ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉDOUARD GOURSAT

Sur les différentielles des fonctions de plusieurs variables indépendantes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 255-288

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__255_0>

SUR LES

DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS

DE

PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES,

PAR M. E. GOURSAT,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

Dans son *Cours d'Analyse*, p. 64, M. Hermite a remarqué que, quand on développe le radical

$$\sqrt{1 + 2\alpha x + 2\alpha' y + \beta x^2 + 2\beta' xy + \beta'' y^2}$$

suivant les puissances de x et de y, le groupe homogène des termes du second degré entre en facteur dans le groupe homogène des termes du troisième degré et des degrés plus élevés. Cette remarque a été le point de départ d'un intéressant Mémoire de M. Darboux, publié dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2ᵉ série, t. V, p. 376-384 et 395-424), où l'auteur détermine toutes les fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes pour lesquelles la différentielle totale d'ordre $n+1$ est exactement divisible par la différentielle totale d'ordre n.

Comme l'indique M. Darboux lui-même (p. 412), ces recherches sont encore susceptibles de généralisations étendues. Dans le présent travail, je me suis proposé de *trouver toutes les fonctions d'un nombre quelconque* μ *de variables indépendantes telles que deux différentielles totales successives aient un facteur commun*, fonction entière et homogène des différentielles dx_1, dx_2, ..., dx_μ. Il est clair que la question résolue par M. Darboux n'est qu'un cas particulier de la précédente. Je traite d'abord le cas de deux variables indépendantes; le problème est alors susceptible d'une interprétation géométrique simple, qui conduit facilement à la solution complète. Les résultats sont ensuite étendus aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

1. Soit $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ une fonction de μ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$; la différentielle totale d'ordre n $d^n f$ est une fonction entière et homogène d'ordre n des différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_\mu$, dont les coefficients sont, à des facteurs numériques près, les dérivées d'ordre n de la fonction f. Nous dirons que cette différentielle est *irréductible* s'il est impossible de la décomposer en un produit de facteurs entiers et homogènes par rapport aux dx_i et de degré moindre. Dans le cas de deux variables indépendantes, $d^n f$ sera toujours le produit de n facteurs linéaires en dx_1, dx_2, égaux ou inégaux. S'il y a plus de deux variables, $d^n f$ sera en général irréductible.

Je désignerai, en général, par les lettres H et K des expressions de même forme que $d^n f$, c'est-à-dire des fonctions entières et homogènes des dx_i. On voit tout de suite ce qu'il faudra entendre quand on dira que $d^n f$ est divisible par un facteur H ou que $d^n f$ et $d^{n+1} f$ ont un facteur commun. Soit H ce facteur commun; on devra avoir

$$(1) \qquad \begin{cases} d^n f = \mathrm{HK}, \\ d^{n+1} f = \mathrm{HK}_1; \end{cases}$$

si l'on suppose que le facteur commun H soit d'un degré déterminé, l'élimination des coefficients inconnus qui entrent dans H, K, K_1 entre les différentes équations obtenues en écrivant que les deux membres des égalités précédentes sont identiques terme à terme, quels que soient les dx_i, conduira à un certain nombre de relations algébriques entre les dérivées partielles d'ordre n de la fonction f et les dérivées partielles d'ordre $n+1$. Il s'agit, en réalité, d'intégrer ce système d'équations aux dérivées partielles; mais la marche que j'ai suivie est tout à fait différente.

Je commencerai par démontrer le lemme suivant :

Lemme. — *Étant donnée une fonction f de μ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, si $d^n f$ contient un facteur multiple K^m, $d\mathrm{K}$ est divisible par* K.

Supposons que l'on ait

$$d^n f = \mathrm{HK}^m, \tag{2}$$

H et K étant des fonctions entières des dx_i, et H étant premier avec K. Désignons par H_1 et K_1 ce que deviennent H et K quand on y remplace dx_i par p_i, et posons

$$\varphi = \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^m; \tag{3}$$

H_1 et K_1 sont des fonctions entières et homogènes des p_i de degrés m_1 et m_2 respectivement, avec la condition

$$m_1 + m m_2 = n. \tag{4}$$

Pour que l'expression HK^m soit la différentielle $n^{\text{ième}}$ d'une fonction f, il faut et il suffit que les conditions

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial p_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \, \partial p_i} \tag{5}$$

soient identiquement satisfaites, quelles que soient les quantités p_i (*voir* le Mémoire de M. Darboux, p. 382). On aura

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_i} \mathrm{K}_1^m + m \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^{m-1} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial p_k} = {} & \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial x_i \, \partial p_k} \mathrm{K}_1^m + m \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_i} \mathrm{K}_1^{m-1} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_k} + m \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_k} \mathrm{K}_1^{m-1} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_i} \\ & + m \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^{m-1} \frac{\partial^2 \mathrm{K}_1}{\partial x_i \, \partial p_k} + m(m-1) \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^{m-2} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_k}; \end{aligned}$$

les conditions (5) deviennent

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathrm{K}_1^m \left(\frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial x_i \, \partial p_k} - \frac{\partial^2 \mathrm{H}_1}{\partial x_k \, \partial p_i} \right) + m \mathrm{K}_1^{m-1} \left(\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial x_k} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_i} \right) \\ & \quad + m \mathrm{K}_1^{m-1} \left(\frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_k} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial p_i} \right) + m \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^{m-1} \left(\frac{\partial^2 \mathrm{K}_1}{\partial x_i \, \partial p_k} - \frac{\partial^2 \mathrm{K}_1}{\partial x_k \, \partial p_i} \right) \\ & \quad\quad + m(m-1) \mathrm{H}_1 \mathrm{K}_1^{m-2} \left(\frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_k} - \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial x_k} \frac{\partial \mathrm{K}_1}{\partial p_i} \right) = 0. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Tous les termes, sauf le dernier, contiennent en facteur K_1^{m-1}. Comme, par hypothèse, m est > 1 et que K_1 ne peut être nul, quels que soient les p_i, il suit de là que

$$H_1\left(\frac{\partial K_1}{\partial x_i}\frac{\partial K_1}{\partial p_k}-\frac{\partial K_1}{\partial x_k}\frac{\partial K_1}{\partial p_i}\right)$$

devra être divisible par K_1. D'autre part, nous avons supposé H premier avec K et par suite H_1 premier avec K_1; il faudra donc que l'on ait

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_i}\frac{\partial K_1}{\partial p_k}-\frac{\partial K_1}{\partial x_k}\frac{\partial K_1}{\partial p_i}=K_1\Psi_i, \tag{7}$$

Ψ_i désignant une fonction entière des p_i. Dans la formule (7), laissons fixe l'indice k et faisons successivement $i=1, 2, \ldots, \mu$; on aura une suite de relations analogues à la précédente

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial K_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_k}-\dfrac{\partial K_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_1}=K_1\Psi_1,\\
\dfrac{\partial K_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_k}-\dfrac{\partial K_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_2}=K_1\Psi_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\dfrac{\partial K_1}{\partial x_\mu}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_k}-\dfrac{\partial K_1}{\partial x_k}\dfrac{\partial K_1}{\partial p_\mu}=K_1\Psi_\mu;
\end{array}\right. \tag{8}$$

multiplions ces formules respectivement par $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$ et ajoutons. Il vient, en tenant compte de ce que K_1 est une fonction homogène des p_i,

$$\frac{\partial K_1}{\partial p_k}\left(\frac{\partial K_1}{\partial x_1}p_1+\frac{\partial K_1}{\partial x_2}p_2+\ldots+\frac{\partial K_1}{\partial x_\mu}p_\mu\right)=K_1\Phi, \tag{9}$$

Φ étant une fonction entière des p_i. Nous pouvons toujours supposer que K est irréductible; alors K_1 sera premier avec $\dfrac{\partial K_1}{\partial p_k}$; par suite

$$\frac{\partial K_1}{\partial x_1}p_1+\frac{\partial K_1}{\partial x_2}p_2+\ldots+\frac{\partial K_1}{\partial x_\mu}p_\mu$$

est divisible par K_1. En remplaçant p_i par dx_i, on en conclut que

$$\sum_{i=1}^{i=\mu}\frac{\partial K}{\partial x_i}dx_i=dK$$

est divisible par K. C. Q. F. D.

Il est facile de voir que cela est encore vrai, alors même que K ne serait pas supposé irréductible.

Corollaire. — Si la différentielle $n^{\text{ième}}$ est exactement divisible par un facteur multiple, la différentielle $n+1^{\text{ième}}$ sera exactement divisible par le même facteur, ainsi que les différentielles d'ordre plus élevé.

Soit

$$d^n f = \text{H}\,\text{K}^m,$$

on aura

$$d^{n+1} f = d\text{H}\,\text{K}^m + m\,\text{H}\,\text{K}^{m-1}\,d\text{K}.$$

Comme $d\text{K}$ est divisible par K, d'après ce qui vient d'être démontré, $d^{n+1}f$ sera divisible par K^m; on démontrera ensuite qu'il en est de même de $d^{n+2}f$, $d^{n+3}f$, ...

De ce qui précède, résulte immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si $d^n f$ et $d^{n+1} f$ sont divisibles par un même facteur, ce facteur divise toutes les différentielles d'ordre plus élevé.*

Pour prendre le cas général, supposons $d^n f$ décomposé en facteurs irréductibles et premiers entre eux,

$$d^n f = \text{H}_1^{n_1}\,\text{H}_2^{n_2}\ldots\text{H}_\alpha^{n_\alpha},$$

et cherchons d'où peuvent provenir les facteurs communs à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$. Nous avons, en premier lieu, tous les facteurs multiples de $d^n f$. Soit ensuite H_i un facteur simple irréductible de $d^n f$; on pourra écrire

$$d^n f = \text{H}_i\,\text{K}_i,$$

K_i étant premier avec H_i. On en déduit

$$d^{n+1} f = \text{H}_i\,d\text{K}_i + \text{K}_i\,d\text{H}_i;$$

pour que $d^{n+1} f$ soit divisible par H_i, il faut et il suffit que $d\text{H}_i$ soit divisible par H_i. En résumé, les facteurs communs proviennent des facteurs multiples de $d^n f$ et des facteurs simples H_i tels que $d\text{H}_i$ soit divisible par H_i. Mais tous ces facteurs diviseront aussi $d^{n+2} f$, $d^{n+3} f$, ... C. Q. F. D.

Remarque. — Si H est un facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$, $d\text{H}$ sera toujours divisible par H. Dans le cas de deux variables indépendantes

x et y, cette condition est susceptible d'une interprétation géométrique intéressante. Supposons, pour plus de netteté, que nous ayons un facteur linéaire en dx, dy, $A\,dx + B\,dy$, tel que $dA\,dx + dB\,dy$ soit divisible par $A\,dx + B\,dy$. Il est aisé de voir que les conditions auxquelles on est conduit sont celles que l'on obtiendrait en écrivant que les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

ont un point d'inflexion en chacun de leurs points, c'est-à-dire que ces courbes forment un système de lignes droites. La remarque s'étend d'elle-même à une équation différentielle du premier ordre et de degré quelconque.

2. Laissant de côté ces généralités, je me propose maintenant de trouver toutes les fonctions f des deux variables x et y, telles que $d^n f$ et $d^{n+1} f$ soient divisibles par un même facteur. Soit S la surface représentée par l'équation

$$z = f(x, y); \tag{10}$$

soient x, y, z les coordonnées d'un point de cette surface et X, Y, Z les coordonnées d'un point voisin. On aura, en posant $dx = X - x$, $dy = Y - y$,

$$Z = f + \frac{df}{1} + \frac{d^2 f}{1.2} + \ldots + \frac{d^n f}{1.2\ldots n} + \ldots, \tag{11}$$

en admettant que la fonction f est uniforme et continue dans le voisinage du couple de valeurs considérées pour les variables.

Voici quelques dénominations dont je ferai usage pour abréger. J'appellerai *paraboloïde d'ordre* $n - 1$ toute surface ayant une équation de la forme

$$z = P(x, y),$$

$P(x, y)$ étant un polynôme de degré $n - 1$. Toute droite parallèle à l'axe oz sera dite *un diamètre* de cette surface. De même j'appellerai *parabole d'ordre* $n - 1$ toute courbe plane dont l'équation en coordonnées rectilignes peut être ramenée à la forme

$$Y = \alpha + \beta X + \gamma X^2 + \ldots + \lambda X^{n-1},$$

et toute droite parallèle à l'axe oY sera encore un diamètre. Les équations générales d'une parabole d'ordre $n-1$ ayant ses diamètres parallèles à oz seront

$$y = mx + p,$$
$$z = \alpha + \beta x + \ldots + \lambda x^{n-1}.$$

Dans ce qui suit, je supposerai toujours, à moins de mention expresse, que les diamètres des paraboles et des paraboloïdes dont il sera question sont parallèles à oz. Une parabole d'ordre zéro sera une droite parallèle au plan des xy; une parabole du premier ordre sera une ligne droite quelconque, etc.

Si, dans le développement (11), on se borne aux n premiers termes, on a l'équation d'un paraboloïde d'ordre $n-1$ osculateur à la surface au point considéré, l'ordre de contact étant $n-1$. Toutes les paraboles d'ordre $n-1$ situées sur ce paraboloïde et passant par ce point auront également avec la surface un contact d'ordre $n-1$. Mais ce contact sera d'ordre plus élevé si l'on considère les sections du paraboloïde osculateur par les plans parallèles à oz, et dont les traces sur le plan des xy sont déterminées par l'équation $d^n f = 0$, où l'on a remplacé dx par $X - x$ et dy par $Y - y$. Il y a ainsi en chaque point d'une surface n paraboles d'ordre $n-1$ ayant avec la surface un contact d'ordre n ou d'ordre plus élevé; ce sont les paraboles de cette espèce osculatrices à la surface. Ceci posé, supposons que $d^n f$ et $d^{n+1} f$ soient divisibles par un facteur de la forme $A dx + B dy$; d'après le théorème démontré plus haut, toutes les différentielles d'ordre plus élevé seront divisibles par le même facteur. On peut, de plus, supposer que ce facteur ne divise pas $d^{n-1} f$. Tous les termes du développement (11) contiendront en facteur $A(X-x) + B(Y-y)$, à partir du $n+1^{\text{ième}}$; la section du paraboloïde osculateur

$$z = f + \frac{df}{1} + \ldots + \frac{d^{n-1} f}{1.2\ldots(n-1)}$$

par le plan parallèle à oz

$$A(X-x) + B(Y-y) = 0$$

est donc située tout entière sur la surface. On voit donc que l'existence d'un diviseur commun de $d^n f$ et de $d^{n+1} f$ signifie géométriquement que *par chaque point de la surface* S *passe une parabole d'ordre* $n - 1$ *ayant* oz *pour direction diamétrale et située tout entière sur la surface*. La réciproque est évidente. Si par chaque point de la surface passe une parabole de cette espèce située sur la surface, elle fait partie en chacun de ses points des n paraboles osculatrices à la surface en ce point, et le facteur linéaire correspondant de $d^n f$ doit diviser $d^{n+1} f$ et toutes les autres différentielles.

Si $d^n f$ a un facteur multiple, deux ou plusieurs des paraboles osculatrices en chaque point seront confondues. Le lemme démontré plus haut nous prouve que, s'il en est ainsi, les paraboles osculatrices confondues sont situées sur la surface. Par chaque point de la surface passeront autant de paraboles distinctes d'ordre $n - 1$ que $d^n f$ et $d^{n+1} f$ ont de facteurs communs linéaires et distincts. Il nous reste à montrer comment on peut distinguer géométriquement les paraboles provenant des facteurs multiples. Supposons que $d^n f$ contienne $(A\,dx + B\,dy)^p$ et ne contienne pas $(A\,dx + B\,dy)^{p+1}$. Prenons pour origine un point quelconque de la surface et pour plan des xz le plan de la parabole provenant de ce facteur multiple; dans le développement de z suivant les puissances de x et de y, y^p entrera en facteur dans le groupe homogène des termes de degré n et des degrés plus élevés, et l'on pourra écrire

$$z = P_{n-1}(x, y) + y^p \varphi(x, y),$$

P_{n-1} désignant un polynôme de degré $n - 1$ et $\varphi(x, y)$ une fonction uniforme et continue dans le voisinage des valeurs $x = y = 0$. Considérons le paraboloïde d'ordre $n - 1$ ayant pour équation

$$Z = P_{n-1}(x, y),$$

et soit

$$u = z - Z = y^p\, Q(x, y).$$

Toutes les dérivées partielles de la fonction u sont nulles pour $y = 0$, jusqu'à celles de l'ordre p exclusivement, c'est-à-dire que le paraboloïde et la surface ont un contact d'ordre $p - 1$ tout le long de la parabole du plan des xz. Remarquons que, si $p < n$, il y a une infinité de paraboloïdes d'ordre $n - 1$ jouissant de la même propriété; ils sont représentés par l'équation générale

$$Z = P_{n-1}(x, y) + y^p\, Q(x, y),$$

$Q(x,y)$ étant un polynôme de degré $n-p-1$. Inversement, il n'existe pas de paraboloïde d'ordre $n-1$ ayant avec la surface un contact d'ordre supérieur à $p-1$ tout le long de la parabole du plan des xz. Il faudrait, en effet, pour cela que l'on pût trouver un polynôme P' de degré $n-1$, tel que la différence $z-P'$ contienne en facteur une puissance de y supérieure à p; ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, $\varphi(x,y)$ ne contient pas y en facteur.

En résumé, pour évaluer l'ordre de multiplicité d'un facteur commun à deux différentielles successives, il suffit d'évaluer l'ordre maximum de contact que peut avoir un paraboloïde d'ordre $n-1$ avec la surface tout le long de la parabole située sur la surface provenant de ce facteur commun, et d'augmenter cet ordre d'une unité.

3. Occupons-nous d'abord du cas où les deux différentielles $d^n f$ et $d^{n+1} f$ ont un facteur commun du premier degré et un seul, ce facteur ne divisant pas $d^{n-1}f$. La définition de la fonction f résulte immédiatement des considérations précédentes. La surface $z=f(x,y)$ pourra, en effet, être regardée comme engendrée par une parabole variable d'ordre $n-1$ qui se meut en se déformant d'une façon arbitraire, mais en conservant toujours ses diamètres parallèles à oz. Cette surface sera définie par les deux équations

$$(12)\qquad \begin{cases} y=tx+\varphi(t), \\ z=f(t)+xf_1(t)+\ldots+x^{n-1}f_{n-1}(t), \end{cases}$$

t désignant un paramètre variable, et $\varphi, f, f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ étant $n+1$ fonctions arbitraires de ce paramètre. L'équation aux dérivées partielles de ces surfaces s'obtiendra en éliminant le rapport $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations

$$d^n f=0, \quad d^{n+1}f=0.$$

Ceci est bien d'accord avec les résultats connus. Posons, suivant l'usage,

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial z}{\partial y}, \quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\alpha=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \beta=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}, \quad \gamma=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}, \quad \delta=\frac{\partial^3 z}{\partial y^3};$$

en éliminant dx et dy entre les deux équations

$$df = p\,dx + q\,dy = 0,$$
$$d^2f = r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

on aura l'équation aux dérivées partielles des surfaces engendrées par une ligne droite parallèle au plan des xy. Le résultat de l'élimination est

$$rq^2 - 2spq + tp^2 = 0,$$

qui est bien l'équation aux dérivées partielles des surfaces conoïdes. De même, en éliminant dx et dy entre les deux équations

$$d^2f = r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$
$$d^3f = \alpha\,dx^3 + 3\beta\,dx^2\,dy + 3\gamma\,dx\,dy^2 + \delta\,dy^3 = 0,$$

on aura l'équation aux dérivées partielles des surfaces engendrées par une droite quelconque, ou des surfaces réglées. On est conduit aux mêmes calculs que par la méthode ordinaire (HERMITE, *Cours d'Analyse*, p. 222).

4. Je suppose, en second lieu, que $d^n f$ et $d^{n+1}f$ ont un facteur commun qui est la puissance $p^{\text{ième}}$ d'un facteur linéaire en dx et dy, ne divisant pas $d^{n-1}f$. La surface $z = f(x, y)$ n'admet encore qu'un seul mode de génération parabolique, mais, tout le long d'une parabole, il existe un paraboloïde d'ordre $n - 1$, ayant un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface proposée, qui peut, de cette façon, être envisagée comme enveloppe d'un paraboloïde, la courbe de contact étant une courbe plane située dans un plan parallèle à oz. L'exemple le plus simple est fourni par les surfaces développables. Pour prendre le cas général, soient

$$x\,\varphi_1(u) + y\,\varphi_2(u) + \psi(u) = 0, \tag{13}$$
$$Z = F(x, y, u) \tag{14}$$

les équations de la parabole mobile, l'équation (14) représentant un paraboloïde d'ordre $n - 1$, qui a un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface lieu de cette parabole mobile. Imaginons que de l'équation (13) on ait tiré la valeur du paramètre variable u

$$u = f_1(x, y),$$

et qu'on l'ait porté dans l'équation (14); on aura la fonction inconnue

$$z = \mathrm{F}[x, y, f_1(x, y)] = f(x, y). \tag{15}$$

Il nous faut exprimer que tout le long de la parabole les dérivées partielles de la fonction z sont égales à celles de Z, jusqu'à celles de l'ordre $p - 1$ inclusivement. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}\frac{du}{dy};$$

comme on ne peut avoir à la fois $\frac{du}{dx} = 0$, $\frac{du}{dy} = 0$, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} = 0.$$

Or $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ est, comme $\mathrm{F}(x, y, u)$, une fonction entière de x et de y de degré $n - 1$; pour que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ soit nul en même temps que $x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + \psi(u)$, il faut et il suffit que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}$ soit le produit de $x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + \psi(u)$ par un polynôme d'ordre $n - 2$. On démontrerait ensuite de proche en proche que $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial u^2}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} \mathrm{F}}{\partial u^{p-1}}$ doivent être divisibles par le même facteur; il en résulte que l'on doit avoir

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} = [x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + \psi(u)]^{p-1}\mathrm{F}_1(x, y, u),$$

$\mathrm{F}_1(x, y, u)$ désignant un polynôme de degré $n - p$ en x et y, dont les coefficients seront des fonctions arbitraires de u. La fonction inconnue sera donc définie par l'équation

$$f = \int_0^u [x\varphi_1(u) + y\varphi_2(u) + \psi(u)]^{p-1}\mathrm{F}_1(x, y, u)\,du,$$

jointe à l'équation (13). Il est facile de remarquer l'analogie de cette solution avec la forme III de M. Darboux (*loc. cit.*, p. 410), à laquelle elle se réduit pour $p = n$. Nous verrons plus loin une autre méthode pour vérifier ce résultat.

5. Si les différentielles $d^n f$ et $d^{n+1} f$ ont un diviseur commun d'un degré supérieur au premier, sans que ce facteur soit une puissance parfaite d'un facteur linéaire en dx, dy, la surface $z = f(x, y)$ admettra plusieurs modes distincts de génération parabolique. Considérons une petite portion Σ de cette surface se projetant sur le plan des xy suivant une aire σ; je suppose qu'à l'intérieur de σ z est une fonction uniforme et continue de x et de y. Soient M un point de Σ et m sa projection sur le plan des xy, qui sera à l'intérieur de σ; par le point M passent deux paraboles C, C_1 situées tout entières sur la surface et dont les plans ont pour traces sur xOy deux droites P, P_1. Soient M' un point voisin de M et m' sa projection; par M' passe de même une parabole C' de la même série que C et une parabole C'_1 de la même série que C_1; si P' et P'_1 sont les traces des plans de ces paraboles sur le plan xoy, P et P'_1 se coupent en un point μ, et P' et P_1 en un point μ'. Il est clair que les points μ et μ' seront à l'intérieur de σ, pourvu que les deux points M et M' soient suffisamment rapprochés. Le point de Σ qui se projette en μ appartient donc à la fois aux deux paraboles C et C'_1 et de même le point de la surface qui se projette en μ' sera commun à C' et à C_1. Autrement dit, la portion de surface considérée pourra être engendrée d'une infinité de manières par une parabole d'ordre $n-1$ ayant ses diamètres parallèles à oz, assujettie à rencontrer dans toutes ses positions $n+1$ paraboles de même degré ayant aussi leurs diamètres parallèles à oz.

Considérons $n+1$ paraboles de la même série $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$, et soient

$$(16)\qquad \begin{cases} y = m_i x + p_i, \\ z = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i x^2 + \ldots + \lambda_i x^{n-1} \end{cases}$$

les équations de la parabole C_i. Soient, de plus,

$$(17)\qquad \begin{cases} y = mx + p, \\ z = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{n-1} \end{cases}$$

les équations de la parabole mobile C'. Le plan de la parabole C' rencontre la parabole fixe C_i en un point de coordonnées x_i, y_i, z_i

$$(18)\quad x_i = \frac{p_i - p}{m - m_i}, \quad y_i = \frac{mp_i - m_i p}{m - m_i}, \quad z_i = \alpha_i + \beta_i x_i + \gamma_i x_i^2 + \ldots + \lambda_i x_i^{n-1}.$$

Les $n-1$ points (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ devront être situés sur une même parabole d'ordre $n-1$; ce qui fournit la relation

$$(19)\quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ z_{n+1} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^{n-2} & \ldots & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Imaginons qu'on ait remplacé x_i et z_i par leurs expressions (18); on aura une équation de condition dont le premier membre sera une fonction entière de m et de p,

$$(19)'\quad \Phi(m, p) = 0,$$

qui exprime la condition nécessaire et suffisante pour que le plan $y = mx + p$ coupe les $n+1$ paraboles fixes C_i en $n+1$ points situés sur une même parabole d'ordre $n-1$ ayant ses diamètres parallèles à oz. La condition (19)' étant supposée remplie, la parabole correspondante sera représentée par les équations

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{l} y = mx + p, \\ \begin{vmatrix} z & x^{n-1} & x^{n-2} & \ldots & x & 1 \\ z_2 & x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ z_{n+1} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^{n-2} & \ldots & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right.$$

Écartons d'abord le cas singulier où $\Phi(m, p)$ serait identiquement nul; on obtiendra l'équation de la surface engendrée par la parabole mobile en éliminant m et p entre les équations (19)' et (20). Le résultat de l'élimination sera évidemment une fonction algébrique entière de x, y, z,

$$(21)\quad F(x, y, z) = 0;$$

on voit donc que la portion de surface Σ appartient à une surface *algébrique*, soit que $F(x, y, z)$ soit indécomposable, soit que $F(x, y, z)$ soit le produit de plusieurs facteurs entiers en x, y, z. Dans tous les cas, si $\varphi(x, y, z) = 0$ est l'équation de la surface algébrique à laquelle appartient la portion de surface Σ, il suit des propriétés bien connues des fonctions analytiques que la fonction inconnue z coïncidera, pour toutes les valeurs de x et de y, avec la fonction algébrique définie par l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$.

Comme $\varphi(x, y, z)$ est un facteur de $F(x, y, z)$, on peut dire, d'après la façon dont on a obtenu cette dernière équation, que par chaque point de la surface cherchée passe une parabole d'ordre $n-1$ s'appuyant sur $n+1$ paraboles voisines d'une même série. On voit de même qu'étant donnée une parabole quelconque sur la surface, par chaque point de la surface passe une parabole qui coupe la première. Le mode de génération donne encore lieu à quelques remarques importantes. Au lieu de prendre pour directrices de la parabole mobile les $n+1$ paraboles $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$, on aurait pu prendre $n+1$ autres paraboles de cette série ou d'une série différente; en faisant les mêmes calculs que plus haut, on serait parvenu à une équation analogue à l'équation (21)

$$(21)' \qquad F_1(x, y, z) = 0.$$

Les fonctions F et F_1 ne seraient pas en général identiques; mais, quel que soit le système de paraboles choisies pour directrices, F et F_1 devront toujours avoir un facteur commun $\varphi(x, y, z)$ qui, égalé à zéro, constitue la solution cherchée.

6. Il est bien aisé maintenant de découvrir la forme de ce facteur commun $\varphi(x, y, z)$. Commençons par un cas particulier très simple, celui où tous les plans des paraboles d'une même série passent par une droite fixe qui sera forcément parallèle à oz. Je suppose qu'on ait pris cette droite fixe pour axe des z et qu'on ait choisi pour directrices n paraboles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ d'une série différente. Les équations de la parabole mobile seront

$$y = mx,$$
$$z = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots + \lambda x^{n-1};$$

de plus, si l'on se reporte aux calculs faits tout à l'heure, on voit immédiatement que α, β, ..., λ seront des fonctions rationnelles de m; l'élimination de m conduira à une équation du premier degré en z. Donc, dans ce cas, *la fonction f est une fonction rationnelle des variables x et y.*

Supposons, en second lieu, que les plans des paraboles d'une même série ne passent pas par une droite fixe. Soient

$C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$, $n+1$ paraboles voisines d'une même série;
$P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ les traces de leurs plans sur le plan des xy;
m l'intersection des droites P_1 et P_2;
M_1 et M_2 les points des deux paraboles C_1 et C_2 qui se projettent en m.

La parallèle en oz, menée par m, ne peut rencontrer la surface en un troisième point M' différent de M_1 et de M_2, car il serait impossible de faire passer par M' une parabole rencontrant à la fois les deux paraboles C_1 et C_2. Il n'y aurait exception que si cette parabole se décomposait en un système de droites parallèles à oz, parmi lesquelles se trouverait la droite mM_1M_2 elle-même; mais alors cette droite appartiendrait tout entière à la surface. Appelons x_0, y_0 les coordonnées du point m, z_0 et z_1 les troisièmes coordonnées des points M_1, M_2; on voit qu'au système de valeurs (x_0, y_0) pour les variables x et y ne peuvent correspondre pour z que les deux valeurs z_0 et z_1, à moins que z ne soit indéterminé, ce qui ne peut arriver que pour des systèmes de valeurs en nombre limité. Comme les plans des paraboles ne passent pas par une droite fixe, il ne peut exister d'équation de condition entre x_0 et y_0. D'ailleurs, nous savons déjà que z est une fonction algébrique de x et de y, et nous en déduisons que *la fonction inconnue est racine d'une équation du second degré dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et de y.*

On peut se demander ce qui arrive lorsque l'équation $(19)'$ est satisfaite identiquement. Cela signifie géométriquement que tout plan parallèle à oz coupe les $n+1$ paraboles $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ en $n+1$ points situés sur une parabole d'ordre $n-1$. Écartons le cas qui vient d'être examiné, où les plans de toutes ces paraboles passent par une droite fixe; nous pourrons supposer que l'on a choisi ces paraboles de façon que leurs plans se coupent suivant $\frac{n(n+1)}{2}$ droites toutes distinctes.

Soit D la droite d'intersection des plans des deux paraboles C_1, C_2; imaginons un plan P passant par D et ne contenant aucune autre droite d'intersection. Puisque la relation (19)' est satisfaite identiquement, ce plan doit contenir une parabole d'ordre $n-1$ rencontrant à la fois les paraboles $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$; cette parabole ne pourra se réduire à $n-1$ droites parallèles à oz. Il faudra donc que les paraboles C_1 et C_2 coupent la droite D en un même point; la relation (19)' ne pourra donc se réduire à une identité que si les $n+1$ paraboles considérées se coupent deux à deux.

Inversement, étant données $n+1$ paraboles d'ordre $n-1$ qui se coupent deux à deux, elles déterminent un paraboloïde d'ordre $n-1$, dont la section, par un plan parallèle à oz, est une parabole d'ordre $n-1$ rencontrant à la fois les $n+1$ paraboles considérées. En effet, l'équation de ce paraboloïde contient $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres arbitraires; il suffira d'en disposer de façon que la surface passe par les $\frac{(n+1)n}{2}$ points d'intersection des paraboles données deux à deux. Il est aisé de s'assurer que le déterminant des coefficients des inconnues dans les équations linéaires auxquelles on est conduit est différent de zéro; si ce déterminant était nul, on pourrait, en effet, trouver une courbe de degré $n-1$ dont feraient partie $n+1$ droites, ce qui est absurde.

7. Nous avons maintenant à rechercher, parmi les surfaces dont l'équation est de la forme précédente, quelles sont celles qui admettent des sections paraboliques et à évaluer le nombre des paraboles passant par un point donné. Si la fonction cherchée est une fonction rationnelle de x et de y, on pourra l'écrire

$$z = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{22}$$

P et Q étant des fonctions entières sans facteur commun. Pour que le plan $y = mx + p$ coupe la surface suivant une courbe parabolique, il faudra que $P(x, mx+p)$ soit divisible par $Q(x, mx+p)$ ou, si l'on veut, que tous les points de rencontre de la droite $y = mx + p$ avec la courbe $Q(x, y) = 0$ appartiennent aussi à la courbe $P(x, y) = 0$. De plus, si au point $x = a$, $y = b$, α points de rencontre de la droite $y = mx + p$

avec la courbe $Q=0$ sont confondus, il devra y avoir au moins α points de rencontre de la courbe $P=0$ avec la droite confondus en ce même point. Si la courbe $Q=0$ ne se réduit pas à une ligne droite, il ne pourra y avoir qu'un nombre limité de droites jouissant de la propriété précédente; ce seront des cordes communes aux deux courbes $P=0$, $Q=0$. Pour qu'il y ait sur la surface une infinité de sections paraboliques, il faudra, par conséquent, que la courbe $Q=0$ se réduise à une ligne droite ou que Q soit de la forme

$$Q(x,y)=(ax+by+c)^p;$$

cela posé, on voit bien aisément que les systèmes de droites répondant à la question seront formés par les faisceaux de droites passant par les points d'intersection de la droite $ax+by+c=0$ avec la courbe $P(x,y)=0$, pourvu que ces points soient des points multiples de cette courbe d'un ordre de multiplicité égal ou supérieur à p; $P(x,y)$ devra être de degré $n+p-1$. En définitive, *la recherche d'une surface de la forme* (22) *admettant q séries de sections paraboliques d'ordre $n-1$ est ramenée à la détermination d'une courbe plane d'ordre $n+p-1$, ayant q points multiples d'ordre p situés sur une même ligne droite.*

Les trois nombres n, q, p devront vérifier l'inégalité évidente

$$qp \leqq n+p-1 \tag{23}$$

ou

$$p \leqq \frac{n-1}{q-1},$$

qui fournit une limite supérieure pour le nombre entier p lorsque les deux nombres entiers q et n sont connus, et permet d'énumérer ainsi toutes les formes possibles de la solution (22).

Si l'on fait en particulier $q=n$, on aura forcément $p=1$, et la fonction prend la forme

$$z=\frac{P(x,y)}{ax+by+c},$$

$P(x,y)$ étant une fonction entière quelconque de degré n. C'est la forme de la première solution de M. Darboux pour le cas de deux variables (*loc. cit.*, p. 408). On voit immédiatement d'où proviennent les n systèmes de sections paraboliques; si, par les n points de rencontre de la courbe $P = 0$ avec la droite $ax + by + c = 0$, on mène des droites parallèles à oz, ces droites sont situées sur la surface, et tout plan passant par une de ces droites coupe la surface suivant une parabole.

Revenons au cas général, et supposons qu'on ait choisi p de façon que l'inégalité (23) soit satisfaite. Prenons pour axe des y la droite des points multiples et soient $y = a_1, y = a_2, \ldots, y = a_q$, les ordonnées de ces points. L'équation générale des courbes de degré $n + p - 1$ ayant ces points pour points multiples d'ordre p sera de la forme

$$\Phi^p \varphi + \Phi^{p-1} \varphi_1 x + \ldots + \Phi \varphi_{p-1} x^{p-1} + x^p \Psi = 0,$$

où l'on a posé

$$\Phi = (y - a_1)(y - a_2) \ldots (y - a_q),$$

$\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ désignant des fonctions entières de y de degré $n + p - 1 - qp, n + p - 1 - qp + q - 1, \ldots,$ et Ψ une fonction entière de x et de y de degré $n - 1$.

Si, dans l'inégalité (23), on fait $n = q = 2$, on aura forcément $p = 1$, et l'on retrouve, comme on devait s'y attendre, une surface du second degré. Si l'on fait $n = 3, q = 2$, on aura $p \leqq 2$, et la solution convenable se composera d'une courbe du quatrième ordre ayant deux points doubles avec la droite joignant ces deux points. Prenons encore $n = 4$; pour $q = 4$, on a une courbe du quatrième ordre quelconque; pour $q = 2$, on a, soit une courbe du sixième ordre avec deux points triples, soit une courbe du cinquième ordre avec deux points doubles. Si l'on suppose $q = 3$, l'inégalité (23) donne $p = 1$, et l'on retombe sur la solution correspondant à $q = 4$. Ceci nous montre que toutes les combinaisons possibles *a priori* ne peuvent pas être réalisées par la forme (22); autrement dit, on ne peut pas toujours trouver de surface de cette forme ayant q systèmes de sections paraboliques et q seulement. C'est là un fait général; si, dans l'inégalité (23), on prend pour q un nombre entier supérieur à $\frac{n+1}{2}$, on aura forcément $p = 1$, et, par suite, toutes ces surfaces auront n systèmes de sections paraboliques. Pour une valeur donnée de n, le nombre des valeurs admissibles pour q est égal à $n - 1$; le nombre des valeurs qui fournissent des solutions distinctes sera, en général, beaucoup moindre : il sera au plus égal à $\frac{n}{2}$ si n est pair, et à $\frac{n+1}{2}$ si n est impair.

8. Pour terminer ce qui est relatif à ce cas, il nous reste à évaluer l'ordre de multiplicité du facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$, correspondant à chaque série de sections paraboliques. Considérons un système de sections paraboliques dont les plans passent par une droite fixe et imaginons que nous ayons pris pour axe des z cette droite fixe, pour axe des y la droite passant par les points multiples de la courbe $P = 0$, et pour plan des xz le plan d'une section parabolique quelconque. L'équation de la surface pourra s'écrire

$$(22)' \qquad z = \frac{\varphi_{n+p-1} + \varphi_{n+p-2} + \ldots + \varphi_p}{x^p},$$

en groupant ensemble au numérateur les termes de même degré. D'après ce que nous avons vu plus haut, pour évaluer l'ordre de multiplicité du facteur linéaire qui correspond aux sections paraboliques par des plans passant par oz, il suffit de chercher le paraboloïde d'ordre $n-1$ qui a le contact d'ordre le plus élevé possible avec la surface tout le long d'une de ces paraboles, par exemple tout le long de la parabole du plan des xz. Soit

$$Z = P_1(x, y)$$

l'équation d'un paraboloïde d'ordre $n-1$; pour que ce paraboloïde ait un contact d'ordre m avec la surface tout le long de la parabole du plan des xz, il faut et il suffit que

$$\varphi_{n+p-1} + \varphi_{n+p-2} + \ldots + \varphi_p - x^p P_1(x, y)$$

contienne y^{m+1} en facteur. On en déduit aisément que *l'ordre de multiplicité du facteur considéré est égal à la plus petite puissance de y qui figure dans le numérateur de z dans l'expression (22)′ quand on supprime tous les termes contenant une puissance de x égale ou supérieure à la $p^{\text{ième}}$.*

En particulier, si l'on suppose $p = 1$, la plus faible puissance de y, quand on supprime tous les termes en x, est égale au nombre des points communs à la courbe $P = 0$ et à l'axe des y qui sont confondus à l'origine; ce qui est bien conforme au résultat de M. Darboux.

Il est aisé de confirmer et d'expliquer ce résultat. Imaginons que l'on prenne pour $P(x, y)$ la courbe la plus générale de son degré ayant q points multiples d'ordre p en ligne droite; la surface correspondante aura q systèmes de sections paraboliques dont chacun correspond à un facteur linéaire simple commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$. Si l'on suppose maintenant que les coefficients restés arbitraires dans l'équation de la courbe varient de telle façon que r des points multiples d'ordre p viennent se confondre en un seul, les r systèmes de sections paraboliques correspondantes deviendront identiques, et le produit des r facteurs linéaires communs se changera en la puissance $r^{\text{ième}}$ d'un facteur linéaire. Cela posé, dans l'équation générale écrite plus haut d'une courbe ayant q points multiples d'ordre p, supposons que les r points a_1, a_2, …, a_r viennent se confondre à l'origine. Tous les termes contiendront en facteur soit x^p, soit y^r; ce qui nous donne bien la même conclusion que nous avions trouvée par l'autre méthode.

Nous sommes donc en mesure d'obtenir, dans chaque cas particulier, toutes les fonctions *rationnelles* telles que $d^n f$ et $d^{n+1} f$ aient q facteurs linéaires communs, distincts ou confondus.

9. Je suppose maintenant que z soit racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels en x et en y. On en déduira pour z une expression de la forme

$$z = \frac{P + Q\sqrt{R}}{T}, \tag{24}$$

P, Q, R, T étant des fonctions entières des variables. Si R est le carré d'une fonction entière, on sera ramené au cas précédent; dans le cas contraire, on pourra admettre que R ne contient pas de facteurs multiples, et que P, Q, T n'ont aucun facteur commun. Pour que le plan $y = mx + p$ coupe cette surface suivant une courbe parabolique, il faut d'abord que l'équation

$$R(x, mx + p) = 0$$

n'ait que des racines d'un ordre pair de multiplicité; autrement dit, en tous les points communs à la droite $y = mx + p$ et à la courbe

$R(x, y) = 0$, un nombre pair de points de rencontre doivent être confondus. Comme il doit y avoir une infinité de droites jouissant de cette propriété, et que $R(x, y)$ n'admet pas de facteurs multiples, on ne pourra faire que deux hypothèses :

1° $R(x, y) = 0$ représente une courbe du second degré, et $y = mx + p$ une tangente à cette conique;

2° $R(x, y) = 0$ représente $2k$ droites passant par un même point et $y = mx + p$ une droite passant par le même point. Cette dernière hypothèse doit être rejetée, car il ne pourrait y avoir qu'un seul système de sections paraboliques.

Nous supposerons, par conséquent, que l'équation $R(x, y) = 0$ représente une véritable conique, et non un système de deux droites. Soit $y = mx + p$ l'équation d'une de ses tangentes et $x = a$ l'abscisse du point de contact. La section de la surface (24) se composera de deux courbes distinctes qui se projetteront sur le plan des xz, suivant le système des deux courbes

$$z = \frac{P(x, mx + p) \pm Q(x, mx + p)(x - a)}{T(x, mx + p)},$$

dont l'une devra se réduire à une courbe parabolique. Si $T(x, y)$ ne se réduit pas à une constante, on voit que toutes les racines de l'équation

$$T(x, mx + p) = 0$$

devront appartenir à l'une des équations

$$P(x, mx + p) \pm Q(x, mx + p)(x - a) = 0.$$

Cela revient à dire que la courbe représentée par l'équation $T(x, y) = 0$ devra faire partie de la courbe représentée par l'équation

$$P(x, y) \pm Q(x, y)\sqrt{R(x, y)} = 0;$$

s'il en était ainsi, le cylindre ayant pour base cette courbe et ses génératrices parallèles à oz ferait partie de la surface; mais on peut toujours supposer que, dans l'équation mise sous forme entière, on ait supprimé tout facteur commun aux coefficients de z^2 et de z et au terme constant. Il faudra donc que $T(x, y)$ se réduise à une constante. Il faudra ensuite que toute tangente à la conique $R(x, y) = 0$ coupe la courbe

$P(x,y) = 0$ en $n-1$ points seulement à distance finie et la courbe $Q(x,y) = 0$ en $n-2$ points, ce qui exige que P et Q soient respectivement de degrés $n-1$ et $n-2$. Il est évident que tout polynôme d'ordre $n-1$ est une solution du problème, puisque $d^n f = 0$ pour une pareille fonction, et que, si l'on ajoute ce polynôme à une solution, on obtient une nouvelle solution. Nous pouvons donc faire abstraction de $P(x,y)$, et la fonction cherchée sera de la forme

$$z = Q(x,y)\sqrt{R(x,y)}, \tag{25}$$

$Q(x,y)$ désignant un polynôme arbitraire de degré $n-2$ et $R(x,y)$ un polynôme du second degré qui, égalé à zéro, représente une conique indécomposable. Les seuls plans qui coupent la surface suivant des paraboles d'ordre $n-1$ sont les plans dont les traces sur le plan des xy sont tangentes à la conique $R(x,y) = 0$. Par chaque point de la surface passent donc seulement deux paraboles.

Il nous reste à évaluer l'ordre de multiplicité du facteur correspondant à ces deux modes de génération. J'emploierai pour cela la méthode dont s'est servi M. Darboux pour le cas analogue (*loc. cit.*, p. 409). Dans le polynôme $R(x,y)$, remplaçons x par $x + h\,dx$, y par $y + h\,dy$, et soit

$$R(x + h\,dx, y + h\,dy) = A + 2Bh + Ch^2;$$

on a évidemment

$$A = R(x,y), \quad B = \frac{dA}{2}, \quad C = \frac{d^2A}{2}.$$

L'équation $B^2 - AC = 0$ peut être regardée comme l'équation différentielle des tangentes à la conique $R(x,y) = 0$, et elle admet la conique elle-même comme intégrale singulière. Il suit de là que le facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$ ne pourra se composer que d'une puissance entière de $B^2 - AC$ ou de $dA^2 - 2A\,d^2A$.

Pour prendre le cas général, supposons que $Q(x,y)$ contienne $R(x,y)$ à la puissance $\mu - 1$, de telle sorte qu'on ait

$$z = F(x,y)\,\varphi(x,y);$$

en posant

$$\varphi(x,y) = R(x,y)^{\frac{2\mu-1}{2}},$$

$F(x, y)$ étant un polynôme de degré $n - 2\mu$ qui n'est plus divisible par $R(x, y)$, on aura

$$(A + 2Bh + Ch^2)^{\frac{2\mu-1}{2}} = \varphi + \frac{h}{1} d\varphi + \frac{h^2}{1.2} d^2\varphi + \ldots + \frac{h^{2\mu}}{1.2\ldots 2\mu} d^{2\mu}\varphi + \ldots,$$

$$F(x + h\,dx, y + h\,dy) = F(x, y) + \frac{h}{1} dF + \ldots + \frac{h^{n-2\mu}}{1.2\ldots(n-2\mu)} d^{n-2\mu}F.$$

Toutes les différentielles $d^{2\mu}\varphi$, $d^{2\mu+1}\varphi$, ... contiennent en facteur $(B^2 - AC)^\mu$, comme l'a fait voir M. Darboux. Donc, si l'on fait le produit des deux développements, tous les coefficients à partir de celui de h^n contiendront en facteur $(B^2 - AC)^\mu$. J'ajoute que le coefficient de h^n ne contient pas de puissance de $B^2 - AC$ supérieure à celle-là. Observons pour cela que $d^{2\mu}\varphi$ est égal, à un facteur constant près, à

$$(B^2 - AC)^\mu A^{-\frac{2\mu+1}{2}}$$

ou, si l'on veut,

$$d^{2\mu}\varphi = K(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+1}{2}}.$$

D'ailleurs

$$d(dA^2 - 2A\,d^2A) = -2A\,d^3A = 0.$$

On en déduit successivement

$$d^{2\mu+1}\varphi = -K\frac{2\mu+1}{2}(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+3}{2}} dA,$$

$$\begin{aligned} d^{2\mu+2}\varphi = {} & K\frac{(2\mu+1)(2\mu+3)}{4}(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+5}{2}} dA^2 \\ & - K\frac{2\mu+1}{2}(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+5}{2}} d^2A, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} d^{2\mu+2}\varphi = {} & K\frac{(2\mu+1)(2\mu+2)}{4}(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+5}{2}} dA^2 \\ & + K\frac{2\mu+1}{2}(dA^2 - 2A\,d^2A)^{\mu+1} A^{-\frac{2\mu+5}{2}}. \end{aligned}$$

En général,

$$d^{2\mu+i}\varphi = K\frac{(2\mu+1)(2\mu+2)\ldots(2\mu+i)}{2^i}(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu A^{-\frac{2\mu+2i+1}{2}},$$

plus une suite de termes qui contiendront des puissances de $dA^2 - 2A\,d^2A$ d'exposant supérieur à μ. Quand on fera le produit des deux développements qui précèdent, le coefficient de $h^n(dA^2 - 2A\,d^2A)^\mu$ sera de la forme

$$A^{-\frac{2\mu+1}{2}-n+2\mu}\left[p_0 F\left(\frac{dA}{2}\right)^{n-2\mu} + p_1\left(\frac{dA}{2}\right)^{n-2\mu-1} A\,dF + \ldots + p_{n-2\mu} A^{n-2\mu} d^{n-2\mu}F + H\right],$$

$p_0, p_1, \ldots, p_{n-2\mu}$ désignant des coefficients numériques qu'il serait aisé de calculer et H une suite de termes qui contiennent tous en facteur $dA^2 - 2A\,d^2A$. Pour que d^nf fût divisible par $(dA^2 - 2A\,d^2A)^{\mu+1}$, il faudrait que

$$p_0 F\left(\frac{dA}{2}\right)^{n-2\mu} + \ldots + p_{n-2\mu} A^{n-2\mu} d^{n-2\mu}F$$

fût divisible par $dA^2 - 2A\,d^2A$. De l'équation

$$dA^2 - 2A\,d^2A = 0$$

on tire

$$\frac{\frac{dA}{2}}{d^2A} = \frac{A}{dA};$$

il en résulte que

$$p_0(d^2A)^{n-2\mu}F + p_1(d^2A)^{n-2\mu-1}dA\,dF + \ldots + p_\mu(dA)^{n-2\mu}d^{n-2\mu}F$$

devra aussi être divisible par $dA^2 - 2A\,d^2A$. Imaginons maintenant que le point (x, y) se déplace sur la conique $A = 0$; on aura aussi $dA = 0$, mais $d^2A \neq 0$. Comme tous les termes de l'expression précédente, à partir du second, contiennent dA en facteur, il en résulte que l'on devrait avoir aussi $F = 0$ ou que F serait divisible par $R(x, y)$, contrairement à l'hypothèse. Donc *l'ordre de multiplicité du facteur commun à d^nf et à $d^{n+1}f$ est égal à l'exposant de $R(x, y)$ dans $Q(x, y)$ augmenté d'une unité.*

Pour que ce facteur commun soit d^nf lui-même, il faudra que $Q(x, y)$ soit une puissance parfaite de $R(x, y)$ et, par suite, que n soit pair. On retombe ainsi sur la seconde solution de M. Darboux.

10. La méthode précédente suggère un certain nombre de remarques. En premier lieu, j'ai déjà fait observer rapidement que toutes

les combinaisons imaginables dans le nombre des facteurs communs à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$ ne donnaient pas lieu à des solutions distinctes. En d'autres termes, si $d^n f$ et $d^{n+1} f$ ont plus d'un certain nombre de facteurs communs, il arrivera, sous certaines restrictions, que $d^{n+1} f$ sera forcément divisible par $d^n f$. Reprenons l'exemple déjà considéré et supposons que l'on cherche une fonction de deux variables x et y, telle que la dérivée quatrième et la dérivée cinquième aient un facteur commun du troisième degré en dx, dy. Si ce facteur commun n'est pas le cube d'un facteur linéaire et si $d^5 f$ n'est pas divisible par $d^4 f$, la fonction inconnue ne pourra être prise que parmi les solutions de la première forme. Or, parmi les surfaces de cette espèce, nous avons vu qu'il n'en existe pas admettant seulement trois modes de génération par des paraboles du troisième degré. Donc, si $d^4 f$ et $d^5 f$ ont un facteur commun du troisième degré en dx, dy, ce facteur est le cube d'un facteur linéaire, où $d^5 f$ est divisible par $d^4 f$.

La méthode que j'ai employée pour démontrer que toute surface susceptible de plusieurs modes distincts de génération parabolique était du premier ou du second degré en z n'exige pas au fond que les paraboles des deux modes de génération soient du même degré; elle ne repose en réalité que sur cette propriété des courbes génératrices d'être du premier degré en z. Je laisse de côté les applications qui en sont faciles.

11. Je me propose maintenant d'étendre la question aux fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$. Il est commode, pour faciliter le raisonnement, d'employer certaines expressions empruntées au langage de la Géométrie. Ainsi l'ensemble des solutions d'une équation entre les $\mu + 1$ variables $z, x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ sera regardé comme une surface dans un espace à $\mu + 1$ dimensions. Une courbe sera l'intersection de deux surfaces; un plan sera une surface représentée par une équation du premier degré, un cône de sommet $z_0, x_1^0, \ldots, x_\mu^0$ aura une équation homogène en $z - z_0, x_1 - x_1^0, \ldots, x_\mu - x_\mu^0$. On appellera de même *paraboloïde d'ordre* $n - 1$ toute surface ayant une équation de la forme

$$z = P(x_1, x_2, \ldots, x_\mu),$$

P désignant une fonction entière des x_i de degré $n-1$; l'intersection de ce paraboloïde par un plan parallèle à oz sera une parabole d'ordre $n-1$.

Ceci posé, soit $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)$ une fonction satisfaisant à la question; soient $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_\mu^0$ un système particulier de valeurs pour les variables x_i, telles que z soit uniforme et continue dans le voisinage de ces valeurs. On aura, en posant $x_i - x_i^0 = dx_i$,

$$(26) \qquad z = z_0 + \frac{df}{1} + \frac{d^2 f}{1.2} + \ldots + \frac{d^n f}{1.2\ldots n} + \frac{d^{n+1} f}{1.2\ldots(n+1)} + \ldots.$$

Si toutes les différentielles à partir de $d^n f$ sont divisibles par un facteur du premier degré, tel que

$$a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + \ldots + a_\mu\, dx_\mu,$$

le plan

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} a_i(x_i - x_i^0) = 0$$

coupe la surface (26) et le paraboloïde

$$(27) \qquad Z = z_0 + \frac{df}{1} + \frac{d^2 f}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1} f}{1.2\ldots(n-1)}$$

suivant la même courbe. Donc, par chaque point de la surface passe une parabole d'ordre $n-1$ située tout entière sur la surface. On verrait de même que, si ce facteur commun entre à la puissance p, la surface (26) et le paraboloïde (27) ont un contact d'ordre $p-1$ en tous leurs points communs appartenant à cette courbe; ou, ce qui revient au même, toutes les dérivées partielles de f et de Z sont égales respectivement jusqu'à celles de l'ordre p exclusivement, en chacun de ces points.

Il est aisé de déduire de là la forme la plus générale de la fonction f, lorsque $d^n f$ et $d^{n+1} f$ ont un diviseur commun qui est linéaire par rapport aux dx_i ou qui est une puissance parfaite d'un facteur linéaire. Dans le premier cas, la fonction f s'obtiendra par l'élimination du paramètre variable u entre les deux équations

$$(28) \qquad x_1\varphi_1(u) + x_2\varphi_2(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \psi(u) = 0,$$

$$(29) \qquad z = \mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_\mu),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu, \psi$ désignant des fonctions quelconques de u, et F étant un polynôme de degré $n-1$ par rapport aux x_i, dont les coefficients sont des fonctions arbitraires de u. Dans le second cas, on aura

$$(30) \quad f = \int_0^u [x_1\varphi_1(u) + x_2\varphi_2(u) + \ldots + x_\mu\varphi_\mu(u) + \psi(u)]^{p-1} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\,du,$$

F_1 étant une fonction entière des x_i de degré $n-p$ dont les coefficients sont des fonctions arbitraires de u, et la fonction u étant toujours définie par l'équation (28). On peut l'établir par un raisonnement exactement pareil à celui du n° 4; il est clair, d'ailleurs, que la première forme n'est qu'un cas particulier de la seconde.

On peut vérifier ce résultat comme il suit : désignons par dF_1, $d^2F_1, \ldots$ les différentielles totales de F_1 prises en regardant u comme une constante. En appliquant à la fonction f la règle ordinaire de différentiation sous le signe $\int$, on en déduit successivement

$$\begin{aligned} df = {} & (p-1)\int_0^u (x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \psi)^{p-2}(\varphi_1\,dx_1 + \varphi_2\,dx_2 + \ldots + \varphi_\mu\,dx_\mu)F_1\,du \\ & + \int_0^u (x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \psi)^{p-1}\,dF_1\,du, \end{aligned}$$

. . . . ,

$$\begin{aligned} d^{p-1}f = {} & (p-1)(p-2)\ldots 2.1\int_0^u (\varphi_1\,dx_1 + \varphi_2\,dx_2 + \ldots + \varphi_\mu\,dx_\mu)^{p-1}F_1\,du \\ & + \frac{p-1}{1}(p-1)(p-2)\ldots 2.\int_0^u (x_1\varphi_1 + \ldots + \psi)(\varphi_1\,dx_1 + \ldots)^{p-2}\,dF_1\,du \\ & + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-1)(p-2)\ldots 3 \\ & \quad \times \int_0^u (x_1\varphi_1 + \ldots + \psi)^2(\varphi_1\,dx_1 + \ldots + \varphi_\mu\,dx_\mu)^{p-3}\,d^2F_1\,du + \ldots \\ & + \int_0^u (x_1\varphi_1 + \ldots + x_\mu\varphi_\mu + \psi)^{p-1}\,d^{p-1}F_1\,du. \end{aligned}$$

Après n différentiations successives, on aura deux sortes de termes : 1° Des termes finis dont chacun contiendra une des différentielles totales successives de l'expression

$$(\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^p,$$

ou cette expression elle-même :

2° Des termes qui s'exprimeront encore au moyen d'intégrales définies, la fonction sous le signe $\int$ contenant une des différentielles $d^{n-p+1}F_1$, $d^{n-p+2}F_1$, ... Ces termes sont nuls identiquement, puisque F_1 est un polynôme de degré $n-p$.

Posons, pour abréger,

$$U = (\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^p;$$

on aura

$$dU = p(\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu)^{p-1}(\varphi'_1 dx_1 + \varphi'_2 dx_2 + \ldots + \varphi'_\mu dx_\mu)\, du.$$

Mais de l'équation (28) on déduit

$$\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_\mu dx_\mu = -(x_1\varphi'_1 + x_2\varphi'_2 + \ldots + x_\mu \varphi'_\mu + \psi')\, du;$$

ceci nous montre que dU sera divisible par U. Par suite, il en sera de même de $d^n f$ et de toutes les différentielles de f à partir de celle-là.

12. Il nous reste à traiter le cas où $d^n f$ et $d^{n+1} f$ admettent un diviseur commun non linéaire par rapport aux dx_i, sans que ce facteur soit une puissance exacte d'un facteur linéaire ; soit H ce diviseur commun. Si l'on attribue à toutes les variables x_i, sauf à deux d'entre elles, x_h et x_k, des valeurs constantes quelconques, tous les dx_i seront nuls, sauf dx_h et dx_k, et H se réduira à une fonction homogène de dx_h et dx_k, que je désignerai par H_{hk}. D'un autre côté, f deviendra une fonction f_{hk} des deux variables x_h et x_k, telle que $d^n f_{hk}$ et $d^{n+1} f_{hk}$ aient le diviseur commun H_{hk}. Comme H n'est pas par hypothèse une puissance parfaite d'une expression linéaire par rapport aux dx_i, il en sera de même en général de H_{hk} par rapport à dx_h et dx_k et la fonction f_{hk} devra, d'après ce que nous avons vu plus haut (n^{os} 5 et 6), se réduire à une fonction rationnelle de x_h et de x_k ou vérifier une équation du second degré

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ces deux variables.

Le raisonnement serait en défaut si H_{hk} était une puissance exacte d'un facteur linéaire; mais il est aisé de faire disparaître cette difficulté. Pour fixer les idées, supposons qu'on ait seulement trois variables x_1, x_2, x_3, et soit

$$H = A\,dx_1^2 + A'\,dx_2^2 + A''\,dx_3^2 + 2B\,dx_2\,dx_3 + 2B'\,dx_3\,dx_1 + 2B''\,dx_1\,dx_2;$$

on aura

$$H_{12} = A\,dx_1^2 + A'\,dx_2^2 + 2B''\,dx_1\,dx_2.$$

Si $B''^2 - AA' = 0$, H_{12} sera un carré parfait. Géométriquement, si l'on regarde dx_1, dx_2, dx_3 comme les coordonnées d'un point, l'équation $H = 0$ représentera un cône ayant son sommet à l'origine et la condition $B''^2 - AA' = 0$ exprime que ce cône est tangent à l'un des plans de coordonnées. Mais, si le cône $H = 0$ ne se réduit pas à un plan double, c'est-à-dire si H n'est pas un carré parfait, on peut toujours, par une substitution linéaire

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha\,y_1 + \beta\,y_2 + \gamma\,y_3,\\ x_2 &= \alpha'\,y_1 + \beta'\,y_2 + \gamma'\,y_3,\\ x_3 &= \alpha''\,y_1 + \beta''\,y_2 + \gamma''\,y_3,\end{aligned}\right.$$

prendre pour plans de coordonnées trois plans non tangents à ce cône, de sorte qu'aucune des expressions H_{12}, H_{23}, H_{13} ne soit un carré parfait. On lève de même la difficulté dans le cas général. Nous avons donc, en premier lieu, à résoudre le problème suivant :

Trouver la forme la plus générale d'une fonction de μ variables indépendantes, telle que, si l'on attribue des valeurs constantes quelconques à $\mu - 2$ de ces variables, elle devienne une fonction rationnelle des deux variables restantes ou ne renferme d'autre irrationnalité qu'un radical carré portant sur une fonction entière de ces deux variables.

Nous voyons, de plus, que, si l'on effectue sur les variables x_i une substitution linéaire de la forme

$$x_i = \sum_{k=}^{k=\mu} a_{ik} y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

la même propriété devra subsister par rapport aux variables y_i. On aperçoit immédiatement deux catégories de fonctions répondant à la question : ce sont les fonctions rationnelles de toutes les variables x_i et celles qui ne contiennent d'autre irrationnalité qu'un radical carré portant sur une fonction entière de ces variables. J'ajoute qu'il n'y en a pas d'autres en dehors de ces deux catégories. Pour plus de netteté, supposons qu'il n'y ait que trois variables x_1, x_2, x_3; le raisonnement est, du reste, tout à fait général. Admettons d'abord que, quand on attribue à une des variables une valeur constante quelconque, la fonction f devient une fonction rationnelle des deux autres. Alors la fonction inconnue f sera de la forme

$$f = \frac{P(x_1, x_2)}{Q(x_1, x_2)},$$

P et Q étant les fonctions entières de x_1 et de x_2 dont les coefficients sont des fonctions de x_3. Mais, d'autre part, quand on suppose x_2 constant, f devient une fonction rationnelle de x_3; il faut donc que ces coefficients soient eux-mêmes des fonctions rationnelles de x_3 et, par suite, f sera le quotient de deux fonctions entières par rapport aux trois variables.

Si la fonction f contient un radical carré quand on fera $x_3 =$ const., elle sera de la forme

$$f = \frac{P + Q\sqrt{R}}{T},$$

P, Q, R et T étant des fonctions entières de x_1 et de x_2 dont les coefficients sont fonctions de x_3. Supposons que R contienne x_1; quand on fera en second lieu $x_2 =$ const., f ne pourra dépendre encore que d'un radical carré, ce qui exige que ces coefficients dépendent rationnellement de x_3. Une fois la proposition établie pour le cas de trois variables, on peut remonter de proche en proche au cas d'un nombre quelconque de variables.

13. Supposons d'abord que f soit de la forme $f = \frac{P + Q\sqrt{R}}{T}$, P, Q, R et T étant des fonctions entières de toutes les variables, telles que R n'est pas carré parfait et ne contient aucun facteur carré parfait, et que

P, Q, T n'ont aucun facteur commun. D'après une remarque faite plus haut, on peut supposer, en outre, que R contient toutes les variables et ne se réduit dans aucun cas à un carré parfait, quand on suppose que l'on attribue des valeurs constantes à toutes les variables, sauf deux.

Cela posé, si l'on donne à tous les x_i des valeurs constantes quelconques, sauf aux deux variables x_h et x_k, T devra se réduire à une constante (n° 9). Il en résulte que T se réduit à une constante par rapport à toutes les variables; on verrait de même que P, Q, R sont des polynômes de degrés $n-2$, n, 2 respectivement. Abstraction faite du polynôme P, on voit que la fonction sera de la forme

$$f = Q(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)\sqrt{R(x_1, x_2, \ldots, x_\mu)},$$

Q étant un polynôme arbitraire de degré $n-2$ et R un polynôme du second degré. Pour trouver le facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$, on n'a qu'à reprendre exactement le raisonnement du n° 9. Soit

$$R(x_i + h\,dx_i) = A + 2Bh + Ch^2,$$

si $Q(x_i)$ est divisible par $[R(x_i)]^{\mu-1}$ sans l'être par $[R(x_i)]^\mu$, le facteur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$ sera

$$(B^2 - AC)^\mu.$$

14. Si f est une fonction rationnelle des variables x_i, on pourra écrire

$$f = \frac{P}{Q},$$

P et Q étant des polynômes entiers par rapport à ces variables sans aucun facteur commun. D'après ce que nous avons vu plus haut, quand on attribue des valeurs constantes quelconques à toutes les variables, sauf deux, Q deviendra une puissance parfaite d'une fonction linéaire de ces deux variables. A plus forte raison, si l'on attribue à toutes les variables, sauf une, des valeurs constantes quelconques, Q deviendra une puissance parfaite d'une fonction linéaire de cette variable. La même propriété subsistant quand on effectue la substitution linéaire la plus générale de la forme précédente, on en conclut que Q est une puissance parfaite d'une fonction linéaire de toutes les variables

$$Q = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_\mu x_\mu + a)^p.$$

On verrait de même que P sera de degré $n+p-1$. Par une substitution linéaire, on pourra mettre f sous la forme

$$f = \frac{P}{x_1^p}; \tag{32}$$

imaginons qu'on ait ordonné P suivant les puissances croissantes de x_1,

$$P = P_0 + x_1 P_1 + x_1^2 P_2 + \ldots + x_1^p P_p + \ldots + x_1^{n+p-1} P_{n-p+1}.$$

Voyons comment on devra prendre le polynôme P pour que $d^n f$ et $d^{n+1} f$ aient un diviseur commun d'ordre q par rapport aux différentielles. Attribuons aux variables $x_3, x_4, \ldots, x_\mu$ des valeurs constantes ; l'équation $P = 0$ représente alors une courbe plane qui, d'après ce que nous avons vu, devra avoir q points multiples d'ordre p sur l'axe Ox_2. Il en résulte que $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$ devront être divisibles respectivement par $R^p, R^{p-1}, \ldots, R$, R désignant une fonction entière de x_2 de degré q. On reconnaît bien aisément que R sera une fonction entière de degré q de toutes les variables $x_2, x_3, \ldots, x_\mu$, de sorte que finalement la forme générale de P est la suivante :

$$P = \varphi_0 R^p + \varphi_1 x_1 R^{p+1} + \ldots + x_1^{p-1} \varphi_{p-1} R + x_1^p \psi(x_1, x_2, \ldots, x_\mu), \tag{33}$$

ψ désignant une fonction entière de degré $n-1$.

Inversement, considérons une fonction de la forme

$$f = \varphi_0 \left(\frac{R}{u}\right)^p + \varphi_1 \left(\frac{R}{u}\right)^{p-1} + \ldots + \varphi_{p-1} \left(\frac{R}{u}\right) + \varphi_p,$$

où les φ sont des fonctions entières, R une fonction entière de degré q et u une fonction linéaire. Je dis que toutes les différentielles à partir de $d^n f$ sont divisibles par un même diviseur, de degré q par rapport aux différentielles. [Par hypothèse, φ_i est de degré $n+p-1-q(p-i)-i$].

Posons $\pi=\frac{R}{u}$; toutes les différentielles $d^{q+1}\pi$, $d^{q+2}\pi$, ... seront divisibles par $d^q\pi$. Il en résulte que, si $d^q\pi=0$, le développement de f, quand on remplacera x_i par $x_i+h\,dx_i$, se réduira à un polynôme de degré $n-1$ en h; donc toutes les différentielles à partir de $d^n f$ seront nulles quand on aura $d^q\pi=0$. Comme $d^q\pi$ est en général indécomposable, toutes ces différentielles seront divisibles par $d^q\pi$. On peut aussi le voir en calculant les coefficients de h dans le développement.

En définitive, les fonctions qui répondent au problème appartiennent à trois catégories.

I. Les fonctions de la forme

$$f=\int_0^u [x_1\varphi_1(u)+x_2\varphi_2(u)+\ldots+x_\mu\varphi_\mu(u)+\psi(u)]^{p-1}F_1(x_1,x_2,\ldots,x_\mu)\,du,$$

avec la condition

$$x_1\varphi_1(u)+x_2\varphi_2(u)+\ldots+x_\mu\varphi_\mu(u)+\psi(u)=0,$$

F_1 désignant une fonction entière des x_i de degré $n-p$ dont les coefficients dépendent de u.

II. Les fonctions de la forme

$$f=Q(x_1,x_2,\ldots,x_\mu)\sqrt{R(x_1,x_2,\ldots,x_\mu)},$$

Q étant un polynôme de degré $n-2$ et R une fonction entière du second degré.

III. Les fonctions rationnelles de la forme suivante

$$f=\varphi_0\left(\frac{R}{u}\right)^p+\varphi_1\left(\frac{R}{u}\right)^{p-1}+\ldots+\varphi_{p-1}\left(\frac{R}{u}\right)+\varphi_p,$$

où φ_i est une fonction entière de degré $n+p-1-q(p-i)-i$, où R est une fonction entière de degré q et u une fonction linéaire. Il est bien entendu qu'à chaque solution on peut ajouter un polynôme arbitraire de degré $n-1$.

On a vu plus haut comment le diviseur commun à $d^n f$ et à $d^{n+1} f$ pouvait être obtenu dans chaque cas particulier.