

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. SIMON

Mémoire sur la rotation de la Lune et sur la libration réelle en latitude

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 3 (1866), p. 253-277

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1866_1_3__253_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1866, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE
SUR
LA ROTATION DE LA LUNE

ET SUR
LA LIBRATION RÉELLE EN LATITUDE,

PAR M. CH. SIMON,
PROFESSEUR AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND.

On sait que le mouvement de la Lune autour de son centre de gravité a été étudié principalement par Lagrange et par Poisson. C'est à Lagrange que l'on doit la théorie de la libration réelle en longitude et l'explication des lois de D. Cassini. Poisson signala plus tard, dans la libration réelle en latitude, une inégalité qui a pour argument la distance du périégée lunaire au nœud ascendant de l'orbite, et que Lagrange ainsi que Laplace avaient omise.

En reprenant la question sous un nouveau point de vue, j'ai cru reconnaître que l'analyse dont Poisson a fait usage, d'après Lagrange et Laplace, est fautive en un point important. Il résulte en effet des formules de Poisson que, si l'on fait d'abord abstraction de l'excentricité de l'orbite, l'axe de rotation décrit autour de l'axe de l'équateur un cône circulaire, qui roule sans glisser sur un autre cône également circulaire; de sorte que l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique reste constante dans le cours d'une révolution. Or, on conçoit, *à priori*, que cela ne peut pas être, et que l'axe lunaire doit subir une nutation semi-mensuelle, analogue à la nutation semi-annuelle que subit l'axe terrestre. On pourrait croire, à la vérité, que cette nutation semi-mensuelle est insensible; mais le calcul prouve qu'elle est sensible, c'est-à-dire qu'elle est du même ordre de grandeur que les autres quantités que l'on considère, et il est à remarquer que c'est elle précisément qui fait du problème de la rotation de la Lune un cas singulier du problème général de la rotation des corps. Elle consiste en ce que l'axe instantané oscille constamment dans le plan de la section principale, qui est perpendiculaire au grand axe dirigé vers la Terre, en décrivant un secteur de 86 secondes environ, dans un temps égal à

la moitié de la révolution de la Lune par rapport à la ligne mobile des nœuds; de sorte que l'on peut produire le mouvement qui a lieu en faisant rouler sans glisser le plan de ce secteur sur un cône ondulé dont la base est une suite de cycloïdes sphériques.

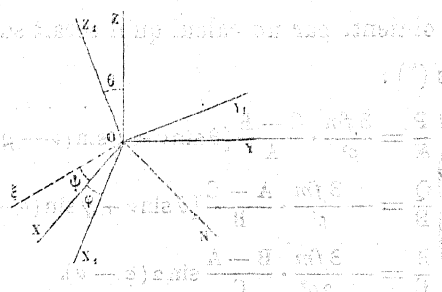
L'oscillation à longue période, qui dépend de l'excentricité de l'orbite, et que Poisson a découverte, joue le rôle d'une inégalité séculaire par rapport à la première. On peut, avec une approximation suffisante, la considérer comme s'exécutant dans le même plan que la première, et l'on obtient une image complète du phénomène de la rotation de la Lune en faisant rouler et glisser en même temps sur le cône cycloïdal dont on vient de parler la section principale dans laquelle l'axe instantané reste toujours compris.

Il me paraît difficile, mais non impossible, de constater par l'observation ces résultats singuliers: c'est pourquoi j'ai cru devoir, à la fin de mon travail, reproduire, en les complétant, les formules qui expriment les coordonnées sélénocentriques d'une tache lunaire, en fonction de ses coordonnées sélénographiques et du temps. Mais les anciennes observations de la libration sont tout à fait insuffisantes, et j'ai essayé de faire voir qu'on ne peut pas même compter sur la valeur qu'on en a déduite pour l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire sur l'écliptique. Je voudrais espérer que mes recherches pourront décider quelque astronome à entreprendre une série d'observations nouvelles, afin de résoudre d'une manière définitive une question qui présente un véritable intérêt.

I. Notations et formules générales.

Nous prendrons pour origine des coordonnées le centre de gravité de la Lune, et pour plan des xy le plan mené par ce point parallèlement au plan actuel de

Fig. 1.



l'écliptique. Nous supposerons l'axe OZ (*fig. 1*) perpendiculaire à ce plan et dirigé vers le pôle boréal, l'axe OX dirigé vers le nœud ascendant de l'équateur lunaire,

et l'axe OY dirigé de manière qu'on passe des x positifs aux y positifs par une rotation de 90 degrés exécutée autour de OZ, dans le sens *direct* ou *de droite à gauche*. Comme la trace du plan de l'équateur lunaire sur le plan de l'écliptique se déplace continuellement, nous compterons toutes les longitudes, dans le sens direct, à partir d'une droite fixe Oξ menée arbitrairement dans le plan des xy , et nous appellerons ψ la longitude de la droite mobile OX.

Soient OX₁, OY₁, OZ₁ les trois axes principaux du sphéroïde lunaire, formant un système superposable aux axes OX, OY, OZ. La position de ce nouveau système sera déterminée à chaque instant par les angles XOX₁ = φ et ZOZ₁ = θ , comptés dans le sens direct. Relativement à ces axes principaux, soient A, B, C les moments d'inertie; p, q, r les composantes de la vitesse de rotation; P, Q, R les sommes des moments des forces perturbatrices, ou, si l'on aime mieux, les moments des couples accélérateurs; nous aurons les trois équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} + \frac{C-B}{A} qr = \frac{P}{A}, \\ \frac{dq}{dt} + \frac{A-C}{B} rp = \frac{Q}{B}, \\ \frac{dr}{dt} + \frac{B-A}{C} pq = \frac{R}{C}. \end{cases}$$

On sait que la Terre est le seul astre qui exerce une influence sensible sur le mouvement de rotation de la Lune. Considérons l'orbite sélénocentrique de la Terre, nommons γ son inclinaison sur l'écliptique, et soit ON la direction du nœud *descendant*; nous ne supposerons pas que cette droite ON coïncide nécessairement avec OX, nous appellerons ω sa longitude comptée à partir de la droite fixe Oξ, et nous poserons, pour abrégér, $\omega - \psi = g$. En désignant par ν la longitude de la Terre dans son orbite, comptée à partir de la droite mobile OX, par ρ son rayon vecteur, par fm le produit de sa masse par le coefficient de l'attraction, et, en négligeant les termes où entrent les produits de trois facteurs très-petits de l'ordre θ , γ ou $\frac{C-B}{A}$, on obtient, par un calcul qu'il serait superflu de développer, les formules suivantes (*):

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{P}{A} = \frac{3fm}{\rho^3} \cdot \frac{C-B}{A} [\theta \sin \nu + \gamma \sin(\nu - g)] \sin(\varphi - \nu), \\ \frac{Q}{B} = -\frac{3fm}{\rho^3} \cdot \frac{A-C}{B} [\theta \sin \nu + \gamma \sin(\nu - g)] \cos(\varphi - \nu), \\ \frac{R}{C} = -\frac{3fm}{2\rho^3} \cdot \frac{B-A}{C} \sin 2(\varphi - \nu). \end{cases}$$

(*) Ces formules ne diffèrent que par les notations de celles de la *Mécanique céleste*.

La troisième formule (1), quand on y a substitué pour $\frac{R}{C}$ la valeur (2), est celle qui détermine le mouvement de la Lune autour de l'axe de son équateur et la libration réelle en longitude. Mais nous n'examinerons pas cette question. Nous admettrons que le moyen mouvement de rotation, que nous désignerons par n , est constamment égal au moyen mouvement de révolution, et que l'expression de la libration en longitude ne renferme que des termes périodiques dont les coefficients sont très-petits; nous supposons $A < B < C$, l'axe OX , étant le grand axe du sphéroïde lunaire qui est constamment dirigé vers la Terre, et nous nous bornons à discuter les deux équations dont dépendent les rotations p et q .

