)} Z_2 + \ldots + \alpha_n^{(1)} Z_n, \\ Y_2 = \alpha_1^{(2)} Z_1 + \alpha_2^{(2)} Z_2 + \ldots + \alpha_n^{(2)} Z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n = \alpha_1^{(n)} Z_1 + \alpha_2^{(n)} Z_2 + \ldots + \alpha_n^{(n)} Z_n, \end{array} \right.
$$

où les $\alpha_k^{(i)}$ sont des coefficients constants arbitraires dont le déterminant est différent de zéro, il est clair que les n intégrales $Z_1, Z_2 \ldots, Z_n$ sont encore linéairement indépendantes et qu'elles auront le même multiplicateur dans le domaine du point $x = \alpha$ que les intégrales Y. Concevons que l'on fasse une transformation semblable pour tous les groupes d'intégrales de l'équation. Les relations (13) seront remplacées par des relations de même forme

$$
(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z_1^{(1)} = A_1^{(i)} z_1^{(i)} + A_2^{(i)} z_2^{(i)} + \ldots + A_m^{(i)} z_m^{(i)}, \\ z_2^{(1)} = B_1^{(i)} z_1^{(i)} + B_2^{(i)} z_2^{(i)} + \ldots + B_m^{(i)} z_m^{(i)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m^{(1)} = L_1^{(i)} z_1^{(i)} + L_2^{(i)} z_2^{(i)} + \ldots + L_m^{(i)} z_m^{(i)}, \end{array} \right.
$$

l'intégrale $z_k^{(i)}$ ayant le même multiplicateur que l'intégrale $y_k^{(i)}$ dans le domaine du point singulier a_i. Il est clair encore que le groupe de l'équation ne dépend que des multiplicateurs $\omega_k^{(i)}$ et des $m^2(\rho - 1)$ coefficients A, B, C, ..., L. Or ces coefficients A, B, C, ..., L dépendent eux-mêmes des $(\rho-1)m^2$ coefficients $a, b, c, \ldots, l$ et des coefficients $\alpha_k^{(i)}$ des substitutions (14), qui sont arbitraires. Soit N le nombre de ces coefficients ; on a immédiatement

$$N = \sum_{i=1}^{i=\rho} \sum_{k=1}^{k=\lambda_i} (m_k^{(i)})^2.$$

On pourra disposer de ces N coefficients indéterminés, de façon à établir entre les coefficients A, B, C, ..., L, $N-1$ relations algébriques arbitraires, pourvu, bien entendu, qu'elles ne soient pas incompatibles. [On ne peut prendre que $N-1$ relations et non pas N, à cause de l'homogénéité des formules (13), (14) et (15).] Par exemple, on pourra supposer que l'on a pris les $\alpha_k^{(i)}$, de façon que $N-1$ des coefficients A, B, C, ..., L, aient des valeurs déterminées. D'une manière générale, quel que soit le système de relations que l'on adopte, les nouveaux coefficients A, B, C, ..., L ne dépendront que de $(\rho-1)m^2 - N + 1$ paramètres inconnus. D'après la relation (5), ce nombre sera égal à

$$(\rho-1)m^2 - 2 - m^2(\rho-2) + 1 = m^2 - 1;$$

les formules (15) ainsi préparées ne contiendront plus que m^2-1 inconnues. Pour trouver ces m^2-1 inconnues, nous n'avons plus qu'à écrire que tout circuit enveloppant tous les points critiques ramène chaque intégrale à sa valeur initiale. On obtient ainsi m^2 équations nouvelles qui se réduisent à m^2-1 équations distinctes, en vertu de la relation (9); le nombre des équations nouvelles est précisément le même que celui des inconnues restantes. Il pourrait se faire que ces m^2-1 équations fussent incompatibles ; mais cela prouverait simplement qu'on a mal choisi les $N-1$ relations algébriques introduites plus haut, par exemple qu'on en a pris une incompatible avec les dernières. En définitive, on voit que l'on sera ramené à des calculs algébriques, et les seules quantités connues qui figurent dans le calcul sont les multiplicateurs ω. Donc, *les coefficients des substitutions fondamentales du groupe de l'équation sont des fonctions algébriques des multiplicateurs.*

Dans le Mémoire déjà cité plusieurs fois sur les séries hypergéométriques d'ordre supérieur, j'ai déterminé le groupe par un procédé qui peut être considéré comme une application de la méthode générale ci-dessus. D'un autre côté, M. Picard a obtenu le groupe de l'équation du troisième ordre de M. Pochammer en partant de l'expression des intégrales au moyen d'intégrales définies (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1885), et sa méthode s'applique à l'équation générale de cette espèce. Dans ces deux cas, les coefficients des substitutions fondamentales du groupe sont des fonctions *rationnelles* des multiplicateurs. Il en est de même pour l'exemple que je traite plus loin comme application de la méthode qui vient d'être exposée. On est ainsi conduit à se demander si cette propriété ne serait pas générale. Il suffirait évidemment de faire voir que les coefficients des substitutions fondamentales sont des fonctions uniformes des multiplicateurs, quand on choisit convenablement le système fondamental d'intégrales. Je n'ai pu jusqu'ici le démontrer en toute rigueur.

