

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. KOENIGS

## Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 2 (1885), p. 385-404

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1885\\_3\\_2\\_\\_385\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__385_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# NOUVELLES RECHERCHES

SUR LES

## ÉQUATIONS FONCTIONNELLES,

PAR M. G. KOENIGS,  
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

---

### I. — Introduction.

Dans le Supplément aux *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1884, j'ai démontré que,  $\varphi(z)$  étant une fonction uniforme donnée, holomorphe dans le domaine d'un point limite  $x$  de la substitution  $|z, \varphi(z)|$ , la limite, pour  $p$  infini, du rapport

$$\frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p}$$

est une fonction  $B(z)$ , holomorphe dans le domaine du point  $x$ . Par *point limite*, j'entends un point vérifiant les conditions

$$\varphi(x) = x, \quad \text{mod } \varphi'(x) < 1,$$

et je représente par  $\varphi_p(z)$  l'opération  $\varphi(z)$  effectuée  $p$  fois. La fonction  $B(z)$  admet le point  $x$  comme zéro simple et de plus  $B'(x) = 1$ . Cette même fonction vérifie l'équation

$$(A) \quad B[\varphi(z)] = \varphi'(x) B(z),$$

et j'ai démontré cette PROPOSITION FONDAMENTALE que, si l'on envisage l'équation fonctionnelle

$$(S) \quad \Xi[\varphi(z)] = k \Xi(z),$$

où  $k$  est une constante convenable qu'il s'agit de déterminer, toute

solution de cette équation, assujettie à être holomorphe ou méromorphe au point  $x$ , ne diffère que par un facteur constant d'une puissance entière positive ou négative de  $B(z)$ ; de plus, si  $n$  est l'exposant de cette puissance, le *multiplicateur*  $k$  a pour valeur  $[\varphi'(x)]^n$ .

De la fonction  $B(z)$ , j'ai déduit la fonction

$$b(z) = \frac{\log B(z)}{\log \varphi'(x)},$$

qui admet en  $x$  une singularité logarithmique; la fonction  $b(z)$  m'a permis de former, outre l'expression générale des intégrales de l'équation (S), celle des intégrales de plusieurs autres équations fonctionnelles.

2. Je me propose d'étendre ici le rôle de la fonction  $B(z)$  aux équations fonctionnelles du type

$$(G) \quad \Xi[\varphi(z)] = \varphi[\Xi(z)],$$

$$(I) \quad \Xi_p(z) = \varphi(z),$$

$$(D) \quad \Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)].$$

Les solutions de l'équation (G) présentent des fonctions qui ont un point limite commun et qui donnent lieu à la même fonction limite; de ce groupe de fonctions holomorphes, on déduit un *groupe de substitutions uniformes* qui conservent une portion finie du plan. La considération de ces fonctions conduit à la démonstration de ce fait, qu'on est assuré de l'existence de  $p$  solutions holomorphes de l'équation itérative (I), chaque fois que l'équation  $\varphi(z) - z = 0$  admet une racine  $x$ , pour laquelle le module de  $\varphi'(x)$  n'est ni zéro ni l'unité.

Dans le Tome XVII du *Bulletin des Sciences mathématiques*, M. Korikine s'est proposé de trouver une formule générale d'itération, qui ait un sens pour une valeur quelconque, commensurable ou non, de l'indice itératif. En admettant d'abord la possibilité de la solution, ainsi que certaines hypothèses dont la dépendance ou l'indépendance mutuelle reste problématique, cet éminent géomètre a présenté une solution de ce problème sous forme de développement en série. La voie que je suis est différente, et j'ai tâché de tout ramener à une hypothèse unique dont le sens et la généralité me paraissent très précis.

L'équation (D) n'est qu'une généralisation de l'équation (G); sous une condition *nécessaire* des plus simples, elle admet toujours une intégrale holomorphe et même une infinité, dont l'étude conduit à considérer un quadruple groupe de fonctions, qui se reproduisent entre elles, lorsqu'on remplace dans l'une d'elles l'argument  $z$  par l'une de ces fonctions; je n'ai pas d'ailleurs cherché à approfondir davantage les propriétés de ces substitutions.

Je termine par quelques exemples simples, destinés surtout à élucider et à contrôler ces considérations générales.

Je crois devoir, avant de clore cette Introduction, mentionner le rôle important que paraissent devoir jouer dans ces recherches les courbes d'égal module et d'égal argument de la fonction  $B(z)$ .

## II. — Les fonctions $Z(z, k)$ .

3. J'adopte les notations et les résultats rappelés dans l'Introduction. Je me propose de chercher les fonctions qui, holomorphes en  $x$ , admettent  $x$  pour point limite, en donnant naissance à la même fonction limite  $B(z)$ .

Soit  $Z(z)$  une telle fonction. D'après la propriété exprimée par l'équation ( $\alpha$ ), on doit avoir

$$B[Z(z)] = Z'(x) B(z).$$

Je dois donc recourir à l'équation suivante, où  $k$  est une constante quelconque,

$$(\lambda) \quad B(Z) = k B(z),$$

et chercher si, parmi les fonctions qui se déduisent de cette équation, se trouvent des solutions du problème proposé.

Pour  $z = x$ , l'équation ( $\lambda$ ) se réduit à  $B(Z) = 0$ , qui admet la *racine simple*  $Z = x$ ; car  $B(x) = 0$ ,  $B'(x) = 1$ . Donc l'équation ( $\lambda$ ) définit une fonction que je désignerai par  $Z(z, k)$ , holomorphe dans le domaine de  $x$  et qui se réduit à  $x$  pour  $z = x$ .

En différentiant l'équation ( $\lambda$ ), on trouve

$$B'(Z) \frac{dZ}{dz} = k B'(z).$$

Faisons  $z = x$  et  $Z = x$ ; comme  $B'(x)$  n'est pas nul, il vient

$$k = \left( \frac{dZ}{dz} \right)_x = Z'(x, k),$$

ce qui fournit de  $k$  une signification très simple.

Supposons alors  $\text{mod } k < 1$ , c'est-à-dire  $\text{mod } Z'(x, k) < 1$ ; cette condition est nécessaire et suffisante pour que  $x$  soit un point limite de  $Z(z, k)$ . Ainsi, *parmi les fonctions  $Z(z, k)$ , celles dans lesquelles  $\text{mod } k < 1$  admettent  $x$  comme point limite.*

L'équation ( $\lambda$ ) donne d'ailleurs

$$B[Z(z, k)] = k B(z),$$

et, comme  $k = Z'(x, k)$ , cette formule, rapprochée de la *proposition fondamentale*, rapportée dans l'Introduction, montre que  $B(z)$  est la fonction limite relative à  $Z(z, k)$ .

Ainsi, *toutes les fonctions  $Z(z, k)$ , dans lesquelles  $\text{mod } k < 1$  (fonctions qui admettent  $x$  pour point limite), donnent naissance à la même fonction limite; de plus, ce sont les seules qui jouissent de cette propriété.*

La fonction  $\varphi(z)$  fait partie des fonctions  $Z$ ; d'après nos notations et d'après l'équation ( $\alpha$ ), nous devons la représenter par le symbole  $Z[z, \varphi'(x)]$ . Comme elle ne joue dans le groupe aucun rôle spécial, on pourra supposer que c'est  $B(z)$  que l'on s'est donné *a priori*, et que l'on détermine ensuite le groupe des fonctions  $Z$  par l'équation ( $\lambda$ ). Il suffit que  $x$  soit un zéro simple de  $B(z)$ .

### III. — Propriétés générales des fonctions $Z(z, k)$ .

4. Les fonctions  $Z(z, k)$  possèdent, *indépendamment de toute hypothèse portant sur leur paramètre  $k$* , des propriétés générales communes que je vais établir.

Je remarque que la fonction  $Z[Z(z, k'), k]$  est holomorphe dans le domaine de  $x$ ; car,  $z$  se mouvant dans le domaine de  $x$ ,  $Z(z, k')$  se meut aussi dans le domaine de  $x$ . Mais si, dans l'équation ( $\lambda$ ), on remplace  $z$  par  $Z(z, k')$ , il vient

$$B\{Z[Z(z, k'), k]\} = k B[Z(z, k')] = k k' B(z);$$

d'où immédiatement, d'après la notation que nous avons adoptée,

$$(a) \quad Z[Z(z, k'), k] = Z(z, kk');$$

comme on aurait aussi

$$Z[Z(z, k), k'] = Z(z, k'k) = Z(z, kk'),$$

il en résulte

$$(b) \quad Z[Z(z, k), k'] = Z[Z(z, k'), k].$$

Deux fonctions  $Z$  quelconques jouissent donc de la propriété exprimée par l'équation

$$\varphi[\psi(z)] = \psi[\varphi(z)],$$

qui n'est autre que l'équation (G) <sup>(1)</sup>.

Enfin, la réitération de l'opération  $Z(z, k)$  est *permise un nombre limité de fois*, autrement dit la fonction  $Z_p(z, k)$ , est holomorphe dans le domaine du point  $x$ ; de plus, elle prend en  $x$  la valeur  $x$ . L'application répétée de la formule (a) donne alors

$$(c) \quad Z_p(z, k) = Z(z, k^p).$$

#### IV. — Groupe de substitutions holomorphes.

5. Représentons par  $S(k)$  la substitution qui consiste à remplacer  $z$  par  $Z(z, k)$ . En dehors de toute hypothèse sur  $k$ , il est toujours permis de multiplier entre elles un nombre fini de fois les substitutions  $S(k)$ , pourvu que l'on reste dans un domaine continu convenable autour du point  $x$ . Les formules (a), (b), (c) montrent alors que

$$S(k)S(k') = S(kk') = S(k')S(k),$$

les substitutions  $S(k)$  forment donc un groupe, et deux quelconques d'entre elles sont permutables.

---

(1) Il résulte de l'article VII, page 395, que les fonctions  $Z$  sont les seules solutions de l'équation (G) qui soient holomorphes au point  $x$ ; il suffit de faire, dans cet article,  $\psi(z) = \varphi(z)$ .

Il y a lieu de remarquer que  $Z(z, 1) = z$  et que la substitution  $S(1)$  est identique. On en conclut

$$S(k) S\left(\frac{1}{k}\right) = S(1) = 1;$$

Les fonctions  $Z(z, k) Z\left(z, \frac{1}{k}\right)$  sont donc inverses l'une de l'autre, résultat évident d'après l'équation ( $\lambda$ ).

#### V. — Les courbes d'égal module de $B(z)$ .

6. Les propriétés que je vais rappeler concernent les courbes d'*égal module* d'une fonction telle que  $B(z)$ , holomorphe dans une région continue du plan qui entoure l'un de ses zéros. Pour une valeur très petite du module  $\mu$ , la courbe d'*égal module*

$$\text{mod } B(z) = \mu = \text{const.}$$

comprend un ovale  $O_\mu$  entourant le zéro  $x$  de la fonction, dans l'hypothèse où  $x$  est un zéro simple.

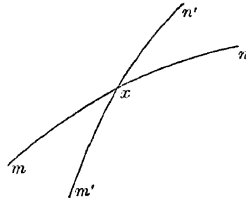
Déterminons, chose toujours possible, un nombre  $M$  jouissant de la propriété suivante :

Tant que  $\mu < M$ , l'ovale  $O_\mu$  ne cesse jamais d'exister, c'est-à-dire d'être une courbe fermée sans point multiple, ne contenant à son intérieur : 1° aucun point où  $B(z)$  cesse d'être holomorphe; 2° aucun zéro de  $B'(z)$ ; 3° aucun zéro de  $B(z)$ , si ce n'est le point  $x$ .

Alors, pourvu que  $\mu < M$ , la courbe d'égal module,  $\text{mod } B(z) = \mu$ , n'aura à l'intérieur de l'ovale  $O_M$  d'autre portion que l'ovale  $O_\mu$ . Pour tous les points extérieurs à  $O_\mu$  et intérieurs à  $O_M$ , on aura  $\text{mod } B(z) > \mu$ ; pour tous les points intérieurs à  $O_\mu$ , on aura au contraire  $\text{mod } B(z) < \mu$ .

Je dois aussi rappeler que les courbes d'égal argument, trajectoires orthogonales des courbes d'égal module, traversent toutes le point  $x$ . Soit  $mn$  une branche de l'une de ces courbes. Le point  $x$  la divise en deux demi-branches; tandis que sur la demi-branche  $xm$ , l'argument de  $B(z)$  reste constamment égal à  $\alpha$ , sur la demi-branche opposée  $xn$  il est égal à  $\alpha + \pi$ . Plus généralement, deux demi-branches  $xm$ ,  $xm'$ , répondant aux valeurs constantes  $\alpha$  et  $\beta$  de l'argument de  $B(z)$ , se

coupent en  $x$  sous l'angle  $(\alpha - \beta)$ . Deux arguments, qui ne diffèrent que par un multiple entier de  $2\pi$ , donnent lieu à la même demi-branche issue de  $x$ . En résumé, à toute valeur de l'argument, arbitrairement proposée, correspond une demi-branche issue de  $x$  parfaitement déter-



minée. Dans l'intérieur de l'ovale  $O_M$  il n'y a pas d'autres points donnant lieu à un argument  $\alpha$  pour  $B(z)$  que ceux de la demi-branche correspondant à  $\alpha$ .

7. Ces résultats rappelés, je vais démontrer la série de propositions suivante :

I. Pour une valeur de  $z$  intérieure à  $O_M$  et pour des valeurs de  $\text{mod } k < 1$ , l'équation

$$(\lambda) \quad B(Z) = kB(z)$$

admet au moins une racine intérieure à  $O_M$ .

Soit en effet  $k = \rho e^{i\theta}$ ,  $\text{mod } B(z) = \mu$ ,  $\text{arg. } B(z) = \alpha$ ; on aura, pour tous les points  $Z$  vérifiant l'équation  $(\lambda)$

$$\begin{aligned} \text{mod } B(Z) &= \rho\mu, \\ \text{arg. } B(Z) &= \alpha + \theta. \end{aligned}$$

L'ovale  $O_{\rho\mu}$  est intérieur à  $O_M$ ; en effet, comme  $\rho < 1$ , il est intérieur à  $O_\mu$  qui est intérieur lui-même à  $O_M$ . La demi-branche de la courbe d'égal argument  $(\theta + \alpha)$  coupe certainement l'ovale  $O_{\rho\mu}$  en un point  $Z$  qui vérifie l'équation  $(\lambda)$ , et ce point est intérieur à  $O_M$ .

II. La fonction  $Z$  de  $z$ , dont la valeur est représentée par le point  $Z$  trouvé ci-dessus, est holomorphe dans le contour  $O_M$ .

En effet, pour qu'elle eût un point critique, il faudrait qu'il existât à



la fois un point  $z$  et un point  $Z$ , intérieurs au contour  $O_M$  et vérifiant les équations simultanées

$$B(Z) = kB(z), \quad B'(Z) = 0;$$

or cela n'est pas possible, car le contour  $O_M$  ne contient aucun zéro de  $B'(z)$ .

III. *La fonction  $Z$  est unique, et c'est la fonction  $Z(z, k)$  déjà définie.*

On peut douter que l'équation  $(\lambda)$  n'ait pas plus d'une racine dans le contour  $O_M$ . Si cela était, chacune d'elles serait holomorphe dans le contour  $O_M$ , d'après la proposition précédente.

D'autre part, en faisant  $z = x$ , il vient  $B(Z) = 0$ ; et, comme  $B(z)$  n'a pas d'autre zéro que  $x$  dans le contour  $O_M$ , toutes ces fonctions holomorphes prendraient la même valeur  $x$  en  $x$ . Mais, comme l'équation  $(\lambda)$  ne peut définir qu'une seule fonction holomorphe prenant en  $x$  la valeur  $x$ , attendu que  $x$  est zéro simple de  $B(z)$ , on en conclut qu'il n'y a en réalité qu'une seule fonction  $Z$ ; elle ne peut être autre que la fonction  $Z(z, k)$  déjà définie.

De là ce théorème:

*Toutes les fonctions  $Z(z, k)$ , dans lesquelles  $\text{mod } k < 1$ , sont holomorphes dans l'ovale  $O_M$ .*

Mais considérons alors une substitution  $S(k)$  dans laquelle  $\rho = \text{mod } k < 1$ , toutes ces substitutions forment évidemment un groupe; de plus la substitution  $S(k)$ , par exemple, transforme l'ovale  $O_\mu$  dans un ovale  $O_{\rho\mu}$  intérieur à  $O_\mu$ .

On en déduit que toutes les substitutions  $S(k)$ , arbitrairement répétées ou multipliées entre elles, amènent un point quelconque intérieur à  $O_M$ , aussi près du point  $x$  que l'on voudra, sur des ovales qui vont en se resserrant de plus en plus autour de ce point. Ce point est donc un point limite commun à toutes les substitutions du groupe.

8. Il est encore facile de montrer que : *Toute fonction  $Z(z, k)$  est holomorphe dans l'ovale  $O_{\frac{M}{\text{mod } k}}$  si  $\text{mod } k > 1$ .*

Lorsque  $\text{mod } k = 1$ , la substitution  $S(k)$  transforme un point  $z$ , pris sur l'ovale  $O_\mu$  et sur la courbe d'égal argument  $\alpha$ , en un point  $Z$  situé

sur l'ovale  $O_\mu$  et sur la courbe d'égal argument  $(\alpha + \theta)$ , où  $\theta = \arg k$ . Si  $\theta$  est commensurable avec  $\pi$ , on reviendra au point de départ après un nombre fini d'opérations, résultat évident puisque  $k$  est alors une racine de l'unité. Si  $\theta$  est incommensurable avec  $\pi$ , sur un arc quelconque de l'ovale  $O_\mu$  aussi petit que l'on voudra, il y aura toujours une infinité de points transformés de  $z$ .

*Le point  $x$  n'est donc pas un point limite pour les substitutions  $S(k)$  dans lesquelles  $\text{mod } k = 1$  : il pouvait y avoir doute dans ce cas.*

9. Les courbes d'égal module et d'égal argument de la fonction  $B(z)$  semblent, on le voit, indiquer un premier pas vers la solution du problème de la division du plan en régions pour une substitution donnée. Sans oser insister prématurément sur ce point important, je crois que ce qui précède ajoute à la fonction  $B(z)$  un réel intérêt.

#### VI. — Symbole itératif.

##### 10. L'équation itérative

$$(I) \quad \Xi_p(z) = \varphi(z)$$

se résout immédiatement, grâce aux fonctions  $Z$ .

Supposons que  $\varphi(z)$  puisse faire partie d'un groupe de fonctions  $Z$  et que

$$\varphi(z) = Z(z, k_0),$$

$k_0$  étant quelconque sauf zéro et l'infini. Il est clair que de la relation

$$Z_p(z, \sqrt[p]{k_0}) = Z(z, k_0) = \varphi(z)$$

on déduit immédiatement que l'équation (I) admet  $p$  solutions holomorphes dans le domaine de ce point  $x$ , qui est un point limite pour celles des fonctions  $Z(z, k)$  dans lesquelles  $\text{mod } k < 1$ .

Tout se réduit donc à chercher si  $\varphi(z)$  peut toujours faire partie d'un groupe de fonctions  $Z$ ; or, à cet égard, je vais démontrer le théorème suivant :

*Une fonction donnée  $\varphi(z)$  peut faire partie d'un groupe de fonc-*

tions  $Z$  chaque fois que la fonction  $\varphi(z) - z$  aura un zéro qui ne rendra  $\text{mod } \varphi'(z)$  égal ni à 1 ni à zéro.

Soient en effet  $x$  un tel zéro et  $\text{mod } \varphi'(x) < 1$ . Le point  $x$  est un point limite de  $\varphi(z)$ ; on a donc, en formant  $B(z)$  et ensuite les fonctions  $Z(z, k)$ ,

$$\varphi(z) = Z[z, \varphi'(x)].$$

Si, au contraire,  $\text{mod } \varphi'(x) > 1$ , prenons l'équation

$$\varphi(\psi) = z,$$

qui définit, pour  $\psi$ , une fonction holomorphe en  $x$  et prenant en  $x$  la valeur  $x$ ; comme on a sans cesse

$$\varphi'(\psi) \psi'(z) = 1,$$

en faisant à la fois  $z = x$ ,  $\psi = x$ , on trouve

$$\varphi'(x) \psi'(x) = 1,$$

d'où

$$\text{mod } \psi'(x) = \frac{1}{\text{mod } \varphi'(x)} < 1.$$

Ainsi  $x$  est un point limite de  $\psi(z)$ . Formons alors la fonction  $B(z)$  relative à ce point limite  $x$  de  $\psi(z)$ , puis l'équation

$$B(Z) = k B(z),$$

d'où l'on tire les fonctions  $Z(z, k)$ . Nous aurons, en particulier,

$$\psi(z) = Z[z, \psi'(x)] = Z\left[z, \frac{1}{\varphi'(x)}\right]$$

et, comme  $\psi(z)$  et  $\varphi(z)$  sont inverses l'une de l'autre,

$$\varphi(z) = Z[z, \varphi'(x)],$$

comme précédemment.

De là ce théorème :

*Si la fonction  $\varphi(z) - z$  admet un zéro pour lequel  $\text{mod } \varphi'(x)$  ne soit ni nul ni égal à l'unité, l'équation itérative*

$$(I) \quad \Xi_n(z) = \varphi(z)$$

admet  $p$  solutions holomorphes dans le domaine du point  $x$ , et l'on peut écrire, en représentant par le symbole  $\varphi_{\frac{1}{p}}(z)$  l'une quelconque de ces  $p$  solutions,

$$\varphi_{\frac{1}{p}}(z) = Z[z, \sqrt[p]{\varphi'(x)}].$$

11. Mais nous sommes en mesure de donner une plus grande extension au symbole  $\varphi_{\omega}(z)$  en l'étendant au cas de valeurs incommensurables ou même imaginaires de  $\omega$ . Il suffit de poser

$$\varphi_{\omega} = Z[z, [\varphi'(x)]^{\omega}].$$

Ce symbole représente généralement une infinité de fonctions, toutes holomorphes par rapport à  $z$  dans le domaine de  $x$ . Ainsi se trouve résolu le problème que M. Korkine s'était proposé au Tome XVII du *Bulletin des Sciences mathématiques*, et dans lequel ce géomètre avait adopté la méthode des coefficients indéterminés. A la vérité, je suppose connue la fonction  $B(z)$ , et c'est à ce point que se ramène toute la difficulté de la construction de  $\varphi_{\omega}$ .

Mais nous connaissons des propriétés de la fonction  $B(z)$ , et c'est déjà quelque chose de savoir qu'il existe une infinité de solutions holomorphes du problème, sous la seule condition qu'il existe un zéro de  $\varphi(z) - z$  ne rendant mod  $\varphi'(z)$  égal ni à zéro ni à l'unité.

Ainsi mod  $a$  n'étant ni 1 ni 0, on peut affirmer *a priori* que, dans le domaine de l'origine, les équations

$$\begin{aligned} \Xi_p(z) &= a \sin z, & \Xi_p(z) &= a \operatorname{tang}(z), \\ \Xi_p(z) &= a \log(1+z) & \Xi_p(z) &= a \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \dots \end{aligned}$$

admettent chacune  $p$  intégrales holomorphes.

VII. — Équation  $\Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)]$ .

12. Cette équation est l'extension naturelle de l'équation

$$\Xi[\varphi(z)] = \varphi[\Xi(z)],$$

que vérifient les fonctions  $Z$ .

Cherchons d'une façon générale si l'équation

$$(D) \quad \Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)]$$

peut admettre une solution holomorphe dans le domaine d'un point limite de  $\varphi(z)$ . Soit  $x$  ce point limite, et posons  $y = \Xi(x)$ ; je ne suppose pas que  $\psi(z)$  admette une singularité en  $y$ .

L'équation (D) nous donne d'abord, en faisant  $z = x$ ,

$$y = \psi(y);$$

en la différentiant et faisant  $z = x$ , on trouve

$$\Xi'(x) \varphi'(x) = \psi'(y) \Xi'(x);$$

si  $\Xi'(x)$  n'est pas nul, on a donc

$$\varphi'(x) = \psi'(y);$$

mais cette conclusion se maintient dans tous les cas, car, si  $\Xi'(x) = 0$ ,  $\Xi''(x) = 0$ , ...,  $\Xi^{(n-1)}(x) = 0$  et que  $\Xi^{(n)}(x)$  ne soit pas nul, en différentiant (D)  $n$  fois et faisant  $z = x$ , il vient

$$\Xi^{(n)}(x) \varphi'(x) = \psi'(y) \Xi^{(n)}(x),$$

et, comme  $\Xi^{(n)}(x)$  n'est pas nul, on a encore

$$\varphi'(x) = \psi'(y).$$

Comme  $\text{mod } \varphi'(x) < 1$ , puisque  $x$  est un point limite de  $\varphi(z)$ , on a donc

$$\text{mod } \psi'(y) < 1.$$

Donc  $y$  est un point limite de  $\psi(z)$ .

Mais  $x$  et  $y$  ne sont pas deux points limites quelconques de  $\varphi$  et  $\psi$ ; il faut que la relation

$$\varphi'(x) = \psi'(y)$$

soit vérifiée.

Cela ne sera pas toujours possible; mais nous admettrons que, dans le cas présent, cette relation ait lieu. Appelons  $\alpha$  la valeur commune de  $\varphi'(x)$  et  $\psi'(y)$  et poursuivons les conséquences de l'hypothèse d'une intégrale holomorphe  $\Xi(z)$  de l'équation (D).

La fonction  $\varphi(z)$  et la fonction  $\psi(z)$  donnent naissance à deux fonc-

tions limites  $B(z)$  et  $C(z)$ , holomorphes respectivement dans les domaines de  $x$  et de  $y$ .

Les fonctions  $C[\Xi(z)]$  et  $C\{\Xi[\varphi(z)]\}$  sont holomorphes dans le domaine du point  $x$ , et, par l'équation (D), on a

$$C\{\Xi[\varphi(z)]\} = C\{\psi[\Xi(z)]\}.$$

Or, dans l'équation

$$C[\psi(z)] = \alpha C(z),$$

qui n'est autre que l'équation appelée  $\alpha$  dans l'Introduction, remplaçons  $z$  par  $\Xi(z)$ , on aura

$$C\{\psi[\Xi(z)]\} = \alpha C[\Xi(z)],$$

donc

$$C\{\Xi[\varphi(z)]\} = \alpha C[\Xi(z)].$$

La fonction, holomorphe en  $x$ ,  $C[\Xi(z)]$  se reproduit donc multipliée par  $\alpha = \varphi'(x)$ , lorsqu'on y remplace  $z$  par  $\varphi(z)$ ; d'après la *proposition fondamentale* rapportée dans l'Introduction, cette fonction ne doit différer que par un facteur constant d'une puissance entière positive de  $B(z)$ , par exemple  $[B(z)]^n$ , et le multiplicateur est alors  $[\varphi'(x)^n]$ ; mais le multiplicateur nous est donné, c'est  $\varphi'(x)$  lui-même. Donc, comme  $\text{mod } \varphi'(x) < 1$ , il faut nécessairement que  $n = 1$ ; donc enfin la fonction  $C[\Xi(z)]$  est nécessairement proportionnelle à  $B(z)$ , d'où

$$C[\Xi(z)] = k B(z).$$

13. Ainsi, tandis que précédemment j'étais conduit à l'équation

$$(\lambda) \quad B(Z) = k B(z),$$

je me trouve ici amené à considérer des fonctions  $V$  vérifiant l'équation

$$(\mu) \quad C(V) = k B(z),$$

où  $k$  est une constante. L'analogie entre ces deux équations est évidente.

Je remarque encore que cette équation définit une fonction  $V(z, k)$  holomorphe en  $x$ , qui, pour  $z = x$ , prend la valeur  $y$  et dans laquelle

$$k = \left( \frac{dV}{dz} \right)_x.$$

Je vais démontrer que *toutes les fonctions V sont des solutions de l'équation (D)*. En effet, de l'équation de définition

$$C[V(z, k)] = k B(z),$$

on tire, en y remplaçant  $z$  par  $\varphi(z)$ ,

$$C\{V[\varphi(z), k]\} = k B[\varphi(z)] = ak B(z),$$

d'où immédiatement, en ayant égard à nos notations et se reportant à l'équation ( $\mu$ ), où l'on changerait  $k$  en  $ak$ ,

$$V[\varphi(z), k] = V(z, ak).$$

Dans l'équation

$$C[\psi(z)] = a C(z)$$

remplaçons  $z$  par  $V(z, k)$ ; il vient

$$C\{\psi[V(z, k)]\} = a C[V(z, k)] = ak B(z),$$

d'où encore

$$\psi[V(z, k)] = V(z, ak),$$

donc enfin

$$V[\varphi(z), k] = \psi[V(z, k)].$$

Ainsi :

*Les fonctions  $V(z, k)$  sont toutes des solutions de l'équation (D) qui possède ainsi une infinité de solutions holomorphes chaque fois que deux points limites  $x$  et  $y$ , l'un de  $\varphi(z)$ , l'autre de  $\psi(z)$ , vérifient la relation*

$$\varphi'(x) = \psi'(y);$$

nous avons vu, du reste, que de telles solutions de l'équation (D) doivent nécessairement faire partie des fonctions  $V$ .

Ce n'est pas d'ailleurs le seul cas où l'on peut être assuré que l'équation (D) admet des intégrales holomorphes; il résulte en effet de ce qui précède qu'il n'est pas nécessaire que  $x$  et  $y$  soient des points limites de  $\varphi$  et de  $\psi$ . Pour s'en convaincre, il suffit de généraliser un peu les résultats que l'on vient d'obtenir.

VIII. — Les fonctions Z, V, W et Θ.

14. Considérons les équations

$$\begin{aligned}
 (\lambda) \quad & B(Z) = k B(z), \\
 (\mu) \quad & C(V) = k B(z), \\
 (\lambda') \quad & C(\Theta) = k C(z), \\
 (\mu') \quad & B(W) = k C(z).
 \end{aligned}$$

Les fonctions Z et V ont été déjà définies. Les fonctions Θ sont les fonctions Z de la fonction ψ; enfin les fonctions W sont analogues aux fonctions V. La fonction φ est l'une des fonctions Z, la fonction ψ l'une des fonctions Θ. De plus chacune n'occupe dans son groupe aucun rang spécial, elles font seulement partie de celles des fonctions Z et Θ qui correspondent à un paramètre k de module inférieur à l'unité. Mais les fonctions Z et Θ ont avec les fonctions V et W des relations indépendantes de toute hypothèse sur k; ces relations généralisent la dernière équation du paragraphe précédent, et fournissent l'extension dont nous venons de parler.

Désignons généralement par [ζ] la substitution qui consiste à remplacer z par ζ; si l'on étudie l'effet d'une substitution [Z], [V], [W], [Θ] dans les quatre fonctions Z, V, W, Θ, on est amené à construire le Tableau suivant :

	Z	V	W	Θ
[Z]	Z	V		
[V]			Z	V
[W]	W	⊕		
[Θ]			W	Θ

La ligne verticale de gauche indique les substitutions, la ligne horizontale du haut, les fonctions où l'on substitue, et le carré intérieur



fournit le résultat, en se rappelant que, dans le résultat, le paramètre est égal au produit des paramètres de la fonction que l'on substitue et de la fonction où s'effectue la substitution. Les vides marquent des substitutions impossibles, comme le serait celle de  $Z$  dans  $\Theta$ , alors que  $\Theta$  n'est défini que dans le domaine de  $y$  et que  $Z$  ne prend que des valeurs appartenant au domaine de  $x$ .

15. Ainsi, par exemple, on aura (1<sup>re</sup> horizontale, 2<sup>e</sup> verticale)

$$V[Z(z, h), k] = V(z, hk);$$

on aura encore (2<sup>e</sup> horizontale, 4<sup>e</sup> verticale)

$$\Theta[V(z, k'), h'] = V(z, h'k')$$

si l'on suppose  $hk = h'k'$ ; on a donc

$$V[Z(z, a), k] = \Theta[V(z, k'), h'],$$

si l'on fait  $k' = k$ , il faut avoir  $h' = h$ , et alors

$$V[Z(z, h), k] = \Theta[V(z, k), h],$$

formule qui généralise la dernière du paragraphe précédent. On peut en même temps énoncer ce théorème :

*Si les fonctions  $\varphi(z) - z$ , et  $\psi(z) - z$  ont chacune un zéro,  $x$  et  $y$ , tel que  $\varphi'(x) = \psi'(y)$ , et que la valeur commune à  $\varphi'(x)$  et  $\psi'(y)$  n'ait un module égal ni à zéro ni à l'unité, l'équation*

$$\Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)]$$

*aura toujours une infinité de solutions holomorphes dans le domaine du point  $x$ .*

Dans de telles conditions, en effet,  $\varphi$  et  $\psi$  font toujours partie chacune d'un groupe de fonctions, tel que celui des fonctions  $Z$  ou  $\Theta$ . Leurs dérivées en  $x$  et  $y$  étant respectivement égales, désignons par  $a$  leur valeur commune, nous aurons

$$\varphi(z) = Z(z, a), \quad \psi(z) = \Theta(z, a);$$

et les fonctions  $V$  qui accompagnent les groupes simultanés  $Z$  et  $\Theta$  donneront chacune lieu à la relation

$$V[Z(z, a), k] = \Theta[V(z, k), a].$$

16. On peut supposer que  $x$  et  $y$  coïncident. Alors, si  $\varphi$  et  $\psi$  donnent lieu à la même fonction limite, comme  $\varphi'(x) = \psi'(x)$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  coïncident, on est dans le cas traité au début. Mais, si  $\varphi$  et  $\psi$  ne donnent pas lieu à la même fonction limite, elles restent distinctes, et les quatre groupes de fonctions  $Z, V, W, \Theta$  restent aussi distincts. Ce cas présente ceci d'intéressant, que des substitutions, qui étaient tout à l'heure impossibles, acquièrent un sens; mais le problème rentre alors dans l'étude des fonctions qui auraient un point limite commun, au sens le plus général, et je ne veux pas entreprendre ici cette étude, bien qu'elle ne soit peut-être pas sans intérêt.

Tel serait le cas, par exemple, des fonctions

$$\varphi(z) = a \sin z, \quad \psi(z) = b \log(1 + z),$$

dans lesquelles l'origine est un point limite commun, soit pour elles, soit pour leurs fonctions inverses, suivant la grandeur des modules de  $a$  et de  $b$ .

#### IX. — Exemples.

17. Je choisirai le cas de

$$\varphi(z) = \sqrt{az^2 + c},$$

auquel se ramène le cas général de  $\sqrt{az^2 + 2bz + c}$ . En posant

$$x^2 = \frac{c}{1-a},$$

on peut écrire

$$\varphi(z) = \sqrt{x^2 + a(z^2 - x^2)}, \quad \text{d'où} \quad [\varphi(z)]^2 - x^2 = a(z^2 - x^2).$$

Les points  $\pm x$  sont deux points limites si, comme je le suppose,  $\text{mod } a < 1$ .

La fonction  $B(z)$  n'est autre que  $z^2 - x^2$ .

Les courbes d'égal module sont des cassinoides qui ont  $x$  et  $-x$  pour foyers. Les courbes d'égal argument sont formées d'un faisceau d'hyperboles équilatères passant par  $x$  et  $-x$ .

Parmi les cassinoides se trouve une lemniscate qui a son point double réel à l'origine. Les deux boucles  $O_M$  et  $O'_M$  de cette lemniscate entourent l'une le point  $x$ , l'autre le point  $-x$ ; chacune d'elles constitue l'ovale limite dont il a été parlé.

Tout du long de cette lemniscate on a

$$\text{mod}(z^2 - x^2) = \text{mod } x^2;$$

les cassinoïdes répondant à des valeurs de  $\mu = \text{mod}(z^2 - x^2)$  inférieures à  $\text{mod } x^2$  se composent de deux ovales  $O_\mu$  et  $O'_\mu$  entourant respectivement les points  $x$  et  $-x$ , et intérieurs aux boucles  $O_M, O'_M$ .

Pour les valeurs de  $k$  dont le module est inférieur à 1, l'équation

$$(7) \quad (Z^2 - x^2) = k(z^2 - x^2)$$

admet deux racines  $Z(z, k)$ ,  $Z'(z, k)$  situées respectivement à l'intérieur des ovales limites  $O_M$  et  $O'_M$ . Chacune de ces racines est fonction holomorphe de  $z$  dans ces ovales. La substitution  $S(k)$ , où  $\text{mod } k < 1$ , transforme la cassinoïde  $O_\mu$  en une cassinoïde intérieure, et  $x$  est un point limite pour  $Z(z, k)$ ,  $-x$  un point limite pour  $Z'(z, k)$ .

Si l'on pose l'équation fonctionnelle

$$\Xi_p(z) = \sqrt{a z^2 + c},$$

les  $p$  solutions holomorphes de cette équation sont données par la formule

$$\Xi(z) = \sqrt{a^{\frac{1}{p}} z^2 + \frac{c}{1-a} \left(1 - a^{\frac{1}{p}}\right)}.$$

Le symbole général d'itération est le suivant :

$$\varphi_\omega(z) = \sqrt{a^\omega z^2 + \frac{c}{1-a} (1 - a^\omega)}.$$

Pour chaque détermination de  $a^\omega$ , la fonction  $\varphi_\omega(z)$  est holomorphe dans la boucle  $O_M$  de la lemniscate.

18. Prenons plus généralement

$$\varphi(z) = \sqrt[m]{a z^m + c};$$

on mettra  $\varphi(z)$  sous la forme

$$\varphi(z) = \sqrt[m]{x^m + a(z^m - x^m)},$$

en posant

$$x^m = \frac{c}{1-a}.$$

Soient  $\varepsilon$  une racine primitive  $m^{\text{ième}}$  de l'unité, et  $x$  une valeur quelconque de  $\sqrt[m]{\frac{c}{1-a}}$ ; les points  $x, x\varepsilon, x\varepsilon^2, \dots, x\varepsilon^{m-1}$  sont tous des points ra-

cines de  $\varphi(z) - z$ ; en supposant  $\text{mod } a < 1$ , chacun de ces points est limite pour une branche de la fonction  $\varphi$ .

On a  $B(z) = z^m - x^m$ ; et la courbe d'égal module de  $B(z)$  qui passe par l'origine est représentée par l'équation

$$\text{mod}(z^m - x^m) = \text{mod } x^m;$$

c'est une rosace formée de  $m$  boucles entourant chacune l'un des  $m$  points  $x\varepsilon^n$ : soit  $R_n$  celle qui entoure le point  $x\varepsilon^n$ . Lorsque  $z$  est intérieur à l'une des boucles et que  $\text{mod } k < 1$ , l'équation en  $Z$

$$(7) \quad Z^m - x^m = k(z^m - x^m)$$

admet une racine dans chacune des boucles: soit  ${}_nZ$  celle qui est intérieure à  $R_n$ ; la fonction  ${}_nZ$  est holomorphe à l'intérieur de la boucle  $R_n$ . Chacune de ces boucles joue, par rapport au point  $x\varepsilon^n$  qu'elle entoure, le rôle d'ovale limite.

19. Donnons-nous maintenant

$$\varphi(z) = \sqrt[m]{az^m + c}, \quad \psi(z) = \sqrt[m']{az^{m'} + c'};$$

en appelant  $x$  et  $y$  deux racines quelconques des équations respectives

$$x^m = \frac{c}{1-a}, \quad y^{m'} = \frac{c'}{1-a},$$

et supposant, pour fixer les idées,  $\text{mod } a < 1$ , envisageons les boucles  $R$  et  $R'$  qui entourent les points  $x$  et  $y$  respectivement.

Dans l'intérieur de  $R$ , l'équation

$$(7) \quad Z^m - x^m = k(z^m - x^m)$$

définit une fonction holomorphe de  $z$  si  $\text{mod } k < 1$ ; si  $\text{mod } k > 1$ , l'holomorphisme a encore lieu, mais dans un ovale  $O_\mu$  intérieur à  $R$ .

La même chose a lieu pour l'équation

$$Z^{m'} - y^{m'} = k(z^{m'} - y^{m'})$$

dans la boucle  $R'$ . On voit que, puisque  $\text{mod } a < 1$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux fonctions holomorphes qui ont  $x$  et  $y$  pour points limites, de plus, la condition  $\varphi'(x) = \psi'(y)$  est remplie. On est donc sûr de trouver des fonctions holomorphes vérifiant l'équation

$$(D) \quad \Xi[\varphi(z)] = \psi[\Xi(z)].$$

Ces fonctions seront données par l'équation

$$V^{m'} - y^{m'} = k(z^m - x^m)$$

ou

$$(\mu) \quad V^{m'} - \frac{c'}{1-\alpha} = k \left( z^m - \frac{c}{1-\alpha} \right).$$

Lorsque  $\text{mod } \xi < \text{mod } y^{m'}$ , l'équation

$$V^{m'} - y^{m'} = \xi$$

n'a qu'une seule racine dans l'intérieur de la boucle  $R'$ .

Donc, lorsque l'on aura

$$\text{mod } k(z^m - x^m) \leq \text{mod } y^{m'},$$

c'est-à-dire dans l'intérieur d'un ovale intérieur à  $R$  et convenablement petit, l'équation  $(\mu)$  définira une fonction holomorphe  $V(z, k)$ . Cette fonction vérifie l'équation (D), on le constate sans peine.

20. Je terminerai par le cas d'une substitution linéaire <sup>(1)</sup>. Ce cas est simple, mais il fournit un rapprochement intéressant. On sait quel parti M. Poincaré a tiré, dans ses recherches des cercles qui passent par les points doubles de la substitution, et du faisceau des cercles orthogonaux. Or, si  $x$  et  $x'$  sont les points doubles de la substitution, on sait que celle-ci peut être mise sous la forme

$$\frac{Z - x}{Z - x'} = k \frac{z - x}{z - x'}.$$

Donc  $B(z) = (x - x') \frac{z - x}{z - x'}$ . Les courbes d'égal module de  $B(z)$  ne sont autres que les cercles, lieu des points dont les distances à  $x$  et à  $x'$  sont dans un rapport donné: les courbes d'égal argument sont au contraire les cercles qui passent par  $x$  et  $x'$ . Le rôle important que jouent ces cercles dans la représentation des substitutions linéaires induit donc à penser que les courbes d'égal module et d'égal argument de la fonction  $B(z)$  pourraient être introduites avec utilité dans l'étude de substitutions quelconques; j'ai essayé d'en fournir ici une première justification.

---

<sup>(1)</sup> Les équations d'où dépend la division des fonctions circulaires ou elliptiques présentent encore un exemple étendu dans lequel la fonction  $B(z)$  est connue, et où l'on peut, par conséquent, former explicitement les équations  $(\lambda)$ ,  $(\mu)$ ,  $(\lambda')$ ,  $(\mu')$ .