En posant, pour abrégé,

$$\frac{C - B}{A} = \alpha^2, \quad \frac{C - A}{B} = \epsilon^2,$$

nous aurons

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} + \alpha^2 qr = \frac{3fm}{\rho^3} \alpha^2 [\theta \sin \nu + \gamma \sin(\nu - g)] \sin(\varphi - \nu), \\ \frac{dq}{dt} - \epsilon^2 qr = \frac{3fm}{\rho^3} \epsilon^2 [\theta \sin \nu + \gamma \sin(\nu - g)] \cos(\varphi - \nu). \end{cases}$$

Or, on connaît les intégrales générales de ces équations privées de seconds membres. Si l'on remplace r par sa valeur moyenne n , et si l'on représente par H et η deux constantes arbitraires qui dépendent de l'état initial, ces intégrales sont

$$\begin{aligned} p &= H\alpha \cos(\alpha\epsilon nt + \eta), \\ q &= H\epsilon \sin(\alpha\epsilon nt + \eta); \end{aligned}$$

elles indiquent une oscillation du pôle autour de sa position moyenne, oscillation dont la période est $\frac{2\pi}{\alpha\epsilon n}$ ou $\frac{T}{\alpha\epsilon}$, T étant la durée de la révolution sidérale de la Lune, et dont l'amplitude est H . Mais cette oscillation est insensible, comme toutes celles qui dépendent de l'état initial; on doit donc supposer $H = 0$. On voit alors que les valeurs de p et de q , déterminées par les équations (3), sont nécessairement du second ordre, en regardant les facteurs α^2 , ϵ^2 , θ , γ comme des quantités très-petites du premier ordre; et comme nous négligeons les quantités du troisième ordre (à moins qu'elles ne puissent acquérir par l'intégration de très-petits diviseurs), les équations (3) deviendront simplement

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{3fm}{\rho^3} \alpha^2 [\theta \sin \nu + \gamma \sin(\nu - g)] \sin(\varphi - \nu), \\ \frac{dq}{dt} = \frac{3fm}{\rho^3} \epsilon^2 [\theta \sin \nu + \gamma \sin(\nu - g)] \cos(\varphi - \nu). \end{cases}$$

C'est sous cette forme que nous allons les discuter. Nous étudierons successivement le mouvement de précession de l'équateur lunaire, la nutation semi-mensuelle qui est indépendante de l'excentricité de l'orbite, et la nutation à longue période qui dépend de cette excentricité. Nous établirons ensuite les formules nécessaires pour comparer la théorie aux observations.

II. Du mouvement de précession de l'équateur lunaire.

Pour déterminer le mouvement de précession de l'équateur lunaire, on peut évidemment négliger les termes périodiques du rayon vecteur, de la longitude et de la libration en longitude, ce qui revient à supposer $\nu = \varphi$ et $\frac{fm}{\varphi^2} = n^2$. Alors les équations (4) se réduisent à

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = 0, \\ \frac{dq}{dt} = 3n^2 \epsilon^2 [\theta \sin \varphi + \gamma \sin (\varphi - g)]. \end{cases}$$

On pourrait les intégrer, mais cela n'est pas nécessaire à notre objet actuel. Imaginons, en effet, un nouvel axe OY' , mené perpendiculairement à OX dans le plan de l'équateur et dans le même sens que OY , et appelons s et s' les composantes de la vitesse de rotation par rapport à OX et à OY' ; nous aurons, par des formules connues,

$$(6) \quad \begin{cases} \sin \theta \frac{d\psi}{dt} = \frac{ds}{n dt}, \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{ds'}{n dt}. \end{cases}$$

Or, les accélérations $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{ds'}{dt}$ s'obtiennent immédiatement en projetant sur OX et sur OY' les accélérations $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\frac{dq}{dt} \sin \varphi, \\ \frac{ds'}{dt} &= +\frac{dq}{dt} \cos \varphi; \end{aligned}$$

et, en vertu des équations (5) et (6),

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{d\psi}{dt} &= -3n \epsilon^2 [\theta \sin \varphi + \gamma \sin (\varphi - g)] \sin \varphi, \\ \frac{d\theta}{dt} &= +3n \epsilon^2 [\theta \sin \varphi + \gamma \sin (\varphi - g)] \cos \varphi. \end{aligned}$$

En remplaçant les produits de sinus et de cosinus par des sommes, en supprimant tous les termes qui dépendent de φ , et en supposant $\sin \theta = \theta$, on trouve enfin

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = -\frac{3}{2} n \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\gamma \cos g}{\theta} \right), \\ \frac{d\theta}{dt} = +\frac{3}{2} n \varepsilon^2 \gamma \sin g. \end{cases}$$

Ces formules sont analogues à celles qui déterminent le mouvement de précession de l'équateur terrestre, quand on fait abstraction du déplacement séculaire du plan de l'écliptique, et quand on néglige les termes à courtes périodes qui dépendent des longitudes de la Lune et du Soleil. Mais, dans le problème de la rotation de la Terre, l'angle g représenterait la longitude du nœud descendant de l'orbite lunaire comptée à partir de l'équinoxe d'automne, et l'on sait que cette longitude varie de 0 à -2π ; en outre l'inclinaison de l'équateur terrestre sur l'écliptique est plus grande que l'inclinaison de l'orbite lunaire. En raison de ces deux circonstances, les termes dépendants de l'angle g produisent, dans le mouvement de l'axe de la Terre, une nutation qui a été observée par Bradley, et qui n'a pas son analogue dans la théorie de la Lune. Il résulte, en effet, des observations de D. Cassini, continuées jusqu'à nos jours, que le nœud descendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique ne s'écarte jamais que très-peu du nœud ascendant de l'équateur lunaire. On peut donc supposer $\cos g = 1$, $\sin g = g$, et les formules (7) deviennent

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d\psi}{dt} = -\frac{3}{2} n \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\gamma}{\theta} \right), \\ \frac{d\theta}{dt} = +\frac{3}{2} n \varepsilon^2 \gamma g. \end{cases}$$

Soit h la valeur moyenne de θ , et soit $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)$ le moyen mouvement des nœuds de l'équateur lunaire, on aura

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = -\frac{3}{2} n \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\gamma}{h} \right).$$

Soit $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$ le moyen mouvement des nœuds de l'orbite lunaire; on doit avoir rigoureusement

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = \left(\frac{d\psi}{dt}\right),$$

et, par suite,

$$(9) \quad \left(\frac{d\omega}{dt}\right) = -\frac{3}{2} n \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\gamma}{h} \right).$$

Comme on peut déterminer par l'observation les quantités $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$, n , γ et h , cette dernière équation permet de calculer le coefficient ϵ^2 . On en tire

$$(10) \quad \epsilon^2 = -\frac{2}{3} \frac{h \left(\frac{d\omega}{dt}\right)}{(h + \gamma)n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{h + \gamma} \cdot \frac{T}{\Theta},$$

Θ désignant dans cette formule la durée de la révolution sidérale des nœuds de l'orbite, tandis que T est la durée de la révolution sidérale de la Lune elle-même. En supposant

$$h = 1^{\circ} 28' 45'', \quad T = 27^{\text{j}}, 3215,$$

$$\gamma = 5^{\circ} 8' 48'', \quad \Theta = 6793^{\text{j}}, 39,$$

on trouve

$$\epsilon^2 = 0,000597 (*).$$

Cela posé, pour intégrer les équations (8), nous remarquerons qu'on a, par définition,

$$g = \omega - \psi,$$

et, par suite,

$$\frac{dg}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right) - \left(\frac{d\psi}{dt}\right),$$

attendu que dans la question actuelle nous ne considérons que les positions moyennes des nœuds de l'équateur et de l'orbite. Retrançons donc la première équation (8) de l'équation (9), il viendra

