G. FLOQUET

Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 181-238

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__181_0>

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A COEFFICIENTS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES,

PAR M. G. FLOQUET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

Dans un travail antérieur (1), j'ai considéré une équation différentielle linéaire homogène, d'ordre m, à coefficients uniformes, et dont l'intégrale générale était supposée uniforme. J'ai regardé les coefficients comme simplement périodiques, de même période ω, et j'ai établi que cette périodicité entraînait l'existence de m solutions distinctes de la forme

$$\mathfrak{P}(x) = \varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + x^2\varphi_2(x) + \ldots + x^i\varphi_i(x),$$

où $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_i(x)$ désignent des fonctions simplement périodiques de seconde espèce, de même multiplicateur, et de la période ω. Les expressions $\mathfrak{P}(x)$ se réduisent généralement à leur premier terme, de sorte que, en général, il existe m solutions distinctes qui sont simplement périodiques de seconde espèce. Il y a d'ailleurs toujours une solution de cette nature.

Il est tout indiqué d'examiner ensuite le cas plus spécial des coefficients doublement périodiques. Ce sont les beaux travaux de M. Hermite sur l'équation de Lamé qui ont suggéré l'étude de ce cas important, et l'intégration de cette équation, celle de certaines équations particulières, les recherches de M. Picard (2), de M. Mittag-Leffler

(1) *Annales de l'École Normale supérieure* (février et mars 1883).

(2) *Journal de Crelle,* t. 90.

sur les équations d'ordre quelconque, ont montré combien sont intéressantes, dans ce cas, les propriétés des intégrales.

Je me suis proposé ici, *étant donné que les coefficients de l'équation considérée admettent deux périodes distinctes* ω *et* ω', *de trouver comment cette double périodicité se traduit dans la forme des intégrales.*

J'ai résolu la question en prouvant qu'il existe m solutions distinctes affectant la forme de polynômes aux deux variables x et $Z(x)$, les coefficients de chaque polynôme étant des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, de mêmes multiplicateurs, aux périodes ω et ω'; $Z(x)$ désigne une fonction uniforme qui augmente de quantités constantes quand on y remplace x par $x+\omega$ ou par $x+\omega'$

$$Z(x+\omega)=Z(x)+q, \quad Z(x+\omega')=Z(x)+q',$$

et telle que $\omega q' - q\omega'$ diffère de zéro. Si, dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, on prendra

$$Z(x)=\mathrm{D}\log\theta(x)=\frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$

$\theta(x)$ étant l'une des quatre fonctions θ, auquel cas on aura

$$q=0, \quad q'=-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}, \quad \omega q' - q\omega' = -2\pi\sqrt{-1}.$$

Si, au contraire, le coefficient de $\sqrt{-1}$ est négatif, on prendra

$$Z(x)=\mathrm{D}\log\vartheta(x)=\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)},$$

$\vartheta(x)$ étant l'une des fonctions ϑ, et l'on aura

$$q=\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega'}, \quad q'=0, \quad \omega q' - q\omega' = -2\pi\sqrt{-1}.$$

Nos polynômes en x et $Z(x)$ se réduisent généralement à leur terme indépendant de ces variables, de sorte que, en général, il existe un système fondamental d'intégrales doublement périodiques de seconde espèce, ce qui constitue le beau théorème de M. Picard. Je démontre d'ailleurs que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que deux équations algébriques, appelées équations fondamentales, aient leurs racines inégales, ou au moins que les racines multiples remplissent certaines conditions déterminées. Il y a toujours une solution de seconde espèce, et j'étudie, dans un cas quelconque, le nombre de celles qui sont distinctes.

Les fonctions doublement périodiques, soit de première espèce, soit de seconde espèce, qui vont figurer dans ce travail, étant toujours aux périodes ω et ω', je me dispenserai de spécifier chaque fois ces deux périodes.

Pour abréger, j'écrirai s. p. d. s. e. et d. p. d. s. e. au lieu de simplement périodique de seconde espèce et de doublement périodique de seconde espèce. J'écrirai pareillement s. p. d. p. e. et d. p. d. p. e. pour les fonctions de première espèce.

Je continuerai à employer la notation $\mathfrak{P}(x)$ pour désigner une expression de la forme

$$\mathfrak{P}(x) = \varphi_0(x) + x\,\varphi_1(x) + \ldots + x^i\,\varphi_i(x),$$

où $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\ldots$, $\varphi_i(x)$ sont des fonctions s. p. d. s. e., de même multiplicateur et de la période ω. Je dirai alors que cette expression est de la forme $\mathfrak{P}(x)$, avec ce multiplicateur et le degré i.

Je désignerai de même par $\mathfrak{P}'(x)$ une expression telle que

$$\mathfrak{P}'(x) = \varphi'_0(x) + x\,\varphi'_1(x) + \ldots + x^{i'}\varphi'_{i'}(x),$$

où $\varphi'_0(x)$, $\varphi'_1(x)$, $\ldots$, $\varphi'_{i'}(x)$ sont s. p. d. s. e., de même multiplicateur, et de la période ω'.

I. — Équations fondamentales.

1. Soit l'équation différentielle linéaire homogène

$$\mathrm{P}(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y = 0,$$

à coefficients uniformes et doublement périodiques, de périodes ω et ω', et dont l'intégrale générale est supposée uniforme.

Faisons abstraction, pour le moment, de la période ω', et regardons les coefficients comme périodiques, de période ω.

L'intégration dépend alors d'une certaine équation algébrique $\Delta = 0$, que j'ai appelée l'*équation fondamentale relative à la période* ω, et dont le premier membre est un déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11}-\varepsilon & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}-\varepsilon & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm}-\varepsilon \end{vmatrix},$$

de degré m par rapport à l'inconnue ε (¹).

Chaque racine ε_i de $\Delta = 0$ a, pour ainsi dire, deux caractéristiques, son degré de multiplicité μ_i et l'ordre λ_i à partir duquel les déterminants mineurs de Δ cessent d'être tous nuls pour $\varepsilon = \varepsilon_i$, auquel cas on a $\lambda_i \leq \mu_i$ (²). La première μ_i représente le nombre maximum des solutions distinctes qui sont de la forme $\mathfrak{P}(x)$ avec le multiplicateur ε_i (³), et la seconde λ_i représente le nombre maximum des solutions distinctes qui sont s. p. d. s. e., de période ω, avec le multiplicateur ε_i (⁴).

μ_i solutions distinctes $\mathfrak{P}(x)$, appartenant au multiplicateur ε_i, proviennent du *groupe* (⁵) d'intégrales corrélatif de la racine ε_i, et le nombre des *sous-groupes* (⁶) engendrés par ce groupe est égal à λ_i.

Si n est le nombre des racines distinctes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ de $\Delta = 0$, il y a ainsi n groupes corrélatifs des diverses racines, et leur ensemble comprend $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ éléments, c'est-à-dire m éléments, constituant un système fondamental. Quant au nombre total des sous-groupes, il est égal à $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$, et je poserai

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \nu,$$

de sorte que ν représentera le nombre maximum des solutions distinctes qui sont s. p. d. s. e., de période ω, tel que $P = 0$ en admette ν, et pas davantage. Je désignerai par $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_\nu(x)$ ν solutions distinctes de cette nature.

Toute intégrale de la forme $\mathfrak{P}(x)$ a pour multiplicateur une racine

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure,* p. 49; 1883.
(²) *Ibid.*, p. 76.
(³) *Ibid.*, p. 70.
(⁴) *Ibid.*, p. 83.
(⁵) *Ibid.*, p. 52.
(⁶) *Ibid.*, p. 75.

de $\Delta = 0$, et, si ε_i est cette racine, l'intégrale est une combinaison linéaire des éléments du groupe corrélatif de ε_i. J'ai même démontré ([1]) que, si cette intégrale de la forme $\mathfrak{P}(x)$ est du degré i, elle s'obtiendra en combinant seulement quelques éléments des divers sous-groupes corrélatifs de ε_i, ceux du degré égal ou inférieur à i. En particulier, une solution s. p. d. s. e., de période ω, sera une combinaison linéaire de celles des fonctions $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_\nu(x)$ qui appartiennent à son multiplicateur.

Enfin la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe m intégrales distinctes qui soient s. p. d. s. e., de période ω, étant que l'on ait $\nu = m$, ou

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n,$$

équivaudra à

$$\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \mu_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n = \mu_n,$$

à cause de $\lambda_i \leq \mu_i$. Autrement dit, chaque racine doit annuler tous les mineurs de Δ jusqu'à l'ordre marqué par son degré de multiplicité exclusivement. Cette condition est remplie d'elle-même lorsque $\Delta = 0$ n'a que des racines simples.

2. Si maintenant nous faisons abstraction de la période ω, pour n'envisager, dans les coefficients p_1, p_2, ..., p_m, que la période ω', nous aurons des propriétés en tout point analogues aux précédentes. Nous obtiendrons un système fondamental de solutions de la forme $\mathfrak{P}'(x)$, qui se partagera en groupes et en sous groupes, et qui sera lié à une certaine équation algébrique

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A'_{11} - \varepsilon' & A'_{12} & \ldots & A'_{1m} \\ A'_{21} & A'_{22} - \varepsilon' & \ldots & A'_{2m} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ A'_{m1} & A'_{m2} & \ldots & A'_{mm} - \varepsilon' \end{vmatrix} = 0,$$

n'ayant, comme $\Delta = 0$, ni racines nulles, ni racines infinies, et qu'on appellera l'*équation fondamentale relative à la période* ω'.

Je désignerai par n' le nombre des racines distinctes de $\Delta' = 0$, par ε'_1, ε'_2, ..., $\varepsilon'_{n'}$ ces racines, par μ'_1, μ'_2, ..., $\mu'_{n'}$ leurs degrés de multipli-

([1]) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 82; 1883.

cité respectifs, et par $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{n'}$ les ordres à partir desquels les mineurs de Δ' cessent d'être tous nuls, quand on y remplace ε' successivement par $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_{n'}$.

Si je pose

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 + \ldots + \lambda'_{n'} = \nu',$$

$P = 0$ admet alors ν' intégrales distinctes s. p. d. s. e., de période ω', et n'en admet pas davantage. Je représenterai par $S'_1(x)$, $S'_2(x)$, $\ldots$, $S'_{\nu'}(x)$, ν' solutions distinctes de cette nature. Pour exprimer qu'elles sont au nombre de m, on écrira

$$\lambda'_1 = \mu'_1, \quad \lambda'_2 = \mu'_2, \quad \ldots, \quad \lambda'_{n'} = \mu'_{n'}.$$

II. — Sur le nombre des solutions distinctes qui sont doublement périodiques de seconde espèce.

3. Considérant maintenant les deux périodes simultanées ω et ω', j'envisage les intégrales désignées au n° 1 par $S_1(x)$, $S_2(x)$, $\ldots$, $S_\nu(x)$, et les intégrales désignées au n° 2 par $S'_1(x)$, $S'_2(x)$, $\ldots$, $S'_{\nu'}(x)$.

Puisque les coefficients de $P = 0$ possèdent la période ω', les fonctions $S_1(x+\omega')$, $S_2(x+\omega')$, $\ldots$, $S_\nu(x+\omega')$ sont aussi des solutions. En outre, comme le changement de x en $x+\omega'$ dans l'identité

$$S_i(x+\omega) = \varepsilon_i S_i(x)$$

donne celle-ci

$$S_i(x+\omega'+\omega) = \varepsilon_i S_i(x+\omega'),$$

ces solutions sont s. p. d. s. e., de même période ω que $S_1(x)$, $S_2(x)$, $\ldots$, $S_\nu(x)$, et respectivement des mêmes multiplicateurs.

Pareillement, les fonctions $S'_1(x+\omega)$, $S'_2(x+\omega)$, $\ldots$, $S'_{\nu'}(x+\omega)$ sont des intégrales s. p. d. s. e., de période ω', et respectivement des mêmes multiplicateurs que $S'_1(x)$, $S'_2(x)$, $\ldots$, $S'_{\nu'}(x)$.

De cette remarque et d'une proposition rappelée plus haut découle le théorème suivant :

Si, parmi les intégrales $S(x)$ *ou parmi les intégrales* $S'(x)$, *une fonction se trouve seule de son multiplicateur, elle est doublement périodique de seconde espèce.*

En effet, $S_i(x+\omega')$, par exemple, étant une intégrale de même période ω et de même multiplicateur ε_i que $S_i(x)$, s'obtiendra en combinant linéairement $S_i(x)$ et toutes celles des fonctions $S(x)$ qui appartiennent au multiplicateur ε_i. Si donc $S_i(x)$ est seule dans ce cas, on aura

$$S_i(x+\omega') = \varepsilon'_i S_i(x),$$

ε'_i étant une constante, c'est-à-dire que $S_i(x)$ admet aussi ω' comme période de seconde espèce.

Supposons que l'une des deux équations fondamentales, $\Delta = 0$ par exemple, n'ait pas de racines multiples; on a alors (1)

$$\nu = n = m;$$

autrement dit, les intégrales $S(x)$ sont au nombre de m, et chacune est seule de son multiplicateur. D'où cette proposition, conséquence du théorème précédent :

Si l'une des deux équations fondamentales n'a que des racines simples, l'équation $P = 0$ *admet comme intégrales distinctes m fonctions doublement périodiques de seconde espèce.*

Comme, *en général*, une des équations fondamentales aura ses racines toutes différentes entre elles, on peut dire que :

En général, l'équation $P = 0$ *admet, comme intégrales distinctes, m fonctions doublement périodiques de seconde espèce.*

C'est là le théorème de M. Picard.

4. Il est clair que $P = 0$ n'admet pas toujours ces m solutions. Le nombre des intégrales distinctes qui sont d. p. d. s. e. ne peut évidemment surpasser celui des intégrales s. p. d. s. e. de l'une ou de l'autre période. Autrement dit :

Le nombre maximum N *des fonctions distinctes, doublement périodiques de seconde espèce, qui satisfont à l'équation* $P = 0$, *ne peut surpasser aucun des deux nombres* ν *et* ν'.

Le plus petit de ces deux nombres est ainsi une limite supérieure du

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 52; 1883.

nombre N. Cette limite pouvant être inférieure à m, il en est de même du nombre N.

Si, par exemple, l'une des deux équations fondamentales n'a qu'une racine, de degré de multiplicité m, n'annulant pas tous les mineurs du premier ordre, $P = 0$ n'aura pas deux intégrales distinctes d. p. d. s. e.

5. Mais nous allons voir que $P = 0$ admet toujours au moins une solution de cette nature et trouver une limite inférieure du nombre N.

Dans ce but, je remarque que le théorème du n° 3 peut s'étendre ainsi :

Si, parmi les intégrales $S(x)$ *ou parmi les intégrales* $S'(x)$, *plusieurs fonctions se trouvent du même multiplicateur, il existe au moins une combinaison linéaire de ces fonctions qui est doublement périodique de seconde espèce.*

Supposons, en effet, que $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_\lambda(x)$ appartiennent au même multiplicateur. Les fonctions $S_1(x+\omega'), S_2(x+\omega'), \ldots, S_\lambda(x+\omega')$ sont alors des solutions (n° 3) admettant, pour la période ω, ce même multiplicateur. Il en résulte (n° 1) que ces solutions sont λ combinaisons linéaires des intégrales $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_\lambda(x)$, car on suppose que ces intégrales sont les seules à admettre le multiplicateur en question. Le déterminant des λ^2 coefficients constants est d'ailleurs différent de zéro. Or j'ai démontré [1] que, dans ces conditions, il existe toujours au moins une combinaison linéaire de $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_\lambda(x)$, qui est s. p. d. s. e., de période ω'. Comme une pareille combinaison admet évidemment la période de seconde espèce ω, puisque, pour cette période, les multiplicateurs de $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_\lambda(x)$ sont égaux, elle constituera une intégrale d. p. d. s. e.

De ce théorème et du théorème n° 3, je conclus que :

L'équation $P = 0$ *admet toujours, comme intégrale, une fonction doublement périodique de seconde espèce.*

C'est la proposition qu'ont établie, pour la première fois, MM. Picard [2] et Mittag-Leffler [3].

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 55; 1883.

(2) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 février 1880.

(3) *Ibid.*

D'après les deux mêmes théorèmes, à chaque multiplicateur des fonctions $S(x)$ par exemple, répond au moins une intégrale d. p. d. s. e. Il existe donc au moins autant d'intégrales de cette nature qu'il y a de multiplicateurs, c'est-à-dire au moins n. Elles sont d'ailleurs distinctes, car une relation linéaire et homogène entre elles en donnerait une entre les fonctions $S(x)$. Par conséquent :

L'équation $P = 0$ *admet comme intégrales linéairement indépendantes au moins autant de fonctions doublement périodiques de seconde espèce que l'une quelconque des équations fondamentales a de racines distinctes.*

Nous avons ainsi une limite inférieure du nombre N. Ce nombre est au moins égal au plus grand des deux entiers n et n', et en tout cas au moins égal à l'unité.

6. Nous avons reconnu (n° 3) que, si l'une des équations fondamentales n'a que des racines simples, $P = 0$ admet comme intégrales distinctes m fonctions d. p. d. s. e. Nous en avons conclu que $P = 0$ est *généralement* dans ce cas, en ce sens que *généralement* l'une des équations fondamentales aura toutes ses racines différentes entre elles. Mais il importe de préciser les circonstances où $P = 0$ remplira ces conditions, ce qui peut avoir lieu, comme on va le voir, lorsque n et n' diffèrent de m.

Observons d'abord que, si N est égal à m, il en est de même de ν et de ν' à cause de l'inégalité

$$N \leq \nu \text{ et } \nu',$$

établie au n° 4, les nombres ν et ν' ne pouvant surpasser m.

Réciproquement, si ν et ν' sont égaux à m, il en sera de même de N.

Si, en effet, ν est égal à m, les intégrales $S(x)$ étant au nombre de m constituent un système fondamental.

Soient $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_\mu(x)$ toutes celles qui appartiennent à un certain multiplicateur. On a vu que $S_1(x+\omega')$, $S_2(x+\omega')$, ..., $S_\mu(x+\omega')$ sont alors μ combinaisons linéaires distinctes des solutions $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_\mu(x)$. Or j'ai démontré [1] que, dans ce cas, on peut toujours combiner linéairement ces μ solutions, de manière à obtenir

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 52; 1883.

μ fonctions distinctes $D(x)$, qui soient de la forme $\varphi'_0(x)$ ou de la forme

$$\varphi'_0(x) + x\,\varphi'_1(x) + x^2\,\varphi'_2(x) + \ldots + x^i\,\varphi'_i(x),$$

les $\varphi'(x)$ étant s. p. d. s. e., de période ω'. Concevons donc qu'on ait construit ces μ intégrales $D(x)$.

Elles possèdent évidemment la période de seconde espèce ω; mais elles admettent aussi ω' comme période de seconde espèce, c'est-à-dire qu'elles sont toutes de la première forme, de la forme $\varphi'_0(x)$, car, ν' étant égal à m, les solutions $S'(x)$ constituent un système fondamental. Les μ fonctions $D(x)$ en sont donc des combinaisons linéaires. Or cela exige, entre autres choses, qu'aucune d'elles ne renferme x explicitement. Toutes sont donc de la forme $\varphi'_0(x)$.

Nous avons ainsi μ fonctions d. p. d. s. e. $D(x)$, qui sont des combinaisons linéaires distinctes des μ éléments $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_\mu(x)$, et qui, par conséquent, peuvent être substituées à ces μ éléments dans le système fondamental $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_m(x)$.

Cette substitution étant faite, considérons maintenant les intégrales $S(x)$ qui appartiennent à un autre multiplicateur et opérons parallèlement, puis faisons de même successivement avec tous les multiplicateurs. On voit que finalement on aura substitué au système fondamental des $S(x)$ un système fondamental composé uniquement de fonctions d. p. d. s. e.

Et, par conséquent, si l'on a $\nu = \nu' = m$, il existe m fonctions distinctes de cette nature qui satisfont à $P = 0$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que N soit égal à m sont donc

$$\nu = \nu' = m,$$

qui équivalent, comme on sait (nos **1** et **2**), aux $n + n'$ égalités

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 = \mu_1, & \lambda_2 = \mu_2, & \ldots, & \lambda_n = \mu_n, \\ \lambda'_1 = \mu'_1, & \lambda'_2 = \mu'_2, & \ldots, & \lambda'_{n'} = \mu'_{n'}. \end{array}$$

D'où cette proposition :

Pour que $P = 0$ *admette comme intégrales distinctes m fonctions doublement périodiques de seconde espèce, il faut et il suffit que toute racine de chaque équation fondamentale annule tous les mineurs du premier* *membre jusqu'à l'ordre marqué par son degré de multiplicité exclusivement.*

Remarquons que, quand l'une des équations fondamentales, $\Delta = 0$ par exemple, n'a que des racines simples, auquel cas $\nu = m$, comme alors $N = m$, le nombre ν' sera aussi égal à m; autrement dit, la condition de nullité des mineurs sera nécessairement remplie pour l'autre équation fondamentale.

7. On peut se demander ce qui a lieu lorsqu'un seul des deux nombres ν et ν' est égal à m. Il est facile de voir que N est alors égal à l'autre.

Faisons, en effet, $\nu' = m$, et répétons la démonstration de la réciproque précédente, en y supposant $\nu \neq m$. On verra que l'on peut combiner linéairement les λ intégrales $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_\lambda(x)$, qui répondent à un même multiplicateur, de manière à obtenir λ fonctions d. p. d. s. e. Ces λ fonctions sont distinctes et peuvent, par conséquent, remplacer $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_\lambda(x)$ dans la suite $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_\nu(x)$. En faisant la substitution analogue pour chaque multiplicateur, on aura finalement ν intégrales distinctes d. p. d. s. e. Comme N ne peut surpasser ν, on a donc $N = \nu$.

D'où ce théorème :

Quand l'un des nombres ν et ν' est égal à m, N *est égal à l'autre.*

Ce théorème, et la réciproque du n° 6, qui en est un cas particulier, peuvent d'ailleurs s'établir aussi aisément de la manière suivante :

ν' étant égal à m, les intégrales $S'(x)$ constituent un système fondamental. En écrivant que $S'_1(x+\omega)$, $S'_2(x+\omega)$, ..., $S'_m(x+\omega)$ sont des combinaisons linéaires de $S'_1(x)$, $S'_2(x)$, ..., $S'_m(x)$, on en déduira alors l'équation fondamentale $\Delta = 0$. Comme $S'_i(x+\omega)$ s'obtient en combinant uniquement celles des fonctions $S'(x)$ qui appartiennent à un même multiplicateur, on verra que le déterminant Δ se présente sous une forme particulière, produit de plusieurs déterminants, et telle que le nombre ν, relatif au déterminant total Δ, soit la somme des nombres analogues relatifs aux déterminants composants. On en conclura sans peine que N est égal à ν.

8. Supposant maintenant les nombres ν et ν' quelconques, je me propose, connaissant les intégrales $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_\nu(x)$, par exemple, de calculer les solutions d. p. d. s. e. et, par conséquent, aussi le nombre N.

Soient, comme toujours, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ les n multiplicateurs distincts des fonctions $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_\nu(x)$. Une intégrale d. p. d. s. e. admet [1], pour la période ω, un de ces multiplicateurs. Pour obtenir toutes ces intégrales, il suffira donc de construire successivement toutes celles qui, pour la période ω, répondent au multiplicateur ε_1, puis au multiplicateur ε_2, etc.

Cherchons celles qui répondent au multiplicateur ε_1.

Soient $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_{\lambda_1}(x)$ toutes celles des fonctions $S(x)$ qui possèdent le multiplicateur ε_1. Chaque combinaison linéaire de ces λ_1 fonctions jouit de la même propriété. Si donc je construis celles de ces combinaisons qui possèdent la période de seconde espèce ω', j'obtiendrai des intégrales d. p. d. s. e. au multiplicateur commun ε_1 pour ω. Toutes les intégrales cherchées seront, d'ailleurs, obtenues par ce moyen, car on sait (n° 1) qu'une intégrale qui admet la période de seconde espèce ω et le multiplicateur ε_1 est une combinaison linéaire de $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_{\lambda_1}(x)$.

La question est par conséquent ramenée à ce problème : « Trouver les expressions

$$C_1 S_1(x) + C_2 S_2(x) + \ldots + C_{\lambda_1} S_{\lambda_1}(x)$$

qui admettent ω' comme période de seconde espèce, $C_1, C_2, \ldots, C_{\lambda_1}$ désignant des constantes. »

Or, si l'on observe que $S_1(x+\omega')$, $S_2(x+\omega')$, ..., $S_{\lambda_1}(x+\omega')$ sont des combinaisons linéaires de $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_{\lambda_1}(x)$, on sait résoudre le problème précédent. Soient, en effet,

$$\begin{aligned}
S_1(x+\omega') &= L_{11} S_1(x) + \ldots + L_{1\lambda_1} S_{\lambda_1}(x),\\
S_2(x+\omega') &= L_{21} S_1(x) + \ldots + L_{2\lambda_1} S_{\lambda_1}(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
S_{\lambda_1}(x+\omega') &= L_{\lambda_1 1} S_1(x) + \ldots + L_{\lambda_1\lambda_1} S_{\lambda_1}(x)
\end{aligned}$$

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 50; 1883.

les relations linéaires distinctes. On formera l'équation

$$\begin{vmatrix} L_{11}-\varepsilon & \dots & L_{1\lambda_1} \\ L_{21} & \dots & L_{2\lambda_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{\lambda_1 1} & \dots & L_{\lambda_1\lambda_1}-\varepsilon \end{vmatrix} = 0.$$

Si ses diverses racines annulent les mineurs jusqu'aux ordres respectifs $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n_1}$, et si l'on pose

$$\lambda_{11}+\lambda_{12}+\dots+\lambda_{1n_1}=\nu_1,$$

on trouvera ν_1 expressions distinctes $C_1 S_1(x)+\dots+C_{\lambda_1} S_{\lambda_1}(x)$ admettant la période de seconde espèce ω', c'est-à-dire ν_1 intégrales d. p. d. s. e.

En opérant de cette façon à l'égard de tous les multiplicateurs ε_1, $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, on obtiendra successivement toutes les solutions d. p. d. s. e. qui, pour la période ω, admettent ces multiplicateurs, c'est-à-dire toutes les fonctions d. p. d. s. e. qui satisfont à $P=0$.

Observons d'ailleurs que si, pour chaque multiplicateur, on forme des fonctions distinctes, toutes les intégrales ainsi obtenues, répondant aux divers multiplicateurs, seront elles-mêmes distinctes, de sorte qu'on en obtiendra le plus grand nombre possible, en prenant chaque fois le nombre maximum. Or, pour ε_1, ce nombre maximum était ν_1; si donc je désigne par $\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_n$ les nombres analogues pour ε_2, $\varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$, on voit que l'on a

$$N=\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n;$$

autrement dit :

L'équation $P=0$ *admet comme intégrales distinctes* $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n$ *fonctions doublement périodiques de seconde espèce et n'en admet pas davantage.*

9. Il est facile d'obtenir d'autres représentations du nombre N. Auparavant, je vais établir un lemme.

Une intégrale d. p. d. s. e. admettant, pour la période ω, un certain multiplicateur, est une combinaison de celles des fonctions $S(x)$ qui appartiennent à ce multiplicateur. Pareillement, l'intégrale considérée est une combinaison linéaire des fonctions $S'(x)$ qui possèdent son multiplicateur relatif à la période ω'.

Il en résulte qu'une somme d'intégrales d. p. d. s. e. peut se mettre sous la forme

$$C_1 S_1(x) + C_2 S_2(x) + \ldots + C_\nu S_\nu(x),$$

et aussi sous la forme

$$C'_1 S'_1(x) + C'_2 S'_2(x) + \ldots + C'_{\nu'} S'_{\nu'}(x),$$

les C désignant des constantes.

Je dis que, réciproquement, toute expression susceptible de ces deux formes est une somme d'intégrales d. p. d. s. e.

Soit, en effet, y une telle expression. Dans la combinaison linéaire de $S_1(x)$, $S_2(x)$, ..., $S_\nu(x)$ qui, par hypothèse, représente y, groupons les termes de même multiplicateur, et désignons par $s_i(x)$ la somme des termes de multiplicateur ε_i. Soit de même $s'_i(x)$ la somme des termes de multiplicateur ε'_i, dans la combinaison linéaire de $S'_1(x)$, $S'_2(x)$, ..., $S'_{\nu'}(x)$ qui exprime y. Nous aurons

$$y = s_1(x) + s_2(x) + \ldots + s_n(x) = s'_1(x) + s'_2(x) + \ldots + s'_{n'}(x),$$

les fonctions $s(x)$ et $s'(x)$ étant telles que

$$s_i(x+\omega) = \varepsilon_i s_i(x), \quad s'_i(x+\omega') = \varepsilon'_i s'_i(x).$$

Dans l'identité

$$s_1(x) + s_2(x) + \ldots + s_n(x) = s'_1(x) + s'_2(x) + \ldots + s'_{n'}(x),$$

changeons x successivement en $x+\omega$, $x+2\omega$, ..., $x+(n-1)\omega$. Nous aurons n équations, d'où l'on peut tirer $s_1(x)$, $s_2(x)$, ..., $s_n(x)$, car le déterminant est le produit des différences des n quantités distinctes ε_1, ε_2, ..., ε_n, et, par conséquent, n'est pas nul. J'obtiens ainsi

$$\begin{aligned} s_1(x) = {} & L_1 s'_1(x) + L_2 s'_1(x+\omega) + \ldots + L_n s'_1[x+(n-1)\omega] \\ & + L_1 s'_2(x) + L_2 s'_2(x+\omega) + \ldots + L_n s'_2[x+(n-1)\omega] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + L_1 s'_{n'}(x) + L_2 s'_{n'}(x+\omega) + \ldots + L_n s'_{n'}[x+(n-1)\omega], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$s_i(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \ldots + \sigma_{n'}(x),$$

les fonctions $\sigma(x)$ étant des solutions, et des solutions telles que

$$\sigma_j(x+\omega') = \varepsilon'_j \sigma_j(x).$$

Chaque ligne $L_1 s'_j(x) + L_2 s'_j(x+\omega) + \ldots + L_n s'_j[x+(n-1)\omega]$ est, en effet, dans ce cas.

Dans l'identité

$$s_i(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x) + \ldots + \sigma_{n'}(x),$$

changeons maintenant x en $x+\omega$, et il vient

$$\varepsilon_i s_i(x) = \sigma_i(x+\omega) + \sigma_2(x+\omega) + \ldots + \sigma_{n'}(x+\omega)$$

ou bien

$$\sigma_1(x+\omega) - \varepsilon_i \sigma_1(x) + \sigma_2(x+\omega) - \varepsilon_i \sigma_2(x) + \ldots + \sigma_{n'}(x+\omega) - \varepsilon_i \sigma_{n'}(x) = 0.$$

Or, les différences $\sigma_j(x+\omega) - \varepsilon_i \sigma_j(x)$ admettent chacune la période de seconde espèce ω', avec des multiplicateurs différents Elles sont donc [1] nulles séparément; d'où

$$\sigma_j(x+\omega) = \varepsilon_i \sigma_j(x),$$

c'est-à-dire que les intégrales $\sigma(x)$ sont d. p. d. s. e.

Chaque solution $s_i(x)$ est donc une somme d'intégrales de cette nature, et, par conséquent, il en est de même de l'expression y.

10. Le lemme qui précède conduit à deux interprétations du nombre N.

Une combinaison linéaire d'intégrales d. p. d. s. e. s'exprimant sous la forme

$$C_1 S_1(x) + C_2 S_2(x) + \ldots + C_\nu S_\nu(x)$$

et aussi sous la forme

$$C'_1 S'_1(x) + C'_2 S'_2(x) + \ldots + C'_{\nu'} S'_{\nu'}(x)$$

donne lieu à l'égalité

$$C_1 S_1(x) + C_2 S_2(x) + \ldots + C_\nu S_\nu(x) = C'_1 S'_1(x) + C'_2 S'_2(x) + \ldots + C'_{\nu'} S'_{\nu'}(x),$$

c'est-à-dire à une relation linéaire et homogène, à coefficients constants, entre les $\nu + \nu'$ fonctions $S(x)$ et $S'(x)$. Comme, avec les N inté-

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 69; 1883.

grales doublement périodiques, on peut construire N combinaisons linéaires distinctes, il existera N relations distinctes de cette forme.

Il n'y en a pas davantage. En effet, considérons-en $N+1$, et écrivons-les ainsi :

$$\sigma_1 = \sigma'_1, \quad \sigma_2 = \sigma'_2, \quad \ldots, \quad \sigma_N = \sigma'_N, \quad \sigma_{N+1} = \sigma'_{N+1},$$

les σ ne contenant que les $S(x)$, et les σ' que les $S'(x)$. D'après le lemme, les σ et les σ' sont alors des combinaisons linéaires des N intégrales d. p. d. s. e. Comme avec N quantités on ne peut former plus de N combinaisons linéaires distinctes, on voit sans peine que l'une des $N+1$ relations est une conséquence des autres. Il n'y en a donc pas plus de N distinctes.

D'où cette proposition :

Il existe, entre les intégrales $S_1(x), \ldots, S_\nu(x), S'_1(x), \ldots, S'_{\nu'}(x)$, *autant de relations linéaires distinctes que* $P=0$ *a de solutions distinctes doublement périodiques de seconde espèce, et il n'en existe pas davantage.*

Les intégrales $S_1(x), S_2(x), \ldots, S_\nu(x)$ satisfont [1] à une équation différentielle linéaire homogène $P_\omega = 0$, d'ordre ν, à coefficients périodiques, de période ω, car les $S(x+\omega)$ sont des combinaisons linéaires des $S(x)$. Pareillement, les intégrales $S'_1(x), S'_2(x), \ldots, S'_{\nu'}(x)$ vérifient une équation analogue $P_{\omega'} = 0$, d'ordre ν'. Un théorème, démontré plus loin, montre même que les coefficients de ces deux équations sont doublement périodiques. Une solution d. p. d. s. e. de $P=0$, ou une somme de pareilles solutions, étant à la fois une combinaison linéaire des $S(x)$ et une combinaison de $S'(x)$, satisfera à la fois aux deux équations $P_\omega = 0$ et $P_{\omega'} = 0$. Réciproquement, toute intégrale commune à ces deux équations, étant susceptible des deux formes, sera, d'après le lemme, une somme des solutions d. p. d. s. e.

Les intégrales communes aux équations $P_\omega = 0$ et $P_{\omega'} = 0$ sont donc les solutions de cette nature, et leurs combinaisons linéaires. Par conséquent :

$P_\omega = 0$ *et* $P_{\omega'} = 0$ *ont autant d'intégrales communes distinctes que*

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 67; 1883.

$P = 0$ *a de solutions distinctes doublement périodiques de seconde espèce, et n'en ont pas davantage.*

11. Nous avons reconnu (nos 4 et 5) que le nombre N satisfait aux inégalités

$$n \text{ et } n' \leq N \leq \nu \text{ et } \nu',$$

ce qui prouve incidemment que

$$n \leq \nu' \quad \text{et} \quad n' \leq \nu.$$

La première proposition du numéro précédent conduit à la nouvelle inégalité

$$\nu + \nu' - N \leq m.$$

En effet, puisqu'il existe, entre les ν intégrales $S(x)$ et les ν' intégrales $S'(x)$, N relations linéaires distinctes, et seulement N, il y a $\nu + \nu' - N$ de ces intégrales qui sont linéairement indépendantes, et, par conséquent :

Le nombre entier positif $\nu + \nu' - N$ *est toujours au plus égal à l'ordre* m *de l'équation différentielle.*

Cette dernière inégalité contient la proposition du no 7 et, par conséquent, la réciproque du no 6, qui en est un cas particulier. Elle montre en effet que, si ν', par exemple, est égal à m, N sera égal à ν, qu'il ne peut surpasser.

Si l'on suppose $\nu = \nu' = m - 1$, elle montre que N sera égal à $m - 1$ ou à $m - 2$.

Quant aux inégalités

$$n \text{ et } n' \leq N \leq \nu \text{ et } \nu',$$

je les ai déjà utilisées. En voici deux conséquences que je n'ai pas énoncées.

Si aucune des racines de l'une des équations fondamentales n'annule tous les mineurs du premier ordre dans son premier membre, le nombre N *est égal au nombre des racines distinctes de cette équation.*

Si le nombre ν, *pour l'une des équations fondamentales, est égal au nombre de racines distinctes de l'autre, il représente exactement la valeur de* N.

III. — Propriétés des intégrales.

12. Désignons par $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ m solutions distinctes de l'équation $P = 0$, choisies arbitrairement. Comme les coefficients de $P = 0$ possèdent la période ω, les valeurs $f_1(x+\omega), f_2(x+\omega), \ldots, f_m(x+\omega)$ qu'acquièrent ces m solutions, lorsqu'on y change x en $x+\omega$, s'expriment en fonctions linéaires, homogènes, à coefficients constants, des valeurs primitives. Pareillement, à cause de la période ω',

$$f_1(x+\omega'),\quad f_2(x+\omega'),\quad \ldots,\quad f_m(x+\omega')$$

sont des combinaisons linéaires de $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$.

Ces propriétés caractérisent les équations différentielles qui remplissent les conditions imposées à $P = 0$; car réciproquement :

Soient $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ m fonctions uniformes, linéairement indépendantes : si les valeurs que prennent ces fonctions, lorsqu'on y change x en $x+\omega$, et les valeurs qu'elles acquièrent, lorsqu'on y change x en $x+\omega'$, peuvent s'exprimer en fonctions linéaires, homogènes, à coefficients constants, des valeurs primitives, ces m fonctions satisfont à une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre m, à coefficients uniformes et doublement périodiques, de périodes ω et ω'.

En effet, les $f(x+\omega)$ étant des combinaisons linéaires distinctes des fonctions $f(x)$, ces fonctions satisfont (¹) à une équation différentielle de la même forme que $P = 0$, à coefficients uniformes, mais simplement périodiques, de période ω. Comme, d'autre part, les $f(x+\omega')$ sont des combinaisons des fonctions $f(x)$, ces mêmes fonctions vérifient une équation différentielle, toujours de la forme $P = 0$, à coefficients uniformes, mais de période ω'. Or les premiers membres de ces deux équations différentielles sont identiques; car elles ont un système fondamental d'intégrales commun, et, si les premiers membres ne coïncidaient pas, leur différence, qui est au plus d'ordre $m-1$, serait annulée par m fonctions distinctes, ce qui est impossible.

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 67; 1883.

Ce théorème montre, en particulier, que les équations $P_\omega = 0$ et $P_{\omega'} = 0$ du n° **10** sont à coefficients doublement périodiques.

13. Je me propose actuellement de former un système fondamental d'intégrales possédant des propriétés simples.

Ce problème est résolu dans le cas où l'on a

$$\nu = \nu' = m,$$

et par conséquent dans le cas général, qui est celui où l'une au moins des deux équations fondamentales n'a pas de racines multiples. Nous avons vu, en effet, qu'alors $P = 0$ admet un système fondamental composé de fonctions d. p. d. s. e.

14. Je vais examiner le cas le plus général après celui-là, celui où, les deux équations fondamentales ayant des racines multiples, aucune de leurs racines n'annule tous les mineurs du premier ordre dans le premier membre : c'est le cas où l'on a

$$n < m, \quad n' < m, \quad \nu = n, \quad \nu' = n'.$$

Comme ν et ν' ne sont pas tous deux égaux à m, $P = 0$ n'admet pas m solutions distinctes d. p. d. s. e. D'ailleurs, nos inégalités donnent ici

$$N = n = \nu = n' = \nu',$$

c'est-à-dire que le nombre des racines distinctes est le même pour les deux équations fondamentales et que ce nombre représente celui des solutions distinctes qui sont d. p. d. s. e. Ces n solutions ont, par conséquent, des multiplicateurs distincts relativement à chaque période.

Envisageons les coefficients de $P = 0$ au point de vue de la période ω. Puisque aucune des racines de $\Delta = 0$ n'annule tous les mineurs du premier ordre dans Δ, le groupe d'intégrales qui correspond à chacune d'elles ne donne lieu qu'à un seul sous-groupe [1]. Soient $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{\mu_1}(x)$ les éléments qui composent le groupe cor-

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 78; 1883.

rélatif de la racine ε_1, d'ordre de multiplicité μ_1. On sait [1] qu'ils sont de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} F_1(x) = \varphi_{11}(x), \\ F_2(x) = \varphi_{21}(x) + x\,\varphi_{22}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_i(x) = \varphi_{i1}(x) + x\,\varphi_{i2}(x) + \ldots + x^{i-1}\quad \varphi_{ii}(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_{\mu_1}(x) = \varphi_{\mu_1 1}(x) + x\,\varphi_{\mu_1 2}(x) + \ldots + x^{\mu_1 - 1}\,\varphi_{\mu_1\mu_1}(x), \end{cases}$$

où les fonctions $\varphi(x)$ sont telles que

$$\varphi(x+\omega) = \varepsilon_1\,\varphi(x).$$

Ces fonctions sont des combinaisons linéaires de celles d'entre elles où le second indice est 1, et l'on a

$$\varphi_{ij}(x) = C_1\,\varphi_{11}(x) + C_2\,\varphi_{21}(x) + \ldots + C_{i-1}\,\varphi_{i-1,1}(x).$$

En particulier, $\varphi_{11}(x)$, $\varphi_{22}(x)$, ..., $\varphi_{\mu_1\mu_1}(x)$ ne diffèrent mutuellement que par des facteurs constants. Enfin aucune de ces dernières fonctions, à indices égaux, n'est identiquement nulle. En effet, le groupe (1) ne donnant lieu qu'à un seul sous-groupe, un élément de ce sous-groupe renfermera la puissance $\mu_1 - 1$ de x. C'est ce qui ne pourrait avoir lieu si $\varphi_{\mu_1\mu_1}(x)$ était nulle, car les éléments du sous-groupe coïncident avec les expressions (1), ou en sont des combinaisons linéaires. Il faut donc que $\varphi_{\mu_1\mu_1}(x)$ diffère de zéro. Mais alors $\varphi_{ii}(x)$ en diffère aussi [1].

Comme les coefficients de $P = 0$ possèdent également la période ω', $F_1(x+\omega')$, $F_2(x+\omega')$, ..., $F_{\mu_1}(x+\omega')$ sont aussi des solutions, et, à cause de

$$\varphi(x+\omega'+\omega) = \varepsilon_1\,\varphi(x+\omega'),$$

ces solutions sont respectivement des mêmes formes que $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{\mu_1}(x)$. Il en résulte [2] que $F_i(x+\omega')$ est une combinaison linéaire de

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 59; 1883.
(2) *Ibid.*, p. 80.
(3) *Ibid.*, p. 59.

$F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_i(x)$, et l'on a, par conséquent,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} F_1(x+\omega') &= L_{11}F_1(x),\\ F_2(x+\omega') &= L_{21}F_1(x)+L_{22}F_2(x),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ F_{\mu_1}(x+\omega') &= L_{\mu_1 1}F_1(x)+L_{\mu_1 2}F_2(x)+\ldots+L_{\mu_1\mu_1}F_{\mu_1}(x),\end{aligned}\right.$$

les coefficients L étant constants.

Je dis que les coefficients L_{11}, L_{22}, ..., $L_{\mu_1\mu_1}$, à indices égaux, sont égaux.

Si, en effet, dans les égalités (2), nous remplaçons les $F(x+\omega')$ et les $F(x)$ par leurs valeurs tirées de (1), les coefficients de x devront être identiques [1] dans les deux membres de chaque égalité. Égalons, en particulier, les coefficients des plus hautes puissances de x; il vient

$$\begin{gathered} \varphi_{11}(x+\omega') = L_{11}\varphi_{11}(x),\\ \varphi_{22}(x+\omega') = L_{22}\varphi_2(x),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \varphi_{\mu_1\mu_1}(x+\omega') = L_{\mu_1\mu_1}\varphi_{\mu_1\mu_1}(x).\end{gathered}$$

Or $\varphi_{11}(x)$, $\varphi_{22}(x)$, ..., $\varphi_{\mu_1\mu_1}(x)$ ne sont pas nulles et ne diffèrent mutuellement que par des facteurs constants. On a donc

$$L_{11} = L_{22} = \ldots = L_{\mu_1\mu_1}.$$

Les coefficients L, à indices égaux, étant égaux, je désignerai par ε'_1 leur valeur commune.

Si maintenant nous considérons successivement les $n-1$ autres groupes, corrélatifs des $n-1$ autres racines ε_2, ε_3, ..., ε_n de $\Delta = 0$, chacun d'eux conduira à des relations pareilles aux relations (2). Qu'on écrive alors toutes ces relations, qu'on désigne par ε'_2, ε'_3, ..., ε'_n les valeurs communes des coefficients à indices égaux, qu'on forme le déterminant Δ' qui, égalé à zéro, donne l'équation fondamentale relative à la période ω', et l'on verra que cette équation en ε' est

$$(\varepsilon'_1-\varepsilon')^{\mu_1}(\varepsilon'_2-\varepsilon')^{\mu_2}\ldots(\varepsilon'_n-\varepsilon')^{\mu_n} = 0.$$

---

(1) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 69; 1883.

Les constantes $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$, associées respectivement à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, sont donc les racines de $\Delta' = 0$, ce qui était bien visible. Mais on voit de plus que chacune d'elles est du même ordre de multiplicité que la racine de $\Delta = 0$ qui lui est associée, car $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ sont distincts, puis n' est égal à n.

Cela posé, revenons au groupe $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{\mu_1}(x)$, corrélatif de ε_1. Il renferme donc autant d'intégrales qu'il y a d'unités dans le degré de multiplicité de la racine ε'_1 de $\Delta' = 0$, et par conséquent, eu égard aux relations (2), il constitue un groupe complet au point de vue de la période ω'. On a

$$(3)\quad \begin{cases} F_1(x) = \varphi'_{11}(x), \\ F_2(x) = \varphi'_{21}(x) + x\varphi'_{22}(x), \\ F_3(x) = \varphi'_{31}(x) + x\varphi'_{32}(x) + \ldots + x^2\varphi'_{33}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{\mu_1}(x) = \varphi'_{\mu_1 1}(x) + x\varphi'_{\mu_1 2}(x) + x^2\varphi'_{\mu_1 3}(x) + \ldots + x^{\mu_1 - 1}\varphi'_{\mu_1\mu_1}(x), \end{cases}$$

où les fonctions $\varphi'(x)$ sont s. p. d. s. e., de période ω' et de même multiplicateur ε'_1. Ces fonctions sont des combinaisons linéaires de celles d'entre elles où le second indice est 1, et, en particulier, $\varphi'_{11}(x)$, $\varphi'_{22}(x), \ldots, \varphi'_{\mu_1\mu_1}(x)$ ne diffèrent mutuellement que par des facteurs constants. Observons enfin qu'aucune des fonctions $\varphi'_{11}(x), \varphi'_{22}(x), \ldots,$ $\varphi'_{\mu_1\mu_1}(x)$ ne sera identiquement nulle, puisque, par hypothèse, ε'_1 n'annulant pas tous les mineurs du premier ordre dans Δ', à ε'_1 répondra un seul sous-groupe.

Tout groupe d'intégrales de l'équation $P = 0$, considérée comme à coefficients périodiques de période ω, est donc composé d'éléments susceptibles chacun des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$ avec le même degré, ainsi que l'indiquent les formules (1) et (3), et l'on a la proposition suivante :

Lorsque, les deux équations fondamentales ayant des racines multiples, aucune de ces racines n'annule tous les mineurs du premier ordre, chaque racine de $\Delta = 0$ est associée à une racine de $\Delta' = 0$ ayant même degré de multiplicité. Soit n la valeur commune des nombres de racines distinctes : soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ces racines pour $\Delta = 0$, et $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ les racines respectivement associées de $\Delta' = 0$; soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ les valeurs communes de leurs ordres de multiplicité. Il existe un système fondamental *d'intégrales se partageant en n groupes, répondant respectivement aux n couples de racines associées, et les* μ *éléments qui composent le groupe corrélatif du couple* $(\varepsilon, \varepsilon')$, *d'ordre de multiplicité* μ, *peuvent s'exprimer sous les deux formes*

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\varphi_{11}(x) &= \varphi'_{11}(x),\\
\varphi_{21}(x) + x\,\varphi_{22}(x) &= \varphi'_{21}(x) + x\,\varphi'_{22}(x),\\
\varphi_{31}(x) + x\,\varphi_{32}(x) + x^2\,\varphi_{33}(x) &= \varphi'_{31}(x) + x\,\varphi'_{32}(x) + x^2\,\varphi'_{33}(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_{\mu 1}(x) + x\,\varphi_{\mu 2}(x) + \ldots + x^{\mu-1}\,\varphi_{\mu\mu}(x) &= \varphi'_{\mu 1}(x) + x\,\varphi'_{\mu 2}(x) + \ldots + x^{\mu-1}\,\varphi'_{\mu\mu}(x),
\end{aligned}\right.$$

où les fonctions $\varphi(x)$ *et* $\varphi'(x)$ *sont uniformes, et telles que*

$$\varphi(x+\omega) = \varepsilon\,\varphi(x), \quad \varphi'(x+\omega') = \varepsilon'\varphi'(x),$$

aucune de celles qui multiplient les plus hautes puissances de x, *dans chaque expression, n'étant identiquement nulle. Ce système fondamental renferme le nombre maximum n de solutions distinctes, doublement périodiques de seconde espèce, que possède dans ce cas* $P = 0$, *qui sont aussi les solutions distinctes, en nombre maximum, simplement périodiques de seconde espèce, de l'une et de l'autre période. Chacune des fonctions* $\varphi_{ij}(x)$ *est d'ailleurs une combinaison linéaire de celles d'entre elles où le second indice est* 1 *et le premier inférieur à i, et, en particulier,* $\varphi_{11}(x)$, $\varphi_{22}(x)$, $\ldots$, $\varphi_{\mu\mu}(x)$ *ne diffèrent que par des facteurs constants. Il en est de même pour les fonctions* $\varphi'(x)$.

15. Me plaçant maintenant dans un cas quelconque, je me propose toujours d'obtenir un système fondamental dont les éléments se comportent simplement et de manière à mettre en évidence, s'il est possible, les solutions d. p. d. s. e. et les solutions s. p. d. s. e.

Envisageons les coefficients de $P = 0$ au point de vue de la période ω. A chacune des racines $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ de $\Delta = 0$ correspond un groupe d'intégrales. Soient $F_1(x), F_2(x); \ldots, F_{\mu_1}(x)$ celles qui composent le groupe corrélatif de la racine ε_1, d'ordre de multiplicité μ_1. On sait qu'elles sont de la forme (1) du n° 14, c'est-à-dire de la forme $\Phi(x)$. Seulement, toutes les fonctions $\varphi(x)$ à indices égaux ne sont plus nécessairement différentes de zéro.

Comme les coefficients de $P = 0$ possèdent également la période ω', $F_1(x+\omega')$, $F_2(x+\omega')$, $\ldots$, $F_{\mu_1}(x+\omega')$ sont aussi des solutions et des solutions de même forme que $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{\mu_1}(x)$, appartenant au même multiplicateur ε_1. Il en résulte que l'on a

$$\begin{array}{l} F_1(x+\omega') = L_{11}F_1(x) + \ldots + L_{1\mu_1}F_{\mu_1}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{\mu_1}(x+\omega') = L_{\mu_1 1}F_1(x) + \ldots + L_{\mu_1\mu_1}F_{\mu_1}(x), \end{array}$$

les coefficients L étant constants.

Si alors on considère l'équation

$$\begin{vmatrix} L_{11}-\varepsilon' & \ldots & L_{1\mu_1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ L_{\mu_1 1} & \ldots & L_{\mu_1\mu_1}-\varepsilon' \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on désigne par ν'_1 la somme des ordres à partir desquels les mineurs de ce déterminant cessent d'être tous nuls pour ses diverses racines, on sait (¹) qu'il existe μ_1 combinaisons linéaires distinctes de $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{\mu_1}(x)$, c'est-à-dire μ_1 intégrales de la forme $\mathfrak{P}(x)$, se partageant en ν'_1 sous-groupes, dont les éléments sont de la forme $\mathfrak{P}'(x)$, le premier de chaque sous-groupe étant s. p. d. s. e., de période ω'.

Le groupe $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_{\mu_1}(x)$, corrélatif de la racine ε_1 de $\Delta = 0$, donne ainsi μ_1 intégrales distinctes, qui sont à la fois des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$, et dont ν'_1 admettent ω' comme période de seconde espèce.

Considérons maintenant les $n-1$ autres groupes, corrélatifs des $n-1$ autres racines ε_2, ε_3, ..., ε_n de $\Delta = 0$. Chacun d'eux conduira à des intégrales analogues.

D'où l'on conclut que $P = 0$ admet un système fondamental de solutions susceptibles des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$, et dont $\nu'_1 + \nu'_2 + \ldots + \nu'_n$ admettent ω' comme période de seconde espèce, ν'_2, ν'_3, ..., ν'_n étant les nombres analogues à ν'_1.

On reconnaît d'ailleurs sans peine que l'on a

$$\nu'_1 + \nu'_2 + \ldots + \nu'_n = \nu',$$

de sorte que $\nu'_1 + \nu'_2 + \ldots + \nu'_n$ est le nombre maximum des solutions distinctes qui admettent ω' comme période de seconde espèce.

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 78; 1883.

D'où cette proposition :

$P = 0$ *admet toujours m intégrales distinctes susceptibles chacune des deux formes* $\mathfrak{L}(x)$ *et* $\mathfrak{P}'(x)$, *et parmi lesquelles se trouvent les solutions distinctes simplement périodiques de seconde espèce, de période* ω', *en nombre maximum* ν'.

Et, par analogie :

$P = 0$ *admet toujours m intégrales distinctes susceptibles chacune des deux formes* $\mathfrak{P}(x)$ *et* $\mathfrak{L}'(x)$, *et parmi lesquelles se trouvent les solutions distinctes simplement périodiques de seconde espèce, de période* ω, *en nombre maximum* ν.

Cela posé, désignons respectivement par

$$(1)\qquad S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_\nu;\quad T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_{m-\nu}$$

et

$$(2)\qquad S'_1,\ S'_2,\ \ldots,\ S'_{\nu'};\quad T'_1,\ T'_2,\ \ldots,\ T'_{m-\nu'}$$

les systèmes fondamentaux du second et du premier énoncé qui précèdent.

Soit, comme toujours, N le nombre maximum des solutions distinctes $D_1, D_2, \ldots, D_N$ qui sont doublement périodiques de seconde espèce.

J'observe d'abord que, dans chacun des systèmes (1) et (2), on peut remplacer N des éléments périodiques de seconde espèce par les N intégrales distinctes $D_1, D_2, \ldots, D_N$. Considérons en effet le système (1), par exemple. Les fonctions $D_1, D_2, \ldots, D_N$ sont N combinaisons linéaires distinctes de $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$. Parmi les déterminants de N^2 éléments que l'on peut former en prenant de toutes les manières possibles N colonnes dans le tableau des coefficients constants de ces combinaisons, il en est donc au moins un qui n'est pas nul. Les N fonctions S qui lui correspondent peuvent, par conséquent, être remplacées par $D_1, D_2, \ldots, D_N$, sans que le système (1) cesse d'être fondamental.

Soient alors

$$(3)\qquad D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_N;\quad S_{N+1},\ S_{N+2},\ \ldots,\ S_\nu;\quad T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_{m-\nu};$$

$$(4)\qquad D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_N;\quad S'_{N+1},\ S'_{N+2},\ \ldots,\ S'_{\nu'};\quad T',\ T',\ \ldots,\ T'_{m-\nu'}$$

les nouveaux systèmes.

Envisageons le premier. Je remarque que l'on a (n° 11)

$$\nu' - \mathrm{N} \leqq m - \nu,$$

c'est-à-dire que le nombre des éléments S' du second est au plus égal au nombre des éléments T, et je vais prouver que, dans le système (3), on peut remplacer $\nu' - \mathrm{N}$ des fonctions T par les fonctions $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+1}$, $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+2}$, ..., $\mathrm{S}'_{\nu'}$ du système (4).

Les intégrales $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+1}$, $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+2}$, ..., $\mathrm{S}'_{\nu'}$ sont en effet $\nu' - \mathrm{N}$ combinaisons linéaires des éléments D_1, D_2, ..., D_N, $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+1}$, $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+2}$, ..., S_ν, T_1, T_2, ..., $\mathrm{T}_{m-\nu}$ du système (3). Il suffit donc d'établir que, si l'on considère le tableau des coefficients des fonctions T dans ces combinaisons, puis les déterminants obtenus en prenant de toutes les manières possibles $\nu' - \mathrm{N}$ colonnes dans ce tableau, l'un au moins de ces déterminants ne sera pas nul. Or, supposons que tous soient nuls; il en résulterait une égalité de la forme

$$\mathrm{C}'_{\mathrm{N}+1}\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+1} + \ldots + \mathrm{C}'_{\nu'}\mathrm{S}'_{\nu'} = \mathrm{C}_1\mathrm{D}_1 + \ldots + \mathrm{C}_\mathrm{N}\mathrm{D}_\mathrm{N} + \mathrm{C}_{\mathrm{N}+1}\mathrm{S}_{\mathrm{N}+1} + \ldots + \mathrm{C}_\nu\mathrm{S}_\nu,$$

qui est impossible; car alors chaque membre de cette égalité serait (n° 9) une combinaison linéaire de D_1, D_2, ..., D_N, de sorte qu'on aurait une relation linéaire entre D_1, D_2, ..., D_N et $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+1}$, $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+2}$, ..., $\mathrm{S}'_{\nu'}$, par exemple. On peut donc toujours, dans le système (3), remplacer $\nu' - \mathrm{N}$ des fonctions T par $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+1}$, $\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+2}$, ..., $\mathrm{S}'_{\nu'}$, sans que ce système cesse d'être fondamental.

Faisons cette substitution, et nous obtenons un système de la forme

$$\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2\ldots\mathrm{D}_\mathrm{N}\mathrm{S}_{\mathrm{N}+1}\mathrm{S}_{\mathrm{N}+2}\ldots\mathrm{S}_\nu\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+1}\mathrm{S}'_{\mathrm{N}+2}\ldots\mathrm{S}'_{\nu'}\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2\ldots\mathrm{T}_{m-(\nu+\nu'-\mathrm{N})}.$$

D'où cette proposition générale :

L'équation $\mathrm{P} = 0$ *admet toujours un système fondamental d'intégrales susceptibles chacune des deux formes* $\mathfrak{P}(x)$ *et* $\mathfrak{P}'(x)$ *et comprenant :* 1° N *fonctions* $\mathrm{D}(x)$; 2° $\nu - \mathrm{N}$ *fonctions* $\mathrm{S}(x)$; 3° $\nu' - \mathrm{N}$ *fonctions* $\mathrm{S}'(x)$. *Ce système renferme donc à la fois les intégrales distinctes, simplement périodiques de seconde espèce, en nombre maximum, pour chaque période, et, parmi elles, les intégrales doublement périodiques de seconde espèce distinctes en nombre maximum.*

Ainsi, dans un cas quelconque, une intégrale fondamentale de $\mathrm{P} = 0$

jouit de cette propriété d'être susceptible à la fois des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$. C'est cette propriété qui nous conduira à l'expression de cette intégrale. Mais auparavant je vais appliquer ce qui précède au cas où $P = 0$ est du second ordre.

16. $P = 0$ étant du second ordre, les équations fondamentales sont du second degré et les entiers n, n', ν, ν' ne peuvent avoir que les valeurs 1 et 2.

Si chaque équation fondamentale, ou seulement l'une d'elles, a ses racines inégales, $P = 0$ admet deux solutions $D(x)$ distinctes. Il en est de même si chaque équation fondamentale a une racine double annulant tous les mineurs du premier ordre dans son premier membre.

Reste à examiner ce qui a lieu lorsque, chaque équation ayant une racine double, ces racines n'annulent pas tous les mineurs du premier ordre dans les deux premiers membres. Ce sont les cas $\nu = 1$ avec $\nu' = 1$, puis $\nu = 1$ avec $\nu' = 2$, et $\nu = 2$ avec $\nu' = 1$.

Dans ces trois cas, il n'y a pas deux intégrales d. p. d. s. e. qui soient distinctes, et il existe un système fondamental dont un élément y_1 a la forme $D(x)$, tandis que l'autre y_2 est susceptible des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$, l'une au moins de ces formes étant du premier degré, et toutes deux étant au plus du premier degré, puisque l'ordre de multiplicité des racines est 2.

1° $\nu = 1$, $\nu' = 1$. C'est le cas du n° **14**, et l'on a, par conséquent,

$$y_1 = \varphi_{11}(x) = \varphi'_{11}(x), \quad y_2 = \varphi_{21}(x) + x\,\varphi_{22}(x) = \varphi'_{21}(x) + x\,\varphi'_{22}(x),$$

où $\varphi_{22}(x)$ et $\varphi'_{22}(x)$ ne sont pas nulles et ne diffèrent chacune de $\varphi_{11}(x)$ ou $\varphi'_{11}(x)$ que par un facteur constant. Il vient donc

$$y_1 = D(x), \quad y_2 = \varphi(x) + C\,x\,D(x) = \varphi'(x) + C'\,x\,D(x), \quad \text{avec } C \neq 0,\ C' \neq 0.$$

2° $\nu = 1$, $\nu' = 2$. On peut prendre y_2 de la forme $S'(x)$, d'après le n° **15**, et l'on a, par conséquent,

$$y_1 = D(x), \quad y_2 = \varphi_0(x) + x\,\varphi_1(x) = S'(x),$$

$\varphi_1(x)$ n'étant pas nulle, sans quoi $P = 0$ admettrait deux intégrales d. p. d. s. e. distinctes. De plus, $\varphi_1(x)$ ne diffère de $D(x)$ que par un facteur constant, car $\varphi_0(x)+x\varphi_1(x)$ étant une solution, il en est de même de $\varphi_1(x)$; on a donc

$$\varphi_1(x)=\mathrm{C}\,\mathrm{D}(x)+\mathrm{C}_1[\varphi_0(x)+x\varphi_1(x)],$$

qui donne $\mathrm{C}_1\varphi_1(x)=0$ ou $\mathrm{C}_1=0$, puisque $\varphi_1(x)$ n'est pas nulle. Il vient, par conséquent,

$$y_1=\mathrm{D}(x),\quad y_2=\varphi(x)+\mathrm{C}x\,\mathrm{D}(x)=\mathrm{S}'(x),\quad \text{avec } \mathrm{C}'\neq 0.$$

3° $\nu=2$, $\nu'=1$. On aura, par analogie,

$$y_1=\mathrm{D}(x),\quad y_2=\mathrm{S}(x)=\varphi'(x)+\mathrm{C}'x\,\mathrm{D}(x),\quad \text{avec } \mathrm{C}'\neq 0.$$

IV. — Expression d'une fonction capable des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$.

17. Nous avons reconnu, au n° **15**, l'existence de m intégrales distinctes possédant ce caractère d'être susceptibles chacune des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$. Si ces formes sont toutes deux du degré zéro, l'intégrale correspondante est d. p. d. s. e.; mais sinon, quelle est l'expression analytique de l'intégrale? Autrement dit, quelle est l'expression d'une fonction capable des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$ de degrés quelconques? Tel est le problème qui va nous occuper actuellement.

La fonction $\mathrm{Z}(x)$, qui représentera la dérivée logarithmique $\dfrac{\theta'(x)}{\theta(x)}$ ou $\dfrac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}$ de l'une quelconque des quatre fonctions θ ou ϑ (suivant que, dans le rapport $\dfrac{\omega'}{\omega}$, le coefficient de $\sqrt{-1}$ sera positif ou négatif), étant telle que

$$\mathrm{Z}(x+\omega)=\mathrm{Z}(x)+q,\quad \mathrm{Z}(x+\omega')=\mathrm{Z}(x)+q',\quad \omega q'-q\omega'=-2\pi\sqrt{-1}$$

(q étant nul dans le premier cas et q' dans le second), je poserai

$$+\frac{\omega\omega'}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\mathrm{Z}(x)-\frac{qx}{\omega}\right]=u(x),\qquad -\frac{\omega\omega'}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\mathrm{Z}(x)-\frac{q'x}{\omega'}\right]=u'(x),$$

de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned} u(x+\omega)&=u(x), & u'(x+\omega)&=u'(x)-\omega,\\ u(x+\omega')&=u(x)-\omega', & u'(x+\omega)&=u'(x),\end{aligned}$$
$$u+u'+x=0.$$

Soit alors $F(x)$ une fonction capable des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$, avec les multiplicateurs ε et ε'. Je vais chercher son expression analytique, en supposant d'abord $\mathfrak{P}'(x)$ du degré zéro. Le cas où $\mathfrak{P}(x)$ serait du degré zéro et $\mathfrak{P}'(x)$ du degré i' se conclura par analogie. Quant au cas général des degrés i et i' quelconques, il se ramènera aux précédents.

18. Considérons l'expression

$$\mathfrak{P}(x) = \varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + \ldots + x^i\varphi_i(x)$$

du multiplicateur ε et de degré i, $\varphi_i(x)$ n'étant pas identiquement nulle. Supposons que $\mathfrak{P}(x)$ admette ω' comme période de seconde espèce avec le multiplicateur ε'.

On a

$$\mathfrak{P}(x+\omega') = \varepsilon'\mathfrak{P}(x),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\varphi_0(x+\omega') + (x+\omega')\varphi_1(x+\omega') + \ldots + (x+\omega')^i\varphi_i(x+\omega')\\ = \varepsilon'[\varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + \ldots + x^i\varphi_i(x)].\end{aligned}$$

Ordonnons le premier membre par rapport aux puissances de x. Nous obtenons ainsi une expression de la forme $\mathfrak{P}(x)$, de multiplicateur ε et de degré i, qui sera identique terme à terme ([1]) avec le second membre. Identifions, et nous aurons $(i+1)$ équations du premier degré, qui vont donner $\varphi_0(x+\omega')$, $\varphi_1(x+\omega')$, ..., $\varphi_i(x+\omega')$, en fonction de $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_i(x)$. Ces équations sont

$$\begin{aligned}\varphi_{i-k}(x+\omega') &+ \frac{i-k+1}{1}\omega'\varphi_{i-k+1}(x+\omega')\\ &+ \frac{(i-k+1)(i-k+2)}{1.2}\omega'^2\varphi_{i-k+2}(x+\omega') + \ldots\\ &+ \frac{(i-k+1)(i-k+2)\ldots(i-1)i}{1.2.3\ldots k}\omega'^k\varphi_i(x+\omega') = \varepsilon'\varphi_{i-k}(x),\end{aligned}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, i.$$

([1]) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 69; 1883.

Elles donnent

$$\varphi_i(x+\omega') \quad = \varepsilon'\varphi_i(x),$$

$$\varphi_{i-1}(x+\omega') = -\frac{i}{1}\varepsilon'\omega'\varphi_i(x) + \varepsilon'\varphi_{i-1}(x),$$

$$\varphi_{i-2}(x+\omega') = +\frac{i(i-1)}{1.2}\varepsilon'\omega'^2\varphi_i(x) - \frac{i-1}{1}\varepsilon'\omega'\varphi_{i-1}(x) + \varepsilon'\varphi_{i-2}(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_{i-k}(x+\omega') = (-1)^k \frac{i(i-1)\ldots(i-k+1)}{1.2.3\ldots k}\varepsilon'\omega'^k\varphi_i(x) + \ldots$$

$$- \frac{i-k+1}{1}\varepsilon'\omega'\varphi_{i-k+1}(x) + \varepsilon'\varphi_{i-k}(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_0\quad(x+\omega') = (-1)^i\varepsilon'\omega'^i\varphi_i(x) + \ldots + \varepsilon'\omega'^2\varphi_2(x) - \varepsilon'\omega'\varphi_1(x) + \varepsilon'\varphi_0(x).$$

Lorsqu'on change x en $x+\omega'$, les fonctions s. p. d. s. e. $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_i(x)$ se comportent donc d'une manière simple, qui va nous permettre de les exprimer.

J'observe d'abord que, d'après la première équation, la fonction $\varphi_i(x)$ est d. p. d. s. e. aux multiplicateurs ε et ε'. Je pose

$$\varphi_i(x) = \varpi_{00}(x).$$

Considérons la fonction suivante $\varphi_{i-1}(x)$. On a

$$\frac{\varphi_{i-1}(x+\omega')}{\varphi_i(x+\omega')} = \frac{\varphi_{i-1}(x)}{\varphi_i(x)} - i\omega',$$

de sorte que la fonction uniforme et périodique, de période ω,

$$\frac{\varphi_{i-1}(x)}{\varphi_i(x)} - iu(x),$$

ne changera pas par le changement de x en $x+\omega'$. Je peux donc écrire

$$\frac{\varphi_{i-1}(x)}{\varphi_i(x)} - iu(x) = \chi_1(x),$$

$\chi_1(x)$ désignant une fonction doublement périodique. En posant alors

$$\chi_1(x)\varphi_i(x) = \varpi_{10}(x),$$

il viendra

$$\varphi_{i-1}(x) = \varpi_{10}(x) + \frac{i}{1}\varpi_{00}(x)u(x),$$

$\varpi_{10}(x)$ étant une fonction uniforme d. p. d. s. e. aux multiplicateurs ε et ε', comme $\varpi_{00}(x)$.

Passons à la fonction $\varphi_{i-2}(x)$. On a

$$\frac{\varphi_{i-2}(x+\omega')}{\varphi_i(x+\omega')} = \frac{\varphi_{i-2}(x)}{\varphi_i(x)} - \frac{i-1}{1}\omega'\frac{\varphi_{i-1}(x)}{\varphi_i(x)} + \frac{i(i-1)}{1.2}\omega'^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi_{i-2}(x+\omega')}{\varphi_i(x+\omega')} - \frac{\varphi_{i-2}(x)}{\varphi_i(x)} - \frac{i-1}{1}\omega'[iu(x)+\chi_1(x)] + \frac{i(i-1)}{1.2}\omega'^2.$$

On en conclura que la fonction périodique, de période ω,

$$\frac{\varphi_{i-2}(x)}{\varphi_i(x)} - \frac{i-1}{1}\chi_1(x)u(x) - \frac{i(i-1)}{1.2}u^2(x)$$

admet aussi la période ω'. En désignant alors par $\chi_2(x)$ cette fonction doublement périodique, puis posant

$$\chi_2(x)\varphi_i(x) = \varpi_{20}(x),$$

on aura

$$\varphi_{i-2}(x) = \varpi_{20}(x) + \frac{i-1}{1}\varpi_{10}(x)u(x) + \frac{i(i-1)}{1.2}\varpi_{00}(x)u^2(x),$$

$\varpi_{20}(x)$ étant une fonction uniforme d. p. d. s. e. de multiplicateurs ε et ε', comme $\varpi_{10}(x)$ et $\varpi_{00}(x)$.

On aperçoit maintenant la loi qui régit la forme des fonctions $\varphi(x)$. Pour montrer sa généralité, je la suppose établie pour $\varphi_i(x)$, $\varphi_{i-1}(x)$, $\varphi_{i-2}(x)$, ..., $\varphi_{i-k+1}(x)$, et je vais prouver qu'elle subsiste à l'égard de $\varphi_{i-k}(x)$.

En effet, je puis toujours poser

$$\begin{aligned}\varphi_{i-k}(x) = \varpi_{k0}(x) &+ \frac{i-k+1}{1}\varpi_{k-1,0}(x)u(x)\\ &+ \frac{(i-k+2)(i-k+1)}{1.2}\varpi_{k-2,0}(x)u^2(x) + \ldots\\ &+ \frac{i(i-1)\ldots(i-k+2)(i-k+1)}{1.2.3\ldots k}\varpi_{00}(x)u^k(x),\end{aligned}$$

sauf à déterminer $\varpi_{k0}(x)$ en conséquence.

Or la fonction $\varpi_{k0}(x)$ est forcément uniforme, périodique de seconde espèce, de période ω et de multiplicateur ε, puisque $\varphi_{i-k}(x)$, $\varpi_{k-1,0}(x)$, $\varpi_{k-2,0}(x)$, ..., $\varpi_{00}(x)$ et $u(x)$ sont dans ce cas. Je dis qu'en outre elle admet la période ω' avec le multiplicateur ε'; car on a, d'une part,

$$\begin{aligned}\varphi_{i-k}(x+\omega') = \varpi_{k0}(x+\omega') &+ \varepsilon' \frac{i-k+1}{1} \varpi_{k-1,0}(x)[u(x)-\omega'] \\ &+ \varepsilon' \frac{(i-k+2)(i-k+1)}{1.2} \varpi_{k-2,0}(x)[u(x)-\omega']^2 + \ldots \\ &+ \varepsilon' \frac{i(i-1)\ldots(i-k+2)(i-k+1)}{1.2.3\ldots k} \varpi_{00}(x)[u(x)-\omega']^k\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\varphi_{i-k}(x+\omega') = (-1)^k &\frac{i(i-1)\ldots(i-k+2)(i-k+1)}{1.2.3\ldots k} \varepsilon'\omega'^k \varpi_{00}(x) + \ldots \\ &- \frac{i-k+1}{2} \varepsilon'\omega' \Big[\varpi_{k-1,0}(x) + \frac{i-k+2}{1} \varpi_{k-2,0}(x)\, u(x) + \ldots \\ &\qquad + \frac{i(i-1)\ldots(i-k+2)}{1.2.\ldots(k-1)} \varpi_{00}(x)\, u^{k-1}(x)\Big] \\ &+ \varepsilon' \Big[\varpi_{k0}(x) + \frac{i-k+1}{1} \varpi_{k-1,0}(x)\, u(x) + \ldots \\ &\qquad + \frac{i(i-1)\ldots(i-k+2)(i-k+1)}{1.2.3\ldots k} \varpi_{00}(x)\, u^k(x)\Big],\end{aligned}$$

et, si l'on égale ces deux valeurs, on obtient une égalité qui se réduit à

$$\varpi_{k0}(x+\omega') = \varepsilon' \varpi_{k0}(x).$$

La loi est donc générale, et par conséquent :

Lorsque la forme

$$\mathfrak{P}(x) = \varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + \ldots + x^i \varphi_i(x),$$

de multiplicateur ε et de degré i, admet ω' comme période de seconde espèce, avec le multiplicateur ε', ses coefficients $\varphi(x)$ s'expriment de la *manière suivante :*

$$\begin{aligned}
\varphi_i(x) &= \varpi_{00}(x),\\
\varphi_{i-1}(x) &= \varpi_{10}(x) + \frac{i}{1}\varpi_{00}(x)\,u(x),\\
\varphi_{i-2}(x) &= \varpi_{20}(x) + \frac{i-1}{1}\varpi_{10}(x)\,u(x) + \frac{i(i-1)}{1.2}\varpi_{00}(x)\,u^2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_1(x) &= \varpi_{i-1,0}(x) + \frac{2}{1}\varpi_{i-2,0}(x)\,u(x) + \frac{3.2}{1.2}\varpi_{i-3,0}(x)\,u^2(x) + \ldots + \frac{i(i-1)\ldots 3.2}{1.2.3\ldots(i-1)}\varpi_{00}(x)\,u^{i-1}(x),\\
\varphi_0(x) &= \varpi_{i0}(x) + \frac{1}{1}\varpi_{i-1,0}(x)\,u(x) + \frac{2.1}{1.2}\varpi_{i-2,0}(x)\,u^2(x) + \ldots + \frac{i(i-1)\ldots 2.1}{1.2.3\ldots i}\varpi_{00}(x)\,u^i(x),
\end{aligned}$$

où les fonctions $\varpi(x$ sont uniformes, doublement périodiques de seconde espèce, de multiplicateurs ε et ε'.

Comme $\Phi(x)$ est supposé de degré i, $\varpi_{00}(x)$ n'est pas identiquement nulle, et les coefficients $\varphi_i(x)$, $\varphi_{i-1}(x)$, $\varphi_{i-2}(x)$, $\ldots$, $\varphi_0(x)$ sont toujours des degrés respectifs $0, 1, 2, \ldots, i$, relativement à $u(x)$.

Connaissant maintenant l'expression des coefficients $\varphi(x)$ de $\Phi(x)$, on en déduit celle de $\Phi(x)$. Nous aurons

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + x^2\varphi_2(x) + \ldots + x^{i-2}\varphi_{i-2}(x) + x^{i-1}\varphi_{i-1}(x) + x^i\varphi_i(x)\\
&= \varpi_{i0}(x) + x\varpi_{i-1,0}(x) + x^2\varpi_{i-2,0}(x) + \ldots + x^{i-2}\varpi_{20}(x) + x^{i-1}\varpi_{10}(x) + x^i\varpi_{00}(x)\\
&\quad + \frac{u(x)}{1}\left[\varpi_{i-1,0}(x) + 2x\varpi_{i-2,0}(x) + \ldots + (i-1)x^{i-2}\varpi_{10}(x) + ix^{i-1}\varpi_{00}(x)\right]\\
&\quad + \frac{u^2(x)}{1.2}\left[2.1.\varpi_{i-2,0}(x) + \ldots + i(i-1)x^{i-2}\varpi_{00}(x)\right]\\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + \frac{u^i(x)}{1.2.3\ldots i}\, i(i-1)\ldots 3.2.1.\varpi_{00}(x).
\end{aligned}$$

Or on voit immédiatement que, si l'on pose

$$\varpi_{i0}(x) + x\,\varpi_{i-1,0}(x) + x^2\varpi_{i-2,0}(x) + \ldots + x^i\varpi_{00}(x) = \Pi(x),$$

les coefficients de $\frac{u(x)}{1}$, de $\frac{u^2(x)}{1.2}$, $\ldots$, de $\frac{u^i(x)}{1.2.3\ldots i}$, dans l'expression précédente, sont les dérivées de $\Pi(x)$, prises en y considérant $\varpi_{i0}(x)$, $\varpi_{i-1,0}(x)$, $\varpi_{i-2,0}(x)$, $\ldots$, $\varpi_{00}(x)$ comme des constantes, de sorte que, si nous employons la caractéristique ∂ pour représenter ce genre de dérivées, il viendra

$$\mathfrak{L}(x) = \Pi(x) + \frac{u(x)}{1}\frac{\partial\Pi(x)}{\partial x} + \frac{u^2(x)}{1.2}\frac{\partial^2\Pi(x)}{\partial x^2} + \ldots + \frac{u^i(x)}{1.2.3\ldots i}\frac{\partial^i\Pi(x)}{\partial x^i};$$

d'où il résulte que $\mathfrak{L}(x)$ coïncide avec le résultat obtenu en remplaçant, dans $\Pi(x)$, x par $x + u(x)$, mais seulement en dehors de $\varpi_{i0}(x)$, $\varpi_{i-1,0}(x)$, $\varpi_{i-2,0}(x)$, ..., $\varpi_{00}(x)$. Or $x + u(x)$ est égal à $-u'(x)$. On a donc finalement

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(x) = \varpi_{i0}(x) - \varpi_{i-1,0}(x)\,u'(x) + \varpi_{i-2,0}(x)\,u'^2(x) + \ldots \\ + (-1)^j\varpi_{i-j,0}(x)\,u'^j(x) + \ldots + (-1)^i\varpi_{00}\,u'^i(x),\end{aligned}$$

ce que j'écrirai

$$\mathfrak{L}(x) = \varpi_0(x) + \varpi_1(x)\,u'(x) + \varpi_2(x)\,u'^2(x) + \ldots + \varpi_i(x)\,u'^i(x),$$

en posant

$$(-1)^j\varpi_{i-j,0}(x) = \varpi_j(x).$$

Remarquons que l'on a

$$\varpi_i(x) = (-1)^i\varpi_{00}(x) = (-1)^i\varphi_i(x).$$

D'où cette proposition :

Lorsque la forme

$$\mathfrak{L}(x) = \varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + \ldots + x^i\varphi_i(x),$$

de multiplicateur ε *et de degré* i, *admet* ω' *comme période de seconde espèce, avec le multiplicateur* ε', *elle a pour expression*

$$\varpi_0(x) + \varpi_1(x)\,u'(x) + \varpi_2(x)\,u'^2(x) + \ldots + \varpi_i(x)\,u'^i(x),$$

où les fonctions $\varpi(x)$ *sont doublement périodiques de seconde espèce, de périodes* ω *et* ω', *et de multiplicateurs* ε *et* ε'. *Les deux formes de* $\mathfrak{L}(x)$, *en* x *et* $u'(x)$, *sont toujours du même degré, et les coefficients* $\varphi_i(x)$ *et* $\varpi_i(x)$ *des termes de degré le plus élevé sont égaux au signe près :*

$$\varpi_i(x) = (-1)^i\varphi_i(x).$$

19. L'expression de

$$\mathfrak{L}'(x) = \varphi'_0(x) + x\varphi'_1(x) + \ldots + x^{i'}\varphi'_{i'}(x),$$

au multiplicateur ε' et de degré i', se conclut par analogie, lorsque $\Phi'(x)$ admet ω comme période de seconde espèce, avec le multiplicateur ε. Cette expression sera

$$\varpi'_0(x) + \varpi'_1(x)\, u(x) + \varpi'_2(x)\, u^2(x) + \ldots + \varpi'_{i'}(x)\, u^{i}(x),$$

où les fonctions $\varpi'(x)$ sont doublement périodiques de seconde espèce, $\varpi'_{i'}(x)$ étant égal, au signe près, à $\varphi'_{i'}(x)$:

$$\varpi'_{i'}(x) = (-1)^{i'} \varphi'_{i'}(x).$$

20. Quelle est maintenant l'expression de la fonction $F(x)$, capable des deux formes $\Phi(x)$ et $\Phi'(x)$, lorsque ces formes sont toutes deux de degrés quelconques? Pour l'obtenir, j'établirai préalablement un théorème qui permettra de ramener ce cas général aux précédents.

Supposons que la fonction

$$\Phi(x) = \varphi_0(x) + x\,\varphi_1(x) + \ldots + x^i\,\varphi_i(x),$$

de multiplicateur ε et de degré i, soit susceptible de la forme

$$\Phi'(x) = \varphi'_0(x) + x\,\varphi'_1(x) + \ldots + x^{i'}\,\varphi'_{i'}(x),$$

de multiplicateur ε' et de degré i', auquel cas on a

$$\varphi_0(x) + x\,\varphi_1(x) + \ldots + x^i\,\varphi_i(x) = \Phi'(x).$$

Dans cette identité, changeons successivement x en $x+\omega$, $x+2\omega$, ..., $x+i\omega$. Nous obtenons i nouvelles identités qui, avec la précédente, donnent les $i+1$ égalités

$$\begin{array}{l}
\varphi_0(x) + x\,\varphi_1(x) + \ldots + x^i\,\varphi_i(x) = \Phi'(x),\\
\varepsilon\varphi_0(x) + (x+\omega)\varepsilon\;\varphi_1(x) + \ldots + (x+\omega)^i\varepsilon\;\;\varphi_i(x) = \Phi'(x+\omega),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varepsilon^i\varphi_0(x) + (x+i\omega)\varepsilon^i\,\varphi_1(x) + \ldots + (x+i\omega)^i\varepsilon^i\,\varphi_i(x) = \Phi'(x+i\omega),
\end{array}$$

suffisantes pour calculer les $i+1$ inconnues $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_i(x)$.

Faisons le calcul. La valeur de $\varphi_k(x)$ sera

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{L}\left[L_0\,\Phi'(x) + L_1\,\Phi'(x+\omega) + \ldots + L_j\,\Phi'(x+j\omega) + \ldots + L_i\,\Phi'(x+i\omega)\right],$$

L désignant le déterminant des coefficients des inconnues, et L_j étant le produit par $(-1)^{j+k}$ du déterminant que l'on déduit du précédent en supprimant la $(j+1)^{\text{ième}}$ ligne et la $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne.

Or, dans le déterminant des coefficients des inconnues, on peut mettre en facteur $\varepsilon^{1+2+3+\ldots+i}$, c'est-à-dire $\varepsilon^{\frac{i(i+1)}{2}}$, et l'on aperçoit immédiatement que l'autre facteur est le produit des différences mutuelles des $i+1$ quantités x, $x+\omega$, $x+2\omega$, $\ldots$, $x+i\omega$, produit égal à $\omega^{\frac{i(i+1)}{2}}.1^i.2^{i-1}\ldots(i-1)^2.i^1$. On a donc

$$L=(\varepsilon\omega)^{\frac{i(i+1)}{2}}.1^i.2^{i-1}.3^{i-2}\ldots(i-1)^2.i^1.$$

Calculons maintenant L_j. Si, dans le déterminant des coefficients des inconnues, on supprime la $(j+1)^{\text{ième}}$ ligne et la $(k+1)^{\text{ième}}$ colonne, on obtient un déterminant où l'on peut mettre en facteur la puissance $1+2+\ldots+(j-1)+(j+1)+\ldots+i$ de ε, c'est-à-dire $\varepsilon^{\frac{i(i+1)}{2}-j}$. L'autre facteur est de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \ldots & \alpha^{k-1} & \alpha^{k+1} & \ldots & \alpha^i \\ 1 & \beta & \ldots & \beta^{k-1} & \beta^{k+1} & \ldots & \beta^i \\ . & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ 1 & \eta & \ldots & \eta^{k-1} & \eta^{k+1} & \ldots & \eta^i \end{vmatrix},$$

α, β, $\ldots$, η désignant les i quantités x, $x+\omega$, $x+2\omega$, $\ldots$, $x+(j-1)\omega$, $x+(j+1)\omega$, $\ldots$, $x+i\omega$. Or on sait qu'un pareil déterminant est le produit des différences mutuelles des i quantités α, β, $\ldots$, η, multiplié par la somme de leurs produits $i-k$ à $i-k$. Soit donc $S_{j,i-k}$ la somme des produits $i-k$ à $i-k$ des i quantités x, $x+\omega$, $x+2\omega$, $\ldots$, $x+(j-1)\omega$, $x+(j+1)\omega$, $\ldots$, $x+i\omega$; comme le produit de leurs différences mutuelles, qui se calcule aisément, est égal à $\omega^{\frac{i(i-1)}{2}}.1^{i-1}.2^{i-2}.3^{i-3}\ldots(i-2)^2.(i-1)^1C_i^{(j)}$, $C_i^{(j)}$ désignant le nombre des combinaisons de i objets j à j, on aura

$$L_j=(-1)^{j+k}\varepsilon^{\frac{i(i+1)}{2}-j}\omega^{\frac{i(i-1)}{2}}.1^{i-1}.2^{i-2}\ldots(i-1)^1.C_i^{(j)}.S_{j,i-k}.$$

Connaissant L et L_j, j'en déduis

$$\frac{L_j}{L}=(-1)^{j+k}\frac{C_i^{(j)}\varepsilon^{i-j}S_{j,i-k}}{(\varepsilon\omega)^i.1.2.3\ldots i},$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(\varepsilon\omega)^i.1.2.3\ldots i}\Big\{ & C_i^{(0)}\varepsilon^i S_{0,\,i-k}\mathfrak{P}'(x) - C_i^{(1)}\varepsilon^{i-1}S_{1,\,i-k}\mathfrak{P}'(x+\omega) \\ & + C_i^{(2)}\varepsilon^{i-2}S_{2,\,i-k}\mathfrak{P}'(x+2\omega) - \ldots \\ & + (-1)^{i-1}C_i^{(i-1)}\varepsilon S_{i-1,\,i-k}\mathfrak{P}'[x+(i-1)\omega] \\ & + (-1)^i C_i^{(i)} S_{i,\,i-k}\mathfrak{P}'(x+i\omega)\Big\},\end{aligned}$$

pour $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, i$. On a, en particulier,

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{(\varepsilon\omega)^i.1.2.3\ldots i}\delta^i_{\omega,\varepsilon}\mathfrak{P}'(x),$$

en posant, d'une manière générale,

$$\begin{aligned} f(x+i\omega) - C_i^{(i-1)}\varepsilon f[x+(i-1)\omega] + \ldots \\ + (-1)^{i-1}C_i^{(1)}\varepsilon^{i-1}f(x+\omega) + (-1)^i\varepsilon^i f(x) = \delta^i_{\omega,\varepsilon}f(x).\end{aligned}$$

On voit, par conséquent, que $\varphi_k(x)$ est une fonction linéaire, homogène, des quantités $\mathfrak{P}'(x)$, $\mathfrak{P}'(x+\omega)$, $\ldots$, $\mathfrak{P}'(x+i\omega)$, dont les coefficients sont des polynômes en x, tous de degré $i-k$. Or, $\mathfrak{P}'(x+\omega)$, $\mathfrak{P}'(x+2\omega)$, $\ldots$, $\mathfrak{P}'(x+i\omega)$ sont des expressions de même forme que $\mathfrak{P}'(x)$, de même multiplicateur ε', et de même degré i'. D'où il résulte que $\varphi_k(x)$ est aussi une expression de la forme $\mathfrak{P}'(x)$, de même multiplicateur ε', mais d'un degré égal ou inférieur à $i'+i-k$.

Faisant successivement $k = i, i-1, i-2, \ldots, 1, 0$, on aura pour $\varphi_i(x)$, $\varphi_{i-1}(x)$, $\varphi_{i-2}(x)$, $\ldots$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_0(x)$, des expressions de la forme $\mathfrak{P}'(x)$, du même multiplicateur ε', mais de degrés respectivement égaux ou inférieurs à i', $i'+1$, $i'+2$, $\ldots$, $i'+i-1$, $i'+i$. Les coefficients des termes en $x^{i'}$, $x^{i'+1}$, $\ldots$, $x^{i'+i}$, dans ces expressions, sont d'ailleurs

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{C_i^{(0)}}{(\varepsilon\omega)^i.1.2.3\ldots i}\delta^i_{\omega,\varepsilon}\varphi'_{i'}(x), \\ \dfrac{-C_i^{(1)}}{(\varepsilon\omega)^i.1.2.3\ldots i}\delta^i_{\omega,\varepsilon}\varphi'_{i'}(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{(-1)^i C_i^{(i)}}{(\varepsilon\omega)^i.1.2.3\ldots i}\delta^i_{\omega,\varepsilon}\varphi'_{i'}(x), \end{array}\right.$$

et ne diffèrent mutuellement que par des facteurs constants.

On peut donc énoncer ce théorème :

Si les deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$, de degrés i et i', représentent une même fonction, chaque coefficient de l'une d'elles admet la forme de l'autre, ainsi que son multiplicateur, mais sous un degré égal ou inférieur à la différence entre $i+i'$ et l'exposant de la puissance de x qui multiplie ce coefficient.

Si $i'=0$, on voit que $\varphi_i(x)$ sera du degré zéro; d'où ce corollaire, déjà trouvé au nº **18** :

Si la forme $P(x)$ admet la période ω' avec le multiplicateur ε', il en est de même du coefficient $\varphi_i(x)$ de la plus haute puissance de x, et ce coefficient est par conséquent doublement périodique de seconde espèce.

21. Le théorème précédent étant admis, je vais en déduire l'expression d'une fonction $F(x)$ affectant la forme

$$\varphi_0(x)+x\varphi_1(x)+\ldots+x^i\varphi_i(x),$$

avec le multiplicateur ε et le degré i et aussi la forme

$$\varphi'_0(x)+x\varphi'_1(x)+\ldots+x^{i'}\varphi'_{i'}(x),$$

avec le multiplicateur ε' et le degré i'.

En effet, puisque $\varphi_0(x)+x\varphi_1(x)+\ldots+x^i\varphi_i(x)$ est capable de la forme $\mathfrak{P}'(x)$, de multiplicateur ε' et de degré i', les coefficients $\varphi_i(x)$, $\varphi_{i-1}(x), \ldots, \varphi_0(x)$ sont de la même forme, avec le même multiplicateur ε', et avec des degrés qui, en général, sont respectivement égaux à $i', i'+1, \ldots, i'+i$. On a donc

$$\varphi_{i-k}(x)=\varphi'_{k0}(x)+x\varphi'_{k1}(x)+\ldots+x^{i'+k}\varphi'_{k,i'+k}(x)$$
$$(k=0,1,2,3,\ldots,i),$$

les fonctions $\varphi'(x)$, à deux indices, étant entièrement analogues aux fonctions $\varphi'(x)$ à un seul indice. Remarquons que, d'après les égalités (1) du nº **20**, on a

$$(2)\qquad \varphi'_{k,i'+k}(x)=\frac{(-1)^k C_i^{(k)}}{(\varepsilon\omega)^i\,1.2.3\ldots i}\,\delta^i_{\omega,\varepsilon}\,\varphi'_{i'}(x).$$

Mais la forme $\varphi'_{k0}(x)+x\varphi'_{k1}(x)+\ldots+x^{i'+k}\varphi'_{k,i'+k}(x)$, étant égale à

$\varphi_{i-k}(x)$, admet la période ω avec le multiplicateur ε et, par conséquent (n° 19), on a

$$\varphi_{i-k}(x) = \varpi'_{k0}(x) + \varpi'_{k1}(x)\,u(x) + \ldots + \varpi'_{ki'}(x)\,u^{i'}(x) + \ldots + \varpi'_{k,i'+k}(x)\,u^{i'+k}(x)$$
$$(k = 0, 1, 2, 3, \ldots, i),$$

où les fonctions $\varpi'(x)$ sont d. p. d. s. e., de multiplicateurs ε et ε'. Remarquons incidemment que, d'après le même n° 19, on a

$$\varpi'_{k,i'+k}(x) = (-1)^{i'+k}\varphi'_{k,i'+k}(x). \tag{3}$$

La fonction considérée $F(x)$, qui est égale à

$$\varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + \ldots + x^i\varphi_i(x),$$

s'exprime donc de la manière suivante :

$$F(x) = U_{i'+i} + x\,U_{i'+i-1} + x^2\,U_{i'+i-2} + \ldots + x^i U_{i'}$$

en désignant par $U_{i'+k}$ un polynôme en $u(x)$, de degré $i'+k$, dont les coefficients sont des fonctions d. p. d. s. e., de multiplicateurs ε et ε'.

D'où cette proposition :

Si une fonction est capable de la forme $\mathfrak{L}(x)$, avec le multiplicateur ε et le degré i, et aussi de la forme $\mathfrak{L}'(x)$ avec le multiplicateur ε' et le degré i', elle coïncide avec un polynôme aux deux variables x et $u(x)$, de degré au plus égal à $i + i'$ et toujours de degré i seulement par rapport à x, les coefficients de ce polynôme étant des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, de multiplicateurs ε et ε'.

La réciproque n'est pas exacte. Tout polynôme de cette nature ne sera pas nécessairement de la forme $\mathfrak{L}'(x)$ avec le degré i'. Il faut, en effet, qu'il existe certaines relations linéaires et homogènes entre les coefficients d. p. d. s. e., relations qu'on obtiendra aisément de la manière suivante.

Tel qu'il est écrit, le polynôme en x et $u(x)$, qui exprime $F(x)$, est visiblement de la forme

$$\varphi_0(x) + x\,\varphi_1(x) + \ldots + x^i\varphi_i(x).$$

Mais il doit être aussi de la forme

$$\varphi'_0(x) + x\,\varphi'_1(x) + \ldots + x^{i'}\varphi'_{i'}(x),$$

et cette forme n'est pas mise en évidence. Pour la faire apparaître, remplaçons, dans le polynôme, $u(x)$ par son égal $-x-u'(x)$ et ordonnons par rapport aux puissances de x. Il viendra

$$F(x)=\varphi_0''(x)+x\,\varphi_1''(x)+\ldots+x^{i'}\varphi_{i'}''(x)+x^{i'+1}\varphi_{i'+1}''(x)+\ldots+x^{i'+i}\varphi_{i'+i}''(x),$$

les $\varphi''(x)$ étant s. p. d. s. e. de période ω'. Cette forme de $F(x)$ est bien la forme $\mathfrak{P}'(x)$, mais avec le degré $i'+i$. Pour qu'elle coïncide avec

$$\varphi_0'(x)+x\,\varphi_1'(x)+\ldots+x^{i'}\varphi_{i'}'(x),$$

il est nécessaire que l'on ait

$$\varphi_{i'+1}''(x)=0,\quad \varphi_{i'+2}''(x)=0,\quad \ldots,\quad \varphi_{i'+i}''(x)=0.$$

Or les premiers membres de ces équations sont des polynômes en $u'(x)$, dont les coefficients sont d. p. d. s. e. Tous ces coefficients devront être nuls, d'après un théorème que nous verrons plus loin (n° 23). En les égalant à zéro, on reconnaît sans peine que :

Il existe $\frac{i(i+1)}{2}$ relations linéaires et homogènes entre les coefficients du polynôme $F(x)$, *savoir : une entre les coefficients des termes de degré $i'+1$, deux entre les coefficients des termes de degré $i'+2$, ..., i entre les coefficients des termes de degré $i'+i$.*

Comme les termes de degré $i'+i$ sont au nombre de $i+1$, et qu'il existe entre leurs coefficients i relations linéaires et homogènes, ces coefficients ne différeront mutuellement que par des facteurs constants.

Ceci résulte, d'ailleurs, de ce qui a été dit plus haut. Considérons, en effet le terme en $x^{i-k}\,R^{i'+k}(x)$. Son coefficient est $\varpi'_{k,i'+k}(x)$. Or les égalités (3) et (2) donnent

$$\varpi'_{k,i'+k}(x)=(-1)^{i'+k}\frac{(-1)^k C_i^{(k)}}{(\varepsilon\omega)^i\,1.2.3\ldots i}\,\delta^i_{\omega,\varepsilon}\,\varphi'_{i'}(x)=(-1)^{i'}\frac{\delta^i_{\omega,\varepsilon}\,\varphi'_{i'}(x)}{(\varepsilon\omega)^i\,1.2.3\ldots i}\,C_i^{(k)}$$
$$(k=0,1,2,3,\ldots,i).$$

Les coefficients $\varpi'_{0,i'}(x)$, $\varpi'_{1,i'+1}(x)$, $\varpi'_{2,i'+2}(x)$, ..., $\varpi'_{i,i'+i}(x)$ des termes de degré $i+i'$ ne diffèrent donc respectivement de la fonction

$$\frac{(-1)^{i'}}{(\varepsilon\omega)^i\,1.2.3\ldots i}\,\delta^i_{\omega,\varepsilon}\,\varphi'_{i'}(x)$$

que par les facteurs constants $C_i^{(0)}, C_i^{(1)}, C_i^{(2)}, \ldots, C_i^{(i)}$, qui sont les coefficients du binôme.

22. J'ai obtenu l'expression

$$F(x) = U_{i'+i} + x\,U_{i'+i-1} + x^2\,U_{i'+i-2} + \ldots + x^{i-1}\,U_{i'+1} + x^i\,U_{i'},$$

en calculant $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_i(x)$, de manière que

$$\varphi_0(x) + x\,\varphi_1(x) + \ldots + x^i\,\varphi_i(x)$$

soit susceptible de la forme $\mathfrak{P}'(x)$. On aurait pu faire le contraire et calculer $\varphi_0'(x), \varphi_1'(x), \ldots, \varphi_{i'}'(x)$, de façon que

$$\varphi_0'(x) + x\,\varphi_1'(x) + \ldots + x^{i'}\,\varphi_{i'}'(x)$$

soit susceptible de la forme $\mathfrak{P}(x)$. Il est clair qu'en opérant ainsi on obtiendra pour $F(x)$ l'expression suivante :

$$F(x) = U'_{i+i'} + x\,U'_{i+i'-1} + x^2\,U'_{i+i'-2} + \ldots + x^{i'-1}\,U'_{i+1} + x^{i'}\,U'_i,$$

où U'_{i+k} désigne un polynôme en $u'(x)$, de degré $i+k$, dont les coefficients sont des fonctions d. p. d. s. e., de multiplicateurs ε et ε'.

23. Les deux expressions de $F(x)$, obtenues aux n^{os} 21 et 22, ne mettent en évidence chacune que l'une des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$, et, pour avoir l'autre, il faut introduire certaines relations entre les coefficients. Mais ces deux expressions de $F(x)$ vont en fournir une troisième, que nous adopterons finalement et qui présentera cet avantage de renfermer à la fois les deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$, sans qu'aucune relation soit nécessaire.

Voici auparavant quelques théorèmes qui seront utiles.

THÉORÈME I. — *Si le polynôme en $u(x)$*

$$\psi_0'(x) + \psi_1'(x)\,u(x) + \psi_2'(x)\,u^2(x) + \ldots + \psi_\rho'(x)\,u^\rho(x),$$

dont les coefficients $\psi'(x)$ admettent la période de seconde espèce ω', avec le même multiplicateur ε', est identiquement nul, tous ses coefficients sont identiquement nuls.

On a, en effet,

$$\psi'_0(x+k\omega')+\psi'_1(x+k\omega')\,u(x+k\omega')+\ldots+\psi'_\rho(x+k\omega')\,u^\rho(x+k\omega')=0,$$

ce qui s'écrit, en divisant par ε'^k,

$$\psi'_0(x)+\psi'_1(x)[u(x)-k\omega']+\ldots+\psi'_\rho(x)[u(x)-k\omega']^\rho=0,$$

quel que soit le nombre entier k. Le polynôme en W

$$\psi'_0(x)+\psi'_1(x)\,W+\psi'_2(x)\,W^2+\ldots+\psi'_\rho(x)\,W^\rho$$

a donc une infinité de racines, et, par suite, tous les coefficients $\psi'_0(x)$, $\psi'_1(x)$, $\psi'_2(x)$, ..., $\psi'_\rho(x)$ sont identiquement nuls.

On en conclut, par analogie, le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si le polynôme en $u'(x)$,*

$$\psi_0(x)+\psi_1(x)\,u'(x)+\psi_2(x)\,u'^2(x)+\ldots+\psi_{\rho'}(x)\,u'^{\rho'}(x),$$

dont les coefficients $\psi(x)$ admettent la période de seconde espèce ω, avec le même multiplicateur ε, est identiquement nul, tous ses coefficients sont identiquement nuls.

C'est ce théorème que, par anticipation, nous avons invoqué un peu plus haut.

THÉORÈME III. — *Si un polynôme aux deux variables $u(x)$ et $u'(x)$, dont les coefficients admettent les périodes de seconde espèce ω et ω', avec les mêmes multiplicateurs ε et ε', est identiquement nul, tous ses coefficients sont identiquement nuls.*

En effet, ordonnons-le par rapport à $u(x)$. Les coefficients des diverses puissances de $u(x)$ sont alors de la forme $\psi'(x)$ du théorème I. Donc, d'après ce théorème, ils sont identiquement nuls; mais ce sont des polynômes en $u'(x)$, dont les coefficients sont de la forme $\psi(x)$ du théorème II. Donc, les divers coefficients de ces polynômes sont tous identiquement nuls.

On en déduit cette proposition :

THÉORÈME IV. — *Si deux polynômes, aux deux variables $u(x)$ et $u'(x)$, dont les coefficients admettent les périodes de seconde espèce ω et ω', avec* *les mêmes multiplicateurs* ε *et* ε', *sont identiques, tous leurs coefficients sont identiques chacun à chacun.*

24. Ces théorèmes étant démontrés, je reviens à la recherche d'une expression de $F(x)$, telle que, réciproquement, toute expression de même nature soit capable des formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$.

Nous avons trouvé

$$F(x) = U_{i'+i} + x\,U_{i'+i-1} + x^2\,U_{i'+i-2} + \ldots + x^{i-1}\,U_{i'+1} + x^i\,U_{i'}.$$

En dehors des U, remplaçons x par son égal $-[u(x)+u'(x)]$, et il viendra

$$\begin{aligned} F(x) = U_{i'+i} &- [u(x)+u'(x)]\,U_{i'+i-1} \\ &+ [u(x)+u'(x)]^2\,U_{i'+i-2} + \ldots + (-1)^i[u(x)+u'(x)]^i\,U_{i'}. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi $F(x)$ sous forme d'un polynôme aux deux variables $u(x)$ et $u'(x)$ à coefficients d. p. d. s. e., toujours de degré i par rapport à $u'(x)$ et de degré égal ou inférieur à $i+i'$ par rapport à $u(x)$.

Je dis que ce polynôme est de degré i' par rapport à $u(x)$.

En effet, on a aussi

$$F(x) = U'_{i+i'} + x\,U'_{i+i'-1} + x^2\,U'_{i+i'-2} + \ldots + x^{i'-1}\,U'_{i+1} + x^{i'}\,U'_i,$$

ou, en remplaçant x par $-[u(x)+u'(x)]$,

$$\begin{aligned} F(x) = U'_{i+i'} &- [u(x)+u'(x)]\,U'_{i+i'-1} \\ &+ [u(x)+u'(x)]^2\,U'_{i+i'-2} + \ldots + (-1)^{i'}[u(x)+u'(x)]^{i'}\,U'_i \end{aligned}$$

Cette seconde expression de $F(x)$ doit être identique à la première, ce qui exige, d'après le théorème IV, que les coefficients de ces deux polynômes en $u(x)$ et $u'(x)$ soient identiques chacun à chacun. Or le second est seulement de degré i' par rapport à $u(x)$. Il en est donc de même du premier.

D'où cette proposition qui résout le problème que l'on s'est proposé au commencement de ce Chapitre (n° 17) :

Si une fonction $F(x)$ *est capable de la forme* $\mathfrak{P}(x)$, *avec le multiplicateur* ε *et le degré* i, *et aussi de la forme* $\mathfrak{P}'(x)$ *avec le multiplicateur* ε' *et le degré* i', *elle coïncide avec un polynôme aux deux variables* $u(x)$ *et* $u'(x)$, *dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques de* *seconde espèce, de multiplicateurs ε et ε'. Ce polynôme est généralement du degré $i+i'$. Il est toujours du degré i' par rapport à u, et toujours de degré i par rapport à u'. D'ailleurs* $\mathrm{F}(x)$ *ne peut s'exprimer ainsi que d'une seule manière* (n° 23.)

Réciproquement, tout polynôme de cette nature, de degré i' en u, de degré i en u', représente une fonction $\mathrm{F}(x)$, susceptible des formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$, de degrés i et i', et, pour les mettre en évidence, il suffit de remplacer dans le polynôme u' par son égal $-(x+u)$, ce qui donne $\mathfrak{P}(x)$, ou u par $-(x+u')$, ce qui donne $\mathfrak{P}'(x)$.

25. Le polynôme en u et u', qui exprime $\mathrm{F}(x)$, et que je désignerai par $\mathfrak{R}(x, u, u')$, est généralement du degré $i+i'$. Mais il peut être de degré inférieur sans cesser d'être de degré i' en u, et de degré i en u'. Voici un cas où il est effectivement de degré inférieur :

Reprenons le raisonnement du n° 21, en y supposant $i'=i$, de façon que l'on ait

$$\mathrm{F}(x)=\varphi_0(x)+x\,\varphi_1(x)+\ldots+x^i\varphi_i(x)=\varphi'_0(x)+x\,\varphi'_1(x)+\ldots+x^i\varphi'_i(x).$$

Supposons de plus que les coefficients $\varphi_i(x), \varphi_{i-1}(x), \ldots, \varphi_1(x), \varphi_0(x)$, qui sont alors de la forme $\mathfrak{P}'(x)$, en soient avec des degrés respectivement égaux ou inférieurs à $0, 1, \ldots, i-1, i$, $\varphi_i(x)$ étant du degré zéro.

$\varphi_i(x)$ sera d. p. d. s. e., et l'on aura

$$\varphi_{i-k}(x)=\mathrm{U}_k, \quad (k=1, 2, 3, \ldots, i),$$

U_k désignant un polynôme en u, de degré égal ou inférieur à k, à coefficients d. p. d. s. e.

Il vient, par conséquent,

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{U}_i+x\,\mathrm{U}_{i-1}+\ldots+x^{i-1}\mathrm{U}_1+x^i\varphi_i(x)$$

ou, en remplaçant x par $-(u+u')$,

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{U}_i-(u+u')\mathrm{U}_{i-1}+\ldots+(-1)^{i-1}(u+u')^{i-1}\mathrm{U}_1+(-1)^i(u+u')^i\varphi_i(x),$$

polynôme aux deux variables u et u', de degré i seulement, et non de degré $2i$.

Ainsi, dans ce cas, le polynôme $\mathcal{R}(x, u, u')$ est seulement du degré i. Les termes en u^i et u'^i sont $(-1)^i \varphi'_i(x) u^i$ et $(-1)^i \varphi_i(x) u'^i$.

26. Soit $r(x)$ un polynôme en u

$$r(x) = \psi'_0(x) + \psi'_1(x)\, u + \psi'_2(x)\, u^2 + \ldots + \psi'_\rho(x)\, u^\rho,$$

dont les coefficients $\psi'(x)$ admettent ω' comme période de seconde espèce, avec un même multiplicateur. Soit $r'(x)$ un polynôme en u'

$$r'(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x)\, u' + \ldots + \psi_{\rho'}(x)\, u'^{\rho'},$$

dont les coefficients $\psi(x)$ admettent ω comme période de seconde espèce, avec un même multiplicateur. Soit $\mathcal{R}$, comme précédemment, un polynôme aux deux variables u et u', dont les coefficients admettent ω et ω' comme périodes de seconde espèce, avec les mêmes multiplicateurs respectifs.

Aux quatre théorèmes démontrés plus haut (n° 23) à l'égard de ces polynômes $r(x)$, $r'(x)$ et $\mathcal{R}$, on peut ajouter les suivants :

THÉORÈME V. — *Si la somme de plusieurs polynômes $r(x)$, à multiplicateurs différents, est identiquement nulle, chacun d'eux est identiquement nul.*

Soit, en effet,

$$r_0(x) + r_1(x) + r_2(x) + \ldots + r_k(x) = 0$$

une pareille identité, ε'_0, ε'_1, ε'_2, ..., ε'_k étant les multiplicateurs des $k+1$ polynômes. Supposons que ces polynômes ne soient pas nuls, et désignons par $\psi'_{0\rho_0}(x)$, $\psi'_{1\rho_1}(x)$, $\psi'_{2\rho_2}(x)$, ..., $\psi'_{k\rho_k}(x)$ les coefficients des plus hautes puissances de u dans $r_0(x)$, $r_1(x)$, $r_2(x)$, ..., $r_k(x)$. Dans l'identité, changeons successivement x en $x+\omega'$, $x+2\omega'$, ..., $x+k\omega'$. Nous avons en tout $k+1$ équations, d'où nous déduirons

$$\begin{vmatrix} r_0(x) & r_1(x) & \ldots & r_k(x) \\ r_0(x+\omega') & r_1(x+\omega') & \ldots & r_k(x+\omega') \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ r_0(x+k\omega') & r_1(x+k\omega') & \ldots & r_k(x+k\omega') \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si l'on développe le déterminant, en observant que $u^i(x+j\omega')$ est égal à $[u(x) - j\omega']^i$, l'égalité qui précède prend la forme

$$\psi'_0(x) + \psi'_1(x)\,u(x) + \psi'_2(x)\,u^2(x) + \ldots + \psi'_\rho(x)\,u^\rho(x) = 0,$$

les fonctions $\psi'(x)$ étant s. p. d. s. e, de période ω' et de même multiplicateur égal au produit $\varepsilon'_0\varepsilon'_1\varepsilon'_2\ldots\varepsilon'_k$. Donc, d'après le théorème I (n° 23), chacune de ces fonctions doit être identiquement nulle et, en particulier, $\psi'_\rho(x)$. Or ce n'est pas possible, car on a

$$\psi'_\rho(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varepsilon'_0 & \varepsilon'_1 & \ldots & \varepsilon'_k \\ \varepsilon'^2_0 & \varepsilon'^2_1 & \ldots & \varepsilon'^2_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon'^k_0 & \varepsilon'^k_1 & \ldots & \varepsilon'^k_k \end{vmatrix} \psi'_{0\rho_0}(x)\,\psi'_{1\rho_1}(x)\ldots\psi'_{k\rho_k}(x),$$

c'est-à-dire que $\psi'_\rho(x)$ est un produit de facteurs dont aucun n'est nul par hypothèse.

Pareillement :

Théorème VI. — *Si la somme de plusieurs polynômes $r'(x)$, à multiplicateurs différents, est identiquement nulle, chacun d'eux est nul.*

Théorème VII. — *Si la somme de plusieurs polynômes $\mathfrak{R}$, tels que deux quelconques d'entre eux aient au moins un multiplicateur différent, est identiquement nulle, chacun d'eux est identiquement nul.*

Soit, en effet,

$$\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \ldots + \mathfrak{R}_k = 0$$

une pareille identité.

Je désigne par $\varepsilon_{\gamma_1}, \varepsilon_{\gamma_2}, \ldots, \varepsilon_{\gamma_i}$ les multiplicateurs distincts relativement à la période ω des $k+1$ polynômes $\mathfrak{R}$ et j'appelle $\mathfrak{R}_{\gamma_1}$ la somme de ceux qui, relativement à ω, appartiennent au multiplicateur ε_{γ_1}; $\mathfrak{R}_{\gamma_2}$, $\mathfrak{R}_{\gamma_3}, \ldots, \mathfrak{R}_{\gamma_i}$ représentent les sommes analogues.

L'identité proposée s'écrit alors

$$\mathfrak{R}_{\gamma_1} + \mathfrak{R}_{\gamma_2} + \ldots + \mathfrak{R}_{\gamma_i} = 0.$$

Or, dans $\mathfrak{R}_{\gamma_1}$, les coefficients des diverses puissances de u' admettent évidemment la période de seconde espèce ω, avec un même multiplicateur ε_{γ_1}, et il en est de même dans $\mathfrak{R}_{\gamma_2}, \mathfrak{R}_{\gamma_3}, \ldots, \mathfrak{R}_{\gamma_i}$. Notre identité est donc de la forme

$$r'_{\gamma_1}(x) + r'_{\gamma_2}(x) + \ldots + r'_{\gamma_i}(x) = 0,$$

où les multiplicateurs $\varepsilon_{\gamma_1}, \varepsilon_{\gamma_2}, \ldots, \varepsilon_{\gamma_i}$ sont distincts, et, par conséquent, d'après le théorème VI, les sommes $\mathcal{R}_{\gamma_1}, \mathcal{R}_{\gamma_2}, \ldots, \mathcal{R}_{\gamma_i}$ sont identiquement nulles.

Mais les fonctions $\mathcal{R}$ dont la somme égale $\mathcal{R}_{\gamma_1}$ sont évidemment de la forme $r(x)$ et ont de plus, relativement à ω', des multiplicateurs distincts. Donc, d'après le théorème V, chacune d'elles est nulle, puisque $\mathcal{R}_{\gamma_1}$ l'est, et il en est de même des fonctions $\mathcal{R}$ qui composent $\mathcal{R}_{\gamma_2}$, $\mathcal{R}_{\gamma_3}, \ldots, \mathcal{R}_{\gamma_i}$, c'est-à-dire des $k+1$ fonctions $\mathcal{R}$.

On en déduit la proposition suivante :

THÉORÈME VIII. — *Soient deux sommes de polynômes $\mathcal{R}$, telles que, dans chacune d'elles, deux polynômes quelconques aient au moins un multiplicateur différent : si ces deux sommes sont identiques, les polynômes $\mathcal{R}$ qui les composent seront identiques chacun à chacun, et, par conséquent (théorème IV), les coefficients de ces polynômes seront les mêmes.*

V. — Forme analytique des intégrales.

27. Nous avons vu (n° **15**) que, dans tous les cas, $P(y) = 0$ admet m solutions distinctes possédant ce caractère d'être capables chacune des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$. Ce caractère nous donne la forme analytique des intégrales. Il résulte, en effet, du Chapitre précédent, que chacune de ces m solutions coïncide avec un polynôme $\mathcal{R}(x, u, u')$, c'est-à-dire avec *un polynôme aux deux variables u et u', dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, aux périodes ω et ω'. Les deux multiplicateurs, dans ce polynôme, sont d'ailleurs deux racines des équations fondamentales $\Delta = 0$ et $\Delta' = 0$.*

Une intégrale quelconque de $P = 0$ est, par conséquent, la somme de m polynômes $\mathcal{R}$ et, d'après le théorème VIII du n° **26**, elle ne peut se mettre sous cette forme que d'une seule manière.

Ainsi, *la forme analytique d'une intégrale fondamentale est celle d'un polynôme aux deux variables x et $Z(x)$, ayant pour coefficients des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, de mêmes multiplicateurs racines des équations fondamentales.*

28. Lorsqu'on a $\nu = \nu' = m$, les m polynômes qui expriment les intégrales fondamentales se réduisent à leurs termes indépendants de u

et de u', et ces m intégrales sont d. p. d. s. e. (n° 6). C'est ce qui a lieu, dans le cas général où l'une au moins des équations fondamentales n'a pas de racines multiples.

Le cas le plus général, après celui-là, est celui où, les deux équations fondamentales ayant des racines multiples, aucune de leurs racines n'annule tous les mineurs du premier ordre dans le premier membre. C'est le cas du n° **14**. Reportons-nous à la proposition et aux formules (4) de ce numéro.

La première formule montre que $\varphi_{11}(x)$ est d. p. d. s. e.

Dans la seconde, $\varphi_{22}(x)$, ne différant de $\varphi_{11}(x)$ que par un facteur constant, est aussi d. p. d. s. e. Mais alors cette seconde formule, donnant

$$\varphi_{21}(x) = \varphi'_{21}(x) + x[\varphi'_{22}(x) - \varphi_{22}(x)],$$

montre que $\varphi_{21}(x)$ est de la forme $\mathfrak{P}'(x)$, avec un degré égal ou inférieur à l'unité.

Dans la troisième, $\varphi_{33}(x)$ est d. p. d. s. e. pour la même raison que $\varphi_{22}(x)$. Puis, $\varphi_{32}(x)$, étant une combinaison linéaire de $\varphi_{21}(x)$ et de $\varphi_{11}(x)$, est de la forme $\mathfrak{P}'(x)$ avec un degré égal ou inférieur à l'unité. Mais alors cette troisième formule, donnant

$$\varphi_{31}(x) = \varphi'_{31}(x) + x[\varphi'_{32}(x) - \varphi_{32}(x)] + x^2[\varphi'_{33}(x) - \varphi_{33}(x)],$$

montre que $\varphi_{31}(x)$ est de la forme $\mathfrak{P}'(x)$ avec un degré égal ou inférieur à 2.

Et ainsi de suite. La fonction $\varphi_{\mu\mu}(x)$ sera d. p. d. s. e. Puis $\varphi_{\mu,\mu-1}(x)$, $\varphi_{\mu,\mu-2}(x)$, ..., $\varphi_{\mu,2}(x)$ $\varphi_{\mu,1}(x)$ seront de la forme $\mathfrak{P}'(x)$ avec des degrés respectivement égaux ou inférieurs à 1, 2, ..., $\mu-2$, $\mu-1$.

Les μ éléments (4) du n° **14** sont donc exactement dans le cas de la remarque faite au n° **25**, et, par conséquent, si l'on applique ce qui a été dit alors, on voit qu'ils s'expriment ainsi :

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}, \\ a_{22} + (b_{20}u + b_{21}u'), \\ a_{33} + (b_{30}u + b_{31}u') + (c_{30}u^2 + c_{31}uu' + c_{32}u'^2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{ii} + (b_{i0}u + b_{i1}u') + (c_{i0}u^2 + c_{i1}uu' + c_{i2}u'^2) + \ldots + (h_{i0}u^{i-1} + \ldots + h_{i,i-1}u'^{i-1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{\mu\mu} + (b_{\mu0}u + b_{\mu1}u') + (c_{\mu0}u^2 + c_{\mu1}uu' + c_{\mu2}u'^2) + \ldots + (l_{\mu0}u^{\mu-1} + \ldots + l_{\mu,\mu-1}u'^{\mu-1}), \end{cases}$$

où les coefficients $a, b, c, \ldots, h, \ldots, l$ désignent des fonctions d. p. d. s. e., de multiplicateurs ε et ε', aucun des coefficients b_{20}, b_{21}, c_{30}, c_{32}, $\ldots$, h_{i0}, $h_{i,i-1}$, $\ldots$, $l_{\mu 0}$, $l_{\mu,\mu-1}$, qui multiplient les plus hautes puissances de u et de u', n'étant identiquement nul.

Il existe, d'ailleurs, certaines relations entre les coefficients. Ainsi, ces coefficients, qui multiplient les plus hautes puissances de u et de u', ne diffèrent mutuellement que par des facteurs constants. En effet, la même remarque du n° 25 donne

$$h_{i0} = (-1)^{i-1} \varphi'_{ii}(x), \quad h_{i,i-1} = (-1)^{i-1} \varphi_{ii}(x).$$

Or, $\varphi_{ii}(x)$ et $\varphi'_{ii}(x)$ ne diffèrent de $\varphi_{11}(x)$ et de $\varphi'_{11}(x)$, c'est-à-dire de a_{11}, que par des facteurs constants. Si donc l'on pose

$$\varphi_{ii}(x) = C_i a_{11}, \quad \varphi'_{ii}(x) = C'_i a_{11},$$

il viendra

$$h_{i0} = (-1)^{i-1} C'_i a_{11}, \quad h_{i,i-1} = (-1)^{i-1} C_i a_{11},$$

et, par conséquent, tous les coefficients qui multiplient les plus hautes puissances de u et de u' ne diffèrent mutuellement que par des facteurs constants.

La proposition du n° 14 donne donc la suivante :

Lorsque, les deux équations fondamentales ayant des racines multiples, aucune de ces racines n'annule tous les mineurs du premier ordre, chaque racine de $\Delta = 0$ est associée à une racine de $\Delta' = 0$, ayant même ordre de multiplicité. Soit n la valeur commune des nombres de racines distinctes; soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ ces racines pour $\Delta = 0$ et $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n$ les racines respectivement associées de $\Delta' = 0$; soient $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ les valeurs communes de leurs ordres de multiplicité. Il existe un système fondamental d'intégrales se partageant en n groupes, répondant respectivement aux n couples de racines associées et les μ éléments qui composent le groupe corrélatif du couple $(\varepsilon, \varepsilon')$, d'ordre de multiplicité μ, ont la forme analytique (1), c'est-à-dire coïncident avec des polynômes $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_{\mu-1}$, de degrés $0, 1, 2, \ldots, \mu - 1$ et de multiplicateurs ε et ε'. Les coefficients $b_{20}, b_{21}, c_{30}, c_{32}, \ldots, l_{\mu 0}, l_{\mu,\mu-1}$, qui multiplient les plus hautes puissances de u et de u', sont tous différents de zéro et ne diffèrent entre eux que par des facteurs constants. Ce système fondamental renferme le nombre maximum des solutions distinctes doublement périodiques de seconde *espèce, qui sont aussi les solutions distinctes, en nombre maximum, simplement périodiques de seconde espèce, de l'une et de l'autre période.*

29. Me plaçant enfin dans un cas quelconque, j'observe que $P = 0$ admet (n° 15) un système fondamental d'intégrales comprenant : 1° N fonctions $D(x)$; 2° $\nu - N$ fonctions $S(x)$; 3° $\nu' - N$ fonctions $S'(x)$; 4° $m - (\nu + \nu' - N)$ fonctions $T(x)$, ces intégrales étant toutes capables des deux formes $\mathfrak{P}(x)$ et $\mathfrak{P}'(x)$. D'où cette proposition générale résultant des nos 18, 19 et 24 :

$P = 0$ *admet toujours, comme intégrales distinctes, m polynômes* $\mathfrak{R}$. *Leurs multiplicateurs sont les racines des équations fondamentales. Un polynôme qui appartient aux multiplicateurs* ε *et* ε', *racines multiples d'ordres* μ *et* μ', *est de degré inférieur à* μ' *par rapport à* u, *et de degré inférieur à* μ *par rapport à* u'. N *de ces polynômes sont indépendants de* u *et de* u', $\nu - N$ *de* u', *et* $\nu' - N$ *de* u, *de sorte que ce système fondamental renferme à la fois les intégrales distinctes simplement périodiques de seconde espèce, en nombre maximum, pour chaque période, et parmi elles toutes les solutions doublement périodiques de seconde espèce.*

30. Je vais examiner le cas particulier où l'équation différentielle $P = 0$ est du second ordre.

Reportons-nous au n° 16. Quatre cas sont à considérer :

1° $\nu = 2$, $\nu' = 2$. $P = 0$ admet alors deux solutions $D(x)$ distinctes.

2° $\nu = 1$, $\nu' = 1$. J'ai obtenu, pour cette hypothèse, le système fondamental

$$y_1 = D(x),$$
$$y_2 = \varphi(x) + Cx\,D(x) = \varphi'(x) + C'x\,D(x),$$

où C et C' sont différents de zéro. C'est le cas du n° 28, et l'on a, par conséquent,

$$y_2 = a_{22} + b_{20}\,u + b_{21}\,u',$$
$$b_{20} = -C'\,D(x), \quad b_{21} = -C\,D(x);$$

d'où

$$y_1 = D(x),$$
$$y_2 = \varpi_0(x) - C'\,D(x)\,u - C\,D(x)\,u',$$

$\varpi_0(x)$ étant identique à a_{22}.

3° $\nu = 1$, $\nu' = 2$. On a obtenu, pour ce cas, le système

$$y_1 = \mathrm{D}(x),$$
$$y_2 = \varphi(x) + \mathrm{C}x\,\mathrm{D}(x) = \mathrm{S}'(x),$$

où C n'est pas nul. D'après le n° 18, on a donc

$$y_2 = \varpi_0(x) + \varpi_1(x)u',$$
$$\varpi_1(x) = -\mathrm{C}\,\mathrm{D}(x);$$

d'où

$$y_1 = \mathrm{D}(x),$$
$$y_2 = \varpi_0(x) - \mathrm{C}\,\mathrm{D}(x)u'.$$

4° $\nu = 2$, $\nu' = 1$. On a pareillement (n° 19)

$$y_1 = \mathrm{D}(x),$$
$$y_2 = \varpi_0(x) - \mathrm{C}'\,\mathrm{D}(x)u,$$

C′ différant de zéro.

Ces quatre cas peuvent se représenter empiriquement par les formules uniques

$$y_1 = \varpi(x),$$
$$y_2 = \varpi_0(x) + \mathrm{C}'(\nu' - 2)\varpi(x)u + \mathrm{C}(\nu - 2)\varpi(x)u',$$

les facteurs $\nu - 2$ et $\nu' - 2$ faisant évanouir, quand il le faut, les termes en u et u'.

Si je remplace maintenant les fonctions u et u' par leurs valeurs

$$u = +\frac{\omega\omega'}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\mathrm{Z}(x) - \frac{qx}{\omega}\right], \quad u' = -\frac{\omega\omega'}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\mathrm{Z}(x) - \frac{q'x}{\omega'}\right],$$

voici, pour l'équation du second ordre, le système fondamental qui répond à tous les cas :

$$y_1 = \varpi(x), \quad y_2 = \varpi_0(x) + \mathrm{A}x\,\varpi(x) + \mathrm{B}\mathrm{Z}(x)\varpi(x),$$

$\varpi_0(x)$ et $\varpi(x)$ étant d. p. d. s. e. Les constantes A et B sont nulles si ν et ν' sont tous deux égaux à 2. Sinon, une au moins diffère de zéro, et $\varpi_0(x)$, $\varpi(x)$ ont toujours alors mêmes multiplicateurs. On a $\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{B}q}{\omega}$ lorsque $\nu = 2$, $\nu' = 1$, et $\mathrm{A} = -\frac{\mathrm{B}q'}{\omega'}$ lorsque $\nu = 1$, $\nu' = 2$.

31. Je vais chercher le système fondamental y_1, y_2 pour une équation différentielle de second ordre, en suivant une tout autre voie.

Voici préalablement quelques propriétés générales.

Considérons l'équation $P = 0$, d'ordre m. Soit $\varpi(x)$ une intégrale d. p. d. s. e., de périodes ω et ω', de multiplicateurs ε_1 et ε'_1. Ces multiplicateurs satisfont respectivement aux équations fondamentales $\Delta = 0$ et $\Delta' = 0$.

Si, dans $P = 0$, nous posons

$$y = \varpi(x) \int z \, dx,$$

nous obtenons la transformée d'ordre $m - 1$

$$Q(z) = \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + q_1 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \ldots + q_{m-1} z = 0.$$

Cette transformée aura (¹) ses coefficients uniformes, doublement périodiques, de périodes ω et ω', et son intégrale générale uniforme. En outre :

Si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m$ désignent les m racines de l'équation fondamentale $\Delta = 0$, et $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3, \ldots, \varepsilon'_m$ les m racines de l'équation fondamentale $\Delta' = 0$, les $m - 1$ racines des équations fondamentales relatives à $Q(z) = 0$ seront respectivement les quotients $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \ldots, \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1}$, et les quotients $\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1}, \frac{\varepsilon'_3}{\varepsilon'_1}, \ldots, \frac{\varepsilon'_m}{\varepsilon'_1}$.

Quelles sont maintenant les propriétés de l'intégrale $\int \mathcal{G}(x)\, dx$, supposée uniforme, lorsque $\mathcal{G}(x)$ est d. p. d. s. e. aux périodes ω et ω', et aux multiplicateurs ε et ε'? On peut les déduire de la définition même de la périodicité et trouver, pour tous les cas, la forme analytique de $\int \mathcal{G}(x)\, dx$.

Supposant d'abord que ε et ε' diffèrent de l'unité, si je représente par $G(x)$ une quelconque des intégrales de $\mathcal{G}(x)\, dx$, j'aurai

$$\frac{d\,G(x)}{dx} = \mathcal{G}(x),$$

et j'en déduis

$$\frac{d\,G(x + \omega)}{dx} = \mathcal{G}(x + \omega) = \varepsilon \mathcal{G}(x).$$

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, p. 60; 1883.

Les fonctions $G(x+\omega)$ et $\varepsilon G(x)$ ont donc même dérivée. J'en conclus

$$G(x+\omega) = \varepsilon G(x) + C.$$

On a pareillement

$$G(x+\omega') = \varepsilon' G(x) + C'.$$

Telles sont les propriétés d'une intégrale quelconque.

L'intégrale indéfinie sera $G(x) + C_1$, C_1 étant une constante arbitraire, et l'on aura

$$G(x+\omega) + C_1 = \varepsilon G(x) + C + C_1 = \varepsilon[G(x) + C_1] + (\varepsilon - 1)\left(\frac{C}{\varepsilon - 1} - C_1\right),$$
$$G(x+\omega') + C_1 = \varepsilon'[G(x) + C_1] + (\varepsilon' - 1)\left(\frac{C'}{\varepsilon' - 1} - C_1\right).$$

Or $G(x+\omega+\omega')$ s'exprime des deux manières suivantes :

$$\varepsilon G(x+\omega') + C = \varepsilon\varepsilon' G(x) + C'\varepsilon + C,$$
$$\varepsilon' G(x+\omega) + C' = \varepsilon'\varepsilon G(x) + C\varepsilon' + C',$$

et, par conséquent, il vient

$$C'\varepsilon + C = C\varepsilon' + C' \quad \text{ou} \quad \frac{C}{\varepsilon - 1} = \frac{C'}{\varepsilon' - 1}.$$

Si donc on prend comme valeur de C_1

$$C_1 = \frac{C}{\varepsilon - 1} = \frac{C'}{\varepsilon' - 1},$$

valeur admisible, puisque ε et ε' diffèrent de l'unité, et si l'on pose

$$G(x) + C_1 = g(x),$$

l'intégrale particulière $g(x)$ jouira des propriétés

$$g(x+\omega) = \varepsilon g(x),$$
$$g(x+\omega') = \varepsilon' g(x),$$

et, par conséquent, sera aussi d. p. d. s. e. aux mêmes périodes et aux mêmes multiplicateurs que $\mathcal{G}(x)$.

Supposant en second lieu que l'un des deux multiplicateurs de $\mathcal{G}(x)$

est égal à l'unité, soit $\varepsilon' = 1$, je représente encore par $G(x)$ une quelconque des intégrales de $\mathcal{G}(x)\,dx$. J'aurai

$$\begin{aligned} G(x+\omega) &= \varepsilon G(x) + C, \\ G(x+\omega') &= G(x) + C'. \end{aligned}$$

Mais on en déduit

$$\begin{aligned} G(x+\omega+\omega') &= \varepsilon G(x+\omega') + C = \varepsilon G(x) + C'\varepsilon + C, \\ G(x+\omega+\omega') &= G(x+\omega) + C' = \varepsilon G(x) + C \ + C' \end{aligned}$$

et, par suite,

$$C'\varepsilon = C' \quad \text{ou} \quad C'(\varepsilon - 1) = 0,$$

c'est-à-dire $C' = 0$. $G(x)$ admet donc la période ω'. Il en est de même de l'intégrale indéfinie $G(x) + C_1$. On a d'ailleurs

$$G(x+\omega) + C_1 = \varepsilon[G(x) + C_1] + C - C_1(\varepsilon - 1).$$

Si donc on prend comme valeur de la constante arbitraire C_1

$$C_1 = \frac{C}{\varepsilon - 1}$$

et si l'on pose

$$G(x) + C_1 = g(x),$$

l'intégrale particulière $g(x)$ jouira des propriétés

$$\begin{aligned} g(x+\omega) &= \varepsilon g(x), \\ g(x+\omega') &= g(x) \end{aligned}$$

et, par conséquent, sera encore une fonction d. p. d. s. e. aux mêmes multiplicateurs que $\mathcal{G}(x)$.

Ainsi, *lorsque les multiplicateurs de $\mathcal{G}(x)$ ne sont pas tous les deux égaux à l'unité, on peut toujours déterminer la constante d'intégration de telle sorte que l'intégrale uniforme $\int \mathcal{G}(x)\,dx$ soit aussi doublement périodique de seconde espèce, les multiplicateurs étant les mêmes que pour $\mathcal{G}(x)$.*

Il n'en est plus de même, en général, lorsque ε et ε' sont tous deux égaux à l'unité, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{G}(x)$ est de première espèce. Le raisonnement précédent est en défaut, et dans ce cas on a, pour toute intégrale $G(x)$ de $\mathcal{G}(x)\,dx$,

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
G(x+\omega) &= G(x) + C,\\
G(x+\omega') &= G(x) + C'.
\end{aligned}
\right.
$$

Il peut se faire cependant que l'une des constantes C et C', ou toutes les deux, soient nulles. Dans ce dernier cas, $G(x)$ est d. p. d. p. e. Quelle est, d'ailleurs, la forme analytique de $G(x)$, convenant aux cas où C et C' ne seraient pas nuls? Elle va résulter des égalités (1).

En effet, d'après ces égalités, $G(x) - \frac{Cx}{\omega}$ admet la période ω et augmente de $\frac{C'\omega - C\omega'}{\omega}$ quand on y change x en $x+\omega'$. Or, d'après les propriétés de la fonction $u(x)$, $\frac{C'\omega - C\omega'}{\omega\omega'}\,u(x)$ admet aussi la période ω, et diminue de $\frac{C'\omega - C\omega'}{\omega}$ quand on y change x en $x+\omega'$. Donc, la fonction

$$G(x) - \frac{Cx}{\omega} + \frac{C'\omega - C\omega'}{\omega\omega'}\,u(x)$$

est d. p. d. p. e. Désignons-la par $\chi(x)$, et il vient

$$G(x) = \chi(x) + \frac{Cx}{\omega} + \frac{C\omega' - C'\omega}{\omega\omega'}\,u(x)$$

ou, en remplaçant x par son égal $-u(x) - u'(x)$,

$$G(x) = \chi(x) - \frac{C'}{\omega'}\,u(x) - \frac{C}{\omega}\,u'(x).$$

Telle est la forme analytique de $G(x)$.

Ainsi, *lorsque* $\mathcal{G}(x)$ *est doublement périodique de première espèce, toute intégrale de* $\mathcal{G}(x)\,dx$ *est de la forme*

$$\chi(x) + A_0\,u(x) + A_1\,u'(x),$$

où $\chi(x)$ *est doublement périodique de première espèce, et où* A_0 *et* A_1 *désignent des constantes, qui peuvent d'ailleurs être nulles.*

32. Cela posé, supposons que l'équation différentielle $P = 0$ soit du second ordre.

$P = 0$ admet toujours une intégrale d. p. d. s. e. Désignons-la par $\varpi(x)$, et, dans $P = 0$, posons

$$y = \varpi(x) \int z \, dx.$$

La transformée $Q(z) = 0$ est du premier ordre et de même nature que $P(y) = 0$. Elle admet une intégrale $\mathcal{G}(x)$ d. p. d. s. e.

Si l'on pose alors

$$y_1 = \varpi(x),$$
$$y_2 = \varpi(x) \int \mathcal{G}(x) \, dx,$$

y_1 et y_2 constituent un système fondamental de solutions de $P = 0$.

Or, soient ε_1 et ε'_1 les multiplicateurs de $\varpi(x)$, racines de $\Delta = 0$ et de $\Delta' = 0$, et soient ε_2 et ε'_2 les autres racines de ces deux équations fondamentales. D'après ce qui précède, les multiplicateurs de $\mathcal{G}(x)$ sont les quotients $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ et $\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1}$.

Si donc ces deux quotients ne sont pas tous deux égaux à l'unité, c'est-à-dire si l'une au moins des équations fondamentales a ses racines inégales, on pourra déterminer la constante d'intégration, de manière que l'intégrale $\int \mathcal{G}(x) \, dx$, qui est uniforme, soit d. p. d. s. e., avec les mêmes multiplicateurs $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ et $\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1}$ que $\mathcal{G}(x)$, et alors y_2 sera lui-même d. p. d. s. e., avec les multiplicateurs $\varepsilon_1 \times \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ et $\varepsilon'_1 \times \frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon'_1}$ ou ε_2 et ε'_2.

Si, au contraire, les deux quotients sont égaux à l'unité, c'est-à-dire si les deux équations fondamentales ont leurs racines égales, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, $\varepsilon'_2 = \varepsilon'_1$, $\mathcal{G}(x)$ est alors d. p. d. p. e., et, en général, $\int \mathcal{G}(x) \, dx$ sera de la forme

$$\chi(x) + A_0 u(x) + A_1 u'(x),$$

et par suite on aura

$$y_2 = \varpi_0(x) + A_0 \varpi(x) \, u(x) + A_1 \varpi(x) \, u'(x),$$

où $\varpi_0(x)$ est d. p. d. s. e., avec les mêmes multiplicateurs ε_1 et ε'_1 que

$\varpi(x)$, et où A_0 et A_1 désignent des constantes, qui d'ailleurs peuvent être nulles.

Ces résultats sont complètement d'accord avec ceux que nous avons trouvés au n° 30.

33. En terminant ce travail, je reviens au cas général où $P = 0$ est d'ordre m, et je vais établir un théorème concernant les solutions qui affectent la forme des intégrales fondamentales, à savoir, celle d'un polynôme aux deux variables $u(x)$ et $u'(x)$, à coefficients d. p. d. s. e. de mêmes multiplicateurs ε et ε'.

Si le polynôme $\mathcal{R}(x, u, u')$ *est une intégrale de* $P = 0$, *il en sera de même de toutes ses dérivées partielles successives, prises par rapport aux deux variables* u *et* u', *les coefficients doublement périodiques de seconde espèce étant considérés comme des constantes.*

En effet, $\mathcal{R}[x, u(x), u'(x)]$ étant une solution, il en est de même de

$$(1) \qquad \mathcal{R}[x + k\omega + k'\omega', u(x + k\omega + k'\omega'), u'(x + k\omega + k'\omega')],$$

quels que soient les nombres entiers k et k'. Or on a

$$u(x + k\omega + k'\omega') = u(x) - k'\omega',$$
$$u'(x + k\omega + k'\omega') = u'(x) - k\omega.$$

On en déduit que l'expression (1) est identique à

$$\varepsilon^k \varepsilon'^{k'} \mathcal{R}[x, u - k'\omega', u' - k\omega],$$

et, par conséquent, $\mathcal{R}[x, u - k'\omega', u' - k\omega]$ est une intégrale. Or elle se développe ainsi :

$$\mathcal{R}(x, u, u') - \frac{k'\omega'}{1}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial u} - \frac{k\omega}{1}\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial u'} + \frac{(k'\omega')^2}{1.2}\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial u^2} + \frac{(k\omega)^2}{1.2}\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial u'^2}$$
$$+ \frac{2.(k\omega)(k'\omega')}{1.2}\frac{\partial^2\mathcal{R}}{\partial u.\partial u'} + \ldots.$$

Comme ce développement satisfait à $P = 0$ pour une infinité de valeurs indépendantes de $k\omega$ et de $k'\omega'$, les coefficients $\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial u}$, $\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial u'}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial u'^2}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{R}}{\partial u.\partial u'}$, $\ldots$, qui multiplient les puissances de $k\omega$ et de $k'\omega'$, sont aussi des intégrales, ce qui démontre le théorème.

On voit en particulier que, *dans l'ensemble des termes de degré le plus élevé de* $\mathfrak{R}(x, u, u')$, *chaque coefficient est une intégrale.*