9. Quoi qu'il en soit, on déduit de ce qui précède plusieurs conséquences dignes d'attention :

1° Quand on augmente ou qu'on diminue les nombres $r_k^{(i)}$ de nombres entiers quelconques, sans changer les points critiques, les multiplicateurs $\omega_k^{(i)}$ ne changent pas. Donc toutes les équations ainsi obtenues appartiennent à un nombre *fini* de classes.

2° Prenons une équation de la forme plus générale considérée aux n^{os} 3 et 4. Tout ce qui a été dit sur le groupe s'applique mot pour mot à ces équations. Il sera donc possible, *en général*, de former une équation de la forme moins générale considérée du n° 5, ayant les mêmes points singuliers, les mêmes multiplicateurs et le même groupe. Ces deux équations seront par conséquent de la même classe, et l'intégrale générale de la première sera une fonction linéaire et homogène à coefficients rationnels de l'intégrale générale de la seconde et de ses $m-1$ premières dérivées.

3° Les considérations employées au numéro précédent permettent de se rendre compte bien aisément de la condition trouvée plus haut (n° 7)

$$\sum^{i=\rho-1} \mathrm{M}_i \leqq m(\rho-2).$$

Supposons, en effet, que le premier membre de cette inégalité soit supérieur à $m(\rho - 2)$ et supposons $a_\rho = \infty$; parmi les intégrales $y_1^{(i)}$, $y_2^{(i)}$, . . ., $y_m^{(i)}$ que nous avons considérées, il en existera plus de $m(\rho - 2)$ qui auront un multiplicateur égal à l'unité dans le domaine du point critique correspondant; il en existera donc moins de m ayant un multiplicateur différent de l'unité. Cela posé, soit $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ un système fondamental quelconque. Dans le voisinage du point critique a_i, on aura des relations de la forme

$$Y_k = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \alpha_{k,\mu} y_\mu^{(i)} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour que l'intégrale

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_m Y_m$$

soit uniforme dans le domaine du point critique a_i, il faudra que le coefficient de toute intégrale non uniforme $y_\mu^{(i)}$ soit nul dans le second membre. Si l'on veut de même que l'intégrale précédente soit uniforme dans le voisinage de tous les points critiques à distance finie, on a, pour déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, un système d'équations linéaires et homogènes, comprenant au plus $m - 1$ équations. Il sera donc possible de satisfaire à ces équations par des valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ qui ne seront pas toutes nulles, et l'équation différentielle admettrait une intégrale uniforme dans toute l'étendue du plan et différente de zéro: d'où l'on déduit la même conclusion que plus haut.

10. Les deux types d'équations du troisième ordre correspondant aux deux solutions trouvées plus haut sont déjà connus. Des sept solutions que l'on a trouvées plus haut pour $m = 4$, on a déjà vu que la quatrième devait être écartée. Les types correspondant à la première, à la cinquième et à la septième solution sont connus. La première solution donne une équation hypergéométrique du quatrième ordre, la septième fournit l'équation de M. Pochammer pour $m = 4$. Enfin, à la cinquième correspond une équation que j'ai déjà signalée antérieurement (*Comptes rendus*, 1882) et à laquelle se rattachent les séries hypergéométriques de deux variables F_2 et F_3 de M. Appell. Il reste à examiner la deuxième, la troisième et la sixième solution.

Je considère d'abord la deuxième solution. L'équation différentielle correspondante aura les points singuliers o, 1, ∞ avec les exposants de discontinuité ci-dessous :

$$\begin{array}{llllll}
\text{Pour } x = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0, & 1, & 1-b_1, & 1-b_2, \\
\text{» } \quad x = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0, & 1, & R, & R+1, \\
\text{» } \quad x = \frac{1}{x'} = \infty \ldots\ldots\ldots & a_1, & a_2, & a_3, & a_4.
\end{array}$$

On a

$$R = \frac{1 + b_1 + b_2 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4}{2},$$

et l'on suppose qu'aucun des nombres b_1, b_2, $b_1 - b_2$, R, $a_1 - a_2$, $a_1 - a_3$, ... n'est égal à un nombre entier. Cette équation sera de la forme