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{3}{2} n \epsilon^2 \gamma \frac{\theta - h}{\theta h};$$

ou bien, en remplaçant au dénominateur θh par h^2 ,

$$(11) \quad \frac{dg}{dt} = -\frac{3n\epsilon^2\gamma}{2h^2}(\theta - h).$$

A cette équation il faut joindre la seconde équation (8), qui peut s'écrire ainsi :

$$(12) \quad \frac{d(\theta - h)}{dt} = +\frac{3}{2} n \epsilon^2 \gamma g;$$

(*) L'auteur de la *Mécanique céleste*, qui parvient à peu près au même résultat, introduit dans ses formules $\frac{C-A}{A}$ au lieu de $\frac{C-A}{B}$; mais cette substitution est sans importance, parce que la différence de ces deux quantités est de l'ordre du carré de l'une d'elles.

et des équations (11) et (12) on tire immédiatement

$$(13) \quad \begin{cases} g = \frac{H}{h} \cos\left(\frac{3n\epsilon^2\gamma}{2h} t + \eta\right), \\ \theta - h = H \sin\left(\frac{3n\epsilon^2\gamma}{2h} t + \eta\right), \end{cases}$$

H et η étant des constantes arbitraires qui dépendent de l'état initial.

On voit par les formules (13) que les positions moyennes du nœud descendant de l'orbite et du nœud ascendant de l'équateur coïncident rigoureusement, et que la valeur moyenne de θ est rigoureusement égale à la valeur de h qui satisfait à l'équation (9); mais on voit en même temps que le nœud descendant de l'orbite oscille de part et d'autre du nœud ascendant de l'équateur, et que l'inclinaison θ oscille en deçà et au delà de h . L'amplitude de ces oscillations est arbitraire; quant à leur durée, elle a pour expression

$$\frac{4\pi h}{3n\epsilon^2\gamma} = \frac{h + \gamma}{\gamma} \Theta = 8740 \text{ jours environ.}$$

Mais comme ces oscillations n'ont pas été constatées par l'observation, il faut admettre qu'on a, sinon rigoureusement, du moins à très-peu près, $H = 0$; et, par suite,

$$\theta = h, \quad g = 0.$$

Nous analyserons dans un autre Mémoire les conditions auxquelles la Lune a dû satisfaire, dans son état initial, pour que des phénomènes aussi singuliers vissent à se réaliser (*). Il suffit à notre objet actuel de remarquer que la coïncidence du nœud descendant moyen de l'orbite avec le nœud ascendant moyen de l'équateur étant une fois établie, cette coïncidence se maintiendra indéfiniment, malgré les variations périodiques ou séculaires que les forces perturbatrices pourront introduire dans les éléments n , γ et $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$; car, si ces variations produisaient un écart sensible entre les deux nœuds, il en résulterait seulement des oscillations dont la loi est déterminée par les formules (13). Mais, comme l'inclinaison moyenne h de l'équateur sur l'écliptique est liée aux éléments n , γ et $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)$, par la relation

$$(9) \quad \left(\frac{d\omega}{dt}\right) = -\frac{3}{2} n \epsilon^2 \left(1 + \frac{\gamma}{h}\right),$$

(*) Ce serait une erreur de croire, comme le veulent quelques auteurs, que la coïncidence du nœud descendant de l'orbite et du nœud ascendant de l'équateur est une conséquence nécessaire de l'égalité des moyens mouvements de rotation et de révolution. Il est possible que ces deux phénomènes aient une origine commune, et nous essayerons même de faire voir que cela est probable; mais ils ne dépendent pas nécessairement l'un de l'autre, et l'on pourrait concevoir que le second existât sans que le premier eût lieu.

on doit se demander si les variations séculaires de ces éléments n'introduisent pas dans h une variation correspondante. Or, on sait que les variations séculaires de l'inclinaison γ de l'orbite sur l'écliptique vraie sont insensibles; on sait de plus que si l'on désigne par δn la variation du moyen mouvement au bout d'un temps quelconque, la variation de la vitesse moyenne des nœuds de l'orbite est $+ 0,735452 \delta n$. En différentiant l'équation (9), nous aurons donc

$$0,735452 \delta n = -\frac{3}{2} \epsilon^2 \left(1 + \frac{\gamma}{h}\right) \delta n + \frac{3}{2} n \epsilon^2 \frac{\gamma}{h^2} \delta h.$$

De cette équation l'on peut tirer δh en fonction de δn ; mais il est évident que cette variation est insensible, malgré la petitesse du diviseur $\frac{3}{2} n \epsilon^2 \frac{\gamma}{h^2}$, à cause de l'extrême lenteur avec laquelle n varie. On doit donc regarder comme constante l'inclinaison moyenne de l'équateur lunaire sur l'écliptique; et il en est de même, par conséquent, de l'inclinaison de cet équateur sur le plan de l'orbite. La seule cause qui pourrait faire varier h sensiblement serait une modification qui surviendrait dans la constitution intérieure de la Lune, et par suite dans la valeur du coefficient ϵ^2 .

III. De la nutation semi-mensuelle qui est indépendante de l'excentricité de l'orbite.

Par ce qui précède, on peut, dans les équations (4), supposer $g = 0$. Si l'on continue à regarder l'orbite comme circulaire, et si l'on fait, par conséquent,

$\frac{fn}{\rho^2} = n^2$ et $v = \varphi$, ces équations deviennent

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = 0, \\ \frac{dq}{dt} = + 3n^2 \epsilon^2 (\theta + \gamma) \sin \varphi. \end{cases}$$

En négligeant les quantités très-petites du troisième ordre, on trouve facilement que les parties non arbitraires de leurs intégrales sont

$$\begin{aligned} p &= 0, \\ q &= -3n \epsilon^2 (h + \gamma) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Observons que, par la formule (10), le coefficient ϵ^2 est égal à $\frac{2}{3} \cdot \frac{h}{h + \gamma} \cdot \frac{T}{\Theta}$, et posons, pour abréger,

$$(15) \quad \zeta = \frac{3}{2} \epsilon^2 (h + \gamma) = h \frac{T}{\Theta} = \text{arc } 21'',4;$$

ces intégrales s'écriront ainsi :

$$(16) \quad \begin{cases} p = 0 \\ q = -2n\zeta \cos \varphi. \end{cases}$$

Telles sont les formules qui déterminent le déplacement des pôles de rotation à la surface du sphéroïde lunaire, lorsqu'on fait abstraction de l'excentricité de l'orbite. On y lit immédiatement que l'axe instantané de rotation reste toujours compris dans le plan Z, OY , perpendiculaire au grand axe dirigé vers la Terre, et qu'il oscille dans ce plan, en faisant avec l'axe de l'équateur un angle dont le sinus ou la tangente a pour expression

$$(17) \quad \frac{q}{n} = -2\zeta \cos \varphi (*).$$

L'amplitude totale de cette oscillation est égale à 4ζ , ou à $85'',6$; sa période est la même que celle de l'angle φ , c'est-à-dire qu'elle est égale à la durée de la révolution de la Lune par rapport à la ligne mobile des nœuds, ou à $27^j, 218$.

Nous allons chercher maintenant comment l'axe de rotation se déplace dans l'espace, en ayant soin de distinguer l'axe instantané de l'axe géométrique. Cette distinction serait superflue dans la théorie de la Terre, parce que l'écart maximum des deux axes est d'environ $\frac{1}{100}$ de seconde; mais ici elle est évidemment nécessaire.

