KRONECKER

Note de M. Kronecker sur ses travaux algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 3 (1866), p. 279-286

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1866_1_3__279_0>

NOTE DE M. KRONECKER

SUR

SES TRAVAUX ALGÉBRIQUES.

(*Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 27 juin 1861.)

TRADUIT PAR M. HOÜEL,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX.

Je suis parvenu récemment à résoudre une question dont je m'étais occupé à diverses reprises depuis cinq ans, et à laquelle je suis toujours revenu, parce que sa solution devait décider de la direction ultérieure de mes recherches algébriques. Mes études sur la résolution algébrique des équations m'ont très-promptement fait apercevoir que le problème est susceptible de généralisation à deux points de vue différents : d'une part, on peut supposer qu'au lieu des coefficients de l'équation, c'est-à-dire au lieu des fonctions symétriques des racines, on donne des fonctions rationnelles plus générales de ces racines, que j'appelle *fonctions affectées;* d'autre part, au lieu des signes radicaux ordinaires, c'est-à-dire des signes de fonctions définis par des équations pures (équations binômes), on peut introduire des fonctions algébriques plus générales, pour servir de fonctions auxiliaires dans la résolution. Le premier point de vue de cette généralisation a déjà été considéré, du moins implicitement, dans des travaux algébriques plus anciens; mais ce n'est que tout récemment que le second point de vue a été traité simultanément par M. Hermite et par moi. Cependant la voie que j'ai suivie était toute différente de celle de M. Hermite, et, par exemple, une condition que je m'étais imposée dans la méthode de résolution m'a causé des difficultés dans la question des équations du cinquième degré; mais, d'un autre côté, comme cette condition est fondée sur la nature même du sujet, elle m'a conduit en même temps à d'autres recherches intéressantes.

Si une équation est résoluble algébriquement, on peut toujours donner à la racine *une forme telle, que toutes les fonctions algébriques dont elle se compose soient exprimables par des fonctions rationnelles des racines de l'équation donnée.*

Tel est l'énoncé d'un théorème d'Abel qui exprime une propriété extrêmement importante des radicaux ordinaires. C'est cette propriété qui doit encore subsister dans les expressions plus générales des racines des équations qui ne sont pas résolubles dans l'acception ordinaire du mot, et c'est d'après cette condition qu'il faudra choisir les nouveaux signes de fonctions algébriques à l'aide desquels la résolution des équations deviendra possible dans un sens plus général.

La condition en question, que je me propose d'étudier de plus près dans un travail plus étendu, m'a conduit, dans mes recherches sur les équations du cinquième degré, à chercher des fonctions rationnelles des cinq racines dont les diverses valeurs distinctes, résultant de la permutation des racines, eussent entre elles le plus grand nombre possible de relations identiques. En n'admettant, pour des raisons faciles à apercevoir, que les permutations qui laissent invariable la racine carrée du discriminant de l'équation du cinquième degré, j'ai trouvé effectivement une fonction rationnelle à douze valeurs des cinq racines, jouissant de cette propriété, que ces douze valeurs sont deux à deux égales et de signe contraire, et que leurs six valeurs absolues différentes sont liées entre elles par trois relations linéaires. Le carré d'une telle fonction est donc racine d'une équation du sixième degré, dont les coefficients sont formés rationnellement au moyen de ceux de l'équation du cinquième degré et de la racine carrée du discriminant, et ne dépendent que de trois expressions rationnelles de cette sorte. La découverte de cette espèce de fonctions m'a permis d'abord d'employer presque sans aucun calcul l'équation modulaire relative à la transformation du cinquième ordre pour la résolution de l'équation du cinquième degré, et j'ai communiqué deux de ces fonctions remarquables à M. Hermite, dans une lettre insérée aux *Comptes rendus* de l'Académie de Paris pour l'année 1858; en second lieu, il m'est ainsi devenu possible de résoudre l'équation générale du cinquième degré d'une manière qui satisfait à la condition en question, mais seulement, à la vérité, en me servant de fonctions algébriques de *deux* variables. Pour mieux faire comprendre ce point important, posons

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum\sum \sin\frac{2n\pi}{5}\, x_m x_{m+n}^2 x_{m+2n}^2,$$

x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 désignant les racines de l'équation du cinquième degré $X = 0$; les signes de sommation s'étendant aux valeurs

$$m = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \text{et} \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

et les indices devant être réduits à leur plus petit reste suivant le module 5. Alors

$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ satisfait à une équation du douzième degré,

$$(\mathrm{I}) \qquad (f^2+a)^6 + 4a(f^2+a)^5 + 10b(f^2+a)^3 + 4c(f^2+a) - 4ac + 5b^2 = 0,$$

a, b, c étant trois fonctions entières et rationnelles, à deux valeurs, des cinq racines x. Mais il existe encore, outre la fonction f, une infinité d'autres fonctions rationnelles des racines x, possédant la même propriété de satisfaire à des équations du douzième degré de la forme indiquée (*); et, parmi les fonctions rationnelles *fractionnaires* de cette espèce, il y en a encore pour lesquelles les expressions correspondantes à a, b, c ne dépendent que de deux fonctions rationnelles à deux valeurs,

$$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \psi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Une fonction de cette nature plus particulière est donc une fonction algébrique implicite donnée de φ et de ψ, et peut, par conséquent, être désignée par $W(\varphi, \psi)$. Maintenant les fonctions f formant un cycle, et l'équation $X = 0$ étant par suite résoluble au moyen de ces fonctions, les racines de l'équation générale du cinquième degré pourront se représenter explicitement à l'aide de racines carrées et cinquièmes et du signe de fonction W, et cela de manière à satisfaire complétement à la condition indiquée plus haut.

Tous ces résultats se sont présentés à moi en substance, comme conséquence immédiate de la découverte de cette fonction f. Mais il s'agissait à présent de savoir si la question se trouvait ainsi épuisée, c'est-à-dire s'il était impossible de ramener la fonction algébrique de deux variables W à une fonction d'*une seule* variable. On sait depuis longtemps qu'une telle réduction est en effet possible, dès qu'on renonce à exiger la condition dont nous avons si souvent parlé, et je l'ai récemment exposé dans une lettre à M. Hermite. En poursuivant mes études j'avais encore obtenu des résultats particuliers relatifs à ce sujet. Mais ce n'est que récemment que j'ai réussi à trouver la réponse à la question principale, et à établir que la réduction de la fonction algébrique W à une fonction d'*une seule* variable, et par suite la résolution de l'équation générale du cinquième degré au moyen de fonctions algébriques d'*une seule variable*, est impossible si l'on veut que le théorème d'Abel que nous avons cité plus haut, et qui a lieu dans la résolution des équations par radicaux, continue à subsister. Ce résultat me semble constituer une extension remarquable de la démonstration donnée par Abel de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations de degré supérieur; et il contient en même temps, pour

(*) *Voyez* à ce sujet les développements de M. Brioschi, dans sa Note intitulée : *Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado* (lu devant l'Institut lombard, le 25 novembre 1858). C'est aussi dans cette Note qu'a été donnée pour la première fois, pour une fonction particulière f, l'expression complète des coefficients a, b, c, au moyen des invariants de l'équation du cinquième degré.

le cas du cinquième degré, la réponse complète au problème de la résolution. Tant que je n'avais pas obtenu cette réponse, je ne pouvais considérer mon travail comme achevé suffisamment pour être publié.

Il n'y a pas lieu de s'étonner qu'en Algèbre le besoin se fasse sentir ici d'introduire des fonctions de deux variables, bien que ces fonctions soient réductibles en quelque sorte à des fonctions d'*une seule* variable. Il suffit de rappeler qu'en Analyse aussi les fonctions quadruplement périodiques de deux variables ont été introduites par Jacobi et conservées comme tout à fait conformes à la nature de la question, bien que ces fonctions, comme ce géomètre l'a fait voir dans le tome XXX du *Journal de Crelle*, puissent se former algébriquement au moyen de fonctions d'*une seule* variable. Sans poursuivre plus loin cette analogie, je reviens aux équations du cinquième degré, pour présenter encore quelques remarques qui se rattachent à la forme de solution que j'ai indiquée.

Si l'on désigne, comme précédemment, par $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ une des fonctions qui satisfont à une équation de la forme (I), et que l'on pose

$$f_k = f(x_k, x_{k+3}, x_{k+4}, x_{k+1}, x_{k+2}),$$

$\pm f$, $\pm f_0$, $\pm f_1$, $\pm f_2$, $\pm f_3$, $\pm f_4$ seront les douze racines différentes de cette équation. Or il y a des fonctions rationnelles des six quantités différentes f, qui sont les racines d'équations du cinquième degré dont les coefficients sont formés rationnellement au moyen de a, b, c. Si l'on désigne par φ une de ces fonctions des quantités f, φ sera aussi une fonction rationnelle des racines x elles-mêmes; et cette fonction sera telle, que, si on la met sous la forme d'une fonction entière et rationnelle d'une des racines x, ses coefficients ne contiendront que ceux de l'équation $X = 0$ et la racine carrée du discriminant de cette équation, et les contiendront rationnellement. On fait voir aussi, sans calcul, que le produit

$$(f - f_0)(f_1 - f_4)(f_2 - f_3),$$

qui est compris parmi les fonctions désignées par φ, satisfait à une équation du cinquième degré, dont le second coefficient ainsi que le quatrième sont nuls. Ce résultat, qui est d'un intérêt tout particulier, ressort d'ailleurs de l'une des Notes si remarquables dont M. Brioschi a fait suivre son compte rendu de la résolution de l'équation du cinquième degré d'après M. Hermite. Depuis, dans une lettre adressée récemment à M. Borchardt, qui l'a insérée dans son journal, M. Hermite a indiqué une fonction particulière des racines d'une équation du cinquième degré, qui fait partie de ces fonctions φ, et qui offre un intérêt particulier tant à cause de sa simplicité que de ses relations avec les invariants de l'équation. Mais le point essentiel de cette théorie, qui ressort des considérations les plus simples sur les fonctions f, peut se résumer dans l'énoncé suivant :

Parmi les fonctions rationnelles à dix valeurs des cinq quantités x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, qui, par toutes les permutations circulaires de ces quantités prises trois à trois, ne peuvent prendre que cinq valeurs, il y en a pour lesquelles les fonctions symétriques de ces cinq valeurs ne dépendent que de deux fonctions des quantités x; il y a, de plus, parmi elles, des fonctions particulières, pour lesquelles la somme des cinq valeurs elles-mêmes s'évanouit identiquement, ainsi que la somme des cubes de ces valeurs.

Les équations particulières du cinquième degré, telles, par exemple, que les équations de la forme

$$z^5 + pz^2 + qz + r = 0,$$

définissent des fonctions algébriques qui dépendent essentiellement de deux variables; ainsi se trouvent introduites des fonctions algébriques qui pourraient être employées aussi bien que la fonction W dans la résolution de l'équation du cinquième degré. Mais, en vue de certains problèmes de résolution plus généraux, l'emploi de l'équation ci-dessus du douzième degré, comme équation auxiliaire, mérite la préférence, et une discussion plus approfondie de cette équation en fait reconnaître les nombreuses et remarquables propriétés, et montre en même temps les diverses formes que l'emploi de la fonction W permet de donner aux racines de l'équation du cinquième degré.

En désignant par ω une racine cinquième primitive de l'unité, on a, entre la fonction f définie précédemment et ses valeurs conjuguées, les relations linéaires

$$\begin{gathered}
f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = f.\sqrt{5},\\
f_0 + \omega\, f_1 + \omega^2 f_2 + \omega^3 f_3 + \omega^4 f_4 = 0,\\
f_0 + \omega^4 f_1 + \omega^3 f_2 + \omega^2 f_3 + \omega\, f_4 = 0.
\end{gathered}$$

Ces mêmes relations ont lieu en général pour les six valeurs différentes de f qui se tirent d'une équation de la forme (I), pourvu que l'on choisisse convenablement l'ordre de succession et les signes de ces valeurs, ainsi que la racine cinquième de l'unité. En posant, de plus,

$$c = a'(5b^2 - 4ac), \qquad b = b'(5b^2 - 4ac), \qquad a = c'(5b^2 - 4ac),$$

et

$$f'^2 + a' = \frac{1}{f^2 + a},$$

f' satisfera aussi à l'équation (I), lorsqu'on aura changé, dans celle-ci, les quantités a, b, c en a', b', c', et les différentes racines f', f'_0, f'_1, f'_2, f'_3, f'_4 (prises avec des signes convenables) satisferont aux équations linéaires qui ont lieu entre les quantités f, lorsqu'on remplacera partout ω par ω^2. Mais la fonction rationnelle la plus générale d'une racine f, qui satisfasse à une équation de la forme (I), est donnée par les deux expressions linéaires

$$\lambda\frac{df}{da}+\mu\frac{df}{db}+\nu\frac{df}{dc},\quad \lambda'\frac{df'}{da'}+\mu'\frac{df'}{db'}+\nu'\frac{df'}{dc'},$$

en prenant pour λ, λ',... des fonctions rationnelles de a, b, c. Toutes les fonctions rationnelles et entières de f représentées par ces deux formes contiennent seulement des puissances impaires de cette quantité; et réciproquement, *toute* fonction entière impaire de f peut s'exprimer linéairement au moyen de $\frac{df}{da}$, $\frac{df'}{da'}$, ...

Je réserve pour une prochaine communication le développement des autres propriétés de cette équation du douzième degré. Je ferai voir alors que les plus importantes de ces propriétés conviennent à une classe d'équations générales, qui ont été le point de départ même de mes recherches, et sur lesquelles je vais encore ajouter quelques indications.

Soient n un nombre premier impair, M le multiplicateur de l'une des transformations (de l'ordre n) des fonctions elliptiques. $\sqrt{M}$ est, comme on sait, racine d'une équation du degré $2n+2$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles du module k. Les équations générales de même degré qui ont la *même affection*, ou, suivant l'expression de Galois, le *même groupe*, je les désignerai, pour abréger, en disant qu'elles ont l'affection des équations modulaires. On peut appliquer à cette classe d'équations générales, comme je l'ai déjà énoncé dans ma lettre à M. Hermite citée plus haut, les principes qui, pour le cas particulier de $n=5$, nous ont conduits à la résolution complète de l'équation. On peut, en effet, à l'aide de ces principes, ramener ces équations générales, du degré $2n+2$, à des équations particulières dont les coefficients ne dépendent que de $\frac{1}{2}(n+1)$ quantités; et ce résultat semble d'autant plus remarquable qu'une telle réduction des équations générales, fondée sur leur affection particulière, n'était encore connue que dans le cas des équations résolubles algébriquement, et que dans ce cas même on y avait à peine fait attention à cause de la simplicité du sujet.

Lorsque l'équation de degré $2n+2$, $Z=0$, a l'affection des équations modulaires, en désignant ses racines, prises dans un certain ordre, par z, z_0, z_1, ..., z_{2n}, on peut toujours trouver des fonctions entières et rationnelles de z satisfaisant aux équations linéaires

$$\sum f(z_m)=f(z)\cdot\sqrt{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\cdot n},$$

$$\sum \omega^{rm}\cdot f(z_m)=0.$$

La sommation indiquée par le signe $\sum$ s'étend, dans les deux équations, aux valeurs

$$m = 0, 1, \ldots, n-1;$$

dans la seconde équation, ω désigne une racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, et r un résidu quadratique quelconque de n, de sorte que cette équation en représente $\frac{1}{2}(n-1)$ différentes. Il y a, de plus, des fonctions $f'(z)$ pour lesquelles les mêmes relations linéaires subsistent, lorsqu'on y remplace les exposants r par tous les non-résidus de n. Remarquons enfin qu'il existe précisément $\frac{1}{2}(n+1)$ fonctions fz et autant de fonctions $f'(z)$, entre lesquelles il n'y a point de dépendance linéaire.

Chacune des fonctions $f(z)$ est racine d'une équation de degré $2n+2$, dont les coefficients sont formés rationnellement au moyen de ceux de l'équation $Z = 0$. Si, pour une fonction $f(z)$ déterminée, ces coefficients contiennent une variable quelconque α, tous les rapports différentiels

$$\frac{df}{d\alpha}, \quad \frac{d^2 f}{d\alpha^2}, \ldots$$

seront aussi évidemment des fonctions rationnelles de z et, de plus, des fonctions appartenant à la classe générale des fonctions $f(z)$. La fonction $f(z)$ elle-même forme, avec ses $\frac{1}{2}(n-1)$ premières dérivées par rapport à α, un système de fonctions linéairement indépendantes, et par suite la $\frac{1}{2}(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée sera une fonction linéaire des précédentes. La fonction $f(z)$, qui est en même temps une fonction algébrique implicite donnée de α, satisfait donc, en cette qualité, à une équation différentielle linéaire de l'ordre $\frac{1}{2}(n+1)$, dont l'intégrale complète peut être représentée par

$$\sum_i \sum_m C_i \omega^{im} f(z_m),$$

i devant être égalé successivement à zéro et aux divers non-résidus, tandis que m prendra toutes les valeurs entières de zéro à $n-1$, et C_i désignant les diverses constantes d'intégration.

Pour les équations modulaires elles-mêmes, Jacobi a déjà indiqué, dans le tome III du *Journal de Crelle*, les relations linéaires qui existent entre les racines carrées des $n+1$ multiplicateurs différents de la transformation d'ordre n. Ces relations peuvent aisément se ramener à la même forme que j'ai donnée tout à l'heure aux équations linéaires entre les fonctions $f(z)$. Soient M un des multiplicateurs et k le module des fonctions elliptiques. Dans le cas particulier des équations modulaires, aux fonctions $f(z)$ correspondent certaines fonctions rationnelles de $\sqrt{M}$ et de k, et ces fonctions sont toutes de la forme

$$B.\varphi(k) + B'.\varphi_1(k) + B''.\varphi_2(k) + \ldots + B^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}.\varphi_{\frac{1}{2}(n-1)}(k),$$

$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ étant des fonctions rationnelles, et $B, B', B'', \ldots$ désignant, comme dans le Mémoire de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. IV, p. 185), les divers coefficients de la formule de transformation. Dans le Mémoire que je viens de citer, Jacobi a donné une équation aux différentielles partielles à laquelle satisfont le numérateur et le dénominateur de la formule de transformation. A l'aide de cette équation on peut exprimer $B', B'', \ldots$ linéairement au moyen de B et de ses dérivées prises par rapport à $\alpha = k + \frac{1}{k}$, et de là résulte immédiatement, en ayant égard aux propriétés énoncées plus haut des fonctions générales $f(z)$, cette forme particulière de ces fonctions qui convient aux équations modulaires.