Annales scientifiques de l'É.N.S.

Gomes Teixeira

Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 321-324

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__321_0>

SUR LE

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS

SATISFAISANT

A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE,

PAR M. GOMES TEIXEIRA,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE COIMBRE ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PORTO.

La série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

où a_0, a_1, a_2, … représentent des fractions réduites à leur plus simple expression, ne peut pas être le développement d'une fonction définie par une équation algébrique relativement à x, y et y' à coefficients entiers

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2}$$

s'il existe une valeur de n déterminée à partir de laquelle les dénominateurs de a_{n+1}, a_{n+2}, … contiennent des facteurs premiers supérieurs respectivement à $n+1$, $n+2$, $n+3$, ….

On peut tirer ce théorème de la formule suivante, qui résulte de l'expression analytique de la dérivée d'ordre n des fonctions composées, et qui donne la dérivée d'ordre n de la fonction y (*Journal de Battaglini*, t. XVIII):

$$\sum \frac{(y')^{\alpha}(y'')^{\beta}(y''')^{\gamma}\ldots(y^{(n-1)})^{\lambda}(y'')^{\alpha'}(y''')^{\beta'}\ldots(y^{(n-1)})^{\omega'}(y^{(n)})^{\lambda'}}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,\alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'!\,(2!)^{\beta+\beta'}(3!)^{\gamma+\gamma'}\ldots(n-1!)^{\lambda+\lambda'}\alpha''!}\,\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c} = 0. \tag{3}$$

Dans cette équation la somme Σ se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma+\ldots+(n-1)\lambda+\alpha'+2\beta'+3\gamma'+\ldots \\ \qquad\qquad +(n-1)\lambda'+\alpha''=n-1, \end{cases}$$

et l'on a posé

$$(5)\quad \begin{cases} m=\alpha+\beta+\ldots+\lambda+\alpha'+\beta'+\ldots+\lambda'+\alpha'', \\ a=\alpha+\beta+\ldots+\lambda, \quad b=\alpha'+\beta'+\ldots+\lambda', \quad c=\alpha''. \end{cases}$$

Nous avons donc

$$\sum \frac{(2!)^{\alpha'}3^{\beta'}4^{\gamma'}\ldots n^{\lambda'}(y')^{\alpha}\left(\frac{y''}{2!}\right)^{\beta+\alpha'}\ldots\left(\frac{y^{(n-1)}}{n-1!}\right)^{\lambda+\omega'}\left(\frac{y^{(n)}}{n!}\right)^{\lambda'}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!\alpha'!\beta!\ldots\lambda'!\alpha''!}\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c}=0$$

ou, en séparant le terme qui contient $y^{(n)}$,

$$\sum \frac{(2!)^{\alpha'}3^{\beta'}4^{\gamma'}\ldots(n-1)^{\omega'}(y')^{\alpha}\left(\frac{y''}{2!}\right)^{\beta+\alpha'}\ldots\left(\frac{y^{(n-1)}}{n-1!}\right)^{\lambda+\omega'}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!\alpha'!\beta'!\ldots\lambda'!\alpha''!}\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c}+n\frac{dF}{dy'}\frac{y^{(n)}}{n!}=0.$$

Si l'on pose maintenant $x=0$ dans cette formule, on obtient une autre formule qui donne les valeurs de $y'_0, \frac{y''_0}{2!}, \ldots \frac{y_0^{(n)}}{n!}$, qui doivent coïncider avec les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la série proposée.

On voit par cette formule que le dénominateur de $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$ ne peut contenir que les facteurs premiers suivants:

1° Ceux qui résultent du dénominateur

$$\alpha!\,\beta!\ldots\lambda!\,\alpha'!\,\beta'!\ldots\lambda'!\,\alpha''!;$$

2° Ceux qui résultent du dé ,minateur de

$$\left(\frac{d^m F}{dx^a\,dy^b\,dy'^c}\right)_{x=0};$$

3° Ceux qui résultent du numérateur de

$$\left(\frac{dF}{dy'}\right)_{x=0};$$

4° Ceux qui résultent des dénominateurs de $y'_0, \frac{y''_0}{2!}, \ldots, \frac{y_0^{(n-1)}}{n-1!}$;

5° Ceux qui résultent de n.

Nous allons voir que les facteurs premiers correspondant aux trois premiers cas n'augmentent pas indéfiniment avec n.

I. Comme la fonction $F(x, y, y')$ est entière par rapport à x, y et y', les dérivées de cette fonction d'ordre supérieur à son degré sont nulles, et par conséquent m ne peut pas augmenter indéfiniment. Donc les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \alpha', \beta', \ldots \lambda', \alpha''$, dont la somme est égale à m, ne peuvent augmenter indéfiniment, ni par conséquent leurs facteurs premiers.

II. La dérivée

$$\left(\frac{d^m F}{dx^a\, dy^b\, dy'^c}\right)_{x=0},$$

qui est fonction entière de y_0 et y'_0 et, par conséquent, de a_0 et a_1, ne peut contenir évidemment en dénominateur que les facteurs premiers qui entrent dans les dénominateurs de a_0 et a_1.

III. La dérivée $\left(\frac{dF}{dy'}\right)_{x=0}$, qui est une fonction entière à coefficients entiers de a_0 et a_1, est une fraction déterminée, et ne peut donc contenir en numérateur des facteurs premiers qui augmentent indéfiniment.

On voit donc que les facteurs premiers du dénominateur de $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$ ou a_n ne peuvent augmenter indéfiniment que par suite de la présence du facteur n du cinquième cas, et nous avons donc le théorème énoncé.

Exemple. — La fonction définie par la série

$$1 + \frac{x}{2!\,2} + \frac{x^2}{3!\,3} + \ldots + \frac{x^n}{n+1!\,n+1}$$

ne peut pas satisfaire à une équation $F(x, y, y') = 0$ algébrique par rapport à x, y et y', parce que le coefficient $\frac{1}{n+1!\,n+1}$ de x^n peut contenir des facteurs premiers supérieurs à n.

Donc la fonction correspondante

$$\frac{\int \frac{e^x}{x} dx + \log x}{x}$$

ne peut satisfaire à une équation algébrique en x, y et y'. Elle est donc différente des fonctions algébriques, logarithmiques, circulaires, etc.