Considérons d'abord l'axe géométrique OZ , et l'équateur géométrique qui contient les deux axes OX , et OY . Le déplacement de ce système d'axes est déterminé par les formules connues

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{d\psi}{dt} &= p \sin \varphi + q \cos \varphi, \\ \frac{d\theta}{dt} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \end{aligned}$$

(*) D'après les formules de Poisson, cette oscillation *plane* devrait être remplacée par une oscillation *circulaire*: l'axe instantané de rotation décrirait autour de l'axe de l'équateur un cône de révolution ayant pour demi-ouverture l'angle que nous avons appelé ζ . Mais Poisson a négligé des quantités du même ordre de grandeur que celles qu'il a calculées. En réalité, l'oscillation plane, que représente la formule (17), est la résultante de deux oscillations *elliptiques* de même période, de même amplitude et de sens contraires. Ces deux oscillations se composent comme deux rayons lumineux de même longueur d'onde, de même phase et de même intensité, polarisés elliptiquement en sens contraires, et donnant un rayon polarisé rectilignement. Dans un autre travail, nous aurons l'occasion de développer ces considérations: nous nous bornons aujourd'hui à établir, par la voie la plus directe, les formules définitives.

dans lesquelles il faut substituer pour p et q les valeurs (16). On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{d\psi}{dt} &= -2n\zeta \cos^2 \varphi, \\ \frac{d\theta}{dt} &= +2n\zeta \sin \varphi \cos \varphi; \end{aligned}$$

et, en remplaçant les produits de sinus par des sommes,

$$(18) \quad \begin{cases} \sin \theta \frac{d\psi}{dt} = -n\zeta(1 + \cos 2\varphi), \\ \frac{d\theta}{dt} = +n\zeta \sin 2\varphi. \end{cases}$$

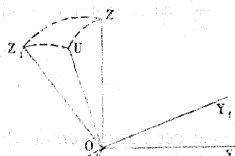
Le terme indépendant de φ , qui se trouve dans l'expression de $\frac{d\psi}{dt}$, représente, comme il est facile de s'en assurer, le mouvement de précession que nous avons déjà considéré. Quant aux termes périodiques qui entrent dans les deux formules (18), ils indiquent une nutation circulaire de sens *direct*, dont le rayon est $\frac{\zeta}{2}$, et dont la période est égale à la moitié de la révolution de la Lune par rapport à la ligne mobile des nœuds, ou à 13j, 609. En effet, si l'on désigne par ψ_m la longitude moyenne du nœud ascendant de l'équateur géométrique, les intégrales de ces équations peuvent s'écrire ainsi :

$$(19) \quad \begin{cases} \psi = \psi_m - \frac{\zeta}{2 \sin h} \sin 2\varphi, \\ \theta = h - \frac{\zeta}{2} \cos 2\varphi, \end{cases}$$

aux quantités près du troisième ordre.

Considérons en second lieu l'axe instantané, ainsi que l'équateur apparent qui lui est perpendiculaire; appelons θ' et ψ' l'inclinaison et la longitude du nœud

Fig. 2.



ascendant de l'équateur apparent, pour les distinguer des quantités analogues qui se rapportent à l'équateur géométrique, et remarquons sur-le-champ que la valeur

moyenne de ψ' ne peut pas différer de la valeur moyenne de ψ , mais que la valeur moyenne de θ' n'est pas égale à la valeur moyenne de θ . En effet, soit OU (*fig. 2*) l'axe instantané, soit OX' la trace de l'équateur apparent sur le plan de l'écliptique, et soit $\partial\psi$ l'angle $X'OX$. Dans le triangle sphérique ZZ_1U formé par les pôles de l'écliptique, de l'équateur géométrique et de l'équateur apparent, on a

$$\begin{aligned} ZZ_1 &= \theta, \\ ZU &= \theta', \\ UZ_1 &= \frac{q}{n} = -2\zeta \cos\varphi, \\ \text{angle } Z, ZU &= \partial\psi, \\ \text{angle } UZ, Z &= \text{angle } XOX_1 = \varphi, \end{aligned}$$

parce que l'axe OX_1 est perpendiculaire au plan Z, OY_1 qui contient l'axe OU .

On a donc, dans ce triangle,

$$\sin \partial\psi = \sin \varphi \cdot \frac{-2\zeta \cos \varphi}{\sin \theta'} = -\frac{\zeta \sin 2\varphi}{\sin \theta'};$$

et l'on voit par là que la valeur moyenne de $\partial\psi$ est nulle, comme on devait s'y attendre. Le même triangle fournit encore la relation

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \cos \theta - 2\zeta \cos \varphi \sin \theta \cos \varphi, \\ \cos \theta' &= \cos \theta - \zeta(1 + \cos 2\varphi) \sin \theta; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en appelant h' la valeur moyenne de θ' ,

$$\begin{aligned} \cos h' &= \cos h - \zeta \sin h, \\ \cos h' &= \cos(h + \zeta), \\ h' &= h + \zeta. \end{aligned}$$

Cela posé, nous obtiendrons facilement les variations de θ' et de ψ' en projetant, comme nous l'avons déjà fait, les accélérations $\frac{dp}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$, données par les formules (14), sur l'axe OX (que l'on peut regarder comme se confondant avec OX') et sur l'axe auxiliaire OY' mené perpendiculairement à OX dans le plan de l'équateur géométrique. En appelant s et s' les vitesses de rotation par rapport à ces axes, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -\frac{dq}{dt} \sin \varphi = -n^2 \zeta (1 - \cos 2\varphi), \\ \frac{ds'}{dt} &= +\frac{dq}{dt} \cos \varphi = +n^2 \zeta \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\sin \theta' \frac{d\psi'}{dt} = \frac{ds}{n dt}, \quad \frac{d\theta'}{dt} = -\frac{ds'}{n dt};$$

il vient donc

$$\begin{aligned} \sin \theta' \frac{d\psi'}{dt} &= -n\zeta(1 - \cos 2\varphi), \\ \frac{d\theta'}{dt} &= -n\zeta \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

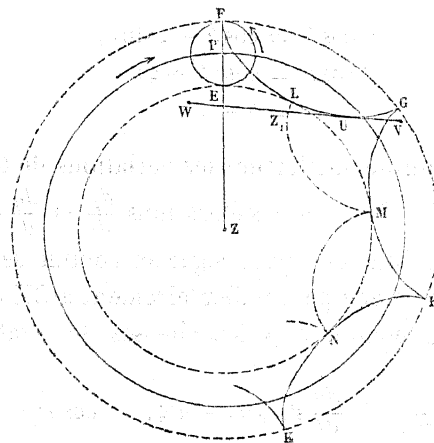
En intégrant ces équations, et en ayant égard aux remarques que nous avons faites sur les valeurs moyennes, on trouve facilement, aux quantités près du troisième ordre,

$$(20) \quad \begin{cases} \psi' = \psi_m + \frac{\zeta}{2 \sin h} \sin 2\varphi, \\ \theta' = h + \zeta + \frac{\zeta}{2} \cos 2\varphi. \end{cases}$$

La comparaison de ces formules aux formules (19) montre que l'axe instantané et l'axe géométrique subissent des nutations de même période, de même amplitude et de même sens, mais que les positions des deux pôles, sur leurs cercles de nutation, diffèrent toujours de 180 degrés. La raison de cette particularité va être mise en évidence par la construction suivante.