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x^2(x-1)^2 y^{\text{IV}} + (Ax - B)x(x-1)y''' \\ \quad + (Cx^2 - Dx + E)y'' + (Fx - G)y' + Hy = 0. \end{array} \right.$$

On détermine immédiatement les coefficients A, B, C, E, F, H en écrivant que les équations déterminantes pour $x = 0$ et pour $x = \infty$ ont les valeurs précédentes. On trouve ainsi

$$\begin{array}{ll}
A = 6 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4, & C = 7 + 3\Sigma a_1 + \Sigma a_1 a_2, \\
F = 1 + \Sigma a_1 + \Sigma a_1 a_2 + \Sigma a_1 a_2 a_3, & H = a_1 a_2 a_3 a_4, \\
B = 3 + b_1 + b_2, & E = 1 + b_1 + b_2 + b_1 b_2,
\end{array}$$

Pour trouver les deux autres coefficients D et G, nous n'avons qu'à faire la transformation

$$y = (x-1)^R z;$$

l'équation en z sera

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l}
x^2(x-1)^4 z^{\text{IV}} + [4Rx + Ax - B]x(x-1)^3 z''' \\
\quad + [6R(R-1)x^2 + 3R(Ax - B)x + Cx^2 - Dx + E](x-1)^2 z'' \\
\quad + \left[\begin{array}{l} 4R(R-1)(R-2)x^2 + 3R(R-1)(Ax - B)x \\ \quad + 2R(Cx^2 - Dx + E) + (Fx - G)(x-1) \end{array} \right] (x-1) z' \\
\quad + \left[\begin{array}{l} R(R-1)(R-2)(R-3)x^2 + R(R-1)(R-2)(Ax - B)x \\ \quad + R(R-1)(Cx^2 - Dx + E) + R(Fx - G)(x-1) + H(x-1)^2 \end{array} \right] z =
\end{array} \right.$$

Le coefficient de z' devra être divisible par $x - 1$ et celui de z par

$(x-1)^2$, ce qui fournit les trois relations

$$(R-2)(R-3)+(R-2)(A-B)+C-D+E=0,$$
$$2(R-1)(R-2)(R-3)+(R-1)(R-2)(2A-B)+(R-1)(2C-D)+F-G=0.$$
$$4(R-1)(R-2)+3(R-1)(A-B)+2(C-D+E)=0.$$

De la première, on tire

$$D=E+C+(R-2)(R-3)+(R-2)(A-B)$$

ou, en remarquant que $R=\dfrac{4+B-A}{2}$,

$$D=E+C-(R-1)(R-2),$$

et cette valeur de D vérifie aussi la troisième équation. De la deuxième, on tire

$$G=F+(R-1)(R-2)(A-B)+(R-1)(2C-D).$$

Si l'on suppose $b_1=\frac{1}{3}$, $b_2=\frac{2}{3}$, $a_1+a_2+a_3+a_4=1$, on aura $R=\frac{1}{2}$, et les coefficients auront les valeurs suivantes :

$$A=7,\qquad B=4,\qquad E=\tfrac{20}{9},\qquad C=7+3\Sigma a_1+\Sigma a_1 a_2,$$
$$F=1+\Sigma a_1+\Sigma a_1 a_2+\Sigma a_1 a_2 a_3,\qquad H=a_1 a_2 a_3 a_4,$$
$$D=C+\frac{53}{36},\qquad G=F-\frac{C}{2}+\frac{353}{72}.$$

L'équation ainsi obtenue, qui n'est qu'un cas très particulier de la précédente, puisqu'elle ne contient que trois paramètres arbitraires au lieu de six, avait déjà été rencontrée par M. Brioschi dans ses recherches sur la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques (*Annali di Matematica*, 2e série, t. XII, p. 65; *Mathematische Annalen*, Band 26, p. 108).

Dans le domaine du point $x=0$, l'équation (16) admet deux intégrales distinctes holomorphes. En cherchant une série

$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots$$

satisfaisant formellement à cette équation, on est conduit à une relation de récurrence entre trois coefficients consécutifs

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &(n+1)(n+2)[n(n-1)+Bn+E]C_{n+2}\\ &\quad-(n+1)[2n(n-1)(n-2)+(A+B)n(n-1)+Dn+G]C_{n+1}\\ &\quad+[n(n-1)(n-2)(n-3)+An(n-1)(n-2)+Cn(n-1)+Fn+H]C_n=0.\end{aligned}\right.$$

Cette relation détermine tous les coefficients successifs en fonction des deux premiers C_0 et C_1 qui restent arbitraires. Je désignerai cette série par

$$\mathfrak{F}(C_0, C_1, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x),$$

et je poserai

$$\mathfrak{F}(1, 0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x) = \mathfrak{F}_1(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x),$$
$$\mathfrak{F}(0, 1, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x) = \mathfrak{F}_2(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x),$$

Si, dans l'équation (16), on fait la transformation

$$y = (x-1)^{R} z,$$

l'équation en z sera de la même forme que la première; les quantités a_1, a_2, a_3, a_4 seront remplacées respectivement par a_1+R, a_2+R, a_3+R, a_4+R.

