Annales scientifiques de l'É.N.S.

Désiré André

Mémoire sur la multiplication dont le multiplicateur est la somme $x + \alpha$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 12 (1883), p. 3-32 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__S3_0>

MÉMOIRE
SUR LA MULTIPLICATION
DONT
LE MULTIPLICATEUR EST LA SOMME $x+\alpha$,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

1. Comme on le sait depuis longtemps, dans la multiplication d'un polynôme $f(x)$, ordonné suivant les puissances décroissantes de x, par le binôme $x+\alpha$, où α est positif, il ne se gagne jamais aucune variation, mais il peut s'en perdre une ou plusieurs couples. Le but principal du présent Mémoire, c'est de chercher des caractères à l'aide desquels, sans faire la multiplication, et simplement par l'examen attentif du polynôme $f(x)$, on puisse déterminer combien, exactement, dans la multiplication de $f(x)$ par $x+\alpha$, il se perdra de couples de variations.

2. La solution que nous donnons de ce problème repose sur la notion, probablement toute nouvelle, des *trinômes abaisseurs*. Ces trinômes sont des groupes de trois termes consécutifs qui satisfont à certaines inégalités; ils sont de deux espèces; d'une espèce ou de l'autre, tantôt ils *comprennent* le nombre α, tantôt ils ne le comprennent point. Nous les définissons, d'une manière précise, dans le Chapitre I de ce Mémoire; puis, dans le Chapitre II, nous expliquons ce qu'il faut entendre par trinômes abaisseurs *distincts*, par trinômes abaisseurs *imbriqués*, par trinômes abaisseurs *compatibles*.

3. Ces définitions et explications données, nous étudions, dans le Chapitre III, la façon dont se comportent, lors de la multiplication par $x+\alpha$, les différents termes du polynôme $f(x)$. Cette étude nous conduit (Chap. IV) à partager ce polynôme en *tronçons* de trois sortes; puis à examiner (Chap. V, VI, VII) combien, dans la multiplication par $x+\alpha$, chacun de ces tronçons perd de couples de variations. Résumant les résultats obtenus, nous établissons, au Chapitre VIII, que, *dans la multiplication de $f(x)$ par $x+\alpha$, il se perd juste autant de couples de variations qu'il y a, dans $f(x)$, de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts entre eux et comprenant α.*

4. C'est là le *théorème fondamental* et comme la pierre angulaire de tout notre travail. Ce théorème nous permet de résoudre bon nombre de problèmes intéressants, que l'on n'avait, jusqu'à présent, pas même eu l'idée de se proposer. Dans le Chapitre IX, nous en résolvons plusieurs, d'une façon purement analytique; mais nous faisons remarquer que ces mêmes problèmes se résoudraient d'une façon beaucoup plus simple et beaucoup plus rapide, si l'on avait recours à une *représentation graphique* du système des trinômes abaisseurs de la première espèce qui figurent dans le polynôme $f(x)$. Nous exposons cette représentation graphique dans notre Chapitre X; et nous indiquons, dans notre Chapitre XI, la manière dont il convient de s'en aider.

5. Enfin, nous appliquons notre théorème fondamental, d'une part (Chap. XII) à l'*abaissement* des limites fournies par la règle des signes de Descartes; de l'autre (Chap. XIII) à la démonstration de plusieurs *théorèmes* sur les équations dont toutes les racines sont réelles et sur les sommes des produits une à une, deux à deux, trois à trois, ... de ces racines. L'application de notre théorème fondamental à l'abaissement des limites fournies par la règle de Descartes nous paraît tout à fait remarquable. Elle nous conduit à deux théorèmes nouveaux qui présentent ce double avantage : d'abord, de donner tout l'abaissement qu'on peut tirer de la multiplication par $x+\alpha$; ensuite, d'être applicables dès que quelques coefficients de $f(x)$ satisfont à certaines inégalités, c'est-à-dire dans des cas très généraux, qui se rencontrent à chaque instant. Ces théorèmes nous semblent appelés à passer immé-

diatement dans la pratique, à y devenir d'un usage continuel, et à y rendre les plus grands services.

CHAPITRE I.

DÉFINITION DES TRINOMES ABAISSEURS.

6. Nous ne considérons, dans le présent travail, que des polynômes entiers en x, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x.

Soit $f(x)$ un tel polynôme : ou bien il est complet, ou bien il est la somme de plusieurs polynômes complets, séparés par des lacunes.

Nous disons que deux termes de $f(x)$ sont *consécutifs* lorsqu'ils ne sont point séparés par une lacune, c'est-à-dire lorsque, dans ces deux termes, la différence des exposants de x est égale à l'unité.

7. Cela posé, nous appelons *trinôme abaisseur* tout groupe de trois termes consécutifs, où les coefficients extrêmes sont de même signe, et où le carré du coefficient moyen ne dépasse pas le produit des coefficients extrêmes.

Nous nommons de tels groupes *trinômes*, parce qu'ils présentent chacun trois termes; nous les qualifions d'*abaisseurs* pour deux raisons : d'abord parce que c'est grâce à certains d'entre eux que, dans la multiplication par $x + \alpha$, le nombre des variations est diminué, ou, si l'on veut, *abaissé;* ensuite parce que, comme nous le verrons plus tard, toutes les fois que ces trinômes figurent dans une équation, ils nous permettent d'*abaisser* les limites données par la règle des signes de Descartes pour le nombre des racines soit positives, soit négatives de cette équation.

8. Il y a deux espèces de trinômes abaisseurs : ceux où le coefficient moyen n'est pas de même signe que les coefficients extrêmes : ce sont les trinômes abaisseurs de la *première espèce;* ceux où le coefficient moyen est de même signe que les coefficients extrêmes : ce sont les trinômes abaisseurs de la *seconde espèce.*

Il est clair que les premiers présentent chacun deux variations; et les seconds, chacun deux permanences.

9. Si nous désignons par L, M, N les valeurs absolues des trois coef-

ficients, tout trinôme abaisseur de la première espèce est de la forme

$$\pm(\mathrm{L}x^{p+1} - \mathrm{M}x^{p} + \mathrm{N}x^{p-1});$$

tout trinôme abaisseur de la seconde espèce est de la forme

$$\pm(\mathrm{L}x^{p+1} + \mathrm{M}x^{p} + \mathrm{N}x^{p-1});$$

et nous avons, dans les deux cas,

$$\mathrm{M}^2 \leq \mathrm{LN}.$$

10. Nous ferons observer, avant d'aller plus loin, que les trinômes abaisseurs, étant définis par des relations d'inégalité, ne sont point, dans les polynômes entiers, chose exceptionnelle ni rare. Il s'en rencontre à chaque instant.

11. Dans un trinôme abaisseur quelconque (L, M, N), soit de la première, soit de la seconde espèce, la fraction $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}$ est toujours inférieure ou égale à la fraction $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$. La première de ces fractions est la *limite inférieure* du trinôme; la seconde en est la *limite supérieure*. L'intervalle qui les sépare est l'*amplitude* du trinôme. Lorsque les deux limites sont égales, cette amplitude se réduit à zéro.

L'amplitude est, d'ailleurs, supérieure à zéro, lorsque le carré M^2 est inférieur au produit LN; elle est nulle, lorsque ce carré est juste égal à ce produit.

12. Soit α un nombre positif quelconque. Nous disons que ce nombre est *compris* dans un trinôme abaisseur donné, lorsqu'il est égal à l'une des limites de ce trinôme, ou intermédiaire entre ces limites, c'est-à-dire lorsqu'il satisfait à cette double condition

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}} \leq \alpha \leq \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}.$$

Évidemment, un trinôme abaisseur, dont l'amplitude est nulle, ne comprend qu'un seul nombre; tandis qu'un trinôme abaisseur, dont l'amplitude n'est pas nulle, en comprend une infinité.

CHAPITRE II.

TRINOMES ABAISSEURS DISTINCTS, IMBRIQUÉS, COMPATIBLES.

13. Deux trinômes abaisseurs de la même espèce sont *distincts* lorsqu'ils n'ont aucun terme commun ou qu'ils n'en ont qu'un seul; ils ne sont pas distincts lorsqu'ils ont deux termes communs, c'est-à-dire lorsque, dans le polynôme, ils se recouvrent en partie et sont comme *imbriqués*.

Deux trinômes imbriqués sont toujours tels que la limite inférieure du second coïncide avec la limite supérieure du premier.

Deux trinômes abaisseurs, qui n'ont pas une limite commune, ne sont jamais imbriqués et, par conséquent, sont toujours distincts.

14. Plusieurs trinômes abaisseurs, tous de la même espèce, sont *distincts* les uns des autres, lorsque deux quelconques d'entre eux, de quelque manière qu'on les choisisse, sont toujours distincts.

15. Plusieurs trinômes abaisseurs, tous de la même espèce, sont *compatibles* entre eux, lorsqu'il existe un nombre, au moins, que chacun d'eux comprenne. Lorsque cette condition n'est pas remplie, les trinômes abaisseurs sont incompatibles.

16. Soient les trinômes abaisseurs

$$(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}),\ (\mathrm{L}', \mathrm{M}', \mathrm{N}'),\ (\mathrm{L}'', \mathrm{M}'', \mathrm{N}''),\ \ldots,$$

tous de la même espèce. Pour qu'ils soient compatibles entre eux, il faut évidemment et il suffit que la plus grande, μ, des fractions $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}, \frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{L}'}, \frac{\mathrm{M}''}{\mathrm{L}''}, \cdots$ ne dépasse point la plus petite, ν, des fractions $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}, \frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{M}'}, \frac{\mathrm{N}''}{\mathrm{M}''}, \cdots$. En d'autres termes, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mu \leq \nu.$$

CHAPITRE III.

REMARQUES SUR LES TERMES DU POLYNOME $f(x)$.

17. Nous allons nous occuper, dans ce Chapitre III ainsi que dans les Chapitres suivants, des changements qu'éprouve le nombre des variations du polynôme entier $f(x)$, quand on multiplie ce polynôme par $x+\alpha$, le nombre α étant positif.

Nous supposerons toujours que le polynôme $f(x)$, donné comme multiplicande, soit ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x. Ce polynôme, d'ailleurs, peut être soit complet, soit incomplet. S'il est incomplet, il se compose, comme nous l'avons déjà (6) fait observer, de plusieurs polynômes complets séparés par des lacunes. Or il est évident que toute variation ou permanence correspondant à une lacune se retrouve dans le produit par $x+\alpha$. Il nous suffira donc, pour l'objet que nous avons en vue, de considérer un polynôme complet.

18. Soient a_p le coefficient de x^p dans le polynôme complet $f(x)$, et A_p le coefficient de x^{p+1} dans le produit de $f(x)$ par $x+\alpha$. Nous dirons que a_p et A_p sont deux *coefficients correspondants*. Tous les coefficients du multiplicande auront ainsi leurs correspondants au produit; mais la réciproque ne sera pas vraie : dans ce produit il existera un terme qui n'aura pas son correspondant au multiplicande. Ce terme surnuméraire sera juste le dernier terme du produit; il proviendra de la multiplication par α du dernier terme du multiplicande; il aura toujours le même signe que ce dernier terme : nous le désignerons par Ω.

19. Considérons le coefficient a_p du multiplicande. Le coefficient correspondant A_p du produit peut être nul ou différent de zéro; et, dans ce dernier cas, il peut être soit de même signe que a_p, soit de signe contraire.

Si A_p est nul, nous disons que a_p est un coefficient *disparaissant*.

Si A_p, supposé différent de zéro, est de signe contraire à a_p, nous disons que a_p est un coefficient à *signe variable*, ou, par abréviation, un coefficient *variable*.

Si A_p, supposé différent de zéro, est de même signe que a_p, nous disons que a_p est un coefficient à signe *invariable*, ou, par abréviation, un coefficient *invariable*.

20. Comme nous supposons toujours x positif, chaque terme, soit du multiplicande, soit du produit, a toujours le même signe que son coefficient. Nous pouvons donc remplacer, à volonté, dans toutes nos explications, le mot *coefficient* par le mot *terme*, et parler indifféremment de coefficients ou de termes correspondants; de coefficients ou de termes disparaissants, variables, invariables.

21. Dans la multiplication par $x+\alpha$, tout coefficient disparaissant est, évidemment, précédé d'un coefficient de signe contraire.

Tout coefficient variable est, évidemment aussi, précédé d'un coefficient de signe contraire.

Quant aux coefficients invariables, ils sont de deux sortes : les uns étant invariables quelle que soit la valeur numérique de α, nous les nommons coefficients *essentiellement invariables;* les autres n'étant invariables que quand α possède certaines valeurs numériques, nous les nommons coefficients *accidentellement invariables.*

Tout coefficient accidentellement invariable est évidemment précédé d'un coefficient de signe contraire.

Pour qu'un coefficient soit essentiellement invariable, il faut et il suffit, ou bien qu'il occupe dans le polynôme $f(x)$ la première de toutes les places, ou bien qu'il suive immédiatement un coefficient de même signe que lui.

22. Dans la multiplication par $x+\alpha$, nous ne nous occupons que des trinômes abaisseurs, de la première espèce, qui figurent au multiplicande.

Si l'on considère l'un quelconque de ces trinômes abaisseurs, et que ce trinôme contienne α, il est évident que son terme moyen est variable ou disparaissant, que son dernier terme est disparaissant ou invariable, et que, par conséquent, ce trinôme peut présenter quatre aspects différents.

Réciproquement, si un groupe de trois termes consécutifs, offrant deux variations, nous présente l'un quelconque de ces quatre aspects, ce groupe constitue un trinôme abaisseur, de la première espèce, comprenant le nombre α.

CHAPITRE IV.

PARTAGE DU MULTIPLICANDE EN TRONÇONS.

23. Marquons, dans le multiplicande $f(x)$, tous les coefficients invariables, soit essentiellement, soit accidentellement. Ces coefficients,

ainsi marqués, déterminent dans $f(x)$ un certain nombre de *tronçons*, lesquels, à l'exception du dernier, que nous nommons *tronçon terminal,* commencent et finissent tous par un coefficient invariable.

24. Soient a_p et a_q deux coefficients invariables, ne comprenant entre eux aucun autre coefficient invariable. Ces coefficients a_p et a_q sont les limites d'un tronçon non terminal du multiplicande, composé des deux termes a_p et a_q, qui en sont les limites, et de tous les termes que ces limites enserrent. Le tronçon correspondant du produit est celui qui a pour limites A_p et A_q; et il est évident que ces deux tronçons comptent le même nombre de termes.

25. Quant au tronçon terminal, c'est celui qui a pour premier terme le dernier terme invariable du multiplicande. Le tronçon terminal du produit a toujours juste un terme de plus que le tronçon terminal du multiplicande. Il se peut faire que ce tronçon terminal du multiplicande n'ait parfois qu'un seul terme. Celui du produit en a alors juste deux.

26. Quand nous parlerons d'un tronçon quelconque, sans dire s'il appartient au multiplicande ou au produit, il faudra toujours entendre qu'il s'agit d'un tronçon du multiplicande.

27. Dans un tronçon non terminal du multiplicande, il n'y a de termes invariables que les deux termes limites. Par conséquent, tous les termes intermédiaires sont variables ou disparaissants; par conséquent, chacun de ces termes intermédiaires est précédé d'un terme de signe contraire. Et il en est de même, dans le tronçon terminal, pour tous les termes, sauf le premier.

Il suit de là que, dans un tronçon non terminal, il n'y a jamais plus d'une permanence; et que, dans le tronçon terminal, il n'y en a jamais aucune.

28. La méthode que nous allons suivre consistera à chercher les changements qu'éprouve le nombre des variations lorsque, dans la multiplication par $x + \alpha$, on passe d'un tronçon quelconque du multiplicande au tronçon correspondant du produit, et à comparer ces changements avec le nombre des trinômes abaisseurs de la première espèce, comprenant α, que présente le tronçon considéré du multiplicande.

29. Nous pouvons remarquer, avant de procéder à cette recherche et à cette comparaison, qu'un trinôme abaisseur de la première espèce, comprenant α, n'a jamais son terme moyen invariable, et, par suite, n'est jamais à cheval sur deux tronçons contigus.

Nous pouvons remarquer aussi que, quand un tronçon non terminal se compose de deux termes seulement, ces deux termes, étant ses limites, sont tous deux invariables; et, par conséquent, que la permanence ou variation qu'ils présentent se retrouve toujours au produit. Nous n'avons donc pas à nous occuper des tronçons non terminals composés de deux termes seulement.

30. Pour faire une étude complète du polynôme multiplicande $f(x)$, il nous suffira donc d'étudier successivement :

D'abord les tronçons non terminals, de trois termes au moins, qui finissent par un coefficient essentiellement invariable;

Ensuite les tronçons non terminals, de trois termes au moins, qui finissent par un coefficient accidentellement invariable;

Enfin le tronçon terminal.

CHAPITRE V.

TRONÇONS FINISSANT PAR UN COEFFICIENT ESSENTIELLEMENT INVARIABLE.

31. Considérons, dans le multiplicande $f(x)$, un tronçon finissant par un coefficient essentiellement invariable. Ce coefficient final est précédé d'un coefficient de même signe; mais les coefficients intermédiaires, étant tous variables ou disparaissants, chacun d'eux est précédé immédiatement d'un coefficient de signe contraire, de telle sorte que ce tronçon nous offre une série de variations suivie d'une permanence unique.

32. Supposons d'abord qu'il n'y ait, dans le tronçon considéré, aucun terme disparaissant. Ce tronçon ne contient alors aucun trinôme abaisseur comprenant α. Soit k le nombre de ses coefficients intermédiaires.

Ce tronçon du multiplicande nous offre k variations, suivies d'une permanence unique. Le tronçon correspondant du produit nous offre, au contraire, une permanence unique suivie de k variations. Il n'y a ni variations perdues, ni variations gagnées.

33. Cherchons maintenant ce qui arrive lorsque le tronçon considéré du multiplicande $f(x)$ présente des coefficients disparaissants; pour éviter toute erreur d'énumération, comparons le produit que nous obtenons dans cette nouvelle hypothèse à celui que nous obtenions lorsqu'il n'y avait aucun coefficient disparaissant; et considérons successivement : le cas où tous les coefficients intermédiaires sont disparaissants; celui où il y a, au commencement du tronçon, un groupe de termes disparaissants; celui où un tel groupe se trouve au milieu; celui où un tel groupe se trouve à la fin.

34. Supposons que tous les coefficients intermédiaires soient disparaissants, et désignons-en le nombre par k.

Si k est pair et égal à $2h$, ces coefficients disparaissants font perdre $2h$ variations et introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés par les $2h$ coefficients disparaissants, associés au coefficient invariable qui les précède.

Si k est impair et égal à $2h+1$, les coefficients disparaissants font perdre encore $2h$ variations et introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés par les $2h+1$ coefficients disparaissants.

35. Considérons un groupe de k coefficients consécutifs, disparaissants, placés tout au commencement du tronçon.

Si k est pair et égal à $2h$, ces coefficients disparaissants font perdre $2h$ variations, et introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés par les $2h$ coefficients disparaissants, associés au coefficient invariable qui les précède.

Si k est impair et égal à $2h+1$, les coefficients disparaissants font encore perdre $2h$ variations, et ils introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés uniquement par les $2h+1$ coefficients disparaissants.

36. Considérons un groupe de k coefficients consécutifs disparaissants, placés au milieu du tronçon, c'est-à-dire ne touchant ni son premier ni son dernier terme.

Si k est pair et égal à $2h$, ces termes disparaissants font perdre $2h$ variations et introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés par les $2h$ coefficients disparaissants, associés au coefficient variable qui les précède.

Si k est impair et égal à $2h-1$, ces termes disparaissants font encore perdre $2h$ variations, et ils introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, formés par les coefficients disparaissants, associés aux deux coefficients qui les précèdent.

37. Considérons enfin un groupe de k coefficients consécutifs disparaissants, placés tout à la fin du tronçon.

Si k est pair et égal à $2h$, ce groupe fait perdre $2h$ variations et introduit h trinômes abaisseurs distincts et comprenant α, formés par les coefficients disparaissants, associés au coefficient variable qui les précède.

Si k est impair et égal à $2h-1$, ce groupe fait encore perdre $2h$ variations et introduit h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, formés par les coefficients disparaissants, associés aux deux coefficients qui les précèdent.

38. En résumé, dans la multiplication de $f(x)$ par $x+\alpha$, lorsque l'on passe d'un tronçon du multiplicande, finissant par un coefficient essentiellement invariable, au tronçon correspondant du produit, on ne gagne jamais de variations et l'*on en perd juste autant de couples qu'il y a, dans le tronçon considéré du multiplicande, de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant* α.

CHAPITRE VI.

TRONÇONS FINISSANT PAR UN COEFFICIENT ACCIDENTELLEMENT INVARIABLE.

39. Dans tout tronçon du multiplicande $f(x)$, finissant par un coefficient accidentellement invariable, le dernier terme, ainsi que chacun des termes intermédiaires, est précédé d'un coefficient de signe contraire au sien. Un pareil tronçon ne présente donc que des variations, et finit forcément par un trinôme abaisseur de la première espèce, comprenant le nombre α.

40. Supposons d'abord qu'aucun des coefficients ne soit disparaissant, et désignons par k le nombre des termes intermédiaires. Le tronçon considéré du multiplicande ne contient qu'un trinôme abaisseur de la première espèce, comprenant α, et l'on perd juste deux variations quand on passe de ce tronçon du multiplicande au tronçon correspondant du produit.

41. Cherchons maintenant ce qui arrive quand certains coefficients deviennent disparaissants et supposons d'abord que ce soit le cas de tous les coefficients intermédiaires du tronçon. Désignons-en le nombre par k.

Si k est pair et égal à $2h+2$, les termes disparaissants font perdre $2h$ variations et introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés par les $2h+1$ premiers coefficients disparaissants.

Si k est impair et égal à $2h+1$, les termes disparaissants font perdre $2h$ variations, et introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés par les $2h$ premiers coefficients disparaissants, associés au coefficient qui les précède.

42. Si l'on suppose un groupe de coefficients disparaissants, placés tout au commencement du tronçon, on retombe dans un cas déjà examiné (35), et l'on retrouve les résultats déjà obtenus.

Il en serait de même si l'on supposait un groupe de coefficients disparaissants, placés au milieu du tronçon. Ce cas ne différerait point de celui qu'on a déjà étudié (36).

43. Considérons enfin un groupe de k coefficients consécutifs disparaissants, placés tout à la fin du tronçon.

Si k est pair et égal à $2h$, ce groupe de coefficients disparaissants fait perdre $2h$ variations et introduit h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés par les

$2h-1$ premiers coefficients disparaissants, associés aux deux coefficients qui les précèdent.

Si k est impair et égal à $2h+1$, ce groupe de coefficients disparaissants fait perdre $2h$ variations et introduit h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés par les $2h$ premiers coefficients disparaissants, associés au coefficient qui les précède.

44. En résumé, dans la multiplication de $f(x)$ par $x+\alpha$, lorsqu'on passe d'un tronçon du multiplicande, finissant par un coefficient accidentellement invariable, au tronçon correspondant du produit, on ne gagne jamais aucune variation, mais *on en perd juste autant de couples qu'il y a, dans le tronçon considéré du multiplicande, de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant* α.

CHAPITRE VII.

TRONÇON TERMINAL.

45. Un tronçon terminal ne nous offre évidemment que des variations. Lorsque aucun de ses coefficients n'est disparaissant, il ne nous présente aucun trinôme abaisseur de la première espèce, comprenant α. Dans le tronçon correspondant du produit, lequel a toujours un terme de plus, on retrouve juste le même nombre de variations que dans le tronçon considéré du multiplicande.

46. Pour trouver ce qui arrive lorsque certains coefficients sont disparaissants, il faut et il suffit que nous étudiions successivement : le cas où tous les coefficients, sauf le premier, sont disparaissants ; le cas où il y a un groupe de coefficients disparaissants au commencement du tronçon ; le cas où un tel groupe ne touche pas le premier terme et ne contient pas le dernier ; le cas enfin où ce groupe ne touche pas le premier, mais contient le dernier terme du tronçon.

47. Supposons d'abord que tous les termes, sauf le premier, soient disparaissants, et appelons k leur nombre.

Si k est pair et égal à $2h$, ces coefficients disparaissants font perdre

$2h$ variations et introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés par les $2h$ termes disparaissants, associés au terme invariable qui les précède.

Si k est impair et égal à $2h+1$, les coefficients disparaissants font perdre $2h$ variations, et introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés par les $2h+1$ termes disparaissants.

48. Le cas où il y aurait un groupe de termes disparaissants, tout au commencement du tronçon terminal, serait tout à fait analogue à celui qu'on a déjà traité (35), et donnerait les résultats déjà obtenus.

Il en serait de même du cas où il y aurait un groupe de termes disparaissants au milieu du tronçon, c'est-à-dire un groupe de termes disparaissants qui ne toucherait pas le premier terme du tronçon et qui ne contiendrait pas le dernier. Ce cas reviendrait à un cas déjà traité (36).

49. Supposons, en dernier lieu, qu'il y ait un groupe de termes consécutifs disparaissants, tout à fait à la fin du tronçon, c'est-à-dire un groupe de termes consécutifs disparaissants ne touchant pas le premier terme du tronçon, mais comprenant le dernier terme même du multiplicande. Soit k le nombre des termes disparaissants constituant ce groupe.

Si k est pair et égal à $2h$, ces coefficients disparaissants font perdre $2h$ variations et introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés des $2h$ coefficients disparaissants, associés au coefficient variable qui les précède.

Si k est impair et égal à $2h-1$, les coefficients disparaissants font perdre $2h$ variations et introduisent h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α, lesquels sont formés des $2h-1$ coefficients disparaissants, associés aux deux termes qui les précèdent.

50. En résumé, dans la multiplication de $f(x)$ par $x+\alpha$, lorsque l'on passe du tronçon terminal du multiplicande au tronçon correspondant du produit, on ne gagne jamais aucune variation, mais *on en perd*

juste autant de couples qu'il y a, dans le tronçon terminal du multiplicande, de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant α.

CHAPITRE VIII.

THÉORÈME FONDAMENTAL.

51. Ainsi, pour les trois espèces de tronçons que nous venons d'examiner, la conclusion est la même : *Le nombre des couples de variations perdues est juste égal au nombre des trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et comprenant* α, *que l'on trouve dans ces tronçons.*

Mais, d'après ce qu'on a vu (30), dans les polynômes complets, ces tronçons étaient les seuls à examiner, car ce sont les seuls où le nombre des variations puisse éprouver un changement. Mais, d'après ce qu'on a vu aussi (17), les lacunes des polynômes incomplets ne font jamais gagner ni perdre aucune variation. Donc, dans tous les cas, nous pouvons énoncer ce théorème fondamental :

Théorème fondamental. — *Lorsque l'on multiplie par* $x+\alpha$, *le nombre* α *étant positif, un polynôme entier quelconque* $f(x)$, *ordonné par rapport aux puissances décroissantes de* x, *on perd juste autant de couples de variations qu'il y a, dans ce polynôme, de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts les uns des autres, et comprenant le nombre* α.

52. Cette relation si précise, entre le nombre des couples de variations perdues et le nombre des trinômes abaisseurs du polynôme $f(x)$, nous paraît à la fois toute nouvelle et très remarquable. Les conséquences diverses que nous en tirerons nous montreront qu'elle est aussi de la plus haute importance, et justifieront l'épithète de fondamental donnée par nous au théorème dont elle forme l'objet.

53. Il est à remarquer que la méthode employée ci-dessus, pour déterminer le nombre des variations perdues dans la multiplication du polynôme $f(x)$ par la somme $x+\alpha$, où α est positif, pourrait, sans grande modification, servir à déterminer le nombre des variations gagnées dans la multiplication du polynôme $f(x)$ par la différence

$x - \alpha$, où α serait encore positif. On sait depuis longtemps que ce nombre de variations est toujours impair; c'est même sur ce fait qu'on s'appuie pour démontrer la Règle des signes de Descartes; mais il nous semble que c'est à cela que se bornent nos connaissances relatives à ce nombre des variations gagnées. Déterminer la valeur exacte de ce nombre nous paraît une recherche fort intéressante, à laquelle nous comptons nous livrer bientôt.

54. Une détermination qui se rattache à ces recherches est celle du nombre des termes disparaissants du polynôme $f(x)$. Dans le cas de la multiplication par $x + \alpha$, ce nombre est juste égal à celui des groupes de deux coefficients consécutifs, qui présentent une variation et qui sont tels, en valeurs absolues, que le rapport du second au premier soit juste égal au nombre positif α.

S'il est des termes *disparaissants*, il en est d'autres *apparaissants* pour ainsi dire. Ce sont les termes du produit qui proviennent soit des termes du multiplicande qui précèdent immédiatement une lacune, soit du dernier terme du multiplicande. Leur nombre est égal au nombre des lacunes, plus un.

On pourrait chercher à déterminer aussi le nombre des termes non disparaissants de chaque espèce, c'est-à-dire le nombre des termes du multiplicande qui sont ou variables, ou essentiellement invariables, ou accidentellement invariables.

Toutes ces recherches sont faciles. Nous laissons au lecteur le plaisir de s'y livrer.

55. Quoi qu'il en soit, c'est le propre des théorèmes nouveaux, d'une part, de permettre de résoudre des problèmes déjà posés mais non encore résolus, de l'autre, de faire naître l'idée de nouveaux problèmes. Notre théorème fondamental possède ce double avantage. Nous allons indiquer quelques problèmes dont il fait naître l'idée et dont il donne la solution.

CHAPITRE IX.

PROBLÈMES DIVERS.

56. Problème I. — *Combien perd-on de variations quand on multiplie le polynôme $f(x)$ par le binôme $x+\alpha$?*

Notre théorème fondamental nous donne précisément la solution de ce problème. Pour l'appliquer, supposons qu'il s'agisse de multiplier par $x+4$ le polynôme

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 4x^5 + 11x^4 - x^2 + x - 5.$$

Ce polynôme contient quatre trinômes abaisseurs de la première espèce, savoir :

(1) $$x^8 - x^7 + 2x^6,$$
(2) $$-x^7 + 2x^6 - 4x^5,$$
(3) $$+2x^6 - 4x^5 + 11x^4,$$
(4) $$-x^2 + x - 5,$$

qui ont pour limites respectives 1 et 2, 2 et 2, 2 et 3, 1 et 5.

Or le dernier seulement de ces trinômes comprend α, puisque α est égal à 4 : donc, dans la multiplication par $x+4$, il se perd juste deux variations.

Si l'on effectue le produit considéré, on trouve qu'il est égal à

$$x^9 + 3x^8 - 2x^7 + 4x^6 - 4x^5 + 48x^4 - x^3 - 3x^2 - x - 20$$

et qu'il contient deux variations de moins que le multiplicande.

On peut remarquer que ces deux variations se sont perdues, non seulement sans qu'il se soit formé au produit de lacune nouvelle, mais quoique la lacune qui existait au multiplicande ait été comblée au produit.

57. Problème II. — *Un polynôme $f(x)$ étant donné, trouver les changements qu'éprouve le nombre des variations perdues dans la multiplication de ce polynôme par $x+\alpha$, lorsque α prend successivement toutes les valeurs, depuis 0 jusqu'à $+\infty$?*

D'après notre théorème fondamental, cela revient à trouver les changements qu'éprouve le nombre des trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts les uns des autres et comprenant α.

Reprenons pour exemple le polynôme du problème précédent (56) et rappelons-nous les limites de ses trinômes abaisseurs.

Lorsque α varie entre o et 1, il n'est compris dans aucun trinôme : on ne perd aucune variation.

Lorsque α est égal à 1, il est compris dans le premier et le quatrième trinôme : on perd 4 variations.

Il en est de même lorsque α varie entre 1 et 2.

Lorsque α est égal à 2, il est compris dans tous les trinômes; mais, de ces quatre trinômes, trois seulement sont distincts : donc on perd 6 variations.

Lorsque α varie entre 2 et 3, il est compris dans les deux derniers trinômes : on perd 4 variations.

C'est encore ce qui arrive lorsque α est égal à 3.

Quand α varie de 3 à 5, il n'est plus compris que dans le dernier trinôme : on ne perd plus que 2 variations.

Enfin, on en perd encore 2 lorsque α est égal à 5.

Pour les valeurs supérieures à 5, le nombre α n'est plus compris dans aucun trinôme : on ne perd plus aucune variation.

58. Problème III. — *Entre quelles limites faut-il prendre la valeur de α pour que, dans la multiplication de $f(x)$ par $x+\alpha$, il se perde un nombre donné de variations?*

Soit $2h$ ce nombre donné. D'après notre théorème fondamental, il suffit de chercher les régions où α est compris dans h trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts les uns des autres.

Reprenons encore pour exemple le polynôme (56) du problème I, et supposons qu'on demande entre quelles limites il faut prendre α pour qu'il se perde 4 variations. Les régions convenables sont celles où α est compris dans deux trinômes abaisseurs distincts de la première espèce. L'analyse que nous avons faite (57), pour la résolution du problème II, nous montre qu'il y a deux régions répondant à la question, savoir : la région qui s'étend depuis 1 inclusivement jusqu'à 2 exclusivement; et la région qui s'étend depuis 2 exclusivement jusqu'à 3 inclusivement.

En d'autres termes, il faut et il suffit que α satisfasse à la double relation

$$1 \leq \alpha < 2,$$

ou bien à la double relation

$$2 < \alpha \leq 3.$$

59. Problème IV. — *Quel est le plus grand nombre de variations qu'on puisse perdre dans la multiplication d'un polynôme donné $f(x)$ par un binôme de la forme $x+\alpha$?*

D'après notre théorème fondamental, le nombre cherché est le double du plus grand nombre des trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et compatibles, que l'on puisse trouver dans le polynôme donné $f(x)$. Or, évidemment, pour obtenir ce dernier nombre, il suffit de refaire l'analyse (57) qui nous a donné la solution du problème II.

Si nous prenons toujours le même polynôme pour exemple, nous trouvons que, dans la multiplication de ce polynôme par un binôme de la forme $x+\alpha$, il peut se perdre, au plus, 6 variations; et que, pour qu'il s'en perde ce nombre maximum, il suffit de donner à α la valeur 2.

CHAPITRE X.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES TRINOMES ABAISSEURS.

60. Comme nous venons de le voir, grâce à notre théorème fondamental, tous les problèmes du Chapitre précédent se ramènent à des problèmes sur les trinômes abaisseurs de la première espèce. La résolution de ces derniers problèmes n'est jamais très compliquée. Elle se simplifie beaucoup lorsqu'on s'aide d'un certain mode de *représentation graphique* du système des trinômes abaisseurs de la première espèce que renferme le polynôme $f(x)$.

Ce mode de représentation graphique est d'ailleurs le même pour les trinômes abaisseurs de la seconde espèce que pour ceux de la première. En d'autres termes, on peut représenter graphiquement, par les mêmes procédés, en un premier tableau, le système complet des trinômes abaisseurs de la première espèce qui figurent dans le polynôme $f(x)$; et, en un second tableau, le système complet des trinômes abaisseurs de la seconde espèce, qui figurent dans le même polynôme. Mais, sous aucun prétexte, il ne faut jamais mêler, dans un même tableau, des trinômes des deux espèces.

Afin de fixer les idées, nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, qu'il s'agisse toujours, et uniquement, de trinômes abaisseurs de la première espèce.

61. Soit donc à représenter graphiquement le système des trinômes abaisseurs de la première espèce figurant dans un polynôme quelconque $f(x)$, complet ou incomplet, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x, et composé de n termes.

Nous traçons d'abord $n - 2$ *ordonnées verticales, équidistantes et pointillées,* correspondant respectivement aux $n - 2$ premiers termes du polynôme.

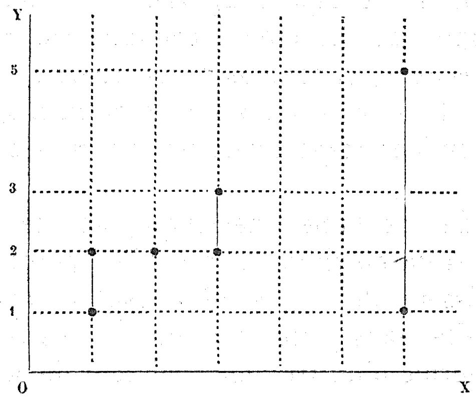
Cela fait, considérons l'une quelconque de ces ordonnées. Si le terme correspondant du polynôme donné n'est point le premier terme d'un trinôme abaisseur de la première espèce, nous laissons cette ordonnée telle quelle, sans y rien marquer. Si ce terme est, au contraire, le premier terme d'un trinôme abaisseur de la première espèce, nous portons sur cette ordonnée, à partir d'un *axe horizontal des abscisses,* et en employant une échelle arbitraire, deux longueurs représentant les deux *limites* de ce trinôme. Les extrémités supérieures de ces longueurs sont deux points, marquant ces limites et que, pour cette raison, nous nommons *points-limites*. Dans le dessin, nous les faisons fort gros. Quand les limites sont égales, les deux points-limites se confondent en un seul qui représente un trinôme d'amplitude nulle; quand les deux limites sont distinctes, les points-limites ne se confondent pas, et le *trait plein,* par lequel nous les joignons, représente l'*amplitude* du trinôme abaisseur correspondant; de telle façon que chaque trinôme abaisseur est représenté sur l'ordonnée correspondant à son premier terme, soit par un *gros point* unique, soit par un *trait plein,* reliant deux gros points.

Nous opérons ainsi pour toutes les ordonnées. Nous menons, par tous les points-limites, des *droites pointillées, horizontales,* et, par conséquent, *parallèles à l'axe des abscisses*. Enfin, nous traçons, au-dessous du tableau formé, l'axe OX des abscisses; et, à la gauche de ce tableau, un axe vertical OY, sur lequel nous marquons les *cotes* des points-limites, c'est-à-dire les cotes des horizontales pointillées.

62. En appliquant ce mode de représentation aux trinômes abaisseurs de la première espèce du polynôme

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 4x^5 + 12x^4 - x^2 + x - 5,$$

nous obtenons le tableau que voici :



63. Si nous considérons la région du dessin comprise dans l'angle XOY, nous constatons que cette région est divisée, de bas en haut, par les horizontales pointillées, en un certain nombre de bandes parallèles.

Lorsqu'on se meut horizontalement, de gauche à droite, dans l'intérieur d'une de ces bandes, on ne rencontre aucun point-limite; mais on peut rencontrer des traits pleins. Il est à remarquer que, si l'on rencontre ainsi deux traits pleins, ces traits pleins ne sont jamais placés sur deux ordonnées consécutives. Les trinômes abaisseurs dont ils représentent l'amplitude sont, par conséquent, des trinômes distincts.

Lorsqu'on se meut le long d'une horizontale pointillée, on peut rencontrer et des traits pleins et des points-limites. Deux de ces traits pleins ne sont jamais placés sur deux ordonnées consécutives; il en est de même d'un point-limite et d'un trait plein, de telle façon que les deux trinômes abaisseurs correspondants sont forcément distincts.

Au contraire, plusieurs points-limites, rencontrés par une même horizontale pointillée, peuvent être placés sur des ordonnées consécutives et, par conséquent, peuvent appartenir à des trinômes imbriqués.

CHAPITRE XI.

USAGES DE LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.

64. Pour indiquer la manière d'utiliser la représentation graphique que nous venons de faire connaître, supposons qu'il s'agisse toujours du polynôme

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 4x^5 + 12x^4 - x^2 + x - 5,$$

dont nous avons représenté graphiquement (62) le système des trinômes abaisseurs de la première espèce; et proposons-nous de trouver dans combien de trinômes abaisseurs distincts de la première espèce est compris un nombre donné α.

Sur l'axe OY, à partir de l'origine O, et avec l'échelle employée, nous porterons la longueur mesurée par le nombre α. L'extrémité supérieure de cette longueur sera un point qui représentera α, et que nous nommerons le *point* α.

Par ce point α menons mentalement une parallèle à l'axe OX. Il faudra distinguer deux cas, cette parallèle pouvant : soit tomber entre deux horizontales pointillées, soit coïncider avec une de ces horizontales.

Si cette parallèle tombe entre deux horizontales pointillées, ou bien elle ne rencontre rien, ou bien elle rencontre des traits pleins. Le nombre des traits pleins qu'elle rencontre nous donne exactement le nombre des trinômes abaisseurs de la première espèce, qui comprennent α.

Si cette parallèle coïncide avec l'une des horizontales pointillées, elle peut rencontrer des traits pleins et des gros points. Les traits pleins correspondent à des trinômes abaisseurs tous distincts, les gros points correspondent aussi à des trinômes abaisseurs distincts, excepté lorsqu'ils se trouvent placés sur des ordonnées consécutives. Si l'on rencontre une série de gros points placés sur des ordonnées consécutives, pour obtenir des trinômes distincts, il faut compter, non pas tous les gros points de cette série, mais seulement le premier, le troisième, le cinquième, etc., jusqu'à la fin de la série. Le nombre des trinômes abaisseurs distincts, comprenant α, est juste égal au nombre des traits pleins et des gros points ainsi comptés que rencontre la parallèle menée mentalement à l'axe OX par le point α.

65. Ce que l'on vient de dire nous montre nettement de quelle façon, à l'aide de notre représentation graphique, se peut résoudre le premier (56) des problèmes que nous nous sommes posés.

Pour résoudre le second (57), nous n'avons qu'à supposer que le point α parcoure l'axe OY, en s'élevant de plus en plus à partir de OX et en emportant avec lui, vers le haut, la parallèle menée mentalement à cet axe OX. Nous pourrons suivre du regard la manière dont varie le nombre des trinômes distincts qui comprennent α.

Le troisième (58) de nos problèmes se résout de lui-même lorsque l'on suit encore la parallèle α dans son mouvement ascensionnel. On voit immédiatement dans quelles régions de OY le point α doit être placé pour que le nombre des trinômes abaisseurs distincts, comprenant α, soit égal à un nombre donné.

La même étude du mouvement ascensionnel du point α et de la parallèle qu'il entraîne nous donne immédiatement aussi la solution de notre quatrième problème (59), car elle nous permet de trouver, sans aucune peine, quel est le plus grand nombre des trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et compatibles, que présente le polynôme donné.

CHAPITRE XII.

APPLICATION A LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES.

66. La *règle des signes de Descartes* possède l'immense avantage de nous donner immédiatement une *limite supérieure* v du nombre des *racines positives* de l'équation algébrique $f(x) = 0$, et une *limite supérieure* w du nombre des *racines négatives* de la même équation.

Comme on le sait, v est le nombre des variations du polynôme $f(x)$, et w celui des variations du polynôme $f(-x)$. Mais il est bien évident que l'on n'a pas besoin, pour obtenir ϖ, de former ce polynôme $f(-x)$, et que les nombres v et ϖ peuvent se déduire tous deux, sans calcul, de l'examen du polynôme $f(x)$.

67. Le seul inconvénient que présentent ces limites v et ϖ, c'est que d'ordinaire elles sont trop élevées. Il y a grand intérêt à les abaisser. On a tenté de le faire de bien des façons, notamment en s'appuyant sur la considération des variations qui se perdent dans la multiplication de $f(x)$ par $x+\alpha$. Mais les théorèmes qu'on a ainsi obtenus présentent ce double défaut : d'abord, de ne pas donner tout l'abaissement que peut fournir la multiplication par $x+\alpha$; ensuite, de n'être applicables que quand les coefficients de $f(x)$ satisfont à certaines *égalités*, c'est-à-dire de n'être applicables que dans des cas très particuliers, qui ne se rencontrent pour ainsi dire jamais.

Grâce à l'étude que nous venons de faire du nombre exact des variations perdues dans la multiplication de $f(x)$ par $x+\alpha$, nous pouvons remplacer les théorèmes si défectueux dont nous parlons par des théorèmes nouveaux possédant ce double avantage : d'abord, de donner tout l'abaissement qui se peut tirer de la multiplication par $x+\alpha$; ensuite, d'être applicables dès que quelques coefficients de $f(x)$ satisfont à certaines *inégalités*, c'est-à-dire d'être applicables dans des cas très généraux, qui se rencontrent à chaque instant.

68. Prenant pour point de départ ce théorème bien connu : *Autant il se perd de variations dans la multiplication de $f(x)$ par $x+\alpha$, autant on peut retrancher d'unités à la limite v du nombre des racines positives*, nous chercherons le plus grand nombre de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et compatibles, que présente le premier membre $f(x)$ de l'équation donnée.

Soit θ ce nombre. Si l'on donnait à α une valeur numérique comprise dans ces θ trinômes, lorsqu'on multiplierait par la somme $x+\alpha$, il se perdrait 2θ variations; et, par suite, on pourrait prendre pour limite supérieure du nombre des racines positives, non plus v, mais $v-2\theta$.

69. Pour abaisser autant que possible la limite supérieure du nombre

des racines négatives, on pourrait opérer sur le polynôme $f(-x)$ et chercher le plus grand nombre de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et compatibles, que présente ce nouveau polynôme. Mais il est inutile de considérer ce polynôme $f(-x)$, car les trinômes abaisseurs de la première espèce de $f(-x)$ correspondent exactement aux trinômes abaisseurs de la seconde espèce du polynôme $f(x)$.

Si donc on cherche le plus grand nombre de trinômes abaisseurs de la seconde espèce, distincts et compatibles, que présente le polynôme donné $f(x)$, et que l'on appelle τ ce nombre, on peut prendre, pour limite supérieure du nombre des racines négatives, non plus ϖ, mais $\varpi - 2\tau$.

70. Nous pouvons donc énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Si l'on désigne par θ le plus grand nombre de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et compatibles, que présente le polynôme $f(x)$, le nombre des racines positives de l'équation $f(x)=0$ est, au plus, égal à $v-2\theta$, et, s'il est inférieur à cette limite, c'est d'un nombre pair.*

Théorème II. — *Si l'on désigne par τ le plus grand nombre de trinômes abaisseurs de la seconde espèce, distincts et compatibles, que présente le polynôme $f(x)$, le nombre des racines négatives de l'équation $f(x)=0$ est, au plus, égal à $\varpi-2\tau$, et, s'il est inférieur à cette limite, c'est d'un nombre pair.*

71. Nous le répétons, ces deux théorèmes donnent tout l'abaissement que l'on peut tirer de la considération des variations perdues dans la multiplication de $f(x)$ par $x+\alpha$. Ils nous conduisent immédiatement à ce nouveau théorème :

Théorème III. — *Le nombre des racines imaginaires de l'équation $f(x)=0$, dont m désigne le degré, est au moins égal à $m-v+2\theta-\varpi+2\tau$, et,* a fortiori, *au moins égal à $2\theta+2\tau$.*

72. Comme nous l'avons déjà dit, les théorèmes qui précèdent (**70**) nous paraissent de la plus haute importance, surtout pour la pratique. Ils ont cet inappréciable avantage de s'appliquer à chaque instant, les trinômes abaisseurs se présentant continuellement dans les premiers membres des équations.

73. Pour donner un exemple de leur efficacité, considérons l'équation

$$x^6 - x^5 + 2x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Dans cette équation, les quatre nombres v, w, θ et τ ont pour valeurs numériques respectives 4, 2, 2 et 1. Il s'ensuit que chacune des différences $v - 2\theta$, $w - 2\tau$ est égale à zéro; et, par conséquent, que cette équation n'a ni racine positive ni racine négative : toutes ses racines sont imaginaires.

74. Comme nouvelle application, considérons l'équation

$$x^m - x^{m-1} + 2x^{m-2} - 3x^{m-3} + 5x^{m-4} - 8x^{m-5} + \ldots = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme complet, sans permanence, présentant $m+1$ termes, et où la valeur absolue de chaque coefficient est constamment égale à la somme des valeurs absolues des deux coefficients qui le précèdent. Ce premier membre est une suite de trinômes abaisseurs distincts, de la première espèce, dont les termes moyens ne sont autre chose que les coefficients de rang pair du polynôme. On sait, en effet, depuis Cassini, que le carré de chacun de ces coefficients de rang pair est moindre que le produit des deux coefficients entre lesquels il se trouve placé.

Cela étant, ces trinômes abaisseurs ont pour limites inférieures respectives les fractions $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{5}$, ...; et pour limites supérieures respectives les fractions $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{13}{8}$, ... Or, ces fractions limites sont précisément les réduites successives de l'irrationnelle $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, mise sous la forme d'une fraction continue. Par conséquent, les limites inférieures de nos trinômes abaisseurs sont toutes moindres que l'irrationnelle $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$; par conséquent aussi, leurs limites supérieures dépassent toutes cette irrationnelle. Donc, cette irrationnelle est comprise à la fois dans tous nos trinômes abaisseurs; donc ces trinômes sont tous compatibles.

Si m est pair et égal à 2μ, le premier membre de l'équation considérée a 2μ variations et μ trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et compatibles. Donc la différence $v - 2\theta$ est nulle; donc notre équation n'a aucune racine positive.

Si, au contraire, m est impair et égal à $2\mu + 1$, le premier membre de notre équation a $2\mu + 1$ variations et μ trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et compatibles. Donc la différence $v - 2\theta$ est égale à l'unité; donc notre équation a une racine positive, ni plus ni moins.

Il est d'ailleurs évident que, quel que soit m, cette équation n'a jamais de racine négative.

75. Nous pouvons remarquer, en finissant ce Chapitre, que les théorèmes (**70**), dont nous venons de donner des applications, exigent toujours la détermination des quatre nombres v, ϖ, θ et τ. Ces quatre nombres peuvent se déterminer sur $f(x)$ lui-même, sans calcul et d'une manière très facile, surtout si l'on s'aide de notre mode de représentation graphique.

76. Lorsque l'on ne tient pas à obtenir tout l'abaissement que la méthode est capable de donner, on peut se borner aux deux théorèmes suivants dont l'usage, comme l'énoncé, est d'une simplicité extrême :

Théorème IV. — *Dès que le premier membre d'une équation algébrique présente un trinôme abaisseur de la première espèce, la limite supérieure v du nombre des racines positives peut être abaissée de deux unités.*

Théorème V. — *Dès que le premier membre d'une équation algébrique présente un trinôme abaisseur de la seconde espèce, la limite supérieure ϖ du nombre des racines négatives peut être abaissée de deux unités.*

77. On voit, par tout ce qui précède, que nous ne faisons usage de nos trinômes abaisseurs de la seconde espèce que dans les applications de notre théorème fondamental à la Règle des signes de Descartes. Si l'on ne s'occupait point de ces applications, on pourrait passer ces trinômes sous silence. Alors on ne parlerait point du tout des deux espèces de trinômes : on n'emploierait que nos trinômes abaisseurs de la première espèce, sous la simple dénomination de *trinômes abaisseurs*.

78. Lors même que l'on s'occuperait des applications de notre théorème fondamental à la Règle des signes de Descartes, on pourrait se dispenser de parler de nos trinômes abaisseurs de la seconde espèce. Pour se passer d'eux, dans l'évaluation de la limite supérieure du nombre des racines négatives, il suffirait de considérer le polynôme $f(-x)$ et d'opérer sur lui comme on a opéré sur $f(x)$. Mais, à cette simplification apparente, on perdrait deux avantages très réels : le premier, de pouvoir déterminer le nombre τ sur le polynôme $f(x)$ lui-même; le second, de pouvoir énoncer, comme nous le faisons (76), notre théorème V.

CHAPITRE XIII.

THÉORÈMES DIVERS.

79. Des deux derniers théorèmes (76) du Chapitre précédent, nous pouvons conclure immédiatement que : *si une équation a toutes ses racines réelles, cette équation ne présente, à son premier membre, aucun trinôme abaisseur, ni de la première espèce, ni de la seconde.*

80. Considérons d'abord une équation qui ait toutes ses racines réelles et positives. Le premier membre de cette équation est complet et ne présente que des variations; mais trois quelconques, consécutifs, de ses termes, ne forment jamais un trinôme abaisseur de la première espèce. Si donc nous appelons L, M, N les valeurs absolues des coefficients de ces trois termes, nous avons toujours

$$M^2 > LN.$$

Mais, si M est la somme S_p des produits p à p de toutes les racines de l'équation considérée, L est la somme S_{p-1} des produits $p-1$ à $p-1$ de ces mêmes racines, et N est la somme S_{p+1} de leurs produits $p+1$ à $p+1$. De là ce théorème :

THÉORÈME. — *Étant données m quantités réelles et positives quelconques, si l'on désigne, en général, par S_p la somme des produits p à p de ces quantités, on a toujours*

$$S_p^2 > S_{p-1}\,S_{p+1}.$$

81. On arriverait absolument aux mêmes conclusions, si l'on étudiait une équation algébrique, de degré quelconque, dont toutes les racines seraient réelles et négatives.

82. Examinons maintenant le cas d'une équation algébrique de degré quelconque, dont les racines seraient toutes réelles, mais les unes positives et les autres négatives.

Le premier membre d'une pareille équation peut présenter des variations, des permanences et même des lacunes. Considérons-y trois termes consécutifs, c'est-à-dire trois termes non séparés par des lacunes. Si, dans ce groupe de trois termes, les coefficients extrêmes sont de signes contraires, leur produit, qui est négatif, est forcément moindre que le carré, toujours positif, du terme moyen. Si les coefficients extrêmes sont de même signe, le carré du coefficient moyen dépasse encore le produit des coefficients extrêmes, car, dans le cas contraire, le groupe considéré formerait un trinôme abaisseur, et l'équation aurait des racines imaginaires. En résumé donc, *lorsqu'une équation a toutes ses racines réelles, si l'on y prend, avec leurs signes, trois coefficients consécutifs, le carré du coefficient moyen est toujours supérieur au produit des deux autres.*

Nous pouvons déduire de là le théorème suivant :

Théorème. — *Étant données m quantités réelles quelconques, si l'on désigne, en général, par* S_p *la somme de leurs produits p à p, et que l'on suppose les trois sommes* S_{p-1}, S_p, S_{p+1} *toutes les trois différentes de zéro, on a toujours forcément*

$$S_p^2 > S_{p-1}\,S_{p+1}.$$

Il est bien évident que ce théorème est tout à fait général, et que le théorème qui précède (77) n'en est qu'un cas particulier.

83. Supposons que l'équation considérée n'ait plus qu'une seule racine distincte, et que cette racine soit égale à l'unité. L'équation se réduit à $(x-1)^m=0$; et ses coefficients, abstraction faite de leurs signes, ne sont autre chose que les coefficients du développement du binôme. *Si* donc *on représente par* $C_{m,p-1}$, $C_{m,p}$, $C_{m,p+1}$ *trois coefficients*

consécutifs de ce développement, on a forcément

$$C_{m,p}^2 > C_{m,p-1}\,C_{m,p+1}.$$

Cette inégalité, d'ailleurs, peut être regardée comme évidente, puisqu'elle se réduit à celle-ci :

$$\frac{m-p+1}{p} > \frac{m-p}{p+1}.$$