Quel que soit le mouvement d'un corps autour d'un point, l'axe instantané de rotation décrit un certain cône Σ' dans l'espace absolu, et un autre cône Σ dans l'intérieur du corps, et l'on peut toujours produire le mouvement qui a lieu en faisant rouler sans glissement le cône Σ sur le cône Σ' ; voyons quels sont ces deux

Fig. 3.



cônes dans la question actuelle. Le centre de la sphère céleste coïncidant avec le centre de gravité de la Lune, soit Z (fig. 3) le pôle de l'écliptique, et soit P la position moyenne, à une époque quelconque, du pôle de l'équateur apparent. En vertu

du mouvement de précession, le point P décrit autour de Z, dans le sens rétrograde et dans le temps Θ , un cercle dont la distance polaire est $h + \zeta$. Mais les formules (20) indiquent en outre une nutation, qui consiste en ce que le pôle instantané décrit autour du point P, dans le sens direct et dans le temps $\frac{T}{2}$ (*), un cercle de rayon $\frac{\zeta}{2}$; il est facile de composer ces deux mouvements en un seul. En effet, le rapport des vitesses angulaires autour des axes OP et OZ est $\frac{2\Theta}{T}$; le rapport des distances angulaires qui correspondent aux rayons des cercles est sensiblement $\frac{\zeta}{2h}$ ou $\frac{T}{2\Theta}$; de plus, ζ est très-petit par rapport à h . Il résulte donc, soit de la théorie des épicycloïdes, soit de la composition des rotations, que, si l'on imagine un cercle décrit du point Z comme pôle, avec la distance polaire $ZF = h + \zeta + \frac{\zeta}{2}$, le mouvement du pôle instantané pourra être représenté en faisant rouler, sans glissement, dans l'intérieur de ce cercle, un petit cercle de rayon $PF = \frac{\zeta}{2}$. Le pôle instantané décrit donc sur la sphère céleste une épicycloïde FLGMH..., et cette épicycloïde est la base du cône que nous avons appelé Σ' . Chaque branche FLG de cette courbe est décrite par le pôle dans le temps $\frac{T}{2}$, et sa longueur est égale à quatre fois le diamètre du cercle générateur, c'est-à-dire à 4ζ .

Or, le cône que nous avons appelé Σ se réduit, par ce qui précède, à un angle plan, que l'axe instantané décrit également dans le temps $\frac{T}{2}$, et qui intercepte sur la sphère céleste un arc WUV dont la longueur est 4ζ ; de plus, on montrerait sans difficulté, si cette vérification était nécessaire, que la vitesse du pôle est la même sur l'épicycloïde et sur l'arc de cercle, en des points correspondants. Les choses se passent donc comme si le secteur circulaire WUV roulait sans glisser sur le cône ondulé Σ' ; et il est évident qu'il n'y a pas de solution de continuité lorsque le pôle arrive successivement aux divers points de rebroussement F, G, H, ..., parce qu'en ces points les plans tangents au cône Σ' vont passer par l'axe OZ. Remarquons enfin que le point Z, pôle de l'équateur géométrique, est toujours le milieu de l'arc WUV. Ce point décrit donc sur la sphère céleste une seconde épicycloïde LMN... dont la première est la développée; et l'on voit clairement pourquoi les inclinaisons moyennes des axes OZ, et OU sur l'axe OZ diffèrent de ζ , et pourquoi les positions des deux pôles Z, et U sur leurs cercles de nutation diffèrent constamment de 180 degrés.

(*) Plus exactement dans un temps égal à la moitié de la révolution de la Lune par rapport à la ligne mobile des nœuds, ou en 13^d,609.

IV. *De la nutation à longue période qui dépend de l'excentricité de l'orbite.*

Lagrange et Laplace avaient négligé l'excentricité de l'orbite et les perturbations : tous les termes qui en dépendent ayant en effet des coefficients très-petits, et étant multipliés par des produits de deux facteurs très-petits $\alpha^2 \theta$, $\alpha^2 \gamma$, $\epsilon^2 \theta$ ou $\epsilon^2 \gamma$, sont en général du troisième ordre, et par conséquent négligeables. On conçoit néanmoins que plusieurs d'entre eux peuvent passer au second ordre et devenir sensibles, en acquérant par l'intégration de très-petits diviseurs : tels sont ceux qui ont pour argument la distance du périégée lunaire au nœud ascendant de l'orbite géocentrique, ou, ce qui est la même chose, la distance du *périsélène* de la Terre au nœud descendant de l'orbite sélénocentrique. C'est Poisson qui a reconnu l'influence de ces termes. En examinant de nouveau cette question, nous n'en avons pas trouvé d'autres que ceux que Poisson avait signalés, et même il nous a paru que les calculs de ce grand géomètre pouvaient être simplifiés en un point important. Poisson tient compte d'une inégalité en latitude qui est proportionnelle à $e\gamma \sin E$, e étant l'excentricité de l'orbite et E la distance du périsélène au nœud descendant; de sorte qu'en désignant par λ la latitude de la Terre vue de la Lune, il suppose

$$\text{tang } \lambda = -\gamma \sin \nu - k e \gamma \sin E.$$

Mais la valeur numérique du coefficient k est 0,01955 (*) : ce coefficient est donc du même ordre de grandeur que l'excentricité. Et comme, dans cette analyse, on néglige tous les termes qui dépendent du carré de l'excentricité, nous croyons pouvoir poser simplement

$$\text{tang } \lambda = -\gamma \sin \nu.$$

Au reste, la légitimité de cette simplification sera vérifiée *a posteriori* par l'accord de nos résultats numériques avec ceux de Poisson.

Reprenons donc les équations (4), qui ont été établies en supposant que $\text{tang } \lambda$ ou λ est égale à $-\gamma \sin \nu$. En faisant dans ces équations $g = 0$, et en remplaçant δ par sa valeur moyenne h , elles deviennent

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{3fm}{p^3} \alpha^2 (h + \gamma) \sin \nu \sin(\varphi - \nu), \\ \frac{dq}{dt} = \frac{3fm}{p^3} \epsilon^2 (h + \gamma) \sin \nu \cos(\varphi - \nu). \end{cases}$$

(*) *Mécanique céleste*, t. III, p. 199 et 233 (ancienne édition).

Mais l'anomalie moyenne de la Terre vue de la Lune est $\varphi - E$, et l'on a, en négligeant les termes en e^2 , et en appelant a le demi-grand axe de l'orbite,

$$\begin{aligned}\rho &= a[1 - e \cos(\varphi - E)], \\ \rho^{-3} &= a^{-3}[1 + 3e \cos(\varphi - E)], \\ \nu &= \varphi + 2e \sin(\varphi - E), \\ \sin \nu &= \sin \varphi + 2e \sin(\varphi - E) \cos \varphi, \\ \sin(\varphi - \nu) &= -2e \sin(\varphi - E), \\ \cos(\varphi - \nu) &= 1.\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (21), et en remplaçant $\frac{fm}{a^3}$ par n^2 , on trouve

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= -3n^2 \alpha^2 (h + \gamma) 2e \sin(\varphi - E) \sin \varphi, \\ \frac{dq}{dt} &= +3n^2 \varepsilon^2 (h + \gamma) [\sin \varphi + 2e \sin(\varphi - E) \cos \varphi + 3e \cos(\varphi - E) \sin \varphi].\end{aligned}$$

Observons maintenant que

$$\begin{aligned}2 \sin(\varphi - E) \sin \varphi &= \cos E - \cos(2\varphi - E), \\ 2 \sin(\varphi - E) \cos \varphi &= \sin(2\varphi - E) - \sin E, \\ 3 \cos(\varphi - E) \sin \varphi &= \frac{3}{2} [\sin(2\varphi - E) + \sin E].\end{aligned}$$

Si l'on néglige les termes qui ont pour facteur e , et qui ne peuvent pas acquérir par l'intégration de très-petits diviseurs, il vient enfin

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{dp}{dt} = -3n^2 \alpha^2 (h + \gamma) e \cos E, \\ \frac{dq}{dt} = +3n^2 \varepsilon^2 (h + \gamma) \left(\sin \varphi + \frac{e}{2} \sin E \right). \end{cases}$$

Telles sont les équations qu'il faut intégrer.

On sait que l'angle E augmente constamment, parce que la ligne des nœuds rétrograde et parce que le péricélène est animé d'un mouvement direct. Représentons par $\left(\frac{dE}{dt}\right)$ le moyen mouvement du péricélène par rapport au nœud de l'orbite, et posons

$$\left(\frac{dE}{dt}\right) = in,$$

le coefficient i étant égal, par les observations, à 0,01247. Posons encore, comme

précédemment,

$$\zeta = \frac{3}{2} \varepsilon^2 (h + \gamma);$$

les parties non arbitraires des intégrales des équations (22) auront pour expression

$$(23) \quad \begin{cases} p = -2n\zeta \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{e}{i} \sin E, \\ q = -2n\zeta \cos \varphi - n\zeta \frac{e}{i} \cos E. \end{cases}$$

Le terme dont l'argument est φ détermine la nutation semi-mensuelle, que nous avons étudiée dans le paragraphe précédent; les termes dont l'argument est E déterminent une nutation d'une nouvelle espèce, dont la période est égale à la révolution du péricélène par rapport au nœud descendant, ou à 2191 jours environ. Cette seconde nutation joue le rôle d'une variation séculaire par rapport à la première, comme nous allons le reconnaître.