L'équation (16) admet donc aussi les deux intégrales

$$(1-x)^{R}\mathfrak{F}_1(a_1+R, a_2+R, a_3+R, a_4+R, b_1, b_2, x),$$
$$(1-x)^{R}\mathfrak{F}_2(a_1+R, a_2+R, a_3+R, a_4+R, b_1, b_2, x).$$

Comme l'équation (16) n'admet que deux intégrales holomorphes distinctes dans le domaine du point $x=0$, on aura des relations de la forme

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x) &= C_1(1-x)^{R}\mathfrak{F}_1(a_1+R, a_2+R, a_3+R, a_4+R, b_1, b_2, x)\\ &\quad + C_2(1-x)^{R}\mathfrak{F}_2(a_1+R, a_2+R, a_3+R, a_4+R, b_1, b_2, x),\\ \mathfrak{F}_2(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, x) &= C_3(1-x)^{R}\mathfrak{F}_1(a_1+R, a_2+R, a_3+R, a_4+R, b_1, b_2, x)\\ &\quad + C_4(1-x)^{R}\mathfrak{F}_2(a_1+R, a_2+R, a_3+R, a_4+R, b_1, b_2, x).\end{aligned}$$

On trouve bien facilement qu'il faut prendre

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = R, \qquad C_3 = 0, \qquad C_4 = 1.$$

11. Pour montrer que la méthode précédente pour trouver le groupe n'est point impraticable, je vais l'appliquer à cette équation, en me bornant d'ailleurs au cas général où on la suppose irréductible.

Soient φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les quatre intégrales linéairement indépendantes qui se comportent d'une manière simple dans le domaine du point $x=0$, de telle sorte qu'en désignant par $(y)_a$ ce que devient y

quand on fait décrire à la variable un lacet dans le sens direct autour du point $x = a$, on ait

$$(\varphi_1)_0 = \varphi_1, \quad (\varphi_2)_0 = \varphi_2, \quad (\varphi_3)_0 = \omega_1 \varphi_3, \quad (\varphi_4)_0 = \omega_2 \varphi_4,$$

où

$$\omega_1 = e^{2\pi\sqrt{-1}(1-b_1)}, \quad \omega_2 = e^{2\pi\sqrt{-1}(1-b_2)}.$$

Soient de même ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 les quatre intégrales linéairement indépendantes qui se comportent d'une manière simple dans le voisinage du point $x = 1$, de telle sorte qu'on ait

$$(\psi_1)_1 = \psi_1, \quad (\psi_2)_1 = \psi_2, \quad (\psi_3)_1 = \Omega \psi_3, \quad (\psi_4)_1 = \Omega \psi_4,$$

où

$$\Omega = e^{2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{R}}.$$

Considérons les lignes droites indéfinies $-\infty \ldots 0$, $+1 \ldots +\infty$ comme des coupures; les fonctions φ et ψ deviennent uniformes dans toute l'étendue du plan, et l'on a entre ces intégrales des relations de la forme

$$(11) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \alpha_1 \psi_1 + \beta_1 \psi_2 + \gamma_1 \psi_3 + \delta_1 \psi_4, \\ \varphi_2 = \alpha_2 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \gamma_2 \psi_3 + \delta_2 \psi_4, \\ \varphi_3 = \alpha_3 \psi_1 + \beta_3 \psi_2 + \gamma_3 \psi_3 + \delta_3 \psi_4, \\ \varphi_4 = \alpha_4 \psi_1 + \beta_4 \psi_2 + \gamma_4 \psi_3 + \delta_4 \psi_4, \end{cases}$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme suivante :

$$(20) \qquad \begin{cases} \psi_1 = \alpha'_1 \varphi_1 + \beta'_1 \varphi_2 + \gamma'_1 \varphi_3 + \delta'_1 \varphi_4, \\ \psi_2 = \alpha'_2 \varphi_1 + \beta'_2 \varphi_2 + \gamma'_2 \varphi_3 + \delta'_2 \varphi_4, \\ \psi_3 = \alpha'_3 \varphi_1 + \beta'_3 \varphi_2 + \gamma'_3 \varphi_3 + \delta'_3 \varphi_4, \\ \psi_4 = \alpha'_4 \varphi_1 + \beta'_4 \varphi_2 + \gamma'_4 \varphi_4 + \delta'_4 \varphi_4. \end{cases}$$

