ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. MÉRAY

**Décomposition des polynomes entiers à plusieurs variables en élément linéaires**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 2 (1885), p. 289-302

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__289_0>

# DÉCOMPOSITION

DES

# POLYNOMES ENTIERS A PLUSIEURS VARIABLES

## EN ÉLÉMENTS LINÉAIRES,

PAR M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. L'intervention des valeurs particulières de $x$, qui annulent un polynôme entier par rapport à cette variable, permet de le décomposer complètement en facteurs du premier degré qu'annulent séparément les diverses valeurs dont il s'agit. Cette proposition est connue de temps pour ainsi dire immémorial, c'est même sur elle que roule toute l'analyse des équations entières; mais on ignore absolument ce qui peut exister de semblable pour les polynômes à plus d'une variable indépendante. Je me propose de combler cette lacune en exécutant sur ces polynômes une décomposition tout à fait analogue. Elle fournira peut-être de nouvelles ressources à leur théorie, ainsi qu'à celle des lignes et des surfaces algébriques.

2. Un polynôme entier $f(x_0, y_0, \ldots)$ de degré $m$ aux $p$ variables indépendantes $x_0, y_0, \ldots$ est exactement déterminé à un facteur constant près, quand on connaît $M = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1.2\ldots p} - 1$ systèmes de valeurs particulières de variables, savoir

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & \ldots, \\ x_2, & y_2, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_M, & y_M, & \ldots, \end{matrix}$$

qui le réduisent à zéro. Effectivement, les M équations de condition

$$\begin{gathered} f(x_1, y_1, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(x_M, y_M, \ldots) = 0 \end{gathered}$$

sont linéaires et homogènes par rapport aux $M+1$ coefficients de $f(x_0, y_0, \ldots)$ et, en les supposant, bien entendu, distinctes les unes des autres, leur résolution fournit les valeurs de ces coefficients, ou plutôt des quantités qui leur sont proportionnelles, qui, substituées dans $f$, donnent immédiatement

$$f(x_0, y_0, \ldots) = a\,\delta_p^{(m)},$$

si, pour abréger, on pose

$$\delta_p^{(m)} = \begin{vmatrix} x_0^m & x_0^{m-1}y_0 & \ldots & y_0^m & \ldots \\ x_1^m & x_1^{m-1}y_1 & \ldots & y_1^m & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_M^m & x_M^{m-1}y_M & \ldots & y_M^m & \ldots \end{vmatrix};$$

$\delta_p^{(m)}$ est un déterminant d'ordre $M+1$ dont la ligne d'indice $i$ a pour éléments les divers monômes entiers en $x_i, y_i, \ldots$, dont les degrés sont égaux ou inférieurs à $m$.

Pour donner aux calculs plus de régularité et d'élégance, j'introduirai une variable supplémentaire $t_0$ et, au lieu de $f(x_0, y_0, \ldots)$, je considérerai la fonction $F(x_0, y_0, \ldots, t_0) = t_0^m f\left(\frac{x_0}{t_0}, \frac{y_0}{t_0}, \cdots\right)$, qui est homogène et de degré $m$, en $x_0, y_0, \ldots, t_0$. On aura de cette manière

$$F(x_0, y_0, \ldots, t_0) = A\,\Delta_p^{(m)},$$

où A est toujours une constante indéterminée et où $\Delta_p^{(m)}$ représente le déterminant d'ordre $M+1$, dont la ligne d'indice $i$ est formée par les monômes entiers de degrés $m$ en $x_i, y_i, \ldots, t_i$.

Pour revenir de $\Delta_p^{(m)}$ à $\delta_p^{(m)}$, il suffira d'y poser $t_0 = t_1 = \ldots = t_M = 1$.

Il est bon de noter la signification des équations

$$\delta_p^{(m)} = 0, \quad \Delta_p^{(m)} = 0.$$

La première exprime que les $M+1$ systèmes particuliers de valeurs que représentent les lettres $x, y, \ldots$, affectées successivement des indices o, 1, 2, ..., M, satisfont indistinctement à une même équation entière de degré $m$ en $x, y, \ldots$. La seconde exprime la même chose en formules homogènes.

3. Je me bornerai à l'examen complet du cas le plus simple de la question après celui de $p = 1$, sur lequel il n'y a plus rien à dire. Je supposerai donc $p = 2$, $m = 2$, d'où $M = 5$, ce qui montrera suffisamment comment les choses se passent dans tout autre cas, sans que nous entrions dans les complications d'une démonstration tout à fait générale.