En prenant seulement dans les formules (23) les termes dont l'argument est E , on a

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{p}{n} = -2\zeta \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{e}{i} \sin E, \\ \frac{q}{n} = -\zeta \frac{e}{i} \cos E. \end{cases}$$

Ces formules expriment que l'axe instantané de rotation décrit autour de l'axe géométrique OZ_1 , dans l'intérieur du globe lunaire, un cône à base elliptique. Mais la base de ce cône est très-aplatie; elle se réduit sensiblement à son grand axe. En effet, toutes les observations de la libration en longitude s'accordent à donner au rapport $\frac{B-A}{C}$ une valeur presque égale à celle du rapport $\frac{C-A}{B}$. Nicollet a trouvé, d'après les observations de Bouvard et les siennes propres (*), que le maximum de l'équation annuelle de cette libration est de $4'50''$; on en conclut

$$\frac{B-A}{C} = 0,000564.$$

D'un autre côté, nous avons trouvé

$$\frac{C-A}{B} = 0,000597.$$

De là on tire à très-peu près

$$\frac{C-B}{A} = 0,000033,$$

(*) *Connaissance des Temps* pour 1822 et pour 1823.

et, par conséquent,

$$\frac{\alpha^2}{\delta^2} = \frac{33}{597} = \frac{1}{18} \text{ environ.}$$

Ainsi le rapport $\frac{\alpha^2}{\delta^2}$ est du même ordre de grandeur que l'excentricité de l'orbite.

On peut donc, dans les formules (24), regarder la valeur de p comme négligeable devant celle de q ; en d'autres termes, on peut (au moins dans une première approximation) supposer que l'oscillation de l'axe instantané qu'indiquent ces formules s'exécute, comme la première, dans le plan principal $Z_1 O Y_1$.

Remarquons maintenant que l'angle ζ est égal, par ce qui précède, à $21''{,}4$, et qu'on a, par les observations,

$$e = 0,05486,$$

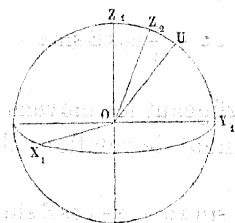
$$\frac{e}{i} = 4,3994.$$

Il en résulte que le sinus ou la tangente de l'angle compris entre l'axe instantané et l'axe géométrique est donné par la formule

$$\frac{q}{n} = -(42''{,}8) \cos \varphi - (94''{,}15) \cos E.$$

On peut donc se représenter le mouvement de l'axe instantané, dans l'intérieur du sphéroïde lunaire, en concevant dans le plan principal $Z_1 O Y_1$: 1° l'axe géométrique OZ_1 (*fig. 4*); 2° un axe fictif OZ_2 , qui oscille de part et d'autre de OZ_1 , en

Fig. 4.



faisant l'angle $Z_1 O Z_2$ égal à $-(94''{,}15) \cos E$; 3° l'axe instantané OU , qui oscille de part et d'autre de OZ_2 , en faisant l'angle $Z_2 O U$ égal à $-(42''{,}8) \cos \varphi$. Les durées de ces deux oscillations (complètes) sont respectivement de 2191 jours et de $27^j{,}218$. Admettons, pour un instant, que l'axe OZ_2 reste immobile pendant une oscillation simple de l'axe OU , c'est-à-dire pendant la durée d'une demi-révolution de la Lune par rapport à la ligne mobile des nœuds: alors la construction du paragraphe précédent (*fig. 3*) subsiste sans autre modification que d'appliquer à l'axe OZ_2 ce qui se rapportait à l'axe OZ_1 . On peut encore dire que le secteur

circulaire WUV roule sans glisser sur le cône ondulé FLGMH..., seulement c'est le point Z_2 , et non le point Z_1 , qui est le milieu de l'arc WV; et si l'on appelle ∂E la variation très-petite de l'angle E pendant que le pôle instantané décrit, par exemple, la branche FLG de l'épicycloïde, il faut imaginer qu'au passage de cette branche à la suivante GMH le plan principal $Z_1 OY_1$ tourne autour de l'axe OX_1 de la quantité $+(94'',15) \sin E \partial E$, en glissant sur le plan tangent dont la trace est ZG. Mais comme le mouvement oscillatoire de l'axe OZ_2 est continu, aussi bien que celui de l'axe OU , on obtiendra une image plus exacte et plus complète du phénomène en faisant rouler et glisser en même temps le plan $Z_1 OY_1$ sur le cône épicycloïdal; la vitesse de glissement étant égale à chaque instant à la vitesse angulaire de l'axe OZ_2 par rapport à l'axe OZ_1 , et ayant pour expression analytique $+ n\zeta e \sin E$.

Il y aurait peu d'intérêt à pousser plus loin cette analyse; mais, pour pouvoir comparer la théorie aux observations, il est nécessaire d'établir les formules complètes qui déterminent le mouvement de l'axe OZ_1 et de l'équateur géométrique. On obtiendra ces formules en substituant dans les équations

$$\sin \theta \frac{d\psi}{dt} = p \sin \varphi + q \cos \varphi,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = p \cos \varphi - q \sin \varphi,$$

les valeurs (23) de p et de q (*). On aura ainsi

$$\sin \theta \frac{d\psi}{dt} = -n\zeta \left(1 + \cos 2\varphi + \frac{e}{i} \cos E \cos \varphi + 2 \frac{\alpha^2}{\delta^2} \frac{e}{i} \sin E \sin \varphi \right),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = +n\zeta \left(\sin 2\varphi + \frac{e}{i} \cos E \sin \varphi - 2 \frac{\alpha^2}{\delta^2} \frac{e}{i} \sin E \cos \varphi \right).$$

Intégrons ces équations, en négligeant les moyens mouvements du péricléène et du nœud devant le moyen mouvement de rotation; il viendra

$$(25) \quad \begin{cases} \psi = \psi_m - \frac{\zeta}{2 \sin h} \left(\sin 2\varphi + 2 \frac{e}{i} \cos E \sin \varphi - 4 \frac{\alpha^2}{\delta^2} \frac{e}{i} \sin E \cos \varphi \right), \\ \theta = h - \frac{\zeta}{2} \left(\cos 2\varphi + 2 \frac{e}{i} \cos E \cos \varphi + 4 \frac{\alpha^2}{\delta^2} \frac{e}{i} \sin E \sin \varphi \right). \end{cases}$$

Les valeurs numériques des coefficients de ces formules dépendent de l'inclinaison moyenne h . On suppose ordinairement, d'après Nicollet,

$$h = 1^\circ 28' 45'';$$

(*) On doit observer que la valeur de p , donnée par les formules (23), est très-petite par rapport au second terme de q , mais non par rapport au premier.

