ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. DEMARTRES

Sur les surfaces à génératrice circulaire

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 2 (1885), p. 123-182
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1885_3_2__123_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES

SURFACES A GÉNÉRATRICE CIRCULAIRE,

PAR M. G. DEMARTRES,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE DOUAI.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

1. Considérons un système invariable dont la position dans l'espace dépende d'un paramètre unique l, et soit OXYZ un trièdre trirectangle faisant partie de ce système. Le plan XOY enveloppe une surface développable et l'axe instantané de rotation relatif au point O se trouve dans un même plan avec OZ et la caractéristique du plan XOY. Supposons que OX ait été pris parallèle à cette caractéristique, on pourra passer d'une position du système à la position infiniment voisine par une translation égale et parallèle au déplacement du point O, suivie d'une rotation. Soient

$$u\,dl,\ v\,dl,\ w\,dl$$

les composantes du déplacement de O suivant OX, OY, OZ;

$$p\,dl,\ r\,dl$$

les rotations composantes autour de OX, OZ.

Les coordonnées d'un point quelconque de l'espace par rapport à ces trois axes mobiles sont, en général, des fonctions de l et de deux autres variables φ, ψ, dont dépend le mouvement relatif du point; si l'on désigne par dx, dy, dz les différentielles totales de ces coordonnées, par δx, δy, δz les accroissements qu'elles acquièrent relativement

à un système d'axes fixes qui, avant le déplacement, coïncideraient avec les axes mobiles, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} \delta x = dx + (u - ry)\,dl, \\ \delta y = dy + (v + rx - pz)\,dl, \\ \delta z = dz + (w + py)\,dl. \end{cases}$$

De même, si A, B, C désignent les cosinus directeurs, relativement à OX, OY, OZ, d'une direction variable, suivant une loi quelconque, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \delta A = dA - rB\,dl, \\ \delta B = dB + (rA - pC)\,dl, \\ \delta C = dC + pB\,dl. \end{cases}$$

Les quantités qui figurent dans ces formules ont un sens géométrique très simple.

Si l'on choisit pour l l'arc de la trajectoire du point O, u, v, w sont les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe, relativement aux axes mobiles; il est d'ailleurs préférable, pour ne pas écarter le cas où le point O serait fixe, de ne pas fixer *a priori* le sens de cette variable l.

Quant à $p\,dl$, $r\,dl$, ce sont évidemment les angles de torsion et de contingence de l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan XOY. Les équations de la caractéristique sont

$$z = 0, \quad w + py = 0.$$

Si l'on considère le point où cette droite coupe l'axe OY, on pourra calculer les variations de ses coordonnées à l'aide des relations (1); on aura de même les variations des cosinus directeurs de OX, en faisant $A = 1$, $B = C = 0$ dans les formules (2); on obtiendra ainsi les équations de la caractéristique infiniment voisine et, par suite, les coordonnées du point correspondant de l'arête de rebroussement; on trouve ainsi

$$z = 0, \quad w + py = 0, \quad x = -\frac{v}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{w}{p}\right)',$$

un accent désignant, ici et dans la suite, une dérivée prise par rapport à l.

2. Considérons maintenant, dans le plan XOY, un cercle de centre O et de rayon variable R. Ce cercle, si R est une fonction de l seulement, engendrera une surface cerclée de l'espèce la plus générale, et toute ligne tracée sur cette surface pourra être considérée comme la trajectoire absolue d'un point M ayant, sur le cercle, un mouvement relatif déterminé. Soit φ l'angle MOX; les coordonnées de M étant $R\cos\varphi$, $R\sin\varphi$, o, nous aurons (1)

$$\begin{aligned}
\delta x &= u\,dl + (R'\cos\varphi - rR\sin\varphi)\,dl - R\sin\varphi\,d\varphi,\\
\delta y &= v\,dl + R'\sin\varphi\,dl + R\cos\varphi\,d\varphi + rR\cos\varphi\,dl,\\
\delta z &= (w + pR\sin\varphi)\,dl.
\end{aligned}$$

Nous poserons

$$(3)\qquad \begin{cases} M = u\cos\varphi + v\sin\varphi + R', \\ N = rR + v\cos\varphi - u\sin\varphi, \quad H^2 = M^2 + Q^2, \\ Q = w + pR\sin\varphi, \end{cases}$$

et nous aurons, en appelant δs le déplacement infiniment petit du point M, i l'inclinaison de ce déplacement sur la génératrice circulaire, le Tableau suivant :

$$(4)\qquad \begin{cases} \delta x = M\cos\varphi.dl - (N\,dl + R\,d\varphi)\sin\varphi, \\ \delta y = M\sin\varphi.dl + (N\,dl + R\,d\varphi)\cos\varphi, \\ \delta z = Q\,dl, \\ \delta s^2 = (M^2 + Q^2)\,dl^2 + (N\,dl + R\,d\varphi)^2, \\ \delta s\sin i = H\,dl, \\ \delta s\cos i = N\,dl + R\,d\varphi. \end{cases}$$

L'aire comprise entre deux cercles infiniment voisins est évidemment

$$(5)\qquad dS = R\,dl\int_0^{2\pi} H\,d\varphi.$$

C'est, comme on voit, une intégrale elliptique dans le cas général; elle s'obtient à l'aide des fonctions élémentaires si M et Q, envisagés comme fonctions de $\tang\frac{\varphi}{2}$, ont un facteur linéaire commun; nous verrons, dans la seconde Partie, que c'est la condition nécessaire et suffi-

sante pour que la génératrice considérée ait un point commun avec la génératrice infiniment voisine.

Observons aussi que les trajectoires orthogonales des génératrices ont pour équation

$$(r\mathrm{R} + v\cos\varphi - u\sin\varphi)\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi = 0.$$

Nous y reviendrons dans la seconde Partie.

3. *Courbure géodésique.* — La quatrième des équations (4) peut s'écrire

$$\delta s^2 = (\mathrm{H}^2 + \mathrm{N}^2)\,dl^2 + 2\,\mathrm{RN}\,dl\,d\varphi + \mathrm{R}^2\,d\varphi^2.$$

D'après la formule connue, si $\frac{1}{\rho_g}$ désigne la courbure géodésique d'un élément incliné d'un angle i sur la courbe $l = \text{const.}$, ω l'angle des deux lignes coordonnées, on a

$$\frac{\mathrm{R}\sqrt{\mathrm{H}^2+\mathrm{N}^2}}{\rho_g}\sin\omega = \frac{\partial(\mathrm{R}\cos i)}{\partial l} - \frac{\partial\left[\sqrt{\mathrm{H}^2+\mathrm{N}^2}\cos(\omega - i)\right]}{\partial\varphi}.$$

Or ici

$$(6)\quad \sin\omega = \frac{\mathrm{H}}{\sqrt{\mathrm{H}^2+\mathrm{N}^2}},\quad \cos\omega = \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{\mathrm{H}^2+\mathrm{N}^2}},\quad \cos(\omega - i) = \frac{\mathrm{N}\cos i + \mathrm{H}\sin i}{\sqrt{\mathrm{H}^2+\mathrm{N}^2}};$$

d'où

$$(7)\qquad \frac{\mathrm{RH}}{\rho_g} = \frac{\partial(\mathrm{R}\cos i)}{\partial l} - \frac{\partial(\mathrm{N}\cos i + \mathrm{H}\sin i)}{\partial\varphi}.$$

Développons le second membre de cette équation et remplaçons-y $\sin i$, $\cos i$ par $\mathrm{H}\frac{dl}{ds}$, $\frac{\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi}{ds}$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{ds\,\mathrm{RH}}{\rho_g} = {} & \mathrm{R}'(\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi) - \frac{\partial\mathrm{N}}{\partial\varphi}(\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi) - \mathrm{H}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\varphi}\,dl \\ & - \mathrm{RH}\frac{\partial i}{\partial l}\,dl + \mathrm{NH}\frac{\partial i}{\partial\varphi}\,dl - (\mathrm{N}\,dl + \mathrm{R}\,d\varphi)\,\mathrm{H}\frac{\partial i}{\partial\varphi}.\end{aligned}$$

Si nous tenons compte des relations (3), cette équation se simplifie et devient

$$(8)\qquad \mathrm{RH}\frac{ds}{\rho_g} = \left(\mathrm{MN} - \mathrm{H}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\varphi}\right)dl + \mathrm{RM}\,d\varphi - \mathrm{RH}\,di.$$

On aura, d'après cela, les lignes géodésiques, en intégrant les deux équations simultanées

$$(9)\qquad \begin{cases} \left(\mathrm{MN} - \mathrm{H}\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial \varphi}\right) dl + \mathrm{RM}\, d\varphi - \mathrm{RH}\, di = 0, \\ (\mathrm{N}\, dl + \mathrm{R}\, d\varphi) \sin i = \mathrm{H}\, dl \cos i. \end{cases}$$

4. *Normales, plans tangents.* — Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale au point $(l\varphi)$. Si nous écrivons que cette droite est normale à la génératrice et à sa trajectoire orthogonale, c'est-à-dire à deux droites ayant pour coefficients de direction, l'une

$$-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0,$$

l'autre

$$\mathrm{M}\cos\varphi,\ \mathrm{N}\sin\varphi,\ 0;$$

en posant

$$(10)\qquad \mathrm{Q} = \mathrm{H}\sin \mathrm{V},\quad \mathrm{M} = \mathrm{H}\cos \mathrm{V},$$

nous aurons

$$(11)\qquad \begin{cases} \lambda = \sin \mathrm{V}\cos\varphi, \\ \mu = \sin \mathrm{V}\sin\varphi, \\ \nu = -\cos \mathrm{V}. \end{cases}$$

V est, par conséquent, l'angle que fait le plan tangent avec le plan de la génératrice; sa valeur est fournie par les relations (10). Quant à l'équation même du plan tangent, c'est

$$(12)\qquad \mathrm{X}\cos\varphi + \mathrm{Y}\sin\varphi - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Q}}\, z = \mathrm{R}.$$

Si l'on se déplace sur la surface, les variations des cosinus directeurs de la normale se calculeront en appliquant les relations (2) à λ, μ, ν, ce qui donne

$$\begin{aligned} \delta\lambda &= \cos \mathrm{V}\cos\varphi\, d\mathrm{V} - \sin \mathrm{V}\sin\varphi\, d\varphi - r\sin \mathrm{V}\sin\varphi\, dl, \\ \delta\mu &= \cos \mathrm{V}\sin\varphi\, d\mathrm{V} + \sin \mathrm{V}\cos\varphi\, d\varphi + r\sin \mathrm{V}\cos\varphi\, dl + p\cos \mathrm{V}\, dl, \\ \delta\nu &= \sin \mathrm{V}(d\mathrm{V} + p\sin\varphi\, dl). \end{aligned}$$

Nous poserons, pour simplifier [1],

$$(13)\qquad \begin{cases} -d\psi = d\varphi + r\,dl + p\cot V\cos\varphi\,dl, \\ d\chi = dV + p\sin\varphi\,dl, \end{cases}$$

et il viendra, en appelant $d\omega$ l'angle de deux normales infiniment voisines,

$$(14)\qquad \begin{cases} \delta\lambda = \sin V\sin\varphi\,d\psi + \cos V\cos\varphi\,d\chi, \\ \delta\mu = -\sin V\cos\varphi\,d\psi + \cos V\sin\varphi\,d\chi, \\ \delta\nu = \sin V\,d\chi, \\ d\omega^2 = d\chi^2 + \sin^2 V\,d\psi^2. \end{cases}$$

Le sens géométrique de l'angle $d\chi$ résulte nettement de la dernière des équations (14); il est aisé de donner pour $d\psi$ une interprétation géométrique également simple. En effet, l'angle que la trace du plan tangent sur XOY fait avec OX a pour tangente $\frac{\lambda}{\mu}$; l'angle infiniment petit dont tourne cette trace, le plan XOY étant supposé fixe et ne coïncidant avec le plan du cercle qu'à l'origine du déplacement, aura donc pour valeur

$$\frac{\mu\,\delta\lambda - \lambda\,\delta\mu}{\mu^2 + \lambda^2}.$$

Or si, dans cette expression, nous remplaçons λ, μ, $\delta\lambda$, $\delta\mu$ par leurs valeurs, elle se réduit précisément à $d\psi$; $d\psi$ n'est donc autre chose que l'angle dont a tourné la trace du plan tangent sur le plan fixe avec lequel coïncidait le plan du cercle avant le déplacement.

On peut avoir besoin d'évaluer $d\psi$, $d\chi$ en fonction du déplacement δs et de son inclinaison; il faut pour cela, dans les équations qui les définissent, remplacer dl et $d\varphi$ par leurs valeurs tirées des équations (4); on trouve ainsi

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{\delta s} = -\dfrac{1}{R}\cos i + \left(\dfrac{N}{RH} - \dfrac{p}{H}\cot V\cos\varphi - \dfrac{r}{H}\right)\sin i, \\ \dfrac{d\chi}{\delta s} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\cos i + \dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial V}{\partial l} + p\sin\varphi - \dfrac{N}{R}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\sin i. \end{cases}$$

---

[1] La méthode suivie ici, pour trouver les équations relatives aux éléments différentiels du second ordre, est évidemment applicable sans modification à une surface définie par une génératrice de nature quelconque, et les équations trouvées ici conserveraient la même forme dans le cas général; les valeurs particulières de $d\psi$, $d\chi$ caractérisent seules les surfaces spéciales que nous avons en vue.

II.

1. *Torsion géodésique. Lignes de courbure. Ombilics.* — L'angle de torsion géodésique d'un élément ayant pour cosinus directeurs α, β, γ est donné par la formule

$$d\tau_g = \alpha(\mu\,\delta\nu - \nu\,\delta\mu) + \beta(\nu\,\delta\lambda - \lambda\,\delta\nu) + \gamma(\lambda\,\delta\mu - \mu\,\delta\lambda).$$

Or on a (11), (14)

$$\begin{aligned}
\mu\,\delta\nu - \nu\,\delta\mu &= -\sin V\cos V\cos\varphi\,d\psi + \sin\varphi\,d\chi,\\
\nu\,\delta\lambda - \lambda\,\delta\nu &= -\sin V\cos V\sin\varphi\,d\psi - \cos\varphi\,d\chi,\\
\lambda\,\delta\mu - \mu\,\delta\lambda &= -\sin^2 V\,d\psi.
\end{aligned}$$

D'autre part, les équations (4) donnent

$$\begin{aligned}
\alpha\,ds &= M\cos\varphi\,dl - (N\,dl + R\,d\varphi)\sin\varphi,\\
\beta\,ds &= M\sin\varphi\,dl + (N\,dl + R\,d\varphi)\cos\varphi,\\
\gamma\,ds &= Q\,dl
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos V\cos\varphi\sin i - \sin\varphi\cos i,\\
\beta &= \cos V\sin\varphi\sin i + \cos\varphi\cos i,\\
\gamma &= \sin V\sin i.
\end{aligned}$$

Portons ces valeurs dans l'expression de $d\tau_g$; nous aurons

$$\begin{aligned}
d\tau_g = \quad & (\sin\varphi\,d\chi - \sin V\cos V\cos\varphi\,d\psi)(\cos V\cos\varphi\sin i - \sin\varphi\cos i)\\
& - (\cos\varphi\,d\chi - \sin V\cos V\sin\varphi\,d\psi)(\cos V\sin\varphi\sin i + \cos\varphi\cos i)\\
& - \sin^3 V\sin i\,d\psi
\end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$(16)\qquad -d\tau_g = \cos i\,d\chi + \sin V\sin i\,d\psi.$$

On en conclut, pour l'équation des lignes de courbure,

$$(17)\qquad \cos i\,d\chi + \sin V\sin i\,d\psi = 0.$$

Si l'on veut n'y introduire que l'angle i, on devra y remplacer $d\psi$,

$d\chi$ par leurs valeurs tirées des équations (15), ce qui donne immédiatement

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\cos^2 i + \left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial l} + \frac{pR\sin\varphi - Q}{RH} - \frac{N}{RH}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\sin i\cos i$$
$$+\left(\frac{NQ}{RH^2} - \frac{pM\cos\varphi}{H^2} - \frac{rQ}{H^2}\right)\sin^2 i = 0$$

ou, en simplifiant,

$$(18)\qquad 2H\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cot 2i = N\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \varpi - R\frac{\partial V}{\partial l}.$$

Les équations des ombilics s'obtiendront en exprimant que les directions principales sont indéterminées, ce qui donne

$$(19)\qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0,\quad \varpi - R\frac{\partial V}{\partial l} = 0.$$

2. *Lignes asymptotiques. Courbures principales.* — Si nous conservons les notations du numéro précédent, l'équation des lignes asymptotiques est

$$\alpha\,\delta\lambda + \beta\,\delta\mu + \gamma\,\delta\nu = 0$$

ou, d'après les formules employées dans ce même numéro,

$$(\sin V\sin\varphi\, d\psi + \cos V\cos\varphi\, d\chi)(\cos V\cos\varphi\sin i - \sin\varphi\cos i)$$
$$+(-\sin V\cos\varphi\, d\psi + \cos V\sin\varphi\, d\chi)(\cos V\sin\varphi\sin i + \cos\varphi\cos i)$$
$$+\sin i\sin^2 V\, d\chi = 0$$

ou, en simplifiant,

$$(20)\qquad \sin i\, d\chi - \sin V\cos i\, d\psi = 0.$$

Ici, comme pour les lignes de courbure, on ne doit laisser subsister que l'angle i. Pour cela, remplaçons $d\chi$, $d\psi$ par leurs valeurs tirées des relations (15). Nous aurons, toutes réductions faites,

$$(21)\qquad Q\cos^2 i + 2H\frac{\partial V}{\partial \varphi}\sin i\cos i + R\left(\frac{\partial V}{\partial l} - \frac{N}{R}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + p\sin\varphi\right)\sin^2 i = 0.$$

Cherchons enfin les courbures principales. Soit C l'une d'elles, nous aurons

$$(22)\qquad C = \frac{\delta\nu}{\delta z},$$

les δ désignant un déplacement effectué le long d'une ligne de courbure; on aura donc

$$(23)\qquad CQ\,dl = \sin V\,d\chi, \quad CH\,dl = d\chi.$$

Remplaçons dl et $d\chi$ par leurs valeurs en fonction de i; nous aurons

$$(24)\qquad C\sin i = \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\cos i + \frac{1}{H}\left(\frac{\partial V}{\partial l}p + \sin\varphi - \frac{N}{R}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)\sin i.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer i entre cette équation et celle des lignes de courbure (18); on trouve alors, toutes réductions faites,

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} &RHC^2 + C\left(N\frac{\partial V}{\partial \varphi} - pR\sin\varphi - R\frac{\partial V}{\partial l} - Q\right)\\ &\qquad + \left[\frac{\partial V}{\partial l}\sin V + \frac{\partial(r\cos V - p\sin V\cos\varphi)}{\partial \varphi}\right] = 0.\end{aligned}\right.$$

On obtiendra les équations différentielles qui conviennent à une surface minima en observant qu'on doit avoir, *quel que soit* φ,

$$N\frac{\partial V}{\partial \varphi} - pR\sin\varphi - Q - R\frac{\partial V}{\partial l} = 0;$$

de même les équations différentielles qui déterminent les surfaces cerclées applicables sur une sphère de rayon a s'obtiendront à l'aide de l'identité

$$\frac{\partial V}{\partial l}\sin V + \frac{\partial(r\cos V - p\sin V\cos\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{RH}{a^2}.$$

Il est clair que nous avons, dans tout ce qui précède et pour ainsi dire tacitement, adopté un sens bien déterminé sur la normale en chaque point; il est nécessaire de savoir si ce sens est dirigé du pied de la normale vers le centre de courbure, ou dans le sens opposé. Pour faire cette distinction, il nous suffira de nous placer dans un cas particulier, par exemple celui d'une surface de révolution. Il est clair que celui des deux centres de courbure qui se trouve sur l'axe OZ aura son z positif ou négatif suivant que l'angle V sera obtus ou aigu; ceci posé, les coordonnées de centre de courbure sont, en général, données par les équations

$$(26)\qquad X = R\cos\varphi \pm \frac{\lambda}{C}, \quad Y = R\sin\varphi \pm \frac{\mu}{C}, \quad Z = \pm\frac{\nu}{C},$$

les signes supérieurs allant ensemble; la dernière donne

$$-Z = \pm \frac{\cos V}{C},$$

V étant supposé aigu, Z devra être négatif.

Or, supposons V aigu et le rayon de courbure compté du pied de la normale vers le centre; alors on doit avoir

$$Z = -\frac{1}{C}\cos V;$$

il faut donc dans ce cas choisir le signe supérieur; au contraire, si l'on convient, et nous adopterons cette convention, de compter le rayon de courbure du centre de courbure vers le pied de la normale positivement, et négativement en sens contraire, nous aurons, pour déterminer les coordonnées du centre de courbure,

$$X = R\cos\varphi - \frac{\lambda}{C}, \quad Y = R\sin\varphi - \frac{\mu}{C}, \quad Z = R\cos\varphi - \frac{\nu}{C}.$$

DEUXIÈME PARTIE.

I.

1. Nous allons maintenant développer quelques-unes des conséquences des résultats qui précèdent. Soient G une génératrice circulaire, G′ la génératrice infiniment voisine. Les plans de ces deux cercles se coupent suivant une droite AA′, que nous appellerons la *caractéristique*. Son équation est, comme nous l'avons vu,

$$w + py = 0;$$

les deux points A, A′, où elle coupe G, sont donc donnés par l'équation

$$Q = w + pR\sin\varphi = 0.$$

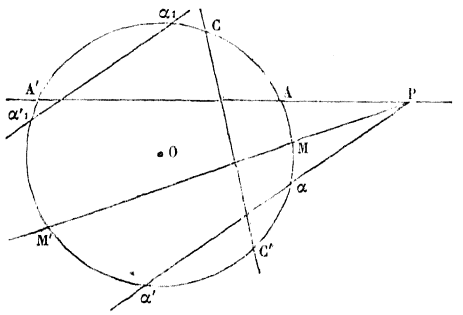
D'autre part, la génératrice G′ projetée sur le plan de G a pour équa-

tion

$$(x - u\,dl)^2 + (y - v\,dl)^2 = (\mathrm{R} + d\mathrm{R})^2,$$

et par suite la corde commune à cette projection et au cercle G, que

Fig. 1.



nous appellerons simplement l'*axe radical*, a pour équation

$$ux + vy + \mathrm{RR}' = 0;$$

les points α, α', où elle coupe le cercle G, sont donc fournis par l'équation

$$\mathrm{M} = \mathrm{R}' + u\cos\varphi + v\sin\varphi = 0.$$

Les deux droites $\alpha\alpha'$, AA' se coupent en un point P ayant pour coordonnées

$$x = \frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}, \quad y = -\frac{w}{p}.$$

La polaire CC' de ce point, par rapport à G, a donc pour équation

$$(wv - p\mathrm{RR}')x - uwy = p\mathrm{R}^2 u,$$

et les deux points C, C' sont donnés par l'équation

$$(wv - p\mathrm{RR}')\cos\varphi - uw\sin\varphi = p\mathrm{R}u.$$

Or on reconnaît aisément que cette dernière peut s'écrire, en conservant les notations employées jusqu'ici,

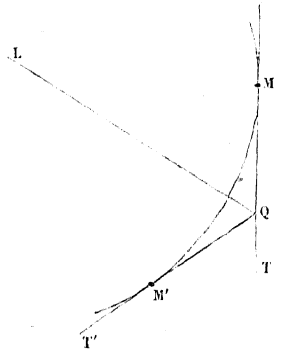
$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial w} = 0.$$

Ceci posé, les points AA′, $\alpha\alpha'$, CC′, P possèdent des propriétés importantes que nous allons exposer.

Démontrons d'abord une propriété fondamentale des points C, C′; cette propriété se déduirait aisément des équations relatives à la courbure; mais, à cause de son importance, nous en donnerons une démonstration directe et géométrique.

Soient

Fig. 2.



M, M′ deux points infiniment voisins de G;
MT, M′T′ les tangentes correspondantes;
QL l'intersection des deux plans tangents à la surface aux mêmes points.

Le trièdre QLTT′ nous donne

$$\cos\widehat{QL} = -\cos\widehat{QT}\cos\widehat{QT'} + \sin\widehat{QT}\sin\widehat{QT'}\cos T'QT$$

ou, en appelant $d\varphi$ l'angle des deux plans tangents et négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$1 - \frac{d\varphi^2}{2} = 1 - \frac{dV^2}{2} - \sin^2 V\,\frac{d\varphi^2}{2},$$

d'où

$$d\varphi^2 = dV^2 + \sin^2 V\,d\varphi^2.$$

Cette relation donne l'angle de deux normales infiniment voisines dont les pieds sont sur une même génératrice. Si maintenant nous

appelons H l'angle que MT fait avec la tangente conjuguée, on a

$$\frac{\sin\widehat{LQM'}}{\sin\widehat{MT}} = \frac{\sin\widehat{T'QT}}{\sin\widehat{QL}}$$

ou, en passant à la limite,

$$\frac{\sin H}{\sin V} = \frac{d\varphi}{dv};$$

d'où l'on déduit, enfin,

$$\tang H = \sin V \frac{d\varphi}{dV}. \tag{27}$$

D'après cela, la condition $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ équivaut à $H = \frac{\pi}{2}$ et, par suite, les points C, C′ de la *fig.* 1 sont ceux où le cercle C est tangent à une ligne de courbure de la surface; nous sommes donc conduits au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il existe sur chaque génératrice deux points où cette génératrice est tangente à une ligne de courbure de la surface et les deux points sont situés sur la polaire du point où l'axe radical rencontre la caractéristique.*

De même, la condition $\sin V = 0$ ou $\varpi + pR\sin\varphi = 0$ équivaut à $H = 0$, les points AA′ de la *fig.* 1 sont donc ceux où la génératrice est tangente à une ligne asymptotique, et l'on a ce théorème :

THÉORÈME. — *Il existe sur chaque génératrice deux points où elle est tangente à une ligne asymptotique de la surface, et ces deux points sont situés sur la caractéristique.*

Il est clair que chacun de ces deux théorèmes souffre une exception si la droite CC′, dans le premier cas, ou AA′ dans le second, est indéterminée; dans le premier cas, il y aurait une infinité de points de courbure ou, en d'autres termes, la surface se raccorderait avec une sphère le long de G, qui serait alors une ligne de courbure. Dans le second cas, la surface toucherait le plan mobile tout le long de la génératrice.

2. *Position relative de deux génératrices infiniment voisines.* — En général, G, G′ n'auront aucun point commun; pour qu'il en soit autre-

ment, il faut évidemment que leur point de rencontre soit à la fois sur la caractéristique et sur l'axe radical, en d'autres termes, que P soit sur le cercle; cette condition, qui est d'ailleurs suffisante, s'exprime par la relation

$$(28)\qquad (wv - pRR')^2 + u^2(w^2 - p^2R^2) = 0.$$

Lorsqu'elle a lieu, les points C, C′ se confondent avec P, et la génératrice est osculatrice en ce point à une ligne de courbure de la surface.

Si l'on veut que les deux génératrices aient deux points communs, il faudra exprimer que les deux droites AA′, $\alpha\alpha'$ coïncident, ce qui donne alors

$$(29)\qquad u = 0, \quad wv = pRR'.$$

Si ces conditions sont remplies, P est indéterminé et la surface touche une sphère suivant le cercle G qui est une ligne de courbure (¹).

Il peut enfin arriver que ces droites $\alpha\alpha'$, AA′ se confondent avec une même tangente à G; pour qu'il en soit ainsi, on doit ajouter aux conditions précédentes celle qui exprime que la distance $-\frac{w}{p}$ du centre à AA′ est égale à $-R$, par exemple, et l'on obtient alors les trois équations

$$(30)\qquad u = 0, \quad v = R', \quad w = pR.$$

3. *Distribution des plans tangents le long d'une génératrice.* — Nous avons trouvé, pour l'expression de l'angle V que fait le plan tangent avec le plan du cercle,

$$\operatorname{tang} V = \frac{w + pR\sin\varphi}{R' + u\cos\varphi + v\sin\varphi}.$$

Soient γ l'inclinaison du déplacement du centre sur l'axe OZ du

---

(¹) Il peut y avoir exception : si l'une des conditions est donnée *a priori* et que la seconde vienne s'introduire ensuite, les points de courbure resteront déterminés; si l'on se donne, une fois pour toutes, $u = 0$, les deux points en question sont donnés par $\cos\varphi = 0$; si, au contraire, c'est la condition $wv - pRR' = 0$ qui s'introduit d'abord, les deux points de courbure sont donnés par l'équation $\sin\varphi = -\frac{pR}{w} = -\frac{v}{R'}$.

cercle, ω l'inclinaison de ce même déplacement sur le rayon qui vient aboutir au point de contact; supposons de plus que la variable indépendante l soit l'arc de trajectoire du centre, et désignons par $d\tau$ l'angle infiniment petit des plans de deux génératrices voisines : l'équation précédente pourra s'écrire

$$\operatorname{tang} V = \frac{dl \cos\gamma + R\, d\tau \sin\varphi}{dR + dl \cos\omega}.$$

Sous cette forme, l'analogie entre les surfaces réglées et celles que nous étudions est mise en évidence; elle est surtout complète lorsque $dl = 0$ ou lorsque $\cos\gamma = 1$; en effet, dans ces deux cas, l'angle ω disparaît de l'équation, qui devient

$$\text{soit } \operatorname{tang} V = \frac{R\, d\tau \sin\varphi}{dR}, \quad \text{soit } \operatorname{tang} V = \frac{dl + R\, d\tau \sin\varphi}{dR},$$

d'où le théorème suivant :

Théorème. — *Lorsque, pour une génératrice particulière, le centre est stationnaire ou se déplace normalement au plan de cette génératrice, la tangente de l'angle que fait le plan tangent avec le plan du cercle varie, le long de ce cercle, proportionnellement au sinus de l'arc compris entre un point fixe et le point de contact.*

Revenons au cas général; appelons *points conjugués du cercle* deux points M, M′ en ligne droite avec le point P; l'équation de la corde MM′ étant mise sous la forme

$$\lambda M = Q,$$

on aura, en chacun des deux points M, M′,

$$\operatorname{tang} V = \lambda;$$

en d'autres termes, les deux plans tangents en M et M′ iront couper l'axe des z au même point; la droite d'intersection de ces deux plans rencontre d'ailleurs toujours la polaire CC′ de P; et il est évident qu'elle détermine, sur ces deux droites CC′, Oz, quand on fait varier λ, deux divisions homographiques; elle engendre, par conséquent, un hyperboloïde à une nappe, ce qui nous donne le théorème suivant :

Théorème. — *Les plans tangents en deux points conjugués se coupent sur une droite qui rencontre dans toutes ces positions l'axe du cercle et la*

ligne qui joint les points de courbure; elle détermine sur ces deux droites deux divisions homographiques et, par suite, décrit un hyperboloïde à une nappe.

On obtient aisément l'équation de cet hyperboloïde; c'est

$$(31) \qquad (uy - vx)(wx - uz) + pRx(R'x + Ru) = 0.$$

L'hyperboloïde se réduira à deux plans si CC′ passe au centre, c'est-à-dire si P est rejeté à l'infini, c'est-à-dire si $u = 0$; l'hyperboloïde se réduit alors à deux plans confondus avec YOZ.

Le cas où P est indéterminé échappe évidemment aux raisonnements qui précèdent, le rapport $\frac{M}{Q}$ étant alors invariable. Dans ce cas, tous les plans tangents coupent OZ au même point; la sphère qui se raccorde avec la surface le long du cercle G a son centre sur OZ; les coordonnées de ce point sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = R\cot V = \frac{RR'}{w} = \frac{\rho}{p}.$$

Nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

Il y a un second cas où le cercle considéré est une ligne d'ombre, c'est celui où $p = 0$, c'est-à-dire où le plan du cercle se déplace parallèlement à lui-même.

4. *Lieu des normales.* — La normale au point $l\varphi$ a pour équations

$$\frac{x - R\cos\varphi}{\cos\varphi} = \frac{y - R\sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{-z(w + pR\sin\varphi)}{R' + u\cos\varphi + v\sin\varphi}.$$

Le point où la normale rencontre OZ a pour ordonnée $-R\cot V$; il est clair que ce point est le même pour deux points conjugués du cercle. De plus, la manière dont la position de ce point varie quand on décrit le cercle dépend uniquement de la disposition relative des quatre points A, A′, α, α' (*fig.* 1); en A, A′, la normale rencontre OZ à l'infini; en α, α', au contraire, la normale est couchée dans le plan du cercle. Si P est extérieur au cercle, l'inclinaison de cette normale atteint un maximum ou un minimum aux deux points C, C′, qui sont alors réels; si P est intérieur, ces valeurs limites de l'angle V n'existent plus. Il me paraît inutile d'insister davantage sur cette discussion. Si,

entre les équations précédentes, nous éliminons φ, nous obtiendrons l'équation du lieu des normales.

Cette élimination se fait sans difficulté; on tire, en effet, des équations précédentes

$$z(w + pR\sin\varphi) + (x\cos\varphi + y\sin\varphi - R)(u\cos\varphi + v\sin\varphi + R') = 0$$

avec

$$\cos x = \frac{\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

d'où

$$z\left(w + \frac{pRy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)\left(\frac{ux+vy}{\sqrt{x^2+y^2}} + R'\right)$$

ou enfin

$$(x^2+y^2)(ux+vy+wz-RR')^2 = [R'(x^2+y^2) + pRyz - R(ux+vy)]^2.$$

Telle est la surface lieu des normales; l'équation, mise sous cette forme, met en évidence le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les normales aux différents points d'une même génératrice circulaire rencontrent toutes une même conique.*

Cette conique, que nous nommerons *conique auxiliaire*, le cercle donné et l'axe de ce cercle sont trois directrices qui définissent d'une façon très précise la surface du quatrième ordre engendrée par les normales. La construction géométrique de la conique auxiliaire résulte immédiatement de ses équations, qui sont

$$(32) \qquad \begin{cases} ux + vy + wz = RR', \\ R'(x^2+y^2-R^2) + Rz(w+py) = 0. \end{cases}$$

On voit tout de suite que la projection de cette conique sur le plan du cercle passe au centre O et aux deux points asymptotiques A, A'. En outre, la conique et le cercle sont sur une même surface du second ordre; en d'autres termes, ils ont deux points communs situés sur la droite

$$uz + vy = RR'.$$

Ces deux points α'_1, α_1 sont diamétralement opposés aux points α, α' de la *fig.* 1; enfin le plan de la conique est parallèle au plan normal de la

ligne des centres, et, en définitive, cette courbe se trouve déterminée par cinq points.

Dans le cas général, la construction de chaque normale sera la suivante : Ayant construit la conique auxiliaire, pour avoir la normale en un point M, on fera passer un plan par ce point et l'axe du cercle. Ce plan coupera la conique en deux points, dont l'un situé sur OZ; on joindra l'autre au point M, et l'on aura la normale cherchée.

5. Cherchons dans quel cas la conique sera un cercle. La surface

$$R'(x^2+y^2-R^2)+Rz(w+py)=0$$

admet comme plans cycliques les deux plans

$$z=0, \quad w+py-\frac{R'}{R}z=0.$$

Pour que le plan de la conique soit parallèle au plan du cercle, il faut qu'on ait

$$u=0, \quad v=0.$$

Pour qu'il soit parallèle au plan $py-\frac{R'}{R}z=0$, il faut que

$$(33) \qquad u=0, \quad \frac{w}{R'}=-\frac{v}{pR}.$$

Dans le premier cas, le déplacement du centre est normal au plan de la génératrice; le cercle mobile et le cercle conjugué sont situés dans des plans parallèles.

Dans le second cas, le déplacement du centre est perpendiculaire à la caractéristique; de plus, on a $pRw+vR'=0$, et la génératrice circulaire a son plan perpendiculaire à celui du cercle conjugué.

Cherchons encore dans quel cas la conique auxiliaire se réduit à un système de droites.

Supposons d'abord $R'=0$, on aura deux droites situées dans les deux plans

$$z=0, \quad w+py=0.$$

La première est à rejeter comme ne pouvant servir à la construction des normales; la seconde se projette suivant la caractéristique. La surface

lieu des normales a alors pour équation

$$(x^2+y^2)(ux+vy+wz)^2=[pRyz-R(ux+vy)]^2;$$

elle est définie par deux directrices rectilignes et une directrice circulaire.

Le cas précédent étant écarté, l'équation du cône ayant pour sommet le centre O et pour directrice la conique est

$$R'(x^2+y^2)+pRR'yz-(ux+vy)(ux+vy+wz)=0.$$

Pour qu'il se réduise à un système de plans, il faut qu'on ait

$$(pRR'-wv)^2+u^2(w^2-p^2R^2)=0,$$

c'est-à-dire, d'après ce que nous avons vu, que la génératrice rencontre la génératrice infiniment voisine G'.

Quand cela a lieu, il est clair que l'une des droites dont se compose la conique auxiliaire ne peut être prise pour directrice des normales; elle correspond au facteur qu'ont alors en commun les deux fonctions M, Q. Il est aisé de déterminer la portion de la conique auxiliaire qu'on doit conserver.

En effet, cette conique rencontre dans tous les cas l'axe des z; si elle se scinde en deux droites, l'une au moins doit rencontrer OZ, et on doit la rejeter, la normale ne pouvant évidemment rester dans un plan fixe. Or revenons au cône précédent : celui des deux plans obtenus en le scindant et qui ne contient pas OZ a pour équation

$$(R'^2-u^2)(pRR'-wv)x-(R'^2-v^2)wuy-wuz(pRR'-wv)=0.$$

On en conclut aisément, pour les équations de la directrice rectiligne,

$$ux+vy+wz=RR',$$
$$R'[(pRR'-wv)x-u(wy+pR^2R')]+uvR(py+w)=0.$$

En résumé, on est conduit au théorème suivant :

Théorème. — *Pour que les normales aux différents points d'une même génératrice rencontrent, outre l'axe de cette génératrice, une seconde droite fixe, il faut et il suffit : ou que la variation du rayon soit nulle ou que la génératrice ait un point commun avec la génératrice infiniment voisine.*

Remarque. — Il est important d'observer que la fonction r ne joue aucun rôle dans la théorie précédente, on pourra donc, dans toutes les questions qui s'y rattachent, admettre sans inconvénient que $z = 0$, c'est-à-dire que le plan du cercle mobile roule sur un cylindre.

6. *Classification des surfaces cerclées.* — Les considérations qui précèdent conduisent à une classification rationnelle des surfaces cerclées, fondée sur la situation relative de deux cercles infiniment voisins : on est ainsi conduit à les séparer en quatre classes principales.

1re CLASSE. — Deux cercles infiniment voisins n'ont, en général, aucun point commun; les normales, le long d'une même génératrice, rencontrent une conique fixe; chaque génératrice est tangente en deux points distincts à une ligne de courbure de la surface.

2e CLASSE. — Chaque génératrice a un point commun unique avec la génératrice voisine : les points communs forment sur la surface une courbe à laquelle le cercle mobile reste constamment tangent. Les normales le long d'un même cercle rencontrent, outre l'axe de ce cercle, une droite fixe; enfin, chaque génératrice est osculatrice en un point à une ligne de courbure de la surface.

3e CLASSE : *Enveloppes de sphères* (1). — Deux génératrices infiniment voisines ont constamment deux points communs; le cercle mobile reste constamment tangent à deux directrices curvilignes; les normales correspondant aux points d'une même génératrice forment un cône de révolution, et chaque génératrice est une ligne de courbure de la surface.

4e CLASSE. — Pour les surfaces de cette classe, les deux directrices curvilignes dont nous venons de parler se confondent, et le cercle mobile reste constamment osculateur à une ligne à double courbure.

Les caractères analytiques sont : pour la deuxième classe,

$$u^2(w^2 - p^2R^2) + (wv - pRR')^2 = 0; \tag{28}$$

(1) Il est clair que le mot *enveloppe* ne s'applique ici qu'à une sphère variable dépendant d'un *seul* paramètre arbitraire; de plus, nous entendons ici que l'enveloppe est engendrée par la caractéristique de la sphère mobile, et non par telle autre génération circulaire dont elle peut être susceptible.

pour la troisième classe,

$$(29) \qquad u = 0, \quad w\varphi = pRR' \quad (^1);$$

pour la quatrième classe,

$$(30) \qquad u = 0, \quad \varphi = R', \quad w = pR.$$

Il est aisé de vérifier que, pour ces dernières surfaces, le point où la caractéristique touche l'arête de rebroussement appartient bien à la génératrice. En effet, nous avons trouvé (Ire Partie) pour les coordonnées de ce point

$$z = 0, \quad y = -\frac{w}{p}, \quad x = -\frac{\varphi}{r} + \frac{pw' - wp'}{p^2 r}.$$

Si l'on y remplace w par pR, φ par R', on obtient immédiatement $x = 0$, $y = -R$.

7. *Remarque.* — Pour compléter la classification précédente, il est nécessaire de chercher à quel caractère on pourra reconnaître que trois cercles infiniment voisins sont sur une même sphère.

Observons pour cela que le centre de la sphère enveloppée, dans le cas général des surfaces de troisième classe, a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{\varphi}{p}.$$

Si l'on applique à ce point les formules (1), on obtient

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = \left[w + \left(\frac{\varphi}{p}\right)'\right] dl :$$

il suffit d'exprimer que ce point est immobile et les caractères analytiques cherchés sont alors

$$(31) \qquad u = 0, \quad w\varphi = pRR', \quad w + \left(\frac{\varphi}{p}\right)' = 0;$$

---

(1) Il faut tenir compte de la restriction indiquée dans la note de la page 136. Les conditions (29) peuvent être remplies sans que la surface soit enveloppe de sphère. Il suffit de supposer qu'elles s'introduisent successivement; la surface serait alors un cas limite d'une surface plus générale, pour laquelle une seule des deux conditions serait satisfaite.

on arriverait au même résultat en exprimant, d'après les équations (19), que tous les points de la génératrice sont des ombilics.

8. *Formules particulières aux enveloppes de sphères.* — Dans le cas des enveloppes de sphères, les fonctions qui figurent dans la théorie générale ne sont pas toujours les plus simples; il peut être utile d'introduire celles qui se rattachent à la courbe *déférente* ou lieu des centres des sphères enveloppées. Le passage d'un groupe de fonctions à l'autre ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

Les coordonnées du centre C de l'enveloppée sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{v}{p} = \frac{RR'}{w},$$

leurs variations

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = \left[w + \left(\frac{v}{p}\right)'\right] dl :$$

la tangente à la déférente est donc dirigée suivant OZ, et l'arc ds de cette courbe est lié à notre variable l par l'équation

$$\frac{ds}{dl} = w + \left(\frac{v}{p}\right)'.$$

Les cosinus directeurs de la tangente à la déférente étant 0, 0, 1, si nous leur appliquons les équations (2), nous aurons pour leurs variations

$$0, \quad -p\,dl, \quad 0 :$$

la normale principale est donc parallèle à notre axe des y, et, si l'on appelle h la courbure de la déférente, on aura

$$h = -p\frac{dl}{ds}.$$

Enfin on vérifierait de même que la binormale de la déférente est parallèle à OX et que sa torsion k est donnée par l'équation

$$k = r\frac{dl}{ds}.$$

Observons de plus que, le rayon ρ de la sphère enveloppée étant égal

à $\sqrt{R^2 + \frac{\varphi^2}{p^2}}$, on aura

$$\rho\rho' = RR' + \frac{\varphi}{p}\left(\frac{\varphi}{p}\right)' = \frac{\varphi}{p}\left[\varpi + \left(\frac{\varphi}{p}\right)'\right].$$

Il est aisé de donner maintenant le Tableau complet des formules de transformation. Prenons $dl = ds$, d'où $\varpi + \left(\frac{\varphi}{p}\right)' = 1$; nous aurons

$$(32)\qquad \begin{cases} R = \sqrt{\rho^2 - \rho^2\rho'^2}, \quad p = -h, \quad r = +k, \\ \varphi = -h\rho\rho', \quad \varpi = 1 - \rho'^2 - \rho\rho'', \quad u = 0; \end{cases}$$

les cinq fonctions générales sont bien exprimées en fonction des éléments de la déférente et du rayon ρ de l'enveloppée. Observons enfin que l'on a

$$(33)\qquad \operatorname{tang} V = \frac{\varpi}{R'} = \frac{pR}{\varphi} = \frac{\sqrt{1 - \rho'^2}}{\rho'}.$$

9. *Théorème de M. Ribaucour.* — Il est visible que les relations précédentes contiennent la théorie spéciale de nos enveloppes de sphères. En faisant la substitution dans les équations générales de la première Partie, la plupart de ces équations se simplifieraient notablement; nous nous contenterons de démontrer le théorème suivant, dû à M. Ribaucour, et qui exprime une des propriétés les plus remarquables de ces surfaces particulières.

THÉORÈME. — *Lorsqu'on se déplace sur la caractéristique d'une enveloppe de sphères, le centre de courbure correspondant à la ligne de courbure non circulaire décrit une conique, située dans un plan perpendiculaire au plan osculateur de la déférente.*

Les coordonnées du centre de courbure sont, d'après les équations (26),

$$x = R\cos\varphi - \frac{\sin V\cos\varphi}{C}, \quad y = R\sin\varphi - \frac{\sin V\sin\varphi}{C}, \quad z = \frac{\cos V}{C},$$

C étant la courbure principale correspondante.

Dans le cas des enveloppes de sphères, l'une des courbures est

$\frac{w}{RR'}\cos V$; or le produit des courbures (25) se réduit pour $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ à

$$\frac{\sin V}{RH}\left(\frac{dV}{dl} + p\sin\varphi\right);$$

la seconde courbure a donc pour expression

$$\frac{1}{H}\left(\frac{dV}{dl} + p\sin\varphi\right);$$

les coordonnées du centre de courbure correspondant sont alors

$$x = \left(R - \frac{w + pR\sin\varphi}{\frac{dV}{dl} + p\sin\varphi}\right)\cos\varphi,$$

$$y = \left(R - \frac{w + pR\sin\varphi}{\frac{dV}{dl} + p\sin\varphi}\right)\sin\varphi,$$

$$z = \frac{w + pR\sin\varphi}{\frac{dV}{dl} + p\sin\varphi}\cot V.$$

En éliminant φ, on obtient les équations du lieu des centres de courbure, savoir

$$x^2 + y^2 = (R - z\tang V)^2,$$

$$py + w - z\tang V\frac{dV}{dl} = 0;$$

la première représente le cône des normales, la seconde un plan, ce qui démontre le théorème.

Observons que le plan de la conique passe par l'intersection des plans de deux cercles infiniment voisins et qu'il est perpendiculaire au plan osculateur de la déférente.

Pour que cette conique soit un cercle, il faut que le plan qui la contient soit perpendiculaire à OZ, ce qui exige $p = 0$; en d'autres termes, cela n'a lieu que dans les surfaces de révolution.

Elle se réduira à deux droites si le plan passe à l'origine, c'est-à-dire si $w = 0$; d'ailleurs, comme on a, dans le cas des enveloppes de sphères,

$$wv = pRR',$$

et que p ne peut être nul en même temps que ϖ, on en conclurait $R' = 0$. Mais cela ne peut jamais avoir lieu; car alors toutes les normales, le long de la génératrice, devant rencontrer l'axe de celle-ci et une droite, et ne pouvant être dans un même plan, passeraient toutes par le centre du cercle; en d'autres termes, la surface serait un canal et, dans ce cas, on aurait nécessairement $\varphi = 0$; le centre serait donc immobile ainsi que le rayon R, et la surface se réduirait à une sphère.

Dans le cas des surfaces canaux, on a

$$\varphi = 0, \quad R' = 0, \quad \varpi \neq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} V = \infty.$$

Le plan de la conique de M. Ribaucour se réduit alors au plan même de la génératrice et le cône des normales à deux plans confondus avec lui.

10. La propriété relative à un couple de points conjugués, qu'il est bien facile d'établir géométriquement, montre qu'on peut envisager une surface cerclée de l'espèce la plus générale, comme l'enveloppe d'une sphère *dont l'équation dépendrait de deux paramètres*.

En effet, les normales en deux points conjugués coupent l'axe du cercle en un même point K situé à une distance $R \cot V$ du centre O. La sphère décrite de ce point K comme centre avec un rayon égal à $\frac{R}{\sin V}$ touche donc la surface en ces deux points. Cette remarque va nous permettre de compléter ce que nous avons à dire sur la *fig.* 1.

Outre les points AA′, $\alpha\alpha'$, CC′, il existe quatre points remarquables, imaginaires et donnés par l'intersection avec les deux droites

$$M + Qi = 0, \quad M - Qi = 0.$$

Ces deux couples de points conjugués correspondent à deux sphères de rayon nul, doublement tangentes à la surface; en d'autres termes, les points situés sur l'axe des z à des distances du centre égales à $\pm R\sqrt{-1}$ sont des foyers; on a donc sur la surface réglée, engendrée par l'axe du cercle, deux focales imaginaires, équidistantes de la ligne des centres.

Les coordonnées du pôle P sont (p. 133) :

$$x = \frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}, \quad y = -\frac{w}{p}, \quad z = 0.$$

Ce point appartenant, d'une part à la caractéristique, d'autre part au plan radical des sphères décrites sur deux génératrices infiniment voisines comme grands cercles, sera le centre d'une sphère coupant orthogonalement toutes les sphères bitangentes qui contiennent l'une ou l'autre de ces deux génératrices.

S'il arrive que le point P soit stationnaire, il sera, d'après cela, le centre d'une sphère orthogonale à trois séries consécutives de sphères bitangentes; enfin, s'il est fixe dans l'espace, la surface sera une anallagmatique à déférente réglée et P sera le centre de la sphère directrice.

On peut s'en assurer sans difficulté par le calcul et donner en même temps les caractères analytiques auxquels on reconnaîtra que P est stationnaire : si nous appliquons aux coordonnées précédentes les formules générales de déplacement, les conditions cherchées seront

$$\frac{\partial x}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial y}{dl} = 0, \quad \frac{\partial z}{dl} = 0,$$

ce qui donne ici

$$u + \left(\frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}\right)' + \frac{rw}{p} = 0,$$

$$v - \left(\frac{w}{p}\right)' + r\,\frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu} = 0,$$

la condition $\partial z = 0$ étant évidemment satisfaite d'elle-même. Si nous éliminons r entre ces deux relations, il vient

$$-\mathrm{RR}' + \frac{w}{p}\left(\frac{w}{p}\right)' + \frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}\left(\frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}\right)' = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$\left(\frac{w}{p}\right)^2 + \left(\frac{wv - p\mathrm{RR}'}{pu}\right)^2 = \mathrm{R}^2 + k^2,$$

k étant une constante arbitraire. Cette relation, qui peut s'écrire

$$\overline{\mathrm{PO}}^2 = \mathrm{R}^2 + k^2,$$

montre que le point P est le centre d'une sphère qui coupe orthogonalement toutes les sphères bitangentes à la surface et ayant leurs centres sur la surface des axes; le théorème est donc démontré; le rayon de la sphère directrice est d'ailleurs égal à k.

Cyclide osculatrice. — Les résultats précédents mettent en évidence l'utilité qu'il peut y avoir à introduire, dans l'étude des surfaces cerclées, les cyclides comme auxiliaires. Une génératrice circulaire étant donnée, si l'on prend pour sphère directrice la sphère de centre P et qui contient les deux foyers correspondants, pour déférente l'hyperboloïde osculateur à la surface réglée engendrée par l'axe, ces deux éléments définissent une cyclide qui pourra être sans inconvénient substituée à la surface elle-même tant qu'il s'agira de propriétés concernant deux génératrices consécutives [1]. Si, pour une génératrice particulière, le point P est stationnaire, la même cyclide fournira toutes les propriétés qui dépendent de trois cercles infiniment voisins.

Enfin, d'après ce qui précède, on voit qu'une surface anallagmatique ne peut admettre de génératrices circulaires que si la surface déférente est réglée. Ce théorème est dû à M. Laguerre.

II.

1. *Trajectoires orthogonales des génératrices.* — L'équation des trajectoires orthogonales des génératrices est

$$N\,dl + R\,d\varphi = (r\,R + v\cos\varphi - u\sin\varphi)\,dl + R\,d\varphi = 0.$$

Le cercle étant supposé en mouvement, un point M mobile sur ce cercle aura un mouvement angulaire relatif égal à $r\,dl + d\varphi$, ce mouvement étant évalué à partir d'une droite liée invariablement au plan XOY. Posons $r\,dl = d\sigma$; soit α l'angle de la tangente au cercle avec la ligne des centres, on a

$$R\,d\sigma + dl\cos\alpha = 0.$$

Donc :

THÉORÈME. — *Pour qu'un point mobile sur le cercle décrive une tra-*

---

[1] On pourra même, dans ce cas, prendre pour déférente n'importe quel hyperboloïde tangent à la surface des axes le long de OZ.

jectoire orthogonale des génératrices, il faut et il suffit que sa vitesse relative, projetée sur la tangente, soit constamment égale et de signe contraire à la vitesse du centre, projetée sur cette même droite.

Observons que la fonction p ne figure pas dans l'équation précédente; il résulte de là que le cas général se ramène immédiatement au cas où tous les cercles seraient situés dans un seul et même plan; en d'autres termes, le relation entre l et φ ne sera nullement altérée si l'on étend sur un plan la surface enveloppée par le plan du cercle.

Il faut seulement supposer alors que chaque plan tangent, en se rabattant, entraîne avec lui le cercle correspondant et que, de plus, l'angle φ est évalué à partir d'une direction donnée par la tangente à la ligne suivant laquelle se transforme l'arête de rebroussement.

L'équation des trajectoires se ramène immédiatement à une équation de Riccati. Si l'on pose, en effet,

$$(35)\qquad \begin{cases} \alpha = \varphi + \int r\,dl = \varphi + \sigma, \quad A = \dfrac{v\cos\sigma + u\sin\sigma}{R}, \\ B = \dfrac{v\sin\sigma - u\cos\sigma}{R}, \quad \operatorname{tang}\dfrac{\alpha}{2} = \lambda, \end{cases}$$

elle devient

$$2\frac{d\lambda}{dl} = A\lambda^2 - 2B\lambda - A.$$

On déduit de là deux conséquences importantes :

1° La détermination des trajectoires orthogonales sera complètement obtenue si l'on connaît une seule de ces trajectoires;

2° D'après un théorème bien connu, le rapport anharmonique de quatre solutions d'une équation de Riccati est constant; ici ce rapport sera indépendant de l; d'autre part, $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ ou λ est le coefficient angulaire de la corde qui joint le point mobile M à un point fixe sur le cercle; on est donc conduit à ce théorème :

Théorème. — *Quatre trajectoires orthogonales coupent deux génératrices quelconques suivant deux systèmes de points ayant le même rapport anharmonique.*

Nous entendons par rapport anharmonique de quatre points d'une circonférence celui des quatre droites qui les joignent à un point arbitraire de cette circonférence.

Si l'une ou l'autre des quantités A, B est nulle, l'intégration est immédiatement ramenée à une quadrature. On reconnaît aisément que dans ce cas la ligne des centres se transforme en une droite lorsqu'on planifie la surface enveloppée par le plan du cercle.

2. *Points centraux.* — En suivant jusqu'au bout l'analogie avec les surfaces réglées, on est conduit à appeler *point central* un point où la génératrice est à une distance maxima ou minima de la génératrice infiniment voisine.

Ces points sont évidemment caractérisés par ce fait que la courbure géodésique de la trajectoire orthogonale y est égale à zéro. Ils sont donc déterminés par l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

ou

$$(R' + u\cos\varphi + v\sin\varphi)(v\cos\varphi - u\sin\varphi) + pR\cos\varphi(w + pR\sin\varphi) = 0.$$

On les obtiendra en coupant le cercle par l'hyperbole équilatère

$$(RR' + ux + vy)(vx - uy) + pR^2x(w + py) = 0.$$

Il existe donc sur chaque génératrice quatre points centraux; ils sont, avec le centre, sur une même hyperbole équilatère; d'où l'on conclut que deux d'entre eux, au moins, sont toujours réels. Ils déterminent sur la surface quatre courbes analogues à la ligne de striction d'une surface réglée; mais qui, d'ailleurs, ne paraissent présenter aucune propriété simple.

TROISIÈME PARTIE.

Nous nous proposons maintenant de déterminer une surface cerclée, d'après une propriété générale imposée à ses génératrices.

I.

1. Problème. — *Trouver les surfaces qui admettent comme lignes géodésiques les trajectoires orthogonales d'une série de génératrices circulaires.*

Les points où la courbure géodésique de la trajectoire orthogonale est nulle sont, comme nous l'avons vu, sur l'hyperbole équilatère

$$(\mathrm{RR}' + ux + vy)(vx - uy) + p\mathrm{R}^2 x(w + py) = 0.$$

Nous aurons les équations du problème en écrivant que cette courbe est indéterminée, ce qui donne

$$uv = 0, \quad v^2 - u^2 + p^2\mathrm{R}^2 = 0, \quad \mathrm{R}'v + p\mathrm{R}w = 0, \quad \mathrm{R}'u = 0.$$

1° Si nous supposons $\mathrm{R}' \neq 0$, u doit être nul, et la seconde équation exige $v = 0$, $p = 0$; cette solution donne évidemment les surfaces de révolution;

2° $\mathrm{R}' = 0$, $u \neq 0$, $v = 0$. — Il faut alors que $p\mathrm{R}w = 0$: or p ne peut être nul en même temps que v, si $u \neq 0$; donc $w = 0$.

Dans ce cas, prenons, pour variable indépendante l, l'arc de la ligne des centres; nous aurons

$$u = 1,$$

et la solution sera donnée par les équations

$$\mathrm{R} = a, \quad u = 1, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad p = \frac{1}{a},$$

a étant une constante arbitraire.

Interprétons ces relations; si nous nous reportons aux équations qui donnent le point où la caractéristique touche son enveloppe, elles deviennent, dans le cas actuel,

$$x = y = z = 0;$$

donc le centre de la génératrice est sur l'arête de rebroussement; le rayon de torsion de cette arête est d'ailleurs $\frac{1}{p}$ ou a, il est constant, enfin le rayon du cercle est constant et égal au rayon de torsion, et son plan est osculateur à la trajectoire du centre.

En résumé :

Le centre du cercle décrit une courbe à torsion constante; son plan est osculateur à cette courbe, et son rayon est constant et égal au rayon de torsion de la ligne des centres.

Ces surfaces sont, avec les surfaces de révolution, les seules qui répondent à la question.

2. On sait déterminer, à l'aide de quadratures, toutes les courbes à torsion constante. M. Serret a donné la solution de cette question (*voir* une Note de M. Liouville, à la suite de l'*Analyse* de Monge).

Nous en donnerons ici une autre, qui d'ailleurs s'applique à une question plus générale.

Cherchons, en général, quelles sont les courbes pour lesquelles la torsion est une fonction donnée de l'angle t que fait la trace du plan osculateur sur un plan fixe avec une direction donnée dans ce plan.

Prenons le plan fixe pour plan des xy; en désignant par μ, H deux fonctions de t, les coordonnées d'un point de la courbe seront données par les trois équations

$$\begin{aligned} x\cos t + y\sin t + \mu z + \mathrm{H} &= 0,\\ -x\sin t + y\cos t + \mu' z + \mathrm{H}' &= 0,\\ -x\cos t - y\sin t + \mu'' z + \mathrm{H}'' &= 0, \end{aligned}$$

la première étant celle du plan osculateur, et les accents indiquant des dérivées.

Si l'on pose

$$(\alpha)\qquad \frac{\mathrm{H}+\mathrm{H}''}{\mu+\mu''} = f(t),$$

on aura

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= -f(t),\\ x &= (\mu f - \mathrm{H})\cos t - (\mu' f - \mathrm{H}')\sin t,\\ y &= (\mu f - \mathrm{H})\sin t + (\mu' f - \mathrm{H}')\cos t; \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(\gamma)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu f'\cos t - \mu' f'\sin t,\\ \frac{dy}{dt} &= \mu f'\sin t + \mu' f'\cos t,\\ \frac{dz}{dt} &= -f'(t). \end{aligned}\right.$$

La distance ds de deux points infiniment voisins est donc donnée par l'équation

$$ds^2 = (1+\mu^2+\mu'^2)\,f'^2;$$

d'ailleurs les cosinus directeurs de la binormale étant $\frac{\cos t}{\sqrt{1+\mu^2}}$, $\frac{\sin t}{\sqrt{1+\mu^2}}$,

$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$, on aura, pour l'angle de torsion $d\tau$,

$$d\tau^2 = \left(d\frac{\cos t}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)^2 + \left(d\frac{\sin t}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)^2 + \left(d\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right)^2$$

ou

$$d\tau^2 = \frac{1+\mu^2+\mu'^2}{(1+\mu^2)^2}\,dt^2.$$

On en conclut, pour la torsion,

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{f'(t)}{1+\mu^2}.$$

Supposons maintenant qu'on se donne pour $\frac{d\tau}{ds}$ une fonction déterminée de t, savoir $\frac{d\tau}{ds} = \varphi(t)$; laissant la fonction f absolument arbitraire, on aura d'abord

$$\mu = \sqrt{\frac{f'(t)}{\varphi'(t)} - 1};$$

puis, en intégrant l'équation (α),

$$H = -\cos t \int (\mu + \mu'')\, f(t) \sin t\, dt + \sin t \int (\mu + \mu'')\, f(t) \cos t\, dt;$$

en portant ces valeurs dans les équations (β), on aura les équations de la courbe; on voit qu'il y subsiste une fonction arbitraire.

3. Revenons aux surfaces précédentes; si l'on substitue à u, v, w, p, r, R les valeurs trouvées, on obtient

$$M = \cos\varphi, \quad N = ra - \sin\varphi, \quad Q = \sin\varphi, \quad H = 1, \quad V = \varphi,$$

a étant une constante et notre variable l étant maintenant l'arc de la trajectoire du centre.

La dernière relation $V = \varphi$ exprime une propriété remarquable de ces surfaces, propriété qui, d'ailleurs, les caractérise complètement. Si l'on cherche, en effet, à déterminer nos fonctions de manière à avoir, quel que soit φ,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{w + pR\sin\varphi}{R' + u\cos\varphi + v\sin\varphi},$$

on obtient immédiatement

$$u = 1, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad pR = 1, \quad R' = 0.$$

Toutes les équations relatives à ces surfaces prennent une forme particulièrement simple; celle des lignes de courbure, par exemple, devient

$$2\cot 2i = ra - \sin\varphi.$$

Mais ce sont surtout les trajections orthogonales qui présentent de l'intérêt. Leur équation est ici

$$a\,d\varphi = (\sin\varphi - ar)\,dl.$$

Soient

$$\begin{array}{lll} \alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}$$

les cosinus directeurs de la tangente, de la binormale et de la normale principale pour une trajectoire orthogonale donnée; soit enfin δs l'élément de cette trajectoire; nous aurons, pour un déplacement effectué le long de cette ligne,

$$\begin{aligned} \delta x &= \mathrm{M}\cos\varphi\,dl = \cos^2\varphi\,dl, \\ \delta y &= \mathrm{M}\sin\varphi\,dl = \sin\varphi\cos\varphi\,dl, \\ \delta z &= \mathrm{Q}\,dl \qquad\quad = \sin\varphi\,dl; \end{aligned}$$

d'où

$$\delta s = dl, \quad \alpha = \cos^2\varphi, \quad \beta = \sin\varphi\cos\varphi, \quad \gamma = \sin\varphi.$$

Donc :

1° *L'arc intercepté par deux génératrices circulaires sur une même trajectoire orthogonale est égal à l'arc correspondant de la ligne des centres.*

D'autre part, la binormale, étant située dans le plan tangent à la surface, d'après la définition même des lignes géodésiques, sera la tangente à la génératrice circulaire, et nous aurons

$$\alpha' = -\sin\varphi, \quad \beta' = \cos\varphi, \quad \gamma' = 0;$$

on en déduira aisément

$$\alpha'' = -\sin\varphi\cos\varphi, \quad \beta'' = -\sin^2\varphi, \quad \gamma'' = \cos\varphi.$$

Soit alors $\frac{1}{\mathrm{T}}$ la torsion; d'après une des formules de M. Serret, nous

aurons

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\gamma''}\frac{\delta\gamma'}{\delta s} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{d\gamma' + p\beta' dl}{dl} = p = \frac{1}{a};$$

de là cette nouvelle propriété, qui a été démontrée par M. Lie :

2° *Chaque trajectoire orthogonale est à torsion constante; cette torsion ne varie pas d'une trajectoire à une autre; elle est égale à la torsion de la ligne des centres.*

On a une loi assez simple pour la première courbure; si on la désigne par $\frac{1}{\rho}$, on obtient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\gamma''}\frac{\delta\gamma}{\delta s} = \frac{d\gamma + p\beta\, dl}{dl}\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{dl} + \frac{1}{a}\sin\varphi$$

et, en remplaçant $d\varphi$ par sa valeur tirée de l'équation des trajectoires,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2\sin\varphi}{a} - r.$$

4. Nous dirons un dernier mot relatif aux lignes isothermes; l'équation $ds = 0$ est ici

$$i\,dl + a\,d\varphi + (ra - \sin\varphi)\,dl = 0.$$

Elle se ramène à une équation de Riccati; les lignes isothermes de la surface seront donc connues, quand on connaîtra une solution de cette équation. A ce point de vue, les surfaces particulières que nous venons d'obtenir font partie d'une classe importante de surfaces dont nous allons nous occuper.

II.

1. Problème. — *Trouver toutes les surfaces cerclées telles que la fonction* H *soit une fonction rationnelle de* $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

Supposons qu'on ait

$$M^2 + Q^2 = P^2,$$

P étant une fonction entière de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, qui sera évidemment linéaire; soit

$$P = a\cos\varphi + b\sin\varphi + c,$$

on aura, pour tous les points du cercle générateur

$$(\mathrm{RR}' + ux + vy)^2 + (w\mathrm{R} + \varpi y)^2 = (ax + by + c\mathrm{R})^2,$$

en posant $p\mathrm{R} = \varpi$.

Cette équation devant être celle du cercle, on en conclut que les deux droites AA′, $\alpha\alpha'$ de la *fig.* 1 doivent être conjuguées par rapport au cercle.

Écrivons que la droite

$$\mathrm{RR}' + ux + vy + i(w\mathrm{R} + \varpi y) = 0$$

est tangente au cercle, nous aurons

$$(\mathrm{R}' + iw)^2 = u^2 + (v + i\varpi)^2;$$

cette relation devant avoir lieu quand on y change i en $-i$, nous aurons les deux relations

$$\mathrm{R}'^2 + \varpi^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$
$$w\mathrm{R}' = v\varpi.$$

Ce sont les conditions cherchées.

Le raisonnement précédent détermine, d'ailleurs, la fonction P; ce ne peut être que la polaire cc' du point P de la figure; c'est, à un facteur près,

$$(\varpi\mathrm{R}' - wv)\cos\varphi + wu\sin\varphi + \varpi u = \mathrm{M}\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial\varphi} - \mathrm{Q}\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial\varphi}.$$

Le raisonnement précédent suppose distinctes les deux droites AA′, $\alpha\alpha'$; si cela n'avait pas lieu, on serait, comme nous l'avons vu, dans le cas des enveloppes de sphères, qui d'ailleurs répondent *évidemment* à la question; nous verrons dans les questions suivantes que la plupart des surfaces que nous aurons à déterminer rentreront dans l'une ou l'autre de ces deux classes.

Nous aurons besoin, dans la suite, d'une propriété remarquable des surfaces en question; elle consiste en ce que le numérateur

$$\mathrm{M}\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial l} - \mathrm{Q}\frac{\partial\mathrm{M}}{\partial l}$$

de $\frac{\partial V}{\partial l}$ est toujours divisible par P; nous allons démontrer ce théorème.

2. Observons que le centre ne peut jamais être fixe dans le cas actuel, car la première des conditions trouvées donnerait alors

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varpi = 0, \quad R' = 0,$$

ce qui ne peut évidemment avoir lieu que dans le cas du plan; dès lors nous prendrons pour variable l l'arc indéfini de la ligne des centres et les conditions trouvées deviendront

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= 1, \\ \varpi^2 + R'^2 &= 1, \\ v\varpi &= wR'; \end{aligned}$$

deux des quatre fonctions qui figurent ici sont arbitraires, et ces conditions seront identiquement satisfaites en posant

$$\varpi = \sin\alpha, \quad R' = \cos\alpha, \quad u = \cos\beta, \quad v = \sin\beta\cos\alpha, \quad w = \sin\beta\sin\alpha;$$

d'où

$$\begin{aligned} M &= \cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\cos\alpha\sin\varphi + \cos\alpha, \\ Q &= \sin\alpha(\sin\beta + \sin\varphi) = \sin\alpha(\sin\beta + \sin\varphi), \\ N &= \rho + \sin\beta\cos\alpha\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi; \end{aligned}$$

on vérifie aisément qu'on a

$$H = P = \cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1.$$

Ceci posé, si l'on cherche à vérifier l'identité

$$\left(M\frac{\partial Q}{\partial l} - Q\frac{\partial M}{\partial l}\right) = P(A\cos\varphi + B\sin\varphi + C),$$

on a, pour déterminer A, B, C, les cinq équations

$$\begin{aligned} B\sin\beta - A\cos\alpha\cos\beta &= \alpha'\sin\beta - \beta'\sin\alpha\cos\beta, \\ A\sin\beta + B\cos\alpha\cos\beta &= \alpha'\cos\beta\cos\alpha + \beta'\sin\alpha\sin\beta, \\ A\cos\alpha\cos\beta + C &= \alpha'\sin\beta + \beta'\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta, \\ A + C\cos\alpha\cos\beta &= \alpha'\sin\beta\cos\beta\cos\alpha + \beta'\sin\alpha, \\ B + C\sin\beta &= \alpha'(1 + \sin^2\beta). \end{aligned}$$

Or on tire des trois premières

$$B = \alpha', \quad C = \alpha' \sin\beta, \quad A = \beta' \sin\alpha,$$

et il est aisé de s'assurer que ces mêmes valeurs de A, B, C vérifient les deux dernières; le théorème est donc démontré.

En résumé, dans le cas où H sera rationnel, et en laissant de côté les enveloppes de sphère, nous aurons à remplacer u, v, w, ϖ, R par deux fonctions seulement, les substitutions à opérer étant celles que j'indique dans le Tableau suivant :

$$(T)\quad \left\{\begin{array}{l}
\varpi = \sin\alpha, \quad R' = \cos\alpha, \quad u = \cos\beta, \quad v = \sin\beta\cos\alpha, \quad w = \sin\beta\sin\alpha \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (\varpi = \rho R, \ \rho = rR), \\
M = \cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\cos\alpha\sin\varphi + \cos\alpha, \\
Q = \sin\alpha(\sin\alpha + \sin\varphi), \\
H = P = \cos\beta\cos\alpha\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1, \\
S = \beta'\sin\alpha\cos\varphi + \alpha'\sin\varphi + \alpha'\sin\beta, \\
N = \rho + \sin\beta\cos\alpha\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi, \\
\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{P}, \quad \dfrac{\partial V}{\partial l} = \dfrac{S}{P}.
\end{array}\right.$$

Remarque. — Lorsque $\sin\alpha = 0$, on en déduit $w = 0$, $\varpi = 0$ et, la caractéristique étant indéterminée, la surface se réduit à un plan. Si l'on a $\cos\beta = 0$, on obtient une surface de quatrième classe, engendrée par le cercle osculateur d'une ligne à double courbure, c'est-à-dire un cas particulier des enveloppes de sphères.

3. Sur les surfaces précédentes, comme sur les enveloppes de sphères, les lignes de longueur nulle, dont la détermination entraine, comme on sait, celle des lignes isométriques, sont déterminées évidemment par une équation linéaire en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, réductible à une équation de Riccati.

Les points $P = 0$ ne sont pas des ombilics; l'équation des lignes de courbure pourrait, dans le cas actuel, être tout entière divisée par le facteur P. Il est important d'établir qu'en ces deux points l'une des courbures principales devient infinie; la surface n'admet, d'ailleurs, aucun ombilic isolé.

Les équations des ombilics sont, en effet,

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0, \quad w - R\frac{\partial V}{\partial l} = 0,$$

c'est-à-dire, dans le cas actuel,

$$P = 0, \quad w - \frac{RS}{P} = 0.$$

Ces équations ne donnent évidemment aucun ombilic, à moins que les deux fonctions S et P, linéaires toutes deux en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, ne soient proportionnelles, auquel cas il y aurait sur la surface de certaines génératrices particulières dont tous les points seraient des ombilics, comme cela a lieu pour les enveloppes de sphères; mais il n'y aura jamais d'ombilics isolés.

4. Nous rattacherons aux surfaces précédentes celles pour lesquelles la quantité H^2 est linéaire en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$; pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir

$$uv = 0, \quad u^2 = v^2 + \varpi^2.$$

En nous bornant toujours aux surfaces réelles, nous aurons les deux conditions

$$v = 0, \quad u = \varpi.$$

Elles expriment que le centre du cercle coïncide avec le point central de l'axe, et que son rayon est égal à l'inverse du paramètre de distribution des plans tangents à la surface des axes le long de cette génératrice particulière.

Nous appellerons *surfaces à focale isotrope* celles qui, sans être enveloppes de sphères, donnent pour H une fonction linéaire de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

Pour justifier cette dénomination, j'observe que le déplacement d'un foyer

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = R\sqrt{-1}$$

est donné par les formules

$$\delta x = u\,dl, \quad \delta y = v\,dl - \varpi\sqrt{-1}\,dl, \quad \delta z = w\,dl + R'\sqrt{-1}\,dl,$$

d'où

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = (u^2 + v^2 + w^2 - \varpi^2 - R'^2)\, dl^2 + 2\sqrt{-1}\,(wR' - v\varpi)\, dl^2.$$

La propriété caractéristique de ces surfaces consiste donc en ce que la focale est une ligne de longueur nulle sur la surface des axes.

Pour que la focale se réduise à un point, comme cas particulier, il faut que δx, δy, δz soient nuls séparément, ce qui donne

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tang}\alpha = -\sqrt{-1};$$

mais on aurait donc

$$R' = \cos\alpha = \infty,$$

ce qui est absurde (dl ne pouvant être nul).

Cherchons en particulier quelles sont les surfaces anallagmatiques comprises dans la classe de surfaces que nous venons de définir. Les formules qui expriment la fixité du pôle sont, en général,

$$u + \left(\frac{wv - \varpi R'}{pu}\right)' + \rho\frac{w}{\varpi} = 0,$$
$$v - \left(\frac{w}{p}\right)' + \rho\frac{vw - \varpi R'}{\varpi u} = 0.$$

On a ici

$$\frac{wv - \varpi R'}{pu} = -R\cos\alpha\cos\beta, \quad \frac{w}{p} = R\sin\beta.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les deux équations précédentes et qu'on y remplace en même temps R' par $\cos\alpha$, elles deviennent

$$\text{(A)} \qquad \rho\cos\alpha + R\beta' = 0, \quad \cos\beta\sin\alpha + R\alpha'\cos\beta + \rho\sin\beta\sin\alpha = 0.$$

Si l'on élimine ρ, on obtient une équation qui s'intègre immédiatement et donne

$$R\sin\alpha\cos\beta = a,$$

a étant une constante arbitraire.

Telle est la relation qui définit les anallagmatiques à focale isotrope. Le rayon de la sphère directrice, $\mathcal{R}$, est d'ailleurs donné par l'équation

$$\mathcal{R} = R\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\beta = a\sqrt{-1}.$$

La déférente est alors une surface réglée astreinte à couper une sphère fixe suivant une ligne de longueur nulle; on peut obtenir aisément l'équation finie de toutes les surfaces réglées de cette nature. Je reviendrai plus loin sur ces résultats (Problème V).

III.

Problème. — *Trouver les surfaces cerclées telles que la somme des courbures principales soit constante le long de chaque génératrice, et variable d'une génératrice à la suivante.*

1. La somme des courbures principales Σ est donnée par l'équation

$$RH^3\Sigma = (2\varpi \sin\varphi + \omega)H^2 + R\left(M\frac{\partial Q}{\partial l} - Q\frac{\partial M}{\partial l}\right) - N\left(M\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - Q\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right).$$

Si Σ est constamment égal à o, on ne peut rien affirmer sur la forme de la fonction H. J'étudierai tout à l'heure ce cas particulier. En général, Σ étant une fonction donnée de l, l'équation précédente montre que H doit être rationnel en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$; c'est donc parmi les surfaces à focale isotrope que nous devons chercher la solution, en laissant d'abord de côté les enveloppes de sphères.

Si l'on fait alors la substitution indiquée dans le Tableau (T), on trouve

$$\Sigma = \frac{\sin\alpha(2\sin\varphi + \sin\beta)P + RS - N\sin\alpha\cos\beta}{RP^2}$$

ou

$$\begin{aligned} &R\Sigma(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1)^2 \\ &\quad = \sin\alpha(2\sin\varphi + \sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1) \\ &\qquad + R(\beta'\sin\alpha\cos\varphi + \alpha'\sin\varphi + \alpha'\sin\beta) \\ &\qquad - \sin\alpha\cos\beta(\rho + \sin\beta\cos\alpha\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi). \end{aligned}$$

Cette équation est du second degré en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, c'est-à-dire de la forme

$$A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi + 2D\cos\varphi + 2E\sin\varphi + F = 0;$$

comme elle doit avoir lieu quel que soit φ, on doit avoir

$$A + F = 0, \quad A - C = 0, \quad B = D = E = 0;$$

ces cinq relations deviennent ici, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}
&R\Sigma(1+\cos^2\alpha\cos^2\beta) = \sin\alpha\sin\beta + R\alpha'\sin\beta - \rho\sin\alpha\cos\beta,\\
&R\Sigma(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta,\\
&(R\Sigma\sin\beta - \sin\alpha)\cos\alpha\cos\beta = 0,\\
&2R\Sigma\cos\alpha\cos\beta = R\beta'\sin\alpha,\\
&2R\Sigma\sin\beta = 3\sin\alpha + R\alpha'.
\end{aligned}$$

Telles sont les cinq équations de condition qui donnent lieu à une discussion facile :

1° $\alpha = \frac{\pi}{2}$ est à rejeter, car on a alors

$$2\Sigma R\sin\beta = 3, \quad \Sigma R\sin\beta = 2,$$

qui sont incompatibles;

2° De même $\beta = \frac{\pi}{2}$ conduirait aux trois équations

$$R\Sigma = \sin\alpha + R\alpha' = 2\sin\alpha = \tfrac{3}{2}\sin\alpha + \tfrac{1}{2}R\alpha',$$

qui sont encore incompatibles;

3° Reste la solution

$$R\Sigma\sin\beta = \sin\alpha.$$

Or, on voit aisément que $\sin\beta$ ne peut être nul; si alors on multiplie la seconde de nos équations de condition par $\sin\beta$, elle devient

$$\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta = -2\sin^2\beta,$$

résultat évidemment absurde, si l'on se limite aux valeurs réelles de α, β.

On conclut de là qu'il n'existe parmi les surfaces à focale isotrope aucune surface réelle répondant à la question; et, comme H doit néanmoins être rationnel en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, il ne peut plus y avoir que des enveloppes de sphères.

Cela posé, sur une telle surface, une des courbures principales reste invariable le long de la génératrice; donc, si la somme des courbures reste constante ou, plus généralement, s'il existe entre ces deux éléments une relation fixe donnée, les deux courbures principales seront l'une et l'autre invariables. En pareil cas, il est clair que la conique de

M. O. Bonnet devra se réduire à un cercle; la surface sera donc de révolution. Faisons, dans l'équation précédente,

$$\varpi = 0, \quad \rho = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 1,$$

ce qui revient à prendre, pour variable l, la distance du plan du cercle à un plan parallèle fixe; il vient

$$1 + R\frac{dV}{dl} = \frac{RR'\Sigma}{\cos V}.$$

Mais

$$\operatorname{tang} V = \frac{dl}{dR}:$$

on aura donc

$$R \sin V = \int \Sigma R\, dR;$$

d'où

$$\frac{dl}{dR} = \frac{\int \Sigma R\, dR}{\sqrt{R^2 - \left(\int \Sigma R\, dR\right)^2}},$$

équation qui définit le méridien de la surface.

2. Étudions maintenant le cas où Σ est constant et égal à o dans toute l'étendue de la surface; en d'autres termes, cherchons les surfaces minima à génératrices circulaires.

Si nous considérons d'abord le cas des enveloppes de sphères, nous aurons la solution en faisant $\Sigma = 0$ dans le résultat obtenu plus haut, ce qui donne, en appelant C une constante,

$$\frac{dl}{dR} = \frac{C}{\sqrt{R^2 - C^2}}:$$

c'est l'équation d'une chaînette.

Revenons au cas général des surfaces minima; la relation donnée peut s'écrire

$$N\left(M\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - Q\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right) - R\left(M\frac{\partial Q}{\partial l} - Q\frac{\partial M}{\partial l}\right) - (Q + \varpi \sin\varphi)(M^2 + Q^2) = 0.$$

Comme elle doit avoir lieu pour toute valeur de φ, les termes qui contiennent en facteur une puissance impaire de $\cos\varphi$, divisés par

$\cos\varphi$, donneront une fonction entière de $\sin\varphi$ qui devra être identiquement nulle; les termes qui ne dépendent que de $\sin\varphi$ et $\cos^2\varphi$ donneront une seconde identité; or, parmi ces derniers, le terme du degré le plus élevé en $\sin\varphi$, c'est-à-dire le terme en $\sin^3\varphi$, a pour coefficient $-\varpi(u^2+v^2+\varpi^2)$.

En nous limitant aux surfaces réelles, il ne peut être nul que si $\varpi = 0$, ce qui entraîne $\rho = 0$.

L'identité devient alors

$$\begin{aligned} &w(v\cos\varphi - u\sin\varphi)^2 \\ &\quad + R[(uw' - wu')\cos\varphi + (vw' - wv')\sin\varphi + R'w' - wR''] \\ &\qquad\qquad + w(u\cos\varphi + v\sin\varphi + R')^2 + w^3 = 0, \end{aligned}$$

Si l'on écrit qu'elle a lieu pour toutes les valeurs de φ, on obtient cinq conditions dont deux sont identiquement satisfaites et dont les trois autres sont

$$\begin{aligned} -wv^2 - wu^2 + RwR'' - RR'w' - wR'^2 - w^3 &= 0, \\ Ruw' - Rwu' + 2wuR' &= 0, \\ Rvw' - Rwv' + 2wvR' &= 0. \end{aligned}$$

Les deux dernières s'intègrent immédiatement et donnent

$$wR^2 = a^2 u, \quad wR^2 = b^2 v,$$

a, b étant des constantes arbitraires. On en conclut $\frac{v}{u} = \text{const.}$, c'est-à-dire que le lieu du centre est une courbe plane; notre axe OX étant actuellement indéterminé, prenons-le dans le plan de la courbe des centres; nous aurons

$$v = 0,$$

et la première de nos équations se réduira à

$$-wu^2 + RwR'' - RR'w' - wR'^2 - w^3 = 0.$$

Prenons R pour variable indépendante; elle devient

$$w^3\frac{R^4}{a^4} + Rw' + w + w^3 = 0.$$

Considérant w^2 comme une fonction de R^2, elle s'intègre immédia-

tement, et, en désignant par c une constante arbitraire, on trouve

$$w = \frac{a^2 c}{\sqrt{c^2 R^4 + a^4 R^2 - c^2 a^2}}, \quad u = \frac{c R^2}{\sqrt{c^2 R^4 + a^4 R^2 - c^2 a^2}}.$$

En résumé :

Le plan du cercle se déplace parallèlement à lui-même; le centre décrit une courbe plane, et si l'on prend l'axe des x parallèle au plan du cercle, l'axe des y perpendiculaire, les équations du lieu des centres sont

$$dz = \frac{c a^2 \, dR}{\sqrt{c^2 R^4 + a^4 R^2 - c^2 a^2}}, \quad dx = \frac{c R^2 \, dR}{\sqrt{c^2 R^4 + a^4 R^2 - c^2 a^2}}.$$

On retrouve ainsi la surface minima de Riemann.

3. La méthode précédente s'applique, pour ainsi dire sans modification, à toutes les questions analogues. Si la condition imposée ne met pas en évidence que H doit être rationnel en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, on cherche s'il ne serait pas nécessaire que H^2 fût du premier degré en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. Il en est ainsi, par exemple, lorsqu'on exige que le produit des courbures principales ne change que d'une génératrice à l'autre. En laissant de côté les surfaces de révolution, qui sont évidemment dans ce cas, on est conduit à faire $v = 0$, $u = \varpi$ dans l'équation de condition. On est ainsi conduit à reconnaître que nulle surface de cette nature ne répond à la question.

Pour les surfaces de révolution, en appelant a^2 le produit des rayons de courbure principaux, on a

$$\frac{dV}{dl} \sin V = \frac{RH}{a^2}$$

ou

$$2 \frac{dV}{dl} \sin V \cos V = \frac{2 RR'}{a^2} \quad (H \cos V = R');$$

on sera ramené à intégrer cette équation pour avoir le méridien.

Considérons, par exemple, le cas où a est constant, c'est-à-dire celui des surfaces applicables sur la sphère; si z est l'ordonnée d'un parallèle de rayon R, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{dz}{dR}.$$

L'équation précédente devient

$$a^2\,dz = d\mathrm{R}\left(\sqrt{4\mathrm{R}^4 + a^4} - 2\mathrm{R}^2\right).$$

On retrouve la surface de révolution bien connue, applicable sur la sphère.

On démontrerait de même que les seules surfaces pour lesquelles une des courbures principales reste invariable le long de chaque génératrice sont les enveloppes de sphères. Il est inutile d'insister sur ces calculs dont la marche est toujours la même et qui, d'ailleurs, ne donnent ici aucun résultat intéressant.

IV.

Problème. — *Déterminer les surfaces cerclées telles que l'inclinaison d'une ligne asymptotique sur la génératrice soit la même pour tous les points de celle-ci, cette inclinaison pouvant, d'ailleurs, varier d'une génératrice à une autre.*

1. L'équation (21) des lignes asymptotiques est

$$\left(\mathrm{R}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial l} - \mathrm{N}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varphi} + \varpi \sin\varphi\right)\sin^2 i + 2\mathrm{H}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varphi}\sin i\cos i + \mathrm{Q}\cos^2 i = 0.$$

On voit que H doit encore ici être une fonction rationnelle de $\cos\varphi$, $\sin\varphi$; en laissant de côté les surfaces étudiées dans le § II, on ne peut avoir que des enveloppes de sphères, et, comme ici l'inclinaison i détermine le rapport des courbures, les surfaces cherchées sont de révolution. Si nous faisons dans l'équation précédente

$$u = v = 0, \quad \varpi = \rho = 0,$$

elle devient

$$\mathrm{R}\frac{d\mathrm{V}}{dl}\sin^2 i + w\cos^2 i = 0.$$

Or

$$w = \mathrm{R}'\,\mathrm{tang}\,\mathrm{V},$$

donc

$$\mathrm{R}\,d\mathrm{V}\sin^2 i + d\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{V}\cos^2 i = 0.$$

Soit z la distance d'un plan du cercle à un plan parallèle fixe, on a

$$dR \operatorname{tang} V = dz.$$

On en déduit, sans difficulté,

$$z = \int \frac{e^{-\int \frac{dR}{R \operatorname{tang}^2 i}}}{\sqrt{1 - e^{-2\int \frac{dR}{R \operatorname{tang}^2 i}}}} dR,$$

pour l'équation du méridien.

2. Il reste à examiner le cas des surfaces déterminées dans le problème II. Faisons la substitution indiquée dans le Tableau (T). En posant

$$\operatorname{tang} i = A,$$

l'identité précédente devient

$$\begin{aligned} &A^2 R(\beta' \sin\alpha \cos\varphi + \alpha' \sin\varphi + \alpha' \sin\beta) \\ &\quad - A^2 \sin\alpha \cos\beta (\rho + \sin\beta \cos\alpha \cos\varphi - \cos\beta \sin\varphi) \\ &\quad + (2A \sin\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta)(\cos\alpha \cos\beta \cos\varphi + \sin\beta \sin\varphi + 1) \\ &\qquad + (A^2 + 1) \sin\alpha \sin\varphi (\cos\alpha \cos\beta \cos\varphi + \sin\beta \sin\varphi + 1) \equiv 0. \end{aligned}$$

Cette identité est du second degré. Le terme en $\sin\varphi \cos\varphi$ devant être nul, on a d'abord

$$(A^2 + 1) \sin\alpha \cos\alpha \cos\beta = 0,$$

d'où l'on déduit, en remarquant que $\sin\alpha = 0$ donne un plan, et $\cos\beta = 0$ des enveloppes de sphères,

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Le terme en $\cos\varphi$ devient alors

$$A^2 R \beta',$$

et, comme il doit être nul, β est constant; l'équation ne contient plus, ces deux conditions étant supposées satisfaites, aucun terme en $\cos\varphi$. Les termes en $\sin\varphi$ et $\sin^2\varphi$ doivent alors être nuls, ce qui donne

$$(A^2 + 1) \sin\beta = 0, \quad (A^2 + 1) \sin^2\beta + \sin\beta = 0, \quad \text{d'où} \quad \beta = 0.$$

Le terme en $\sin\varphi$ et le terme constant sont alors

$$(2A^2+1)\sin\varphi, \quad -A^2\rho+2A.$$

Il est impossible de les annuler ensemble dans le cas de surfaces réelles, puisque ρ serait imaginaire.

On en conclut que les surfaces de révolution déterminées plus haut sont les seules qui répondent à la question [1].

V.

PROBLÈME. — *Trouver les surfaces telles que l'inclinaison des lignes de courbure sur une génératrice circulaire soit invariable tout le long de cette génératrice.*

1. Soit i l'inclinaison donnée; si l'on pose $\frac{A}{2}=\cot 2i$, on devra avoir, pour toute valeur de φ (18),

$$AH\frac{\partial V}{\partial\varphi}+R\frac{\partial V}{\partial l}-w-N\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0.$$

Les surfaces enveloppes de sphères répondent évidemment à la question si A est constamment égal à 0. Si A n'est pas nul, la surface doit être une des surfaces à focale isotrope étudiées dans le problème II, car H doit être une fonction rationnelle de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$.

Faisons alors la substitution indiquée dans le Tableau (T); nous aurons

$$\begin{aligned}&(A\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi+\sin\beta\sin\varphi+1)\\&\quad+R(\beta''\sin\alpha\cos\varphi+\alpha'\sin\varphi+\alpha'\sin\beta)\\&\quad-\sin\alpha\cos\beta(\rho+\sin\beta\cos\alpha\cos\varphi-\cos\beta\sin\varphi)\equiv 0.\end{aligned}$$

Cette relation, linéaire par rapport à $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, donne les trois équations de conditions suivantes :

$$(A\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\cos\alpha\cos\beta+R\beta'\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta=0,$$
$$(A\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\beta+R\alpha'+\sin\alpha\cos^2\beta=0,$$
$$(A\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+R\alpha'\sin\beta-\rho\sin\alpha\cos\beta=0.$$

---

[1] Nous avons laissé de côté l'hypothèse $A^2+1=0$; on s'assure aisément, en la transportant dans l'identité à vérifier, qu'elle entraîne $\sin\alpha\cos\beta=0$.

Éliminons A pour avoir les conditions qui se rapportent à la nature même de la surface, nous obtenons

$$R\alpha' \cos\beta + \sin\alpha \cos\beta + \rho \sin\alpha \sin\beta = 0, \quad R\beta' + \rho \cos\alpha = 0.$$

Ces deux relations sont précisément les équations (A) de la page 161; elles expriment que le pôle est fixe et, par suite, que la surface est une anallagmatique.

Comme d'ailleurs la focale est isotrope et qu'elle coïncide avec l'intersection de la sphère directrice et de la déférente, cette focale doit se réduire à des génératrices de la sphère en question; ces conditions sont d'ailleurs suffisantes et l'on est conduit au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les seules surfaces dont chaque génératrice circulaire coupe à angle constant toutes les lignes de courbure sont les surfaces anallagmatiques telles que la déférente et la sphère directrice se coupent suivant un système de droites isotropes.*

Le nombre des génératrices composant l'intersection de la directrice de la déférente ne saurait être égal à 3; du moins, dans ce cas, la déférente étant réglée et admettant trois directrices rectilignes serait déterminée et coïnciderait avec la sphère directrice; les sphères bitangentes orthogonales seraient toutes de rayon nul et leur enveloppe se réduirait à la directrice même.

Si l'intersection se compose de deux génératrices de la sphère, elles sont nécessairement du même système; sinon elles se rencontreraient et, la déférente se réduisant à un plan, l'enveloppe serait une droite.

On devra donc prendre pour intersection deux génératrices du même système D, D′ de la sphère. Une droite s'appuyant sur D, D′ et astreinte à rencontrer une courbe fixe et d'ailleurs arbitraire c engendrera la déférente.

2. Le problème est résolu dans le cas général et la solution dépend, comme on le voit, d'une fonction arbitraire; la nature de la courbe c, lorsqu'on assujettira la surface à une condition restrictive quelconque, se déterminera par une intégration qui, en général, ne présentera pas de difficulté.

Supposons qu'on veuille, par exemple, que l'inclinaison i, déjà constante le long de chaque génératrice, soit invariable sur toute l'étendue de la surface; on obtiendra immédiatement une nouvelle intégrale. Pour le faire voir, reprenons la question du commencement; les trois équations de condition peuvent, comme on le voit aisément, être mises sous la forme suivante :

$$\frac{\beta' \sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\alpha' \cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{R} = 0,$$

$$\frac{\alpha' \cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\beta'(A \sin\beta \cos\beta + \cos^2\beta - \sin^2\beta)}{(A \cos\beta - 2 \sin\beta)\cos\beta} = 0,$$

$$\rho = (A \cos\beta - 2 \sin\beta)\cos\beta.$$

La première s'intègre dans tous les cas ($R' = \cos\alpha$) et donne

$$R \sin\alpha \cos\beta = a,$$

a étant une constante arbitraire; elle donne, sous une autre forme, la solution générale déjà obtenue.

La seconde s'intègre dans le cas où $A = \text{const.}$, et l'intégrale

$$n \cos\beta (A \cos\beta - 2 \sin\beta) \sin^2\alpha = m,$$

où m, n sont deux nombres arbitraires, complète alors la solution.

L'interprétation géométrique de cette nouvelle intégrale ne paraît donner aucun résultat intéressant; observons, cependant, qu'on peut en déduire une relation équivalente très simple, savoir

$$\varpi^2 \rho = \frac{m}{n}.$$

En outre, on peut obtenir le rayon en fonction de l'arc l de la trajectoire du centre par une nouvelle intégration; en effet, si l'on observe que $\cos\alpha = R'$ et qu'on élimine β entre les deux intégrales déjà obtenues, il vient

$$4 n^2 a^2 R^2 R'^2 = - m^2 R^4 + 2 n a^2 (m A + 2 n^2) R^2 - n^2 a^4 (A^4 + 4).$$

On voit que R^2 s'exprime à l'aide de fonctions simplement périodiques portant sur la variable l. Dès lors toutes les fonctions inconnues dont la question dépend se trouvent complètement déterminées.

3. Particularisons autrement la question : sans rien préjuger sur la fonction A, supposons qu'on veuille que R soit constant.

On aura alors

$$R' = \cos\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2};$$

l'équation $R\beta' + \rho\cos\alpha = 0$ donnera

$$\beta = \text{const.}$$

Mais alors les deux dernières équations de condition (p. 169) montrent que ρ et A sont tous deux constants. La surface obtenue ici est donc tout à fait particulière et rentre dans celles du numéro précédent.

La solution est, en somme, donnée par les équations

$$\cos\beta = \frac{a}{R}, \quad u = \cos\beta, \quad v = 0, \quad w = \sin\beta, \quad p = \frac{1}{R}, \quad r = -\frac{1}{R}\cot\beta,$$

$$A = \frac{1}{\sin\beta\cos\beta}, \quad \tang 2i = \sin 2\beta.$$

Interprétons ce résultat.

Le point P a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = -\frac{w}{p} = -R\sin\beta, \quad z = 0;$$

le plan du cercle enveloppe un cône de sommet P et le centre s'obtient en menant une perpendiculaire dans chaque plan tangent à ce cône, par le sommet P, à la génératrice correspondante, cette perpendiculaire étant égale à $R\sin\beta$.

D'autre part, le rapport $\frac{r}{p}$ mesure la tangente du demi-angle au sommet du cône osculateur à celui qu'enveloppe le plan mobile. Ce rapport étant ici constant, le cône en question est de révolution et son demi-angle au sommet θ est donné par la relation

$$\tang\theta = -\cot\beta.$$

On en conclut que la droite PO décrit un plan perpendiculaire à l'axe du cône enveloppé par le plan du cercle; sa longueur est constamment égale à $R\sin\beta$, l'axe du cercle fait avec celui du cône un

angle égal à β. La déférente est donc un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Si l'on prend pour axes trois droites rectangulaires PX, PY, PZ, dont l'une, PZ, coïncide avec l'axe imaginaire, l'équation de la déférente sera

$$X^2 + Y^2 - Z^2 \tang^2\beta = R^2 \sin^2\beta,$$

ou, à cause de $\cos\beta = \frac{a}{R}$,

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + R^2)a^2 = R^2(Z^2 + R^2).$$

L'équation de la directrice sera d'ailleurs, son rayon étant égal à ai,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 = 0.$$

La surface est un tore, les génératrices circulaires étant ici les sections faites par les plans bitangents; on peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le tore est la seule surface engendrée par un cercle de rayon constant, et telle que, dans chacune de ces positions, ce cercle coupe sous un même angle toutes les lignes de courbure.*

VI.

1. *Surfaces isocycliques.* — J'appelle *isocyclique* une surface qui est divisée en carrés infiniment petits par une série de génératrices circulaires et leurs trajectoires orthogonales.

En général, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que l'équation des trajectoires orthogonales

$$N\,dl + R\,d\varphi = 0$$

admette un facteur d'intégrabilité de la forme $\frac{A}{H}$, A étant une fonction de l; en d'autres termes, il faut qu'on ait

$$\frac{\partial\left(\frac{AN}{H}\right)}{\partial\varphi} = \frac{\partial\left(\frac{AR}{H}\right)}{\partial l}.$$

Je ne traiterai pas le problème dans le cas général et me contenterai de faire la remarque suivante : l'équation précédente n'est qu'en apparence du troisième degré en $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ et se réduit, dès qu'on effectue le calcul, à la forme

$$A\sin^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi + D\sin\varphi + E\cos\varphi + F = 0;$$

elle donne donc, en écrivant qu'elle a lieu pour toute valeur de φ, cinq équations seulement entre les fonctions inconnues qui sont ici au nombre de six; la solution doit donc être beaucoup moins restreinte qu'elle ne le paraît au premier abord.

Je me bornerai à résoudre le problème dans deux cas : les enveloppes de sphères et les surfaces à focale isotrope.

2. Dans le cas des enveloppes de sphères, le facteur d'intégrabilité doit être de la forme $\frac{A}{M}$, et l'on doit avoir

$$A\left(N\frac{\partial M}{\partial\varphi} - M\frac{\partial N}{\partial\varphi}\right) + (RA)'.M - AR\frac{\partial M}{\partial l} = 0$$

ou

$$A(\rho v\cos\varphi + R'v\sin\varphi + v^2) + (RA)'(v\sin\varphi + R') - AR(R'' + v'\sin\varphi) = 0;$$

d'où l'on déduit les trois équations de condition suivante :

$$A\rho v = 0,\quad AR'v + RA'v - ARv' = 0,\quad Av^2 - ARR'' + R'(AA)' = 0.$$

A ne pouvant être nul, nous aurons

$$v = 0 \quad \text{ou} \quad \rho = 0.$$

Si l'on avait $v = 0$, on en conclurait $R' = 0$ ou $p = 0$, à cause de la relation $wv = pRR'$; enfin, si $R' = 0$, on doit supposer $p = 0$.

On retrouve ainsi les surfaces de révolution et les surfaces canaux.

Supposons maintenant $\rho = 0$; la seconde équation peut s'écrire

$$2\frac{R'}{R} + \frac{A'}{A} - \frac{v'}{v} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$v = aAR^2,$$

a étant une constante. Portons cette valeur dans la troisième équation, elle devient

$$A^3 a^2 R^4 - ARR'' + RR'A' + R'^2 A = 0.$$

Pour l'intégrer, posons

$$A = f\frac{R'}{R};$$

nous aurons

$$a^2 f^3 R'^2 R + f' R' = 0.$$

Il faut rejeter la solution $R' = 0$ qui donnerait

$$A^3 a^2 R^4 = 0.$$

Nous avons donc, en intégrant,

$$\frac{1}{f^2} = a^2 R^2 - b^4,$$

b étant une nouvelle constante.

Le problème est donc résolu par les équations suivantes :

$$\rho = 0, \quad A = \frac{R'}{R}\frac{1}{\sqrt{a^2R^2 - b^4}}, \quad v = \frac{aRR'}{\sqrt{a^2R^2 - b^4}}, \quad u = 0, \quad w\varphi = pRR'.$$

Interprétons cette solution :

$\rho = 0$ indique que le plan du cercle générateur enveloppe un cylindre. Cherchons-en la section droite : le point où OY rencontre la caractéristique a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = -\frac{w}{p}, \quad z = 0.$$

On a

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta y = v\,dl - \left(\frac{w}{p}\right)' dl.$$

Or ici

$$\frac{w}{p} = \frac{\sqrt{a^2R^2 - b^4}}{a}, \quad \left(\frac{w}{p}\right)' = \frac{aRR'}{\sqrt{a^2R^2 - b^4}} = v,$$

donc $\delta y = 0$; donc enfin le plan du cercle tourne autour d'une droite fixe L.

Il en résulte que le centre de la sphère enveloppée décrit une courbe

située dans un plan perpendiculaire à L. Comme la solution laisse subsister une fonction arbitraire, cette courbe déférente pourra être choisie d'une manière quelconque.

Le centre C de l'enveloppée a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{v}{p}.$$

Soit K le point où L rencontre le plan décrit par ce point C; ses coordonnées sont

$$x = 0, \quad y = -\frac{w}{p}, \quad z = 0;$$

on en conclut

$$\overline{KC}^2 = \frac{v^2 + w^2}{p^2}.$$

Mais le rayon $\mathcal{R}$ de l'enveloppée est lié à R par l'équation

$$\mathcal{R}^2 = R^2 + \frac{v^2}{p^2}.$$

On aura donc

$$\overline{KC}^2 = \mathcal{R}^2 - R^2 + \frac{w^2}{p^2} = \mathcal{R}^2 - R^2 + \left(\frac{RR'}{v}\right)^2 = \mathcal{R}^2 - R^2 + \frac{a^2R^2 - b^4}{a^2} = \mathcal{R}^2 - \frac{b^4}{a^2};$$

donc l'enveloppée coupe orthogonalement une sphère fixe, et l'on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME. — *En laissant de côté les surfaces de révolution et les surfaces canaux, les seules enveloppes de sphères qui soient divisées en carrés par leurs lignes de courbure sont définies par les deux conditions suivantes :*

1° *Le centre de l'enveloppée parcourt une ligne plane;*

2° *Cette enveloppée coupe orthogonalement une sphère fixe ayant son centre dans le plan de la courbe des centres.*

Remarque. — Il est bon d'observer que les lignes de courbure s'obtiennent immédiatement; si l'on intègre l'équation

$$R\,d\varphi + v\cos\varphi\,dl = 0,$$

on a

$$\int \frac{\varphi}{R}\, dl + \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

ou

$$\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \int \frac{a\, dR}{\sqrt{a^2 R^2 - b^4}} = 0.$$

On peut, d'ailleurs, remarquer que $\frac{1}{R\cos\varphi}$ est un facteur d'intégrabilité et que, par suite, l'équation des trajectoires peut aussi s'écrire

$$\frac{A}{M} R \cos\varphi = \text{const.}$$

Ces deux intégrales sont évidemment identiques.

2. *Surfaces à focale isotrope.* — Reprenons l'équation générale

$$A\left(N\frac{\partial M}{\partial \varphi} - H\frac{\partial N}{\partial \varphi}\right) = (RA)'\frac{\partial H}{\partial l} - H(RA)'.$$

Si nous y faisons la substitution indiquée dans le Tableau (T), elle devient

$$\begin{aligned}
&-A(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1)(\sin\beta\cos\alpha\sin\varphi + \cos\beta\cos\varphi)\\
&\quad - A(\rho + \sin\beta\cos\alpha\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi)(\sin\beta\cos\varphi - \cos\alpha\cos\beta\sin\varphi)\\
&\quad - (RA)'(\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi + 1)\\
&\qquad\qquad + RA[\beta'\cos\beta\sin\varphi + (\cos\alpha\cos\beta)'\sin\varphi] = 0,
\end{aligned}$$

l'accent indiquant toujours une dérivée prise par rapport à l.

Cette relation est de la forme

$$a\cos^2\varphi + b\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi + d\cos\varphi + e\sin\varphi + f = 0,$$

et, pour qu'elle se réduise à une identité, il faut qu'on ait

$$b = 0, \quad d = 0, \quad c = 0, \quad a + c = 0, \quad a - f = 0;$$

la première équation a lieu d'elle-même, ainsi que la quatrième. Il

reste donc seulement trois conditions, savoir :

$$(RA)' + A\cos\alpha = 0,$$
$$-A\sin\beta\cos\alpha + A\rho\cos\alpha\cos\beta = (RA)'\sin\beta - RA\beta'\cos\beta,$$
$$-A\cos\beta - A\rho\sin\beta = (RA)'\cos\alpha\cos\beta - (RA)(\cos\alpha\cos\beta)'.$$

Si l'on remplace, dans les deux dernières, $(RA)'$ par $-A\cos\alpha$, elles deviennent, toutes réductions faites et supprimant la solution $\sin\alpha = 0$ qui donnerait un plan [1],

$$\rho\cos\alpha + R\beta' = 0,$$
$$\rho\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\sin\alpha + R\alpha'\cos\beta = 0.$$

Ces relations sont précisément celles qui définissent les surfaces anallagmatiques à focale isotrope. Donc :

THÉORÈME. — *Les seules surfaces cerclées à focale isotrope qui soient décomposées en carrés par les génératrices circulaires et leurs trajectoires orthogonales sont les anallagmatiques dont la déférente et la directrice se coupent suivant une ligne de distance nulle.*

Remarquons enfin que le facteur d'intégrabilité $\frac{A}{P}$ est immédiatement obtenu, car la première équation de condition donne immédiatement

$$A = \frac{m}{R^2},$$

m étant une constante arbitraire; la fonction

$$\frac{m}{PR^2}(N\,dl + R\,d\varphi)$$

sera donc une différentielle exacte.

3. Les surfaces qui répondent aux deux dernières questions sont anallagmatiques; la déférente est réglée et coupe la sphère directrice suivant une ligne de longueur nulle. Il est nécessaire de donner, sous

---

[1] Notre méthode s'applique sans modification à l'étude des systèmes de cercles situés dans un plan. Ici on retrouverait aisément la solution connue de ce problème : *Diviser un plan en carrés par une série de cercles et leurs trajectoires orthogonales.*

forme finie, l'équation générale des surfaces réglées qui coupent une sphère suivant une pareille ligne.

La surface réglée devant être réelle, la sphère sera imaginaire; sinon, toute droite réelle, astreinte à glisser sur une génératrice de cette sphère, glisserait également sur la génératrice conjuguée; la déférente serait alors, ou un plan, ce qui réduirait l'enveloppe des sphères à une droite, ou un cône. Mais ce dernier cas ne peut se présenter; la focale, en effet, ne peut se réduire à un point, car les coordonnées du foyer satisfont à l'équation

$$\delta x = dl \cos\beta,$$

et $\cos\beta$ ne peut être nul pour aucune des surfaces considérées.

Soit donc

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 = 0$$

l'équation de la sphère directrice. Choisissons sur cette sphère la génératrice

$$x + iy = 0, \quad z = ai.$$

Pour qu'une droite *réelle*

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

rencontre constamment cette génératrice, on doit avoir

$$p = an, \quad q = -am.$$

Les équations de la droite mobile seront donc de la forme

$$x = mz + an, \quad y = nz - am,$$

et l'équation générale des surfaces réglées cherchées sera, dès lors,

$$\varphi(zx - ay, zy + ax, a^2 + z^2) = 0,$$

φ étant une fonction homogène quelconque, à trois variables.

On obtient ainsi, sous forme finie, les intégrales des problèmes proposés; cherchons les cyclides qui répondent à la question; si l'on choisit pour φ une forme linéaire, la déférente est un paraboloïde.

On peut aussi prendre pour φ une forme quadratique particulière, savoir

$$\begin{aligned} &A[(xz - ay)^2 + (yz + ax)^2] \\ &\quad + 2[B(xz - ay) + C(yz + ax)](z^2 + a^2) + D(z^2 + a^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

En effet, $z^2 + a^2$ apparaît alors en facteur et, en le supprimant, il reste un hyperboloïde à une nappe. Si B et C sont nuls, la surface est un tore. Sinon la directrice touche la déférente en deux de ses ombilics et l'enveloppe est une cyclide de Dupin.

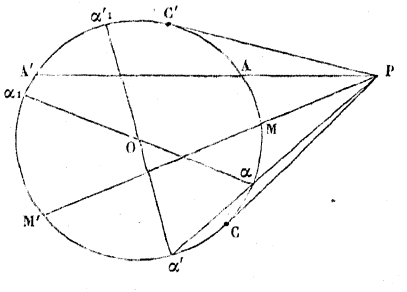
NOTE.

Quelques-uns des résultats établis analytiquement dans la seconde Partie de ce travail sont susceptibles d'une démonstration géométrique que nous croyons devoir indiquer rapidement.

Sphères bitangentes. — Soient G, G′ deux génératrices circulaires situées dans des plans Q, Q′ et S une sphère quelconque passant par G; cette sphère coupera G′ en deux points M_1, M'_1 et la corde $M_1M'_1$ coupera la droite d'intersection de Q et Q′ en un point P_1 qui sera d'égale puissance par rapport aux deux cercles considérés. Ce point restera fixe quand on fera varier le rayon de S; c'est le *centre radical* de G et G′.

La sphère S étant supposée fixe, supposons que G′ se rapproche indéfiniment de G; M_1, M'_1 tendront vers des points déterminés M, M′ de G, et P_1 vers un point P situé sur la caractéristique du plan Q; la corde MM′ ira passer par le point P (*fig.* 3). Donc chaque point pris sur l'axe OZ

Fig. 3.



du cercle G est le centre d'une sphère tangente à la surface cerclée en deux points de G; toutes les cordes de contact sont concourantes; toutes les sphères de deux séries consécutives coupent orthogonalement une sphère fixe ayant P pour centre; d'ailleurs, à une sécante MM′, correspond une sphère bitangente, et une seule, et réci-

proquement; M, M′ forment ce que nous avons appelé *un couple de points conjugués* [1]. En ces deux points les plans tangents font des angles égaux avec le plan Q et, par suite, coupent l'axe OZ au même point; leur droite d'intersection trace deux divisions homographiques sur OZ et sur la polaire CC′ de P; elle décrit donc un hyperboloïde.

Points remarquables. — Si la sphère bitangente se réduit à un plan, la corde MM′ devient la caractéristique AA′ du plan Q; en A, A′ les normales à la surface sont parallèles à OZ, et le cercle G est tangent à une ligne asymptotique de la surface.

Si S admet G comme grand cercle, la corde $M_1M'_1$, qui est toujours, dans l'espace, perpendiculaire à la droite menée du centre de S au centre de C′, aura pour limite la perpendiculaire menée de P à la tangente de la ligne des centres O, projetée sur le plan Q; cette droite est celle que nous avons appelée *axe radical;* les points α, α' qu'elle détermine sont ceux où la normale à la surface est tout entière dans le plan Q.

Cherchons les points où la génératrice G touche une ligne de courbure; de part et d'autre d'un tel point, il doit s'en trouver deux *infiniment voisins,* tels que la corde qui les joint soit perpendiculaire à la droite d'intersection des plans tangents correspondants; mais alors ces deux plans tangents sont également inclinés sur le plan Q : les deux points dont nous parlons sont donc conjugués; *les points de courbure sont donc les points de contact des tangentes issues de* P.

Surface des normales. — Cherchons enfin la surface Σ, lieu des normales aux différents points de G. La trace de cette surface sur le plan Q se compose du cercle G et des deux diamètres $O\alpha$, $O\alpha'$; cela donne en tout un lieu du quatrième ordre, et, comme chaque point de ce lieu, sauf α_1, α'_1, est certainement un point simple de Σ, celle-ci est une surface du quatrième ordre; cela résultera d'ailleurs de ce qui suit.

Cherchons les points doubles de Σ; de chacun d'eux partent deux normales ayant leurs pieds sur G; comme toute normale doit rencontrer OZ, la ligne double se scinde en deux : d'une part, l'axe OZ qui correspond aux couples de points conjugués; d'autre part, le lieu des points d'où l'on peut mener deux normales ayant leurs pieds diamétralement opposés.

---

[1] Il est entendu que nous laissons de côté le cas des enveloppes de sphères.

Or ce dernier lieu a, sur OZ, un point bien déterminé correspondant au cas où les pieds des normales sont à la fois conjugués et diamétralement opposés et, par suite, appartiennent au diamètre PO. Soit H ce point; si nous menons par OZ un plan quelconque, il coupera le lieu cherché en un point unique distinct de H; donc ce lieu est une conique; elle coupe l'axe OZ en H et la génératrice G aux deux points α_1, α'_1. Son plan est ainsi déterminé; il rencontre les parallèles à OZ, menées par A, A′ en deux points qui achèvent de définir la conique.

Cette courbe, l'axe du cercle et le cercle lui-même constituent les trois directrices de la surface cherchée.

Ce qui précède met en évidence une série de coniques appartenant à la surface des normales; en effet, le plan mené par le centre d'une sphère bitangente et la corde des contacts correspondante coupe la surface suivant une courbe du quatrième ordre composée des deux normales et d'une conique.

Toutes les coniques ainsi obtenues s'appuient en deux points sur la conique double et rencontrent constamment les deux droites $\alpha\alpha_1$, $\alpha'\alpha'_1$. Leurs plans enveloppent un cône ayant pour sommet P et pour équation, dans notre système de notations,

$$(ux + vy + wz + \mathrm{RR}')^2 = 4\mathrm{RR}'(w + py)z.$$

ERRATA.

Page 145, ligne 11, et page 147, ligne 10, *au lieu de* Ribaucour, *lisez* O. Bonnet.

Page 150, ligne 4 en remontant, mettre après le mot anharmonique un renvoi (1) et la note suivante :

(1) Ce théorème a été donné par M. Ribaucour pour le cas particulier des enveloppes de sphères.