Le déterminant $\Delta_2^{(2)}$ est alors du sixième ordre, et je le disposerai ainsi

$$(1) \qquad \Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} x_0^2 & y_0^2 & z_0^2 & y_0 z_0 & z_0 x_0 & x_0 y_0 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5 z_5 & z_5 x_5 & x_5 y_5 \end{vmatrix}.$$

Cela posé, en écrivant généralement, pour abréger,

$$\begin{vmatrix} x_h & y_h & z_h \\ x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \end{vmatrix} = |hij|,$$

la décomposition du polynôme $\Delta_2^{(2)}$ que nous avons en vue est fournie par le théorème suivant :

*Si, à l'expression*

$$(2) \qquad |012|\,|054|\,|513|\,|432|$$

*on ajoute celles non identiques à elle ni entre elles-mêmes prises deux à deux (les dix-huit quantités $x_0, y_0, z_0, x_1, \ldots, z_5$ étant considérées comme autant de variables indépendantes) qui s'en déduisent par toutes les permutations possibles des six indices* o, 1, 2, ..., 5, *chacune de ces nouvelles expressions ayant été préalablement pourvue du signe + ou du signe —, selon que la permutation correspondante équivaut à un groupe de transpositions de deux indices en nombre pair ou impair, on reproduit précisément* $4\Delta_2^{(2)}$.

I. Chaque facteur de l'expression (2) est un déterminant qui change simplement de signe quand on transpose deux indices dans le *terne* qui constitue sa notation, et l'expression elle-même n'éprouve d'autre modification qu'une multiplication par $-1$. On peut donc, sans l'altérer, permuter arbitrairement les indices, mais à l'*intérieur* de tels ou tels des quatre ternes de sa notation, pourvu que le nombre total des transpositions de deux indices ainsi effectuées soit un nombre pair. Il en résulte ainsi, pour l'expression considérée, un très grand nombre de notations qui sont équivalentes en réalité, bien que distinctes en apparence, et dont il importe de retenir la possibilité.

II. Chacun des indices d'un même terne de la notation (2) se retrouve encore dans un seul des trois autres ternes, accompagné de deux autres indices; le sixième indice, qui ne figure ainsi ni dans le terne considéré, ni dans cet autre, est ce que j'appellerai l'*opposé* de cet indice.

Relativement à l'expression (2), nos six indices ne s'opposent ainsi deux à deux que d'une seule manière : 0 à 3, 1 à 4 et 2 à 5. J'appellerai *caractéristique* de cette expression la notation

$$[03][14][25] \tag{3}$$

indiquant entre ses indices cette relation combinatoire spéciale. Il faut naturellement y faire abstraction de l'ordre dans lequel deux indices opposés sont écrits dans chaque *ambe* et aussi de celui dans lequel ces trois ambes se succèdent.

Deux indices opposés ne figurent jamais simultanément dans un même terne de l'expression (2); mais deux indices non opposés quelconques se rencontrent toujours à la fois dans quelqu'un de ces quatre ternes.

III. La transposition de deux indices opposés change l'expression (2); mais, en tenant compte de l'observation (I), on aperçoit immédiatement qu'une seconde transposition de deux indices opposés dans la nouvelle expression ainsi obtenue régénère l'expression primitive (2). Il en résulte que des transpositions quelconques de deux indices opposés laissent l'expression (2) invariable ou bien la modifient, mais alors toujours de la même manière, selon qu'elles sont en nombre pair ou impair.

IV. Des transpositions d'indices opposés laissent la caractéristique invariable; d'autre part, deux expressions analogues à (2) sont évidemment distinctes quand leurs caractéristiques sont différentes. De cette observation combinée avec la précédente (III), on conclut que toutes les permutations possibles des indices donnent à l'expression (2) des valeurs distinctes dont le nombre total est le double de celui des caractéristiques différentes, que l'on peut construire avec nos six indices.

On peut déduire chaque caractéristique de quelque permutation des nombres 0, 1, ..., 5 dans laquelle on associe le premier au second, le troisième au quatrième et le cinquième au sixième; mais, comme une caractéristique donnée reste équivalente à elle-même, quand on y permute soit les trois ambes de deux indices opposés, soit les deux indices opposés dans chaque ambe, ce qui donne $(1.2.3)\times 2^3 = 48$ manières de l'écrire; les $1.2...6$ permutations des six indices fourniront quarante-huit fois la même caractéristique. Le nombre total des caractéristiques distinctes est donc $\frac{720}{48} = 15$ et celui des valeurs différentes de l'expression (2) $15.2 = 30$.

Il convient d'associer par la pensée les deux valeurs de l'expression (2) qui ont une même caractéristique: nous les dirons *opposées*.

A une caractéristique correspondent huit ternes d'indices propres *individuellement* à figurer dans quelque valeur de l'expression (2); mais, parmi les combinaisons de ces ternes associés par quatre, deux seulement peuvent fournir la notation de l'une d'elles. On passe d'une combinaison à l'autre en remplaçant chaque indice par son opposé. Comme cette substitution contient trois transpositions de deux indices, les deux valeurs correspondantes de l'expression (2) qui sont évidemment opposées sont toujours précédées de signes contraires dans la sommation à faire d'après notre énoncé.

V. Nous avons à déterminer celles des substitutions de nos six indices qui laissent l'expression (2) invariable.

Le nombre total des substitutions possibles étant $1.2...6 = 720$, et l'expression (2) n'ayant que 30 valeurs distinctes (IV), le nombre des substitutions dont il s'agit est $\frac{720}{30} = 24$, et il n'y a pas à les chercher ailleurs que parmi celles qui n'altèrent pas la caractéristique.

On trouve ainsi, en décomposant ces substitutions en cycles :

A. Une substitution identique

$$(0)(1)(2)(3)(4)(5).$$

B. Trois substitutions

$$(1\,4)(2\,5),\ (2\,5)(0\,3),\ (0\,3)(1\,4)$$

composées chacune de deux transpositions distinctes d'indices opposés (III).

C. Six substitutions se résolvant chacune en deux transpositions déplaçant, l'une, deux indices non opposés, l'autre, leurs opposés; telles sont :

$$(1\,2)(4\,5),\ (1\,5)(4\,2),\ (0\,2)(3\,5),\ \ldots.$$

D. Huit substitutions composées chacune d'une permutation circulaire de trois indices, dont deux quelconques ne sont pas opposés, et de la permutation circulaire semblable des trois indices qui leur sont respectivement opposés; telles sont :

$$(0\,1\,2)(3\,4\,5),\ (0\,2\,1)(3\,5\,2),\ \ldots.$$

E. Six substitutions dont chacune contient une transposition de deux indices opposés et une permutation circulaire des quatre autres, laissant intacts les ambes qu'ils forment dans la caractéristique; par exemple,

$$(0\,3)(1\,2\,4\,5),\ (0\,3)(1\,5\,4\,2),\ \ldots.$$

On trouve bien ainsi les $1+3+6+8+6=24$ substitutions dont nous avons parlé. On notera que chacune d'elles équivaut à un groupe de transpositions dont le nombre est essentiellement pair.

VI. Chaque terme de l'un quelconque des quatre déterminants du troisième ordre servant de facteurs à l'expression (2) est le produit de trois quantités qui se notent par les lettres $x$, $y$, $z$, affectées respectivement de trois indices différents. Comme un même indice quelconque se retrouve précisément deux fois dans la notation de cette expression, chaque terme de son développement qui est le produit de quatre termes empruntés respectivement au développement des quatre déterminants est évidemment le produit de six éléments du déterminant (1) appartenant aux six lignes de son tableau.

De ces termes, les uns contiennent comme facteurs deux éléments du déterminant (1) ou plus, appartenant à une même colonne de son tableau. Il est évident qu'ils se détruisent les uns les autres dans la sommation des valeurs distinctes de l'expression (2) que nous affectons de signes alternés. Effectivement, chacun d'eux reste invariable quand on y transpose les indices de deux de ses facteurs appartenant ainsi à une même colonne du déterminant (1). Il y en a donc un semblable dans le développement de celle des valeurs de l'expression (2) qui en naît par la transposition, dans sa notation, des deux indices considérés. Et la destruction de ces deux termes résulte de ce que la règle formulée dans notre énoncé impose le signe — à cette seconde valeur de l'expression (2).

Il résulte de cette observation que, dans la sommation des développements des valeurs distinctes de l'expression (2), qu'il faut pourvoir de signes alternés, il y a seulement à considérer les termes ayant pour facteurs six éléments du déterminant (1) tombant respectivement dans ses six colonnes, c'est-à-dire ceux qui sont semblables aux termes mêmes de ce déterminant. Pour faciliter le langage, je les nommerai les termes *utiles* du développement de l'expression (2) et de ses autres valeurs.

VII. On obtient au signe près un terme du développement de l'expression (2) en écrivant successivement et dans le même ordre les douze indices de sa notation, puis, au-dessus des quatre ternes qu'ils forment, quatre permutations quelconques (distinctes ou non) des trois lettres $x$, $y$, $z$, affectant ensuite chaque lettre de l'indice qu'elle surmonte, puis finalement en formant le produit des douze quantités dont les notations ont été ainsi construites simultanément. J'appellerai le signe ainsi constitué le *schéma* de terme considéré.

Inversement, il est clair que tout terme de ce développement peut être obtenu à l'aide d'un pareil procédé. Quant au signe à lui donner, il suffira, pour le découvrir, de compter le nombre total de transpositions de deux lettres qu'il faut exécuter à l'*intérieur* de chacun des quatre ternes de son schéma (les indices restant, bien entendu, immobiles) pour ramener ces douze lettres à se présenter successivement dans l'ordre $xyz\,xyz\,xyz\,xyz$; le signe en question sera $+$ si ce nombre de transpositions est pair, $-$ s'il est impair.

Un terme utile du développement de l'expression (2) est le produit des six facteurs quadratiques dont on obtient les notations en affectant convenablement des six indices 0, 1, ..., 5 les monômes $x^2$, $y^2$, $z^2$, $yz$, $zx$, $xy$. Il est évident que ce développement ne peut contenir d'autres termes utiles que ceux dont les facteurs carrés sont affectés d'indices figurant tous trois simultanément dans quelqu'un des quatre ternes de la notation (2').

Parmi ces termes utiles, nous appellerons *réguliers* ceux où les monômes $x^2$ et $yz$ sont affectés d'indices opposés, ainsi que $y^2$ et $zx$, $z^2$ et $xy$. Tous ces termes existent, et une fois seulement chacun, dans le développement de l'expression (2); car, l'un d'eux étant donné, il faut, de toute nécessité, pour construire son schéma, écrire $x, y, z$ dans un ordre convenable au-dessus du terne des indices des facteurs carrés, les répéter ensuite dans les trois autres ternes au-dessus des mêmes indices, puis enfin, dans chacun de ces trois ternes, permuter au-dessus de ses deux indices encore dépourvus de lettres celles qui surmontent leurs opposés dans le premier terne.

C'est ainsi que l'on obtient le schéma

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\,\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}\,\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}\,\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

du terme régulier

$$(5)\qquad x_0^2 y_1 z_2^2 (y_3 z_3)(z_4 x_4)(x_5 z_5),$$

dans les facteurs carrés duquel les lettres $x$, $y$, $z$ sont affectées des indices du terne $|0\ 1\ 2|$, et aussi

$$\begin{vmatrix} z & x & y \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}\,\begin{vmatrix} z & x & y \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}\,\begin{vmatrix} x & z & y \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}\,\begin{vmatrix} y & x & z \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

schéma du terme régulier où, dans les facteurs carrés, les mêmes lettres portent les indices 5, 4, 0.

Il est évident qu'en exécutant sur les indices du schéma d'un terme régulier (les lettres restant immobiles) l'une des substitutions qui laissent l'expression (2) invariable (V), on obtient encore celui d'un terme régulier, et, d'autre part, qu'une substitution de cette espèce, convenablement choisie, permettra toujours de transformer l'un dans l'autre les schémas de deux termes réguliers pris à volonté dans le développement de l'expression (2).

On en conclut que le nombre des termes réguliers de ce développement est précisément égal à celui des substitutions dont il s'agit, c'est-à-dire à vingt-quatre. Il serait facile de s'en assurer directement.

VIII. Le développement de l'expression (2) contient encore, avec chacun de ses termes réguliers, trois termes utiles *irréguliers* que nous appellerons ses *compagnons;* ce sont ceux dont la notation se déduit de celle du terme régulier en question par une transposition de deux indices, affectant des facteurs quadratiques non carrés parfaits.

Par exemple,

$$(6)\qquad \begin{cases} x_0^2 y_1^2 z_2^2 (y_3 z_3)(z_5 x_5)(x_4 y_4), \\ x_0^2 y_1^2 z_2^2 (y_5 z_5)(z_4 x_4)(x_3 y_3), \\ x_0^2 y_1^2 z_2^2 (y_4 z_4)(z_3 x_3)(x_5 z_5) \end{cases}$$

sont les compagnons du terme régulier (5).

Il est facile de déduire du schéma d'un terme régulier donné celui de tel ou tel de ses compagnons. Il suffit effectivement de chercher, dans ce compagnon, le facteur quadratique non carré dont l'indice est le même que dans le terme régulier, de prendre le facteur carré qui porte l'indice opposé, puis, dans celui des ternes du schéma du même terme régulier qui contient simultanément les indices opposés à ceux des deux autres facteurs carrés, de transposer les lettres surmontant ces indices.

L'application de cette règle au schéma (4) du terme régulier (5) fournit bien celui du premier de ses compagnons (6), qui est

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & z & y \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Il est évident que le développement de l'expression (2) ne contient d'autres termes utiles que les 24 réguliers ci-dessus considérés (VII), et leurs $24 . 3 = 72$ compagnons irréguliers, soit, au total, 96 termes utiles.

IX. Dans le développement de l'expression (2), les termes utiles sont précédés des mêmes signes que dans celui du déterminant (1).

Considérons en premier lieu les termes réguliers. Il est clair que deux quelconques sont précédés d'un même signe dans le développement de l'expression (2), puisqu'on passe du schéma de l'un au schéma de l'autre par une substitution d'indices qui ne change pas cette expression (VII). Ils sont aussi précédés d'un même signe dans le développement du déterminant (1), parce qu'une substitution de cette espèce équivaut essentiellement à un nombre pair de transpositions (V). Mais ces deux signes sont identiques : effectivement, le terme régulier (5), auquel son schéma (4) assigne le signe + dans le développement de l'expression (2) (VII) a aussi le signe + dans le développement du déterminant (1), parce qu'il en est le terme principal.

Considérons, en second lieu, les termes irréguliers. Chacun d'eux a le signe — dans le développement de l'expression (2), parce que le terme régulier dont il est le compagnon y a le signe + et que le schéma du terme irrégulier se déduit de celui du terme régulier par une (nombre impair) transposition de deux lettres au-dessus d'un seul terne (VIII) (VII). Or, il a le même signe — dans le développement du déterminant (1), parce que sa notation se déduit aussi par une (nombre impair) transposition d'indices, de celle du même terme régulier que nous savons y être précédée du signe +.

X. Dans le développement de toute autre valeur de l'expression (2), les termes utiles sont aussi précédés des signes qu'ils ont dans celui du déterminant (1). En effet, la substitution d'indices qui change l'expression (2) en celle dont il s'agit laisse évidemment utiles les termes qui l'étaient avant elle ; en outre, la règle posée dans notre énoncé pour la sommation des diverses valeurs de cette expression conserve à ces termes leurs anciens signes, ou bien les change, selon que cette substitution équivaut à un nombre pair ou impair de transpositions. Comme les choses se passent de même dans le développement de (1) à cause de la loi fondamentale de formation des déterminants, il est clair que la correspondance de signes des termes utiles que nous avons constatée ci-dessus (IX) est nécessairement conservée par la substitution considérée.

XI. Ainsi, dans la sommation prescrite par notre énoncé, les termes qui ne se détruisent pas sont individuellement identiques à ceux du déterminant (1), et il est évident que chacun d'eux s'y répète le même nombre de fois.

La somme en question comprenant 30 expressions analogues à (2) (IV) dont chacune possède 96 termes utiles, en contient par suite $96 \times 30 = 2880$. Le déterminant (1) en contient, lui, $1.2 \ldots 6 = 720$. Le nombre de ces répétitions est donc $\frac{2880}{720} = 4$, ce qui achève la démonstration de notre théorème.

On peut, au surplus, retrouver ce nombre 4 d'une autre manière, en cherchant combien de valeurs de l'expression (2) contiennent dans leurs développements, soit comme régulier, soit comme irrégulier, un terme donné du déterminant (1).

4. L'induction permet d'étendre le théorème à toutes les valeurs des entiers $p$, $m$. Par exemple, pour $p = 2$, $m = 3$, la décomposition de $\Delta_2^{(3)}$ s'obtient, sauf un facteur numérique, en sommant les valeurs distinctes de l'expression

$$(7) \qquad |0\,1\,2|.|0\,5\,4|.|5\,1\,3|.|4\,3\,2|.|0\,6\,7|.|1\,6\,8|.|2\,6\,9|.|3\,7\,8|.|4\,7\,9|.|5\,8\,9|$$

précédées chacune du signe + ou du signe —, selon la parité ou l'imparité du nombre des transpositions dont l'ensemble équivaut à la substitution d'indices dont elle dérive.

En posant encore

$$\begin{vmatrix} x_h & y_h & z_h & t_h \\ x_i & y_i & z_i & t_i \\ x_j & y_j & z_j & t_j \\ x_k & y_k & z_k & t_k \end{vmatrix} = |h\,i\,j\,k|,$$

la décomposition de $\Delta_3^{(2)}$ résulte, à quelque facteur numérique près, de la sommation faite en suivant la même règle pour l'attribution des signes, des valeurs distinctes de

$$|0\,1\,2\,3|.|0\,4\,5\,6|.|1\,4\,9\,8|.|2\,9\,5\,7|.|3\,8\,7\,6|.$$

Les éléments ultimes d'une pareille décomposition sont des déterminants d'ordre $p + 1$, parmi lesquels ceux dont la notation contient l'indice o sont seuls variables. Il est clair que chacun de ces derniers est une simple fonction linéaire des variables, qui s'annule pour quelques-uns des systèmes de valeurs annulant la fonction considérée que l'on a fait servir à l'opération.

5. Cette décomposition de la forme quelconque $F(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ en éléments linéaires est l'équivalent, avons-nous dit, de celle d'une forme binaire en facteurs (que l'on réaliserait, d'ailleurs, à l'aide du même mécanisme). Pour les formes binaires, ces facteurs sont des déterminants du second ordre; pour les autres, les éléments linéaires sont des déterminants d'ordre commun égal au nombre des variables. Ce fait est conforme aux analogies que fournit la Géométrie : les éléments des espaces rectilinéaire, plan, solide sont les segments rectilignes, les triangles, les tétraèdres, qui, en coordonnées rectilignes, correspondent à des déterminants d'ordres 2, 3, 4.

La seule différence entre les formes binaires et les autres, au point de vue de leur décomposition en éléments linéaires, est qu'elle est possible d'une infinité de manières pour celles-ci, tandis qu'elle ne l'est que d'une seule pour les premières. En outre, les éléments se multiplient mutuellement pour les premières, alors que pour les autres ils se combinent par voie et de multiplication et d'addition. Mais, à certains égards, une pareille combinaison peut être considérée comme l'extension de la multiplication à des assemblages de quantités.

L'analogie ne s'arrête pas là. Appelons, pour un instant, un déterminant tel que $\Delta_p^{(m)}$ le *solidarisant* des $\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1.2\ldots p}$ systèmes de valeurs des variables figurant dans ses diverses lignes, pour rappeler la propriété de l'équation obtenue en l'égalant à zéro, que ces systèmes annulent tous une même forme de degré $m$ à $p$ variables; les éléments linéaires dans lesquels nous avons décomposé la forme sont précisément les solidarisants de ces systèmes associés $p+1$ à $p+1$. Mais, dans le résultat de la décomposition, on peut aussi mettre en évidence les solidarisants de ces systèmes associés en groupes de $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+p)}{1.2\ldots p}$, $\mu$ étant un entier quelconque inférieur à $p$. Par exemple, si l'on somme seulement les valeurs de l'expression (7), dont la formation ne comporte que des permutations dans le groupe

(0 1 2 3 4 5) avec d'autres intéressant l'autre groupe (6 7 8 9), on en obtient une partie qui est exactement divisible par le solidarisant des $\frac{(2+1)(2+2)(2+3)}{1.2.3} = 6$ premiers systèmes.

Ces autres décompositions de $\Delta_p^{(m)}$ correspondent tout à fait à l'opération consistant à concevoir un produit ordinaire de plusieurs facteurs comme résultant de la multiplication du produit effectué de quelques-uns d'entre eux par le produit des autres.

6. Nous avons résolu en éléments linéaires la forme F de degré $m$ à $p+1$ variables au moyen de $\frac{(m+1)(m+2)\dots(m+p)}{1.2\dots p} - 1$ des systèmes *distincts* de valeurs de variables qui l'annulent. Mais on peut en faire intervenir un nombre moindre, s'il arrive que quelques-uns sont *multiples*, c'est-à-dire annulent simultanément toutes les dérivées partielles de la forme jusqu'à un certain ordre.

Supposons, par exemple, que le système d'indice $i$ annule les $K = \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}{1.2\dots p}$ dérivées partielles d'ordre $k$ de F (et par suite aussi celles d'ordres moindres). On pourra remplacer par ce système unique de multiplicité K, K systèmes simples dont les indices seront, par exemple, $\alpha, \beta, \dots, \lambda$. Alors il faudra, dans $\Delta_p^{(m)}$, substituer aux lignes d'indices $\alpha, \dots, \lambda$ ce que devient la ligne $x^m, x^{m-1}, y, \dots, t^m$, quand on différentie simultanément tous ses éléments de K manières dont il s'agit, et qu'ensuite on y fait $x = x_i$, $y = y_i$, ..., $t = t_i$. Cela revient à différentier des K manières en question les K lignes d'indices $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ respectivement, et à y poser ensuite

$$x_\alpha = x_\beta = \dots = x_i, \quad y_\alpha = y_\beta = \dots = y_i, \quad t_\alpha = t_\beta = \dots = t_i.$$

Cette dernière opération, exécutée sur le résultat de la décomposition en éléments linéaires de $\Delta_p^{(m)}$ contenant encore les lignes distinctes d'indices $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, donnera pour F une décomposition dans laquelle un certain nombre d'éléments linéaires seront égaux entre eux et où, par suite, ils figureront à des degrés supérieurs au premier. C'est exactement ce qui se passe pour les formes binaires qui ont des facteurs multiples.

7. Je termine en donnant le développement de $4\Delta_2^{(2)}$ en ses 30 *ar-*

*ticles*. Pour plus de clarté, j'ai disposé sur quinze lignes différentes les quinze paires d'articles opposés (3, IV) en inscrivant en regard la caractéristique de chaque paire; et, pour faciliter l'impression, j'ai séparé par de simples points les ternes d'indices dans les articles et leurs ambes dans les caractéristiques.

On trouve

$$(8) \qquad 4\Delta_2^{(2)} = \left\{ \begin{array}{ll}
+\,034.052.531.214 - 125.143.420.305 & \quad 01.23.45 \\
+\,125.134.320.405 - 043.052.541.213 & \quad 01.24.35 \\
+\,123.145.420.503 - 045.032.351.214 & \quad 01.25.43 \\
+\,215.243.410.305 - 034.051.532.124 & \quad 02.13.45 \\
+\,043.051.542.123 - 215.234.310.405 & \quad 02.14.35 \\
+\,054.031.352.124 - 213.245.410.503 & \quad 02.15.43 \\
+\,325.341.420.105 - 014.052.513.234 & \quad 03.21.45 \\
+\,041.052.543.231 - 325.314.120.405 & \quad 03.24.15 \\
+\,054.012.153.234 - 321.345.420.501 & \quad 03.25.41 \\
+\,425.413.120.305 - 031.052.534.241 & \quad 04.23.15 \\
+\,013.052.514.241 - 425.431.320.105 & \quad 04.21.35 \\
+\,051.032.354.241 - 423.415.120.503 & \quad 04.25.13 \\
+\,521.543.420.301 - 034.012.135.254 & \quad 05.23.41 \\
+\,043.012.145.253 - 521.534.320.401 & \quad 05.24.31 \\
+\,014.032.315.254 - 523.541.420.103 & \quad 05.21.43
\end{array} \right.$$

L'équation $\Delta_2^{(2)} = 0$ représente la conique dont les points ont $x_0, y_0, z_0$ pour coordonnées courantes et qui passe par les cinq points qui ont pour coordonnées les mêmes lettres affectées des indices 1, 2, 3, 4, 5. En substituant à $\Delta_2^{(2)}$ le second membre de la formule (8), elle prend une forme sous laquelle elle exprime une relation spéciale entre les aires des triangles dont chacun a pour sommets une certaine combinaison de trois points du groupe formé par ces cinq et un quelconque de la courbe. L'aire d'un triangle est un *segment* du plan comme une longueur est un segment de droite. A ce titre, la relation dont il s'agit est comparable à la relation segmentaire exprimant qu'un point d'une droite fait partie d'un groupe de deux points donnés sur elle.