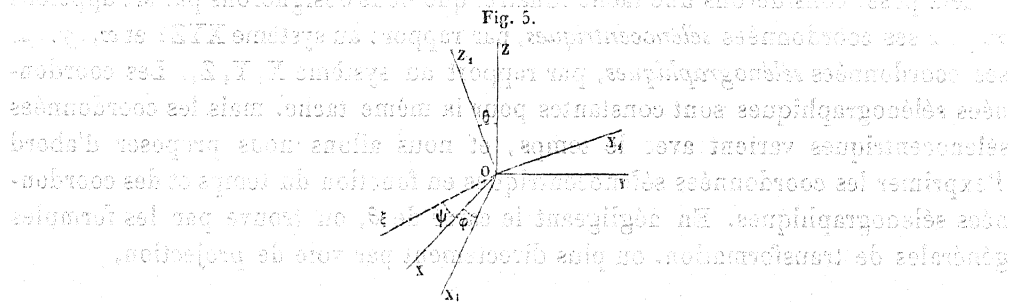
mais, pour des raisons que nous indiquerons tout à l'heure, la valeur de cette constante nous paraît mal déterminée, sans que l'incertitude dont elle est affectée puisse influer d'une manière sensible sur les valeurs absolues de ζ et de $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$. Nous laisserons donc h arbitraire, en supposant néanmoins $\zeta = \text{arc } 21",4$ et $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1}{18}$; et nous aurons enfin

$$(26) \quad \begin{cases} \psi = \psi_m - (414",7) \sin 2\varphi - (3649",3) \cos E \sin \varphi + (405",5) \sin E \cos \varphi, \\ \theta = h - (10",7) \cos 2\varphi - (94",15) \cos E \cos \varphi - (10",5) \sin E \sin \varphi. \end{cases}$$

Ces formules s'accordent avec celles que Poisson a données dans la *Connaissance des Temps* pour 1822, si ce n'est que Poisson a omis les termes qui dépendent de l'angle 2φ , et qu'il a adopté pour le rapport $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ une valeur un peu différente de celle qui résulte des derniers calculs de Nicollet. Quant à l'inégalité du mouvement de la Lune en latitude $+k\epsilon\gamma \sin E$, dont Poisson a tenu compte et que nous avons cru pouvoir négliger, elle ne modifie que d'une manière tout à fait insensible les coefficients des termes où entre $\cos E$.

V. Sur la comparaison de la théorie aux observations.

Concevons les deux systèmes d'axes rectangulaires (*fig. 5*) qui ont pour origine le centre de gravité de la Lune, et que nous avons déjà définis : 1° les axes $OX, OY,$



parallèles au plan de l'écliptique, et OZ perpendiculaire à ce plan; 2° les axes principaux d'inertie OX_1, OY_1, OZ_1 . Ces deux systèmes sont superposables; l'axe OZ est dirigé vers le pôle boréal de l'écliptique, l'axe OX est la trace de l'équateur lunaire sur l'écliptique, dirigée vers le nœud moyen ascendant de cet équateur ou vers le nœud moyen descendant de l'orbite terrestre, et l'on passe des x positifs aux y positifs par une rotation directe de 90 degrés autour de OZ . Les formules (26)

donnent à chaque instant l'inclinaison θ de l'axe OZ_1 sur l'axe OZ , et la longitude ψ de l'axe OX comptée à partir d'une droite $O\xi$, que l'on peut faire coïncider, si l'on veut, avec la ligne des équinoxes : ces formules déterminent donc complètement la position du plan de l'équateur lunaire. Quant à la position de l'axe OX_1 dans ce plan, elle est déterminée par l'angle φ compris entre OX , et OX_1 , et compté dans le sens direct. On sait que la valeur moyenne de l'angle φ est égale à la longitude moyenne de la Terre comptée à partir de OX ; mais cet angle φ est affecté d'inégalités périodiques qui constituent ce qu'on appelle la *libration réelle en longitude*, et que nous n'avons pas calculées. En désignant par μ la libration en longitude, nous supposons d'après Poisson (*Connaissance des Temps* pour 1821),

$$(27) \quad \mu = -\frac{3(B-A)}{C} \cdot \frac{(6^{\circ} 18' 2'' \sin(\text{anom. moy. } \odot))}{0,9832 - \frac{3(B-A)}{C}} - \frac{3(B-A)}{C} \cdot \frac{(11' 9'' \sin(\text{anom. moy. } \ominus))}{0,0056 - \frac{3(B-A)}{C}}.$$

Nous appellerons ν , comme précédemment, la longitude moyenne sélénocentrique de la Terre comptée à partir de OX , ou, ce qui est la même chose, la longitude moyenne géocentrique de la Lune comptée du nœud ascendant de son orbite, et nous aurons

$$(28) \quad \varphi = \nu + \mu - (\psi - \psi_m).$$

Les longitudes moyennes ν et ψ_m sont données à chaque instant par les tables : ainsi les positions des deux systèmes XYZ et $X_1 Y_1 Z_1$ sont complètement déterminées.

Cela posé, considérons une tache lunaire, que nous désignerons par M ; appelons x, y, z ses coordonnées *sélénocentriques*, par rapport au système XYZ ; et x_1, y_1, z_1 ses coordonnées *sélénographiques*, par rapport au système $X_1 Y_1 Z_1$. Les coordonnées sélénographiques sont constantes pour la même tache, mais les coordonnées sélénocentriques varient avec le temps, et nous allons nous proposer d'abord d'exprimer les coordonnées sélénocentriques en fonction du temps et des coordonnées sélénographiques. En négligeant le carré de θ , on trouve par les formules générales de transformation, ou plus directement par voie de projection,

$$(29) \quad \begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi - z_1 \theta, \\ z = x_1 \theta \sin \varphi + y_1 \theta \cos \varphi + z_1. \end{cases}$$

Mais il convient de substituer aux coordonnées rectangulaires les coordonnées polaires. Soient r le rayon vecteur qui joint le centre de gravité de la Lune à la tache M , ρ la longitude sélénocentrique de cette tache comptée à partir de $O\xi$, et λ sa lati-

tude sélénocentrique, comptée à partir de l'écliptique, on a

$$\begin{aligned}x &= r \cos \lambda \cos(\varrho - \psi), \\y &= r \cos \lambda \sin(\varrho - \psi), \\z &= r \sin \lambda.\end{aligned}$$

Soient \mathfrak{A} la longitude sélénographique de la même tache, comptée dans le sens direct à partir du méridien principal $Z_1 OX_1$, et soit \mathfrak{O} sa latitude sélénographique, comptée à partir de l'équateur, on a de même

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \mathfrak{O} \cos \mathfrak{A}, \\y_1 &= r \cos \mathfrak{O} \sin \mathfrak{A}, \\z_1 &= r \sin \mathfrak{O}.\end{aligned}$$

En portant ces valeurs dans les formules (29), il vient

$$(30) \quad \begin{cases} \cos \lambda \cos(\varrho - \psi) = \cos \mathfrak{O} \cos(\mathfrak{A} + \varphi), \\ \cos \lambda \sin(\varrho - \psi) = \cos \mathfrak{O} \sin(\mathfrak{A} + \varphi) - \theta \sin \mathfrak{O}, \\ \sin \lambda = \sin \mathfrak{O} + \theta \cos \mathfrak{O} \sin(\mathfrak{A} + \varphi). \end{cases}$$

Il est évident d'ailleurs qu'on aurait pu obtenir ces dernières formules par la considération du triangle sphérique dont les sommets sont la tache M, le pôle de l'écliptique et le pôle de l'équateur.