Nous pouvons prendre, pour former un système fondamental, les quatre intégrales φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2. S'il existait, en effet, entre ces quatre intégrales une relation linéaire, telle que

$$\mathrm{A}\varphi_1 + \mathrm{B}\varphi_2 + \mathrm{C}\psi_1 + \mathrm{D}\psi_2 = 0,$$

l'intégrale

$$\Phi = \mathrm{A}\varphi_1 + \mathrm{B}\varphi_2 = -(\mathrm{C}\psi_1 + \mathrm{D}\psi_2)$$

serait uniforme dans toute l'étendue du plan et l'équation (16) ne serait pas irréductible, contrairement à l'hypothèse. On voit immédiatement, pour la même raison, que $\gamma'_1\delta'_2-\gamma'_2\delta'_1$ ne peut être nul. Les équations (20) donnent alors

$$\begin{aligned}\delta'_2\psi_1-\delta'_1\psi_2&=(\alpha'_1\delta'_2-\alpha'_2\delta'_1)\varphi_1+(\beta'_1\delta'_2-\beta'_2\delta'_1)\varphi_2+(\gamma'_1\delta'_2-\gamma'_2\delta'_1)\varphi_3,\\ \gamma'_2\psi_1-\gamma'_1\psi_2&=(\alpha'_1\gamma'_2-\alpha'_2\gamma'_1)\varphi_1+(\beta'_1\gamma'_2-\beta'_2\gamma'_1)\varphi_2+(\delta'_1\gamma'_2-\gamma'_1\delta'_2)\varphi_4.\end{aligned}$$

Les intégrales $\delta'_2\psi_1-\delta'_1\psi_2$, $\gamma'_2\psi_1-\gamma'_1\psi_2$ sont holomorphes dans le domaine du point $x=1$ et linéairement indépendantes. On peut donc supposer qu'on a pris pour ψ_1 et ψ_2 ces intégrales elles-mêmes, et l'on peut de même remplacer $(\gamma'_1\delta'_2-\gamma'_2\delta'_1)\varphi_3$ par φ_3 et $(\delta'_1\gamma'_2-\gamma'_1\delta'_2)\varphi_4$ par φ_4. Les deux premières des relations (20) peuvent alors s'écrire

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned}\psi_1&=A\varphi_1+B\varphi_2+\varphi_3,\\ \psi_2&=C\varphi_1+D\varphi_2+\varphi_4,\end{aligned}\right.$$

sans que cette substitution ait changé la forme des relations (19). On voit de même que le déterminant $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$ est différent de zéro, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\beta_2\varphi_1-\beta_1\varphi_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}&=\psi_1+\frac{(\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1)\psi_3+(\delta_1\beta_2-\delta_2\beta_1)\psi_4}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1},\\ \frac{\alpha_2\varphi_1-\alpha_1\varphi_2}{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}&=\psi_2+\frac{(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)\psi_3+(\delta_1\alpha_2-\alpha_1\delta_2)\psi_4}{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2};\end{aligned}$$

les intégrales $\dfrac{\beta_2\varphi_1-\beta_1\varphi_2}{\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2}$, $\dfrac{\alpha_2\varphi_1-\alpha_1\varphi_2}{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}$ sont distinctes et holomorphes pour $x=0$. On peut donc supposer qu'on les a prises pour les fonctions φ_1 et φ_2 elles-mêmes, ce qui ne change pas la forme des relations (21), et l'on aura

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\psi_1+A'\psi_3+B'\psi_4,\\ \varphi_2&=\psi_2+C'\psi_3+D'\psi_4.\end{aligned}$$

On voit de la même façon que $A'D'-B'C'$ ne pourra être nul; les deux intégrales $A'\psi_3+B'\psi_4$, $C'\psi_3+D'\psi_4$ seront distinctes et auront le même multiplicateur Ω dans le domaine du point $x=1$. On peut donc supposer qu'on les a prises pour ψ_3 et ψ_4 et les équations précédentes s'écriront

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned}\varphi_1&=\psi_1+\psi_3,\\ \varphi_2&=\psi_2+\psi_4.\end{aligned}\right.$$

En définitive, en choisissant convenablement les intégrales, les relations linéaires entre ces intégrales seront données par des formules de la forme (21) et (22). Il est facile de voir qu'aucun des coefficients B et C ne peut être nul, toujours en supposant l'équation irréductible. Si l'on avait, par exemple, $B = 0$, les relations

$$\psi_1 = A\varphi_1 + \varphi_3, \qquad \varphi_1 = \psi_1 + \psi_3$$

montrent que ψ_1 et ψ_3 formeraient un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes. On pourra alors supposer $B = 1$; il n'y a pour cela qu'à changer φ_1, ψ_1, φ_3, ψ_3 en $B\varphi_1$, $B\psi_1$, $B\varphi_3$, $B\psi_3$ respectivement.

Cela posé, il est facile d'avoir les substitutions fondamentales du groupe de l'équation. En effet, lorsque la variable x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x = 1$, on a

$$(\varphi_1)_1 = (\psi_1)_1 + (\psi_3)_1 = \psi_1 + \Omega\psi_3 = \psi_1 + \Omega(\varphi_1 - \psi_1) = \Omega\varphi_1 + (1 - \Omega)\psi_1.$$

On trouve de même

$$\begin{aligned}
(\varphi_2)_1 &= \Omega\varphi_2 + (1 - \Omega)\psi_2,\\
(\psi_1)_0 &= \omega_1\psi_1 + (1 - \omega_1)(A\varphi_1 + B\varphi_2),\\
(\psi_2)_0 &= \omega_2\psi_2 + (1 - \omega_2)(C\varphi_1 + D\varphi_2),
\end{aligned}$$

de sorte que les substitutions fondamentales sont les suivantes :

$$\Sigma_0 \left\{\begin{aligned}
(\varphi_1)_0 &= \varphi_1,\\
(\varphi_2)_0 &= \varphi_2,\\
(\psi_1)_0 &= \omega_1\psi_1 + (1 - \omega_1)(A\varphi_1 + B\varphi_2),\\
(\psi_2)_0 &= \omega_2\psi_2 + (1 - \omega_2)(C\varphi_1 + D\varphi_2);
\end{aligned}\right.$$

$$\Sigma_1 \left\{\begin{aligned}
(\varphi_1)_1 &= \Omega\varphi_1 + (1 - \Omega)\psi_1,\\
(\varphi_2)_1 &= \Omega\varphi_2 + (1 - \Omega)\psi_2,\\
(\psi_1)_1 &= \psi_1,\\
(\psi_2)_1 &= \psi_2.
\end{aligned}\right.$$

Pour que le groupe soit complètement déterminé, il nous suffit de connaître les coefficients A, B, C, D. Pour trouver ces coefficients, considérons la substitution auxiliaire $\Sigma_1\Sigma_0$; c'est celle que subissent les quatre intégrales lorsque la variable décrit dans le sens direct un contour fermé, renfermant à son intérieur les points o et 1. On trouve immédiatement qu'après un pareil chemin l'intégrale

$$\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 + \nu\psi_1 + \rho\psi_2,$$

où λ, μ, ν, ρ sont des constantes quelconques, se change en la nouvelle intégrale

$$\begin{aligned}&[\lambda\Omega+\lambda(1-\Omega)(1-\omega_1)A+\nu(1-\omega_1)A+\mu(1-\Omega)(1-\omega_2)C+\rho(1-\omega_2)C]\varphi_1\\ &+[\mu\Omega+\lambda(1-\Omega)(1-\omega_1)B+\nu(1-\omega_1)B+\mu(1-\Omega)(1-\omega_2)D+\rho(1-\omega_2)D]\varphi_2\\ &+[\lambda(1-\Omega)+\nu]\omega_1\psi_1+[\mu(1-\Omega)+\rho]\omega_2\psi_2.\end{aligned}$$

Cherchons à déterminer λ, μ, ν, ρ, de façon que l'intégrale considérée se reproduise, à un facteur constant près S, lorsque la variable décrit le contour précédent. On aura les quatre équations

$$\begin{aligned}&\lambda[\Omega-S+(1-\Omega)(1-\omega_1)A]+\mu(1-\Omega)(1-\omega_2)C\\ &\qquad\qquad+\nu(1-\omega_1)A+\rho(1-\omega_2)C=0,\\ &\lambda(1-\Omega)(1-\omega_1)B+\mu[\Omega-S+(1-\Omega)(1-\omega_2)D]+\nu(1-\omega_1)B+\rho(1-\omega_2)D=0,\\ &\lambda(1-\Omega)\omega_1+\nu(\omega_1-S)=0,\\ &\mu(1-\Omega)\omega_2+\rho(\omega_2-S)=0.\end{aligned}$$

L'élimination de λ, μ, ν, ρ conduit, après quelques réductions faciles, à l'équation suivante pour déterminer S :

$$(23)\qquad\left\{\begin{aligned}f(S)=&(\Omega-S)^2(\omega_1-S)(\omega_2-S)\\ &+(\Omega-S)(1-\Omega)S(\omega_1-S)(1-\omega_2)D\\ &+(1-\Omega)^2S^2(\omega_1-1)(\omega_2-1)(AD-BC)\\ &+(1-\Omega)S(\omega_2-S)(\Omega-S)(\omega_1-1)A=0.\end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, cette équation doit admettre pour racines les quantités ω'_1, ω'_2, ω'_3, ω'_4,

$$\omega'_1=e^{-2\pi\alpha_1\sqrt{-1}},\qquad \omega'_2=e^{-2\pi\alpha_2\sqrt{-1}},\qquad \omega'_3=e^{-2\pi\alpha_3\sqrt{-1}},\qquad \omega'_4=e^{-2\pi\alpha_4\sqrt{-1}},$$

et l'on aura identiquement

$$(24)\qquad f(S)=(S-\omega'_1)(S-\omega'_2)(S-\omega'_3)(S-\omega'_4).$$

En égalant les termes constants des deux membres, on parvient à la relation

$$\omega_1\omega_2\Omega^2 = \omega'_1\omega'_2\omega'_3\omega'_4,$$

qui est satisfaite, comme on le voit, en remplaçant les lettres ω, ω', Ω par leurs valeurs. Si, dans l'identité (24), on fait successivement $S=\Omega$, $S=\omega_1$, $S=\omega_3$, on a les trois équations

$$(\Omega-\omega'_1)(\Omega-\omega'_2)(\Omega-\omega'_3)(\Omega-\omega'_4) = \Omega^2(1-\Omega)^2(1-\omega_1)(1-\omega_2)(AD-BC),$$

$$\begin{aligned}(\omega_1-\omega'_1)&(\omega_1-\omega'_2(\omega_1-\omega'_3)(\omega_1-\omega'_4)\\ &=\omega_1^2(1-\Omega)^2(1-\omega_1)(1-\omega_2)(AD-BC)+\omega_1(1-\Omega)(\omega_2-\omega_1)(\Omega-\omega_1)(1-\omega_1)A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega_2-\omega'_1)&(\omega_2-\omega'_2)(\omega_2-\omega'_3)(\omega_2-\omega'_4)\\ &=\omega_2^2(1-\Omega)^2(1-\omega_1)(1-\omega_2)(AD-BC)+\omega_2(1-\Omega)(\omega_1-\omega_2)(\Omega-\omega_2)(1-\omega_2)D.\end{aligned}$$

On en tire A, D, AD — BC et par suite BC. Nous avons vu que l'un des coefficients B ou C pouvait être pris à volonté ; si l'on prend par exemple $B=1$, on aura C, et les substitutions fondamentales Σ_0 et Σ_1 seront complètement déterminées. Les coefficients sont bien, comme on voit, des fonctions *rationnelles* des multiplicateurs.

12. Si l'on augmente les nombres a et b de nombres entiers quelconques, les multiplicateurs ω, ω' ne changent pas, tandis que Ω peut changer de signe simplement. On en déduit que toutes les équations du type (16), ainsi obtenues, appartiennent à *deux* classes distinctes. Les cas où l'équation (16) n'est pas irréductible donnent lieu à une discussion plus compliquée. Il faut tenir compte, non seulement des multiplicateurs, mais des valeurs elles-mêmes des exposants de discontinuité.

Les substitutions fondamentales du groupe de l'équation, ramenées à leur forme canonique, sont de la forme

$$\Sigma_0(y_1, y_2, y_3, y_4; y_1, y_2, \omega_1 y_3, \omega_2 y_4),$$
$$\Sigma_1(y_1, y_2, y_3, y_4; y_1, y_2, \Omega y_3, \Omega y_4).$$

Inversement, à tout groupe dérivé de deux substitutions de cette forme on pourra faire correspondre en général une infinité d'équations de la forme (16). En particulier, si ce groupe est fini, on aura une infinité d'équations de ce type dont l'intégrale générale s'exprimera au moyen de fonctions algébriques.

13. Le second type d'équations aura les trois points singuliers o, 1, ∞, avec les exposants de discontinuité ci-après :

$$\begin{array}{llllll} 0, & 1, & \alpha, & \alpha' & \text{pour } x=0, \\ 0, & 1, & \beta, & \beta' & \text{pour } x=1, \\ \Gamma, & \Gamma+1, & \gamma, & \gamma' & \text{pour } x=\infty. \end{array}$$

On suppose qu'aucun des nombres α, α', β, β', $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\Gamma-\gamma$, $\Gamma-\gamma'$, $\gamma-\gamma'$ n'est un nombre entier et l'on a de plus la relation

$$2\Gamma+\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=3.$$

L'équation sera de la forme

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2(x-1)^2 y^{\text{IV}}+(\mathrm{A}x-\mathrm{B})x(x-1)y''' \\ & \qquad +(\mathrm{C}x^2-\mathrm{D}x+\mathrm{E})y''+(\mathrm{F}x-\mathrm{G})y'+\mathrm{H}y=0. \end{aligned}\right.$$

On trouve immédiatement

$$\begin{aligned} & \mathrm{B}=5-\alpha-\alpha', \\ & \mathrm{E}=4-2\alpha-2\alpha'+\alpha\alpha', \\ & \mathrm{A}-\mathrm{B}=5-\beta-\beta', \\ & \mathrm{C}-\mathrm{D}+\mathrm{E}=4-2\beta-2\beta'+\beta\beta', \\ & \mathrm{A}=10-(\alpha+\alpha'+\beta+\beta'), \\ & \mathrm{C}=3\mathrm{A}-11+\gamma\gamma'+(\gamma+\gamma')(2\Gamma+1)+\Gamma(\Gamma+1), \\ & \mathrm{F}=2\mathrm{A}-\mathrm{C}-6+\gamma\gamma'(2\Gamma+1)+(\gamma+\gamma')\Gamma(\Gamma+1), \\ & \mathrm{H}=\gamma\gamma'\Gamma(\Gamma+1). \end{aligned}$$

Pour déterminer G, nous écrirons que, lorsqu'on substitue à la place de y une série de la forme

$$y=x^{-\Gamma}\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots\right),$$

les coefficients de a_0 et de a_1 sont identiquement nuls. On trouve ainsi

$$\Gamma(\Gamma+1)(\Gamma+2)(\mathrm{A}-\mathrm{B})-\Gamma(\Gamma+1)(2\mathrm{C}-\mathrm{D})+\Gamma(2\Gamma-\mathrm{G})-\mathrm{H}=0;$$

d'où l'on déduira G. Remarquons qu'en remplaçant H par sa valeur le facteur commun Γ disparaîtra, de sorte que l'on pourra toujours en déduire G.

La dernière équation du quatrième ordre, qu'il nous reste à former, sera de la forme

$$(26)\quad \begin{cases} x(x-1)^2(x-a)^2 y^{\text{IV}} + (Ax^2+Bx+C)x(x-1)y''' \\ \quad + (Dx^3+Ex^2+Fx+G)y'' + (Hx^2+Kx+L)y' + (Mx+N)y = 0. \end{cases}$$

Les exposants de discontinuité seront respectivement

$$\begin{array}{llllll} 0, & 1, & 2, & \gamma & \text{pour } x=0, & \\ 0, & 1, & \alpha, & \alpha+1 & \quad \text{»} \quad x=1, & \delta,\ \delta+1,\ \delta',\ \delta'+1 \ \text{ pour } x=\infty. \\ 0, & 1, & \beta, & \beta+1 & \quad \text{»} \quad x=a, & \end{array}$$

On suppose qu'aucun des nombres α, β, γ, $\delta-\delta'$ n'est égal à un nombre entier et que l'on a la relation

$$2\alpha+2\beta+\gamma+2\delta+2\delta'=1.$$

Les coefficients A, B, C, ... se déterminent de la même manière que plus haut, mais leurs expressions sont de plus en plus compliquées.

14. La recherche des solutions convenables des équations (4) et (5) peut se formuler ainsi : « Former un Tableau rectangulaire de m colonnes horizontales et de ρ lignes verticales, dont tous les éléments soient des nombres entiers positifs ou nuls, de telle façon que la somme des éléments de chaque ligne soit égale à m et que la somme des carrés de tous les éléments soit égale à $2+m^2(\rho-2)$. »

Le problème peut se décomposer en deux autres. Remarquons que la somme des carrés des éléments d'une même ligne ne pourra dépasser, d'après une remarque déjà faite, m^2-2m+2. Supposons que la somme des éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne soit égale à $m^2-2m+2-\alpha_i$. Les nombres α_i devront vérifier l'équation

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \alpha_i = 2(m-1)(m+1-\rho).$$

Connaissant les solutions de cette équation, que l'on trouve immédiatement, on sera ramené à chercher les solutions en nombres entiers et positifs ou nuls de plusieurs systèmes indépendants d'équations de la forme

$$\sum_{h=1}^{h=m} X_h = m, \qquad \sum_{h=1}^{h=m} X_h^2 = M.$$

Si l'on veut former tous les systèmes de solutions correspondant à une valeur de m, il paraît commode de former d'abord toutes les partitions de m et la somme des carrés correspondant à chacune d'elles. Une fois ce tableau formé, une simple inspection donnera facilement toutes les solutions convenables.