Les formules (30) peuvent être mises sous une forme plus commode pour le calcul numérique. En effet, puisqu'on néglige le carré de θ , la troisième de ces formules peut s'écrire

$$\sin \lambda = \sin[\mathfrak{O} + \theta \sin(\mathfrak{A} + \varphi)];$$

on a donc

$$(31) \quad \lambda = \mathfrak{O} + \theta \sin(\mathfrak{A} + \varphi).$$

On tire de là

$$\cos \lambda = \cos \mathfrak{O} - \theta \sin \mathfrak{O} \sin(\mathfrak{A} + \varphi);$$

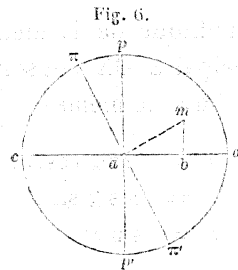
et, en substituant cette valeur dans l'une ou dans l'autre des deux premières formules (30), on en déduit facilement

$$(32) \quad \varrho - \psi = \mathfrak{A} + \varphi - \theta \tan \mathfrak{O} \cos(\mathfrak{A} + \varphi).$$

Mais on doit observer que cette dernière formule (32) suppose que la quantité $\theta \tan \mathfrak{O}$ est du même ordre de grandeur que θ , ce qui exige que la tache M ne soit pas très-éloignée de l'équateur. Avec cette restriction, l'on peut considérer les formules (31) et (32) comme exprimant les coordonnées sélénocentriques d'une tache quelconque en fonction des coordonnées sélénographiques et du temps. Voyons

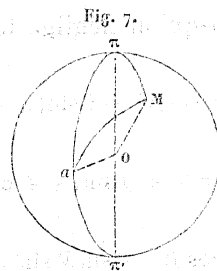
maintenant comment on peut déterminer ces mêmes coordonnées sélénocentriques ϱ et λ , par l'observation directe.

Supposons que la *fig. 6* représente le disque lunaire vu du centre de la Terre; soient m la perspective de la tache M sur ce disque, a le centre du disque, $\pi\pi'$ la



trace du cercle de latitude, pp' la trace du cercle de déclinaison, cd la trace du parallèle sur lequel se trouve la Lune au moment de l'observation. De la surface de la Terre on peut mesurer directement ou indirectement (*) (sauf à appliquer aux mesures des corrections convenables) la distance am et l'angle map . D'ailleurs l'angle $pa\pi$ peut être calculé dans le triangle sphérique géocentrique dont les sommets sont le pôle de l'écliptique, le pôle de l'équateur terrestre et le centre de la Lune: on connaît donc l'angle $ma\pi$.

Soit O le centre de la Lune (*fig. 7*); soit M la tache, qui dans la *fig. 6* se projette



en m , et soit $\pi a\pi'$ le cercle de latitude qui passe par le centre du disque. Dans le triangle sphérique πaM , on connaît l'angle $Ma\pi$, qui, dans la *fig. 6*, se projette en vraie grandeur suivant $ma\pi$; on connaît le côté πa , qui est la distance sélénoc-

(*) Nous disons *directement ou indirectement*, parce que le choix des quantités qui font l'objet d'une mesure directe dépend de la nature de l'instrument et du micromètre dont on fait usage. Avec un instrument monté parallactiquement et muni d'un micromètre à fils rectangulaires, les quantités qu'on mesure directement sont: 1° la différence en ascension droite de la tache et du bord oriental ou occidental de la Lune; 2° la différence en déclinaison de la tache et du bord inférieur ou supérieur. On en conclut les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle abm (*fig. 6*), et par suite l'hypoténuse am et l'angle amb ou map .

centrique de la Terre au pôle de l'écliptique ($\pi\alpha = 90^\circ +$ latitude géocentrique de la Lune), et je dis que l'on connaît aussi le côté αM . En effet, soient O et T les angles sous lesquels l'arc αM est vu du centre de la Lune et du centre de la Terre, soient r et ρ les rayons vecteurs qui joignent le centre de la Lune à la tache M et au centre de la Terre, et soit Δ le diamètre apparent de la Lune vue du centre de la Terre; dans le triangle rectiligne OMT , on a

$$\sin(O + T) = \frac{\rho}{r} \sin T = \frac{\sin T}{\frac{\Delta}{2}}$$

Or, l'angle T a été mesuré; le diamètre apparent Δ peut être tiré des éphémérides, avec quelques corrections dans le détail desquelles nous ne croyons pas devoir entrer; on peut donc calculer l'angle O , dont l'arc αM est la mesure. Ainsi, dans le triangle sphérique $\pi\alpha M$ on connaît deux côtés et l'angle compris: on peut donc calculer le côté πM et l'angle $M\pi\alpha$. Mais le côté πM est le complément de λ ; l'angle $M\pi\alpha$ est égal à \mathcal{L} moins la longitude sélénocentrique de la Terre. Le problème est donc résolu. En égalant les valeurs de \mathcal{L} et de λ , données par l'observation, à leurs expressions analytiques (31) et (32), on obtient deux équations où entrent comme inconnues les coordonnées sélénographiques \mathfrak{A} et \mathfrak{O} et les diverses constantes de la libration. En faisant plusieurs observations de la même tache, on obtient entre les mêmes quantités autant d'équations de condition qu'on le veut; on traite ensuite ces équations par la méthode des moindres carrés.

On voit que tout repose sur la méthode directe ou indirecte de la distance am et de l'angle map (*fig. 6*); et il faut bien reconnaître que, de quelque façon qu'on s'y prenne, on ne peut pas espérer d'atteindre une grande précision, attendu qu'une variation sélénocentrique de 90 degrés dans la distance am correspond à une variation géocentrique de 15 à 16 minutes. Mais ces variations ne sont pas proportionnelles, et il est facile de voir que la position la plus favorable est celle d'une tache qui n'est pas très-éloignée du centre du disque. Sous ce rapport, la tache *Manilius*, sur laquelle ont porté d'abord les observations de Mayer, puis celles de Bouvard et de Nicollet, est assez bien choisie, puisque ses coordonnées sélénographiques sont environ $\mathfrak{A} = 15^\circ$ et $\mathfrak{O} = 9^\circ$; mais, d'après une remarque de MM. Beer et Mædler, cette tache est mal choisie sous d'autres rapports. Elle consiste, en effet, en une espèce de dôme qui se présente sous des aspects variés, aux diverses époques de la lunaison, selon la manière dont le Soleil l'éclaire: il en résulte que dans les différentes observations on n'est pas sûr de viser au même point. Bouvard et Nicollet se servaient d'une lunette d'un mètre de longueur, montée parallactiquement, et munie d'un micromètre qui consistait en une lame de verre sur laquelle étaient tracés des traits équidistants. MM. Beer et Mædler ont pro-

posé de remplacer ce micromètre par l'héliomètre de Fraunhofer, que les travaux de Bessel ont rendu célèbre, et de faire porter les observations sur un cratère très-clair, qu'ils ont nommé *Mæsting A* dans leur *Mappa selenographica*, et qui présente un point de visée parfaitement net : toutefois il ne paraît pas que les tentatives qui ont été faites sur ces indications aient conduit à des résultats satisfaisants. Peut-être conviendrait-il de substituer aux mesures prises sur des images aériennes et fugitives des mesures prises sur des images photographiques suffisamment nettes et suffisamment agrandies, telles que celles qu'obtient M. Warren de la Rue ; mais c'est un point qu'on ne saurait décider qu'après des observations comparatives, prolongées pendant plusieurs lunaisons.

Quoi qu'il en soit, c'est encore au travail de Bouvard et de Nicollet qu'il faut recourir, dans l'état actuel, pour avoir les constantes de la libration ; mais, indépendamment de la méthode d'observation et du choix de la tache observée, la discussion faite par Nicollet nous paraît donner lieu à une objection grave. Dans le but de vérifier le théorème de D. Cassini sur la coïncidence des nœuds de l'équateur et de l'orbite, Nicollet introduit comme inconnue dans ses calculs la distance de ces deux nœuds, qu'il désigne par δ . Cette quantité, que nous avons représentée par $\psi - \psi_m$, a pour expression, d'après nos formules,

$$-(414'',7) \sin 2\varphi - (3649'',3) \cos E \sin \varphi + (405'',5) \sin E \cos \varphi ;$$

elle est donc essentiellement périodique. Nicollet la traite comme une constante, ce qui revient à ne considérer que sa valeur moyenne, et il trouve

$$\delta = 0^{\circ} 9' 19''.$$

Or, il résulte de notre théorie que la valeur moyenne de δ est rigoureusement nulle. L'introduction de cette quantité (quand on néglige les termes périodiques) ne peut donc avoir pour effet que de compliquer sans nécessité les calculs, et de jeter quelque doute sur la détermination de l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique.