Annales scientifiques de l'É.N.S.

M. Nicolas

Étude des fonctions de Fourier (première et deuxième espèce)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 11 (1882), p. 3-90 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1882_2_11__S3_0>

ÉTUDE

DES

FONCTIONS DE FOURIER

(PREMIÈRE ET DEUXIÈME ESPÈCE),

PAR M. NICOLAS,

INSPECTEUR D'ACADÉMIE.

INTRODUCTION.

1. Les fonctions qui font l'objet du présent travail trouvent leur application dans les calculs astronomiques et dans un grand nombre de problèmes de Physique mathématique. C'est Fourier qui le premier les a introduites dans l'Analyse et a fait connaître quelques-unes de leurs propriétés les plus importantes. Peu de temps après, Bessel a été conduit aux mêmes fonctions dans ses recherches sur les perturbations planétaires; et c'est ce qui fait que les astronomes les ont appelées *fonctions de Bessel*. Cette dénomination, comme le fait observer M. Heine dans un Mémoire intitulé : *Les fonctions de Fourier et Bessel* (1), est contraire à l'usage. Personne ne désigne en effet sous le nom de *fonctions de Legendre* les intégrales eulériennes, qui, sans les découvertes de ce dernier, n'auraient pas eu l'importance qu'elles ont acquises dans ces derniers temps. Si une désignation spéciale est nécessaire, ajoute

(1) *Journal de Crelle*, t. 69.

M. Heine, on peut employer le nom de *fonctions cylindriques*, qui rappelle leur usage dans l'étude des phénomènes physiques; mais, comme il est juste de restituer à un savant français l'honneur qui lui revient légitimement, nous les appellerons plus volontiers *fonctions de Fourier,* tout en employant quelquefois la nouvelle dénomination proposée.

2. Depuis quelques années, les propriétés de ces fonctions ont été exposées dans plusieurs Mémoires, publiés principalement dans les Recueils étrangers, et en particulier dans le *Journal de Crelle* et dans les *Annales de Mathématiques* de MM. Clebsch et Neumann. Elles présentent de grandes analogies avec les fonctions circulaires, et paraissent jouer dans l'analyse un rôle assez important. Il n'est donc pas inutile d'exposer d'une manière simple et élémentaire les principales propriétés de ces fonctions; travail qui jusqu'à présent manque en France, bien que quelques auteurs, après Fourier et Poisson, les aient employées dans leurs recherches de Physique mathématique.

Parmi les auteurs étrangers, outre Bessel et Jacobi, je citerai : Hansen à Gotha; Anger à Dantzig; Schlömilch à Leipzig; Lipschitz à Bonn; Schläfli à Berne; Hanken à Erlangen, etc., qui ont étudié les propriétés des fonctions de Fourier et publié sur ce sujet des Mémoires plus ou moins étendus.

3. En outre, deux traités spéciaux sur cette matière ont été publiés à Leipzig, l'un par M. Neumann en 1867, et l'autre par M. Lommel en 1868. Ces ouvrages sont conçus suivant des plans différents. Dans le premier, l'auteur a surtout pour but de montrer comment une fonction continue quelconque peut être représentée par une série simple ou double procédant suivant les fonctions de Fourier, de la même manière qu'elle peut être exprimée par une série de sinus, cosinus ou exponentielles. En partant de la formule bien connue de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(t)\,dt}{t-z},$$

il est conduit à employer, concurremment avec la fonction de Fourier qu'il désigne par J_n, une seconde fonction qu'il représente par O_n et qu'il appelle *fonction de deuxième espèce*. Dans la première section de son ouvrage, il étudie les principales propriétés de ces deux fonctions; dans la seconde, il établit différents développements en séries et démontre leur convergence; la troisième section est consacrée à l'étude de l'équation différentielle sous la forme que lui a donnée Bessel [1], et la quatrième, à l'intégration de certaines équations différentielles partielles au moyen des fonctions considérées précédemment.

4. Le but principal de M. Lommel, au contraire, est d'étudier les fonctions de Fourier en elles-mêmes et d'exposer, non leur théorie complète (comme l'avoue l'auteur), mais de mettre en évidence leurs principales propriétés. Je dois signaler d'abord une différence notable entre son travail et celui de M. Neumann. On sait que la fonction de Fourier représente l'une quelconque des deux intégrales particulières de l'équation différentielle du second ordre,

$$\frac{d^2 J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J = 0,$$

tant que le paramètre ν est fractionnaire. Mais, lorsque ce paramètre est entier, il y a lieu de faire une distinction entre les deux intégrales: celle qui, développée en série, conserve la même forme que dans le cas où le paramètre est fractionnaire, reste la fonction de première espèce; et l'autre, dont le développement présente une forme bien différente, est celle que M. Lommel considère comme la fonction de deuxième espèce. Elle diffère complètement de la fonction O_n, qui est un polynôme limité; nous la désignerons avec ces auteurs par Y_n.

Pour la fonction de première espèce, M. Lommel déduit les principales propriétés de l'intégrale définie

$$J_\nu = \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \cos(z \cos\omega) \sin^{2\nu}\omega \, d\omega$$

et les expose dans la première partie de son livre. Dans la deuxième, il étudie les fonctions de seconde espèce; et, dans la troisième, il fait

(1) *Untersuchung des Theils der planeterischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht, Abhandlung der mathematische Classe der Berliner Akademie* (1824).

connaître les équations différentielles qui peuvent être intégrées à l'aide de ces fonctions, et parmi lesquelles on rencontre la célèbre équation de Riccati.

5. Dans le présent Mémoire, je me suis appliqué principalement à l'étude des différents modes de représentation des fonctions de Fourier. Les séries qui représentent la fonction de première espèce n'offrent aucune difficulté, et l'on en déduit sans peine les propriétés essentielles de cette fonction. Pour obtenir le développement en série de la fonction de deuxième espèce, j'emploie une méthode dont Euler a fait un fréquent usage [1]. Cette forme de développement, que je croyais nouvelle, se trouve établie dans un Mémoire de M. Hankel [2], par une méthode toute différente. Dans cette expression, il y a deux parties distinctes, l'une représentée par $J_n \log x$, et l'autre que je désigne par P_n, et qui comprend un polynôme limité et une série infinie dont les termes ont pour coefficients la fonction Ψ de Gauss. Il est bon de remarquer en passant que la fonction O_n de M. Neumann se retrouve dans la première moitié du polynôme qui précède la série infinie dans P_n.

En introduisant la fonction exponentielle dans l'expression de la fonction de Fourier, j'établis de nouveaux développements en série suivant les puissances croissantes ou décroissantes de la variable. De là je passe à la représentation par intégrales définies.

Après avoir rappelé les différentes formes que prennent ces intégrales, je montre comment le nouveau développement de la fonction de deuxième espèce peut se déduire d'une forme particulière que j'étudie plus spécialement et qui fournit une représentation simple de cette fonction.

En examinant en dernier lieu le cas où le paramètre est de la forme $\nu = n + \frac{1}{2}$, n étant un nombre entier, cas qui a été étudié par M. Lommel et qui correspond à l'équation qu'a intégrée M. Serret en appliquant la méthode des différentielles à indices quelconques [3], j'arrive

---

(1) Euler, *Calcul intégral*, t. II, chap. IV, p. 80 et suiv.; chap. VII, p. 155-156; chap. VIII, p. 192, 194.

(2) Clebsch et Neumann, *Mathematische Annalen*, t. I, année 1869, p. 467.

(3) *Journal de Liouville*, t. IX.

à quelques propriétés remarquables de la fonction exponentielle et les résultats que j'obtiens ainsi s'accordent avec ceux qu'a publiés M. Hermite dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (année 1873).

I.

PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DES FONCTIONS DE FOURIER.

6. Si, dans l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J = 0, \tag{1}$$

où J représente la fonction, x la variable et ν un paramètre constant, on pose $J = x^p f$, il vient

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1+2p}{x}\frac{df}{dx} + \left(1 + \frac{p^2-\nu^2}{x^2}\right) f = 0;$$

en déterminant p par la condition $p^2 - \nu^2 = 0$ ou $p = \pm\nu$, et désignant par I et H les fonctions correspondantes à $p = +\nu$ et $p = -\nu$, on a les deux systèmes

$$\left\{\begin{aligned} &J = x^{\nu} I, \quad \frac{d^2 I}{dx^2} + \frac{1+2\nu}{x}\frac{dI}{dx} + I = 0, \\ &J = x^{-\nu} H, \quad \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{1-2\nu}{x}\frac{dH}{dx} + H = 0, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dont chacun peut remplacer l'équation (1).

Au lieu de cette équation (1), il y a quelquefois avantage à considérer la suivante :

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dF}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) F = 0, \tag{1 bis}$$

où F désigne la fonction, et qui ne diffère de (1) que par le signe de l'avant-dernier terme. On passe d'ailleurs de l'une à l'autre de ces fonctions en remplaçant x^2 par $-x^2$ ou x par xi ($i=\sqrt{-1}$). En désignant par V et U les fonctions correspondantes à I et H, on a

$$(2\ bis)\quad \begin{cases} F = x^\nu V, & \dfrac{d^2V}{dx^2} + \dfrac{1+2\nu}{x}\dfrac{dV}{dx} - V = 0, \\ F = x^{-\nu} U, & \dfrac{d^2U}{dx^2} + \dfrac{1-2\nu}{x}\dfrac{dU}{dx} - U = 0. \end{cases}$$

On a fait subir différentes transformations à ces équations. Dans (1 *bis*) on peut faire disparaître la dérivée première en employant la méthode de Sturm, c'est-à-dire en posant $F=\theta W$, θ et W étant deux nouvelles fonctions de x qu'on détermine en remplaçant F par cette valeur et annulant le terme en $\dfrac{dW}{dx}$, ce qui donne

$$(1\ ter)\qquad F = x^{-\frac{1}{2}} W, \quad \frac{d^2W}{dx^2} - \left(1 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) W = 0.$$

Une des formes les plus commodes pour l'étude des propriétés que nous avons à considérer est celle que l'on déduit de (2) et (2 *bis*) en changeant la variable indépendante, méthode employée par M. Kummer dans son Mémoire sur la série hypergéométrique [1].

Si l'on pose $x^2 = 4z$ et si l'on désigne par I_ν et H_ν les nouvelles fonctions de z, les équations (2) deviennent

$$(3)\quad \begin{cases} z\dfrac{d^2I_\nu}{dz^2} + (1+\nu)\dfrac{dI_\nu}{dz} + I_\nu = 0, \\ z\dfrac{d^2H_\nu}{dz^2} + (1-\nu)\dfrac{dH_\nu}{dz} + H_\nu = 0, \end{cases}$$

et les équations (2 *bis*) donnent, si l'on désigne par V_ν et U_ν les nouvelles fonctions,

$$(3\ bis)\quad \begin{cases} z\dfrac{d^2V_\nu}{dz^2} + (1+\nu)\dfrac{dV_\nu}{dz} - V_\nu = 0, \\ z\dfrac{d^2U_\nu}{dz^2} + (1-\nu)\dfrac{dU_\nu}{dz} - U_\nu = 0; \end{cases}$$

c'est la première des équations (3) qui a été considérée par Fourier [2].

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 15.

(2) *Théorie analytique de la chaleur*, chap. VI, p. 236.

On passe des conditions (3) à (3 *bis*), ou réciproquement, en changeant z en $-z$.

7. En employant la méthode des coefficients indéterminés, on trouve facilement deux séries qui représentent les intégrales particulières de chacune des équations (3) ou (3 *bis*). Si l'on pose en effet

$$V_\nu = Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \ldots,$$

et qu'on substitue cette valeur dans la première des équations (3 *bis*), on obtient les deux intégrales

$$(4)\quad \begin{cases} V'_\nu = A_\nu \left[1 + \dfrac{z}{1(1+\nu)} + \dfrac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)} + \dfrac{z^3}{1.2.3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} + \ldots\right], \\ V''_\nu = A'_\nu z^{-\nu}\left[1 + \dfrac{z}{1(1-\nu)} + \dfrac{z^2}{1.2(1-\nu)(2-\nu)} + \dfrac{z^3}{1.2.3(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)} + \ldots\right]. \end{cases}$$

La seconde équation (3 *bis*) donne de la même manière

$$(5)\quad \begin{cases} U'_\nu = \mathcal{A}_\nu z^\nu \left[1 + \dfrac{z}{1(1+\nu)} + \dfrac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)} + \dfrac{z^3}{1.2.3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} + \ldots\right], \\ U''_\nu = \mathcal{A}'_\nu \left[1 + \dfrac{z}{1(1-\nu)} + \dfrac{z^2}{1.2(1-\nu)(2-\nu)} + \dfrac{z^3}{1.2.3(1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)} + \ldots\right], \end{cases}$$

valeurs qu'on déduit d'ailleurs de (4), en changeant ν en $-\nu$.

De l'inspection des valeurs (4) et (5), il résulte qu'on a $U'_\nu = K'z^\nu V'_\nu$, $U''_\nu = K''z^\nu V''_\nu$, K' et K'' étant des constantes. C'est ce qu'on déduit également des équations différentielles, car si dans la deuxième équation (3 *bis*) on remplace U_ν par $Kz^\nu V_\nu$, on retombe sur la première ; d'où l'on voit qu'en multipliant par z^ν une solution quelconque de l'équation différentielle en V_ν, on obtient une solution de l'équation en U_ν et réciproquement. Nous supposerons la constante égale à l'unité et nous poserons

$$(\text{A})\qquad U_\nu = z^\nu V_\nu.$$

Si l'on suppose $\nu = 0$, les deux équations (3 *bis*) se ramènent à une seule, savoir

$$(6)\qquad z\frac{d^2V_0}{dz^2} + \frac{dV_0}{dz} - V_0 = 0;$$

et quand on remplace ν par un nombre entier n, elles deviennent

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} z\frac{d^2V_n}{dz^2}+(1+n)\frac{dV_n}{dz}-V_n=0,\\ z\frac{d^2U_n}{dz^2}+(1-n)\frac{dU_n}{dz}-U_n=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on donne à n successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., on a deux séries d'équations, les unes avec le paramètre positif, les autres avec le paramètre négatif. Deux équations qui ont le même paramètre en valeur absolue peuvent être substituées l'une à l'autre, c'est-à-dire que les intégrales de l'une se déduisent immédiatement de celles de l'autre, comme on vient de le voir. Il est bon de remarquer toutefois que, lorsque le paramètre est entier, les développements V''_ν et U''_ν ne sont plus applicables, parce qu'ils deviennent infinis; ils doivent être remplacés par des développements différents, et c'est, comme nous le verrons dans la suite, ce qui donne lieu à la fonction de deuxième espèce.

8. Reprenons la première intégrale de la première équation (3 *bis*), que nous désignerons par V_ν en supprimant l'accent

$$(8)\qquad V_\nu=A_\nu\left[1+\frac{z}{1(1+\nu)}+\frac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)}+\frac{z^3}{1.2.3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}+\ldots\right].$$

Sa dérivée est

$$\frac{dV_\nu}{dz}=\frac{A_\nu}{1+\nu}\left[1+\frac{z}{1(2+\nu)}+\frac{z^2}{1.2(2+\nu)(3+\nu)}+\ldots\right];$$

d'autre part on a

$$V_{\nu+1}=A_{\nu+1}\left[1+\frac{z}{1(2+\nu)}+\frac{z^2}{1.2(2+\nu)(3+\nu)}+\ldots\right],$$

et l'on en déduit

$$(9)\qquad V_{\nu+1}=\frac{dV_\nu}{dz}$$

en posant $A_{\nu+1}=\dfrac{A_\nu}{1+\nu}$; si l'on établit ainsi entre les constantes arbitraires les relations

$$A_{\nu+1}=\frac{A_\nu}{1+\nu},\quad A_{\nu+2}=\frac{A_{\nu+1}}{2+\nu},\quad A_{\nu+3}=\frac{A_{\nu+2}}{3+\nu},\quad\ldots$$

et en général

$$A_{\nu+n} = \frac{A_{\nu+n-1}}{n+\nu},$$

on en conclut

$$A_{\nu+n} = \frac{A_\nu}{(1+\nu)(2+\nu)\dots(n+\nu)} = \frac{A_\nu \Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu+n)};$$

toutes les constantes dépendent ainsi de la première A_ν (ν étant plus petit que 1). Pour $\nu = 0$, on aura

$$A_n = \frac{A_0}{\Gamma(1+n)};$$

on peut prendre pour A_0 une valeur quelconque, et en faisant $A_0 = 1$ on a

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} V_n &= \frac{1}{\Gamma(1+n)}\left[1 + \frac{z}{1(1+n)} + \frac{z^2}{1.2(1+n)(2+n)} + \dots\right] \\ &= \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(1+p)\Gamma(1+n+p)}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on conserve le paramètre $\nu + n$, on a

$$V_{\nu+n} = \frac{A_\nu \Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu+n)}\left[1 + \frac{z}{1(1+\nu+n)} + \frac{z^2}{1.2(1+\nu+n)(2+\nu+n)} + \dots\right];$$

et si l'on prend $A_\nu = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}$ et qu'on désigne $\nu + n$ par ν, il vient

$$(10 \textit{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} V_\nu &= \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left[1 + \frac{z}{1(1+\nu)} + \frac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)} + \dots\right] \\ &= \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^{p'}}{\Gamma(1+p)\Gamma(1+\nu+p)}. \end{aligned} \right.$$

9. La fonction V_ν est complètement définie par la formule (10 *bis*), et c'est sous cette forme que nous la considérerons pour démontrer ses principales propriétés.

THÉORÈME I. — *De la relation* (9) *on déduit*

$$V_{\nu+2} = \frac{dV_{\nu+1}}{dz} = \frac{d^2 V_\nu}{dz^2},$$

et, en général,

$$\text{(I)}\qquad V_{\nu+p} = \frac{d^p V_\nu}{dz^p},$$

p étant un nombre entier. C'est là une des propriétés fondamentales de la fonction de Fourier.

Remarque. — Si l'on différentie p fois la première équation (3 *bis*), on obtient

$$z\frac{d^{p+2}V_\nu}{dz^{p+2}} + (1+p+\nu)\frac{d^{p+1}V_\nu}{dz^{p+1}} - \frac{d^p V_\nu}{dz^p} = 0,$$

équation identique à

$$z\frac{d^2 V_{\nu+p}}{dz^2} + (1+p+\nu)\frac{dV_{\nu+p}}{dz} - V_{\nu+p} = 0;$$

d'où l'on voit qu'on peut poser

$$V_{\nu+p} = A\frac{d^p V_\nu}{dz^p} \quad (\text{A const.}),$$

et si l'on prend pour V_ν la fonction (10 *bis*), on retrouve la relation (I).

Corollaire I. — De la relation (9) on déduit encore

$$(11)\qquad 2V_\nu V_{\nu+1} = \frac{d(V_\nu)^2}{dz}, \quad n V_\nu^{n-1} V_{\nu+1} = \frac{d(V_\nu^n)}{dz}.$$

Corollaire II. — Toute fonction V_n dont le paramètre est entier se déduit de V_0 à l'aide de la relation

$$(12)\qquad V_n = \frac{d^n V_0}{dz^n}.$$

Corollaire III. — Si le paramètre fractionnaire ν est > 1 et égal à $\nu_1 + p$, p entier et $\nu_1 < 1$, on a

$$(13)\qquad V_\nu = V_{\nu_1+p} = \frac{d^p V_{\nu_1}}{dz^p},$$

ce qui ramène V_ν à V_{ν_1}.

THÉORÈME II. — *Supposons $\nu > p$, nombre entier, et prenons la dérivée de l'expression*

$$z^\nu V_\nu = \frac{z^\nu}{\Gamma(1+\nu)}\left[1 + \frac{z}{1(1+\nu)} + \frac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)} + \ldots\right],$$

nous aurons

$$\frac{d(z^\nu V_\nu)}{dz} = \frac{\nu z^{\nu-1}}{\Gamma(1+\nu)}\left[1 + \frac{z}{1.\nu} + \frac{z^2}{1.2.\nu(1+\nu)} + \ldots\right],$$

ce qui revient à

$$(14) \qquad \frac{d(z^\nu V_\nu)}{dz} = z^{\nu-1} V_{\nu-1}.$$

De là on déduit

$$\frac{d^2(z^\nu V_\nu)}{dz^2} = \frac{d(z^{\nu-1} V_{\nu-1})}{dz} = z^{\nu-2} V_{\nu-2},$$

et en général

$$(\text{II}) \qquad \frac{d^p(z^\nu V_\nu)}{dz^p} = z^{\nu-p} V_{\nu-p}.$$

Si l'on remplace ν *par* $\nu + p$, *on peut écrire*

$$(\text{II } bis) \qquad \frac{d^p(z^{\nu+p} V_{\nu+p})}{dz^p} = z^\nu V_\nu.$$

Remarque. — Cette propriété se déduit encore facilement de la considération de l'équation différentielle en U_ν. Si l'on différentie p fois l'équation

$$z\frac{d^2 U_{\nu+p}}{dz^2} + (1-\nu-p)\frac{dU_{\nu+p}}{dz} - U_{\nu+p} = 0,$$

on obtient

$$z\frac{d^{p+2} U_{\nu+p}}{dz^{p+2}} + (1-\nu)\frac{d^{p+1} U_{\nu+p}}{dz^{p+1}} - \frac{d^p U_{\nu+p}}{dz^p} = 0,$$

équation qui ne diffère de (3 *bis*) que parce que $\frac{d^p U_{\nu+p}}{dz^p}$ y remplace U_ν; on a donc

$$U_\nu = A\frac{d^p U_{\nu+p}}{dz^p} \quad (A \text{ const.}),$$

et, en remplaçant U_ν et $U_{\nu+p}$ par les séries telles que nous les avons déterminées, on voit que $A = 1$, ce qui conduit à la relation (II *bis*).

Corollaire I. — En substituant dans cette relation la valeur de $V_{\nu+p}$, déduite de (I), on obtient

$$(15) \qquad z^\nu V_\nu = \frac{d^p\left(z^{\nu+p}\dfrac{d^p V_\nu}{dz^p}\right)}{dz^p};$$

en portant dans (I) la valeur de V_ν, déduite de (II *bis*), et en mettant $\nu - p$ à la place de ν, on a

$$(16) \qquad V_\nu = \frac{d^p\left[z^{-\nu+p}\dfrac{d^p(z^\nu V_\nu)}{dz^p}\right]}{dz^p}.$$

Les relations (15) et (16) sont des équations différentielles de l'ordre $2p$, qui admettent comme intégrales particulières les fonctions V_ν.

Corollaire II. — De la relation (II) on déduit

$$\frac{d^n(z^n V_n)}{dz^n} = V_0,$$

par suite

$$\frac{d^{2n}(z^n V_n)}{dz^{2n}} = \frac{d^n V_0}{dz^n},$$

et, à cause de (12),

$$(17) \qquad \frac{d^{2n}(z^n V_n)}{dz^{2n}} = V_n,$$

équation différentielle de l'ordre $2n$, qui admet V_n comme intégrale particulière.

Remarque. — Cette relation, qui revient à $\frac{d^{2n} U_n}{dz^{2n}} = V_n$, se déduit encore de la considération des équations différentielles (7), car, si l'on différentie $2n$ fois la seconde, on obtient

$$z\frac{d^{2n+2} U_n}{dz^{2n+2}} + (1+n)\frac{d^{2n+1} U_n}{dz^{2n+1}} - \frac{d^{2n} U_n}{dz^{2n}} = 0,$$

équation identique à la première, ce qui montre qu'on a

$$\frac{d^{2n} U_n}{dz^{2n}} = A V_n \quad (A \text{ const.}),$$

et du développement en série de V_n et U_n il résulte que $A = 1$.

THÉORÈME III. — *Entre trois fonctions consécutives* V_ν, $V_{\nu+1}$ *et* $V_{\nu+2}$, *on a la relation linéaire*

$$(\text{III}) \qquad z V_{\nu+2} + (1+\nu) V_{\nu+1} - V_\nu = 0.$$

On l'obtient en portant dans la première équation (3 *bis*) les valeurs de $\frac{dV_\nu}{dz}$ et $\frac{d^2V_\nu}{dz^2}$ déduites de (I).

On voit, par ce qui précède, que la fonction V_ν (10 *bis*) satisfait à la première équation différentielle (3 *bis*) et aux relations (I), (II), (III), et que deux de ces relations sont des conséquences des deux autres. Nous appellerons *fonction de Fourier* ou *fonction cylindrique* toute fonction satisfaisant à deux des quatre relations précitées.

10. Si à la première des équations différentielles (2 *bis*) on applique la méthode des coefficients indéterminés, on obtient

$$(18)\quad \begin{cases} V'_\nu(x) = A_\nu\left[1 + \dfrac{x^2}{2.(2+2\nu)} + \dfrac{x^4}{2.4(2+2\nu)(4+2\nu)} + \dfrac{x^6}{2.4.6(2+2\nu)(4+2\nu)(6+2\nu)} + \ldots\right. \\ V''_\nu(x) = \mathfrak{A}_\nu x^{-2\nu}\left[1 + \dfrac{x^2}{2.(2-2\nu)} + \dfrac{x^4}{2.4(2-2\nu)(4-2\nu)} + \dfrac{x^6}{2.4.6(2-2\nu)(4-2\nu)(6-2\nu)} + \ldots\right. \end{cases}$$

intégrales analogues aux séries (4). En supprimant l'accent de V'_ν et posant $A_\nu = \frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$, nous avons

$$(19)\quad V_\nu(x) = \frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}\left[1 + \frac{x^2}{2(2+2\nu)} + \frac{x^4}{2.4(2+2\nu)(4+2\nu)} + \ldots\right];$$

telle est la forme sous laquelle se présente, dans ce cas, la fonction de Fourier, et l'on en déduit sans peine les relations

$$(20)\qquad V_{\nu+1} = \frac{1}{x}\frac{dV_\nu}{dx},$$

$$(21)\qquad x^{2\nu}V_\nu = \frac{1}{x}\frac{d(x^{2\nu+2}V_{\nu+2})}{dx},$$

formules correspondantes à celles qu'on déduit de (I) et (II *bis*) en faisant $p = 1$ et substituant x à la variable z. En remplaçant dans la première équation différentielle (2 *bis*) $\frac{dV_\nu}{dx}$ et $\frac{d^2V_\nu}{dx^2}$ par leurs valeurs en fonction de $V_{\nu+1}(x)$ et $V_{\nu+2}(x)$, on obtient la formule correspondante à (III), savoir :

$$(22)\qquad x^2V_{\nu+2}(x) + 2(\nu+1)V_{\nu+1}(x) - V_\nu(x) = 0.$$

Remarquons que, si les équations différentielles (3 *bis*) se déduisent de (2 *bis*), et les séries (18) des séries (4), par le changement de la variable x en z, la série $V_\nu(x)$ (19) n'est pas exactement ce que devient $V_\nu(z)$ quand on remplace z par $\frac{x^2}{4}$; elle en diffère par le facteur $\frac{1}{2^\nu}$. Cela tient à la condition qu'impose aux constantes la relation (20).

11. La fonction $F(x) = x^\nu V_\nu(x)$, qui est une intégrale de (1 *bis*), satisfait à des relations analogues, qu'on obtient en remplaçant $V_\nu(x)$ par $x^{-\nu}F_\nu(x)$ dans (20), (21) et (22), ce qui donne

$$\frac{dF_\nu}{dx} = \frac{\nu}{x} F_\nu + F_{\nu+1}, \tag{23}$$

$$\frac{dF_\nu}{dx} = -\frac{\nu}{x} F_\nu + F_{\nu-1}, \tag{24}$$

$$F_{\nu+2} + \frac{2(\nu+1)}{x} F_{\nu+1} - F_\nu = 0. \tag{25}$$

Si l'on combine par addition et soustraction les relations (23) et (24), on obtient

$$2\frac{dF_\nu}{dx} = F_{\nu-1} + F_{\nu+1}, \tag{26}$$

$$\frac{2\nu}{x} F_\nu = F_{\nu-1} - F_{\nu+1}; \tag{27}$$

cette dernière relation ne diffère de (25) que parce que ν y est remplacé par $\nu - 1$, et si l'on multiplie membre à membre (26) et (27), il vient

$$\frac{2\nu}{x}\frac{d(F_\nu)^2}{dx} = F_{\nu-1}^2 - F_{\nu+1}^2.$$

Les relations correspondantes pour $W_\nu = x^{\nu+\frac{1}{2}}V_\nu$, qui est l'intégrale de (1 *ter*), sont

$$\frac{dW_\nu}{dx} = \frac{\nu+\frac{1}{2}}{x} W_\nu + W_{\nu+1}, \tag{23 bis}$$

$$\frac{dW_\nu}{dx} = -\frac{\nu-\frac{1}{2}}{x} W_\nu + W_{\nu-1}, \tag{24 bis}$$

$$2\frac{dW_\nu}{dx} - \frac{W_\nu}{x} = W_{\nu-1} + W_{\nu+1}. \tag{26 bis}$$

Quant à la relation qu'on peut déduire de (25) ou de (27), elle ne diffère de ces dernières que parce que F y est remplacée par W.

Remarque I. — Pour la fonction $I_\nu(x)$, qui satisfait à la première des équations (2), on a

$$(29)\quad I_\nu(x)=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\left[1-\frac{x^2}{2(2\nu+2)}+\frac{x^4}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)}-\frac{x^6}{2.4.6(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)}+\ldots\right]$$

et par suite il vient

$$(30)\quad J_\nu(x)=\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\left[1-\frac{x^2}{2(2\nu+2)}+\frac{x^4}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)}-\frac{x^6}{2.4.6(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)}+\ldots\right]$$

C'est cette dernière série qui représente plus spécialement la fonction de Bessel.

Les formules (20), (21) et (22) deviennent alors

$$(30)\qquad I_{\nu+1}=-\frac{1}{x}\frac{dI_\nu}{dx},$$

$$(31)\qquad x^{2\nu}I_\nu=\frac{1}{x}\frac{d(x^{2\nu+2}I_{\nu+1})}{dx},$$

$$(32)\qquad x^2I_{\nu+2}-2(\nu+1)I_{\nu+1}+I_\nu=0;$$

et l'on en déduit pour la fonction J_ν

$$(33)\qquad \frac{dJ_\nu}{dx}=\frac{\nu}{x}J_\nu-J_{\nu+1},$$

$$(34)\qquad \frac{dJ_\nu}{dx}=-\frac{\nu}{x}J_\nu+J_{\nu-1},$$

$$(35)\qquad 2\frac{dJ_\nu}{dx}=J_{\nu-1}-J_{\nu+1},$$

$$(36)\qquad \frac{2\nu}{x}J_\nu=J_{\nu-1}+J_{\nu+1}.$$

Si l'on pose $J_\nu=x^{-\frac{1}{2}}W'_\nu$, W'_ν étant la fonction qui correspond dans ce cas à l'équation de Sturm, on a

$$(37)\qquad \frac{dW'_\nu}{dx}=\frac{\nu+\frac{1}{2}}{x}W'_\nu-W'_{\nu+1},$$

$$(38)\qquad \frac{dW'_\nu}{dx}=-\frac{\nu-\frac{1}{2}}{x}W'_\nu+W'_{\nu-1}.$$

Remarque II. — De la relation (III) on déduit facilement deux fractions continues, qui représentent les quotients $\frac{V_{\nu+1}}{V_\nu}$ et $\frac{V_{\nu+2}}{V_\nu}$, et qui permettent de calculer $V_{\nu+1}$ et $V_{\nu+2}$ quand on connaît V_ν.

12. *De la fonction* O_n *de M. Neumann.* — La fonction que M. Neumann désigne par O_n, et qu'il appelle *fonction de deuxième espèce*, satisfait à l'une ou l'autre des deux équations

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 O_n(y)}{dy^2} + \frac{3}{y}\frac{dO_n(y)}{dy} + \left(1 - \frac{n^2-1}{y^2}\right) O_n(y) = \frac{1}{y}, \\ &\frac{d^2 O_n(y)}{dy^2} + \frac{3}{y}\frac{dO_n(y)}{dy} + \left(1 - \frac{n^2-1}{y^2}\right) O_n(y) = \frac{n}{y^2}, \end{aligned}\right.$$

suivant que n est pair ou impair.

Si l'on pose $O_n(y) = y^{-n-1}\Omega_n(y)$, ces deux équations deviennent

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\Omega_n(y)}{dy^2} + \frac{1-2n}{y}\frac{d\Omega_n(y)}{dy} + \Omega_n = y^n, \\ &\frac{d^2\Omega_n(y)}{dy^2} + \frac{1-2n}{y}\frac{d\Omega_n(y)}{dy} + \Omega_n = ny^{n-1}, \end{aligned}\right.$$

et, en faisant respectivement

$$\begin{aligned} \Omega_n &= A + By^2 + Cy^4 + \ldots + Ky^{n-4} + Ly^{n-2} + My^n, \\ \Omega_n &= A_1 + B_1y^2 + C_1y^4 + \ldots + K_1y^{n-3} + L_1y^{n-1}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \Omega_n &= 2^{n-1}\Gamma(n+1)\left[1 + \frac{y^2}{2(2n-2)} + \frac{y^4}{2.4(2n-2)(2n-4)} + \ldots + \frac{y^n}{2.4\ldots n(2n-2)(2n-4)\ldots n}\right] \quad n \\ \Omega_n &= 2^{n-1}\Gamma(n+1)\left[1 + \frac{y^2}{2(2n-2)} + \frac{y^4}{2.4(2n-2)(2n-4)} + \ldots + \frac{y^{n-1}}{2.4\ldots(n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}\right] \quad (n \end{aligned}\right.$$

En prenant pour variable $z = \frac{y^2}{4}$ on transforme les équations (40) en

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &z\frac{d^2\Omega_n(z)}{dz^2} + (1-n)\frac{d\Omega_n}{dz} + \Omega_n(z) = 2^n z^{\frac{n}{2}} \quad (n \text{ pair}), \\ &z\frac{d^2\Omega_n(z)}{dz^2} + (1-n)\frac{d\Omega_n}{dz} + \Omega_n(z) = n.2^{n-1} z^{\frac{n-1}{2}} \quad (n \text{ impair}); \end{aligned}\right.$$

et, si dans le premier cas on a $n = 2p$, et dans le second $n = 2p+1$, ces équations se ramèneront à la forme unique

$$(43)\qquad z\frac{d^2\Omega_n(z)}{dz^2} + (1-n)\frac{d\Omega_n}{dz} + \Omega_n(z) = \mathrm{K}z^k,$$

où la constante K désignera soit 2^n, soit $n.2^{n-1}$; cette équation admet pour intégrale

$$(44)\quad \Omega_n(z) = 2^{n-1}\,1.2.3\ldots n\left|1 + \frac{z}{1(n-1)} + \frac{z^2}{1.2(n-1)(n-2)} + \ldots + \frac{z^k}{1.2\ldots k(n-1)(n-2)\ldots(n-}\right.$$

avec la condition $k = \frac{n}{2}$ ou $k = \frac{n-1}{2}$, suivant que n est pair ou impair.

13. *Propriétés de la fonction* $\Omega_n(z)$. — La fonction $\Omega_n(z)$ jouit de propriétés analogues à celles que nous avons établies pour la fonction de première espèce. Faisons successivement $n = 2p-1$, $n = 2p$, $n = 2p+1$; les équations (42) donneront

$$(45)\quad \left\{\begin{array}{ll}
(a) & z\dfrac{d^2\Omega_{2p-1}(z)}{dz^2} + (2-2p)\dfrac{d\Omega_{2p-1}(z)}{dz} + \Omega_{2p-1}(z) = (2p-1)2^{2p-2}z^{p-1},\\[2ex]
(b) & z\dfrac{d^2\Omega_{2p}(z)}{dz^2} + (1-2p)\dfrac{d\Omega_{2p}(z)}{dz} + \Omega_{2p}(z) = 2^{2p}z^p,\\[2ex]
(c) & z\dfrac{d^2\Omega_{2p+1}(z)}{dz^2} - 2p\dfrac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz} + \Omega_{2p+1}(z) = (2p+1)2^{2p}z^p,
\end{array}\right.$$

et de la formule (44) on déduira

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{ll}
(a) & \Omega_{2p-1}(z) = 2^{2p-2}\,1.2.3\ldots(2p-1)\left|1 + \dfrac{z}{1(2p-2)} + \dfrac{z^2}{1.2(2p-2)(2p-3)} + \ldots\right.\\[2ex]
& \qquad\qquad \left. + \dfrac{z^{p-1}}{1.2.3\ldots(p-1)(2p-2)\ldots p}\right|,\\[2ex]
(b) & \Omega_{2p}(z) = 2^{2p-1}\,1.2.3\ldots(2p)\left|1 + \dfrac{z}{1(2p-1)} + \dfrac{z^2}{1.2(2p-1)(2p-2)} + \ldots\right.\\[2ex]
& \qquad\qquad \left. + \dfrac{z^p}{1.2\ldots p(2p-1)\ldots p}\right|,\\[2ex]
(c) & \Omega_{2p+1}(z) = 2^{2p}\,1.2.3\ldots(2p+1)\left|1 + \dfrac{z}{1.2p} + \dfrac{z^2}{1.2.2p(2p-1)} + \ldots\right.\\[2ex]
& \qquad\qquad \left. + \dfrac{z^p}{1.2\ldots p.2p(2p-1)\ldots(p+1)}\right|;
\end{array}\right.$$

En prenant les dérivées des deux dernières expressions on obtient

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(a) \quad \frac{d\Omega_{2p}(z)}{dz} = 2^{2p-1}\frac{1.2.3\ldots 2p}{2p-1}\left[1 + \frac{z}{1(2p-2)} + \frac{z^2}{1.2(2p-2)(2p-3)} + \ldots \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)(2p-2)\ldots p}\right],\\
&(b) \quad \frac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz} = 2^{2p}\frac{1.2.3\ldots(2p+1)}{2p}\left[1 + \frac{z}{1(2p-1)} + \frac{z^2}{1.2(2p-1)(2p-2)} + \ldots \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{z^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)(2p-1)\ldots(p+1)}\right],
\end{aligned}
\right.
$$

et de la comparaison des formules ($46\,a$) et ($47\,a$) d'une part, et de celle des relations ($46\,b$) et ($47\,b$) de l'autre, on conclut

$$
(48)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&(a) \qquad \frac{d\Omega_{2p}(z)}{dz} = \frac{2.2p}{2p-1}\,\Omega_{2p-1}(z),\\
&(b) \qquad \frac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz} = \frac{2p+1}{p}\left[\Omega_{2p}(z) - 2^{2p}z^p\right],
\end{aligned}
\right.
$$

formules qu'on peut mettre sous la forme unique

$$
(48\ bis) \qquad \frac{d\Omega_n(z)}{dz} = \frac{2n}{n-1}\left[\Omega_{n-1}(z) - 2^{n-1}z^{\frac{n-1}{2}}\sin^2 n\frac{\pi}{2}\right].
$$

Remarque. — On peut déduire ces relations de la considération des équations différentielles elles-mêmes. En effet, si l'on différentie l'équation ($45\,b$), on obtient

$$
z\frac{d^3\Omega_{2p}(z)}{dz^3} + (2-2p)\frac{d^2\Omega_{2p}(z)}{dz^2} + \frac{d\Omega_{2p}(z)}{dz} = 2^{2p}.p\,z^{p-1},
$$

et si l'on remplace ici $\dfrac{d\Omega_{2p}(z)}{dz}$ et ses deux dérivées premières par leurs valeurs déduites de ($48\,a$) on retrouve l'équation ($45\,a$). Ce qui prouve que $\dfrac{d\Omega_{2p}(z)}{dz} = \text{A}\,\dfrac{2.2p}{2p-1}\,\Omega_{2p-1}$ (A const.).

De même, si dans l'équation

$$
z\frac{d^3\Omega_{2p+1}(z)}{dz^3} + (1-2p)\frac{d^2\Omega_{2p+1}(z)}{dz^2} + \frac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz} = (2p+1)p.2^{2p}z^{p-1},
$$

qu'on obtient en différentiant ($45\,c$), on substitue les valeurs de

$\dfrac{d\,\Omega_{2p+1}(z)}{dz}$ et de ses deux premières dérivées déduites de (48 b), on retombe sur l'équation (45 b). D'où l'on voit que

$$\frac{d\,\Omega_{2p+1}(z)}{dz} = \mathrm{A}' \times \frac{2p+1}{p}\left[\Omega_{2p}(z) - 2^{2p} z^p\right] \quad (\mathrm{A}' \text{ const.}).$$

14. Des relations (48 a) et (48 b), combinées avec (45 b) et (45 c), on déduit facilement les relations qui doivent exister entre trois fonctions consécutives. En effet, la relation (48 a) donne

$$\frac{d^2\Omega_{2p}(z)}{dz^2} = \frac{2.2p}{2p-1}\,\frac{d\,\Omega_{2p-1}(z)}{dz};$$

et si dans (48 b) on remplace p par $p-1$, il vient

$$\frac{d\,\Omega_{2p-1}(z)}{dz} = \frac{2p-1}{p-1}\left[\Omega_{2p-2}(z) - 2^{2p-2} z^{p-1}\right];$$

par suite on a

$$\frac{d^2\Omega_{2p}(z)}{dz^2} = \frac{4p}{p-1}\left[\Omega_{2p-2}(z) - 2^{2p-2} z^{p-1}\right],$$

et en portant dans (45 b) les valeurs de $\dfrac{d\,\Omega_{2p}(z)}{dz}$ et $\dfrac{d^2\Omega_{2p}(z)}{dz^2}$ on obtient

$$(49)\qquad 4pz\,\Omega_{2p-2}(z) - 4p(p-1)\,\Omega_{2p-1}(z) + (p-1)\,\Omega_{2p}(z) = 2^{2p}(2p-1)\,z^p.$$

On a ainsi une relation entre trois fonctions Ω consécutives dont l'intermédiaire Ω_{2p-1} est d'indice impair. Si l'on pose $2p-1=n$, cette relation revient à

$$(49\ bis)\qquad 4z(n+1)\,\Omega_{n-1}(z) + (n-1)\,\Omega_{n+1}(z) - 2(n^2-1)\,\Omega_n(z) = n\,2^{n+2} z^{\frac{n+1}{2}}.$$

La relation (48 b) donne d'un autre côté

$$\frac{d^2\Omega_{2p+1}(z)}{dz^2} = \frac{2p+1}{p}\left[\frac{d\,\Omega_{2p}(z)}{dz} - 2^{2p}.p\,z^{p-1}\right],$$

et, en remplaçant ici $\dfrac{d\,\Omega_{2p}(z)}{dz}$ par sa valeur déduite de (48 a), on a

$$\frac{d^2\Omega_{2p+1}(z)}{dz^2} = \frac{4(2p+1)}{2p-1}\,\Omega_{2p-1}(z) - (2p+1)\,2^{2p} z^{p-1}.$$

En portant les valeurs de $\frac{d\Omega_{2p+1}(z)}{dz}$ et $\frac{d^2\Omega_{2p+1}}{dz^2}$ dans (45 c), on obtient

$$(50)\quad 4z(2p+1)\Omega_{2p-1}(z)-2(2p+1)(2p-1)\Omega_{2p}(z)+(2p-1)\Omega_{2p+1}(z)=0;$$

dans cette relation la fonction intermédiaire est d'indice pair $2p$, et si l'on fait $2p=n$, elle revient à

$$(50\ bis)\qquad 4z(n+1)\Omega_{n-1}(z)+(n-1)\Omega_{n+1}(z)-2(n^2-1)\Omega_n(z)=0.$$

Les deux relations (49 *bis*) et (50 *bis*) peuvent être comprises dans une seule, savoir

$$(51)\qquad 4z(n+1)\Omega_{n-1}(z)+(n-1)\Omega_{n+1}(z)-2(n^2-1)\Omega_n(z)=n2^{n+2}z^{\frac{n+1}{2}}\sin^2 n\frac{\pi}{2}.$$

Si, au lieu de $O_n(y)=y^{-n-1}\Omega_n(y)$, on pose $O_n(y)=y^{n-1}\Omega'_n(y)$, puis $\frac{y^2}{4}=z$, on trouve pour $\Omega'_n(z)$ des relations analogues à (48 *bis*) et (51).

Dans sa *Théorie des Fonctions besséliennes*, M. Neumann avoue (page 22) qu'il n'a pas réussi à établir pour la fonction O les dernières relations que nous venons de démontrer pour la fonction Ω. Mais on retrouve la formule analogue à (51) dans un Mémoire que M. Schläfli a publié dans le 3e Volume des *Mathematische Annalen* de Clebsch et Neumann (page 137).

II.

DE LA FONCTION DE DEUXIÈME ESPÈCE.

15. Lorsque le paramètre est un nombre entier positif n, la série qui entre dans V''_n et U''_n devient infinie à partir d'un certain terme, et ne peut servir à représenter la seconde intégrale particulière. Pour obtenir cette intégrale nous employons une méthode indiquée par Euler [1].

[1] *Calcul intégral*, 2e édit., t. II, chap. IV, p. 80 et suiv.

Nous posons

$$(1)\quad \begin{cases} Q_n = A\left[1 + \dfrac{z}{1(1+n)} + \dfrac{z^2}{1.2(1+n)(2+n)} + \ldots\right], \\ Q'_n = Az^n\left[1 + \dfrac{z}{1(1+n)} + \dfrac{z^2}{1.2(1+n)(2+n)} + \ldots\right], \end{cases}$$

et, dans les équations (7) du § I, nous faisons

$$(2)\quad \begin{cases} V_n = P_n + Q_n \log z, \\ U_n = P'_n + Q'_n \log z; \end{cases}$$

Q_n et Q'_n sont des intégrales particulières de ces équations, et, pour déterminer les nouvelles fonctions P_n et P'_n, nous avons les relations

$$(3)\quad \begin{cases} z\dfrac{d^2P_n}{dz^2} + (1+n)\dfrac{dP_n}{dz} - P_n + 2\dfrac{dQ_n}{dz} + n\dfrac{Q_n}{z} = 0, \\ z\dfrac{d^2P'_n}{dz^2} + (1-n)\dfrac{dP'_n}{dz} - P'_n + 2\dfrac{dQ'_n}{dz} - n\dfrac{Q'_n}{z} = 0. \end{cases}$$

Nous commençons par évaluer P'_n, et pour cela nous posons

$$\begin{aligned} P'_n = {} & \mathcal{A} + \mathcal{B}z + \mathcal{C}z^2 + \mathcal{D}z^3 + \ldots \\ & + \mathcal{H}z^{n-3} + \mathcal{L}z^{n-2} + \mathcal{M}z^{n-1} + \mathcal{N}z^n + \mathcal{P}z^{n+1} + \mathcal{Q}z^{n+2} + \ldots. \end{aligned}$$

En substituant cette valeur et celle de Q'_n dans la deuxième équation (3), et égalant à o les coefficients des diverses puissances de z, on détermine $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ..., $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, ... en fonction de la constante A. Un seul coefficient $\mathcal{N}$ reste indéterminé et peut être considéré comme une constante arbitraire que nous désignerons par K.

On trouve ainsi

$$(4)\quad \begin{cases} P'_n = 1.2\ldots(n-1)(1-n)(2-n)\ldots(-2)(-1)\,nA \\ \qquad\qquad \times\left[1 + \dfrac{z}{1(1-n)} + \ldots + \dfrac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)(1-n)\ldots(-2)(-1)}\right] \\ \qquad + Kz^n\left[1 + \dfrac{z}{1(n+1)} + \dfrac{z^2}{1.2(n+1)(n+2)} + \ldots\right] \\ \qquad - Az^n\left[\dfrac{z\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)}{1(n+1)} + \dfrac{z^2\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\right)}{1.2(n+1)(n+2)} + \ldots\right]; \end{cases}$$

et en portant cette valeur dans la deuxième équation (2), on a

$$
(5)\quad
\left\{
\begin{aligned}
U_n = {} & 1.2\ldots(n-1)(1-n)\ldots(-2)(-1)\,n\,A \\
& \times \left| 1 + \frac{z}{1(1-n)} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)(1-n)\ldots(-2)(-1)} \right| \\
& + (K + A \log z)\, z^n \left[1 + \frac{z}{1(n+1)} + \frac{z^2}{1.2(n+1)(n+2)} + \ldots \right] \\
& - A z^n \left[\frac{z\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{1(n+1)} + \frac{z^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)}{1.2(n+1)(n+2)} + \ldots \right].
\end{aligned}
\right.
$$

Comme $V_n = z^{-n} U_n$, on déduit de là

$$
(6)\quad
\left\{
\begin{aligned}
V_n = {} & 1.2\ldots(n-1)(1-n)\ldots(-2)(-1)\,n\,A \\
& \times \left[z^{-n} + \frac{z^{-n+1}}{1(1-n)} + \ldots + \frac{z^{-1}}{1.2\ldots(n-1)(1-n)\ldots(-1)} \right] \\
& + (K + A \log z) \left[1 + \frac{z}{1(1+n)} + \frac{z^2}{1.2(1+n)(2+n)} + \ldots \right] \\
& - A \left[\frac{z\left(1 + \frac{1}{1+n}\right)}{1(1+n)} + \frac{z^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)}{1.2(n+1)(n+2)} + \ldots \right];
\end{aligned}
\right.
$$

en conservant les constantes A et K on a l'intégrale générale, et en faisant $K = 0$ on a la fonction cylindrique de seconde espèce.

16. *De la fonction* P_n. — Observons que pour la constante A on a $A = \frac{1}{1.2.3\ldots n}$, et la fonction qui avec $Q_n(1)$ entre dans V_n est

$$
(7)\quad
\left\{
\begin{aligned}
P_n = {} & (1-n)(2-n)\ldots(-2)(-1) \\
& \times \left[z^{-n} + \frac{z^{-n+1}}{1(1-n)} + \ldots + \frac{z^{-1}}{1.2\ldots(n-1)(1-n)(2-n)\ldots(-1)} \right] \\
& - \frac{1}{1.2.3\ldots n} \left[\frac{z\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{1(n+1)} + \frac{z^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)}{1.2(n+1)(n+2)} + \ldots \right.
\end{aligned}
\right.
$$

En s'appuyant sur la relation $V_{n+1} = \frac{dV_n}{dz}$, qui doit avoir lieu pour toute fonction de Fourier, on peut établir aisément une formule de récurrence, qui permet de passer de P_n à P_{n+1}. Prenons l'intégrale sous la forme générale

$$V_n = P_n + \alpha_n Q_n + Q_n \log z, \quad (\alpha_n \text{ const.}).$$

Pour un indice supérieur d'une unité nous aurons

$$V_{n+1} = P_{n+1} + \alpha_{n+1} Q_{n+1} + Q_{n+1} \log z;$$

comme on doit avoir $V_{n+1} = \dfrac{dV_n}{dz}$, et que $Q_{n+1} = \dfrac{dQ_n}{dz}$, nous en concluons

$$P_{n+1} + \alpha_{n+1} Q_{n+1} = \frac{dP_n}{dz} + \alpha_n \frac{dQ_n}{dz} + \frac{Q_n}{z};$$

par suite

$$P_{n+1} = \frac{dP_n}{dz} + (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \frac{dQ_n}{dz} + \frac{Q_n}{z}.$$

Reste à déterminer la différence $\alpha_n - \alpha_{n+1}$. De (7) on déduit

$$\begin{aligned}\frac{dP_n}{dz} = {} & [1-(n+1)][2-(n+1)]\ldots(-2)(-1) \\ & \times \left\{ z^{-n-1} + \frac{z^{-n}}{1[1-(n+1)]} + \frac{z^{-n+1}}{1.2[1-(n+1)][2-(n+1)]} + \ldots \right. \\ & \left. + \frac{z^{-2}}{1.2\ldots[(n+1)-2][2-(n+1)]\ldots(-2)(-1)} \right\} \\ & \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)}{1(n+2)} \right. \\ & \left. + \frac{z^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)}{1.2(n+2)(n+3)} + \ldots \right];\end{aligned}$$

d'autre part on a

$$\frac{1}{n+1}\frac{dQ_n}{dz} = \frac{1}{1.2\ldots n(n+1)} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{z}{1(n+1)(n+2)} + \frac{z^2}{1.2(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots \right],$$

$$\frac{Q_n}{z} = \frac{1}{1.2\ldots n} \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{1(n+1)} + \frac{z}{1.2(n+1)(n+2)} + \frac{z^2}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots \right],$$

et, si l'on ajoute ces trois expressions, il vient

$$\frac{dP_n}{dz} + \frac{1}{n+1}\frac{dQ_n}{dz} + \frac{Q_n}{z}$$
$$= [1-(n+1)][2-(n+1)]\ldots(-2)(-1)$$
$$\times\left\{z^{-n-1} + \frac{z^{-n}}{1.[1-(n+1)]} + \ldots + \frac{z^{-1}}{1.2\ldots[(n+1)-1][1-(n+1)]\ldots(-1)}\right\}$$
$$-\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}\left[\frac{z\left(1+\frac{1}{n+2}\right)}{1(n+2)} + \frac{z^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)}{1.2(n+2)(n+3)} + \ldots\right].$$

Cette dernière expression n'est autre que la valeur de P_{n+1}; on a donc

$$(8) \qquad P_{n+1} = \frac{dP_n}{dz} + \frac{1}{n+1}\frac{dQ_n}{dz} + \frac{Q_n}{z}.$$

Remarque. — On peut d'ailleurs démontrer, en s'appuyant sur l'équation différentielle, que la valeur de P_{n+1} se présente sous la forme générale

$$(a) \qquad P_{n+1} = \frac{dP_n}{dz} + \alpha\frac{dQ_n}{dz} + \frac{Q_n}{z} \quad (\alpha \text{ const.});$$

car, si l'on différentie par rapport à z la première équation (3), et si, d'un autre côté, on y remplace n par $n+1$, il vient

$$(b) \qquad z\frac{d^3P_n}{dz^3} + (2+n)\frac{d^2P_n}{dz^2} - \frac{dP_n}{dz} + 2\frac{d^2Q_n}{dz^2} + \frac{n}{z}\frac{dQ_n}{dz} - n\frac{Q_n}{z^2} = 0,$$

$$(c) \qquad z\frac{d^2P_{n+1}}{dz^2} + (2+n)\frac{dP_{n+1}}{dz} - P_{n+1} + 2\frac{dQ_{n+1}}{dz} + \frac{n+1}{z}Q_{n+1} = 0;$$

en substituant la valeur (a) dans (c) et observant que

$$Q_{n+1} = \frac{dQ_n}{dz} \quad \text{et} \quad \frac{dQ_{n+1}}{dz} = \frac{d^2Q_n}{dz^2},$$

on retrouve l'équation (b); ce qui montre que la valeur (a) satisfait à l'équation (c), quelle que soit la constante α. Par le développement en série, il est établi que cette constante est égale à $\frac{1}{n+1}$. Je ne sais si cette remarque a été faite jusqu'à présent.

17. En revenant à la constante α_n, on voit qu'on a

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{1}{n+1},$$

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\alpha_{n+h} = \alpha_{n+h-1} - \frac{1}{n+h};$$

d'où il suit

$$\alpha_{n+h} = \alpha_n - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+h}\right).$$

Si l'on fait $n = 0$, et si l'on remplace ensuite h par n, on obtient

$$(9) \qquad \alpha_n = \alpha_0 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right);$$

α_0 reste arbitraire et l'on a pour V_n

$$(10) \qquad V_n = P_n + \left[\alpha_0 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right] Q_n + Q_n \log z.$$

Remarquons que les valeurs de P_n et Q_n se déduisent de celles qui correspondent à l'indice 0, c'est-à-dire de P_0 et Q_0. On a en effet

$$Q_1 = \frac{dQ_0}{dz},$$

$$Q_2 = \frac{d^2 Q_0}{dz^2},$$

$$Q_3 = \frac{d^3 Q_0}{dz^3},$$

$$\dots\dots\dots\dots,$$

$$P_1 = \frac{dP_0}{dz} + \frac{dQ_0}{dz} + \frac{Q_0}{z},$$

$$P_2 = \frac{d^2 P_0}{dz^2} + \frac{d(Q_0 z^{-1})}{dz} + \frac{dQ_0}{dz} z^{-1} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{d^2 Q_0}{dz^2},$$

$$P_3 = \frac{d^3 P_0}{dz^3} + \frac{d^2(Q_0 z^{-1})}{dz^2} + \frac{d\left(\frac{dQ_0}{dz} z^{-1}\right)}{dz} + \frac{d^2 Q_0}{dz^2} z^{-1} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{d^3 Q_0}{dz^3},$$

et en général

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} Q_n &= \frac{d^n Q_0}{dz^n},\\ P_n &= \frac{d^n P_0}{dz^n} + \frac{d^{n-1}(Q_0 z^{-1})}{dz^{n-1}} + \frac{d^{n-2}\left(\frac{dQ_0}{dz} z^{-1}\right)}{dz^{n-2}} + \frac{d^{n-3}\left(\frac{d^2 Q_0}{dz^2} z^{-1}\right)}{dz^{n-3}}\\ &\quad + \frac{d}{dz}\left(\frac{d^{n-2}Q_0}{dz^{n-2}} z^{-1}\right) + \frac{d^{n-1}Q_0}{dz^{n-1}} z^{-1} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\frac{d^n Q_0}{dz^n}. \end{aligned}\right.$$

Si dans P_n on développe les termes qui contiennent z^{-1} en facteur, on obtient

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} P_n = \frac{d^n P_0}{dz^n} &+ \frac{n}{z}\frac{d^{n-1}Q_0}{dz^{n-1}} - \frac{n(n-1)}{2z^2}\frac{d^{n-2}Q_0}{dz^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3z^3}\frac{d^{n-3}Q_0}{dz^{n-3}} - \ldots\\ &\pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{nz^n} Q_0 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\frac{d^n Q_0}{dz^n}; \end{aligned}\right.$$

et, en remplaçant $\frac{dQ_0}{dz}, \frac{d^2 Q_0}{dz^2}, \ldots, \frac{d^n Q_0}{dz^n}$ par $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, on a

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} P_n = \frac{d^n P_0}{dz^n} &+ \frac{n}{z} Q_{n-1} - \frac{n(n-1)}{2z^2} Q_{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3z^3} Q_{n-3} - \ldots\\ &\pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{nz^n} Q_0 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) Q_n, \end{aligned}\right.$$

valeur qui, substituée à P_n dans (10), donne

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} V_n = \frac{d^n P_0}{dz^n} &+ \alpha_0 Q_n + \frac{nQ_{n-1}}{z} - \frac{n(n-1)}{2z^2} Q_{n-2} - \ldots\\ &\pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{nz^n} Q_0 + Q_n \log z. \end{aligned}\right.$$

18. On arrive à la même valeur, abstraction faite du terme $\alpha_0 Q_n$, si l'on observe qu'on a

$$V_0 = P_0 + Q_0 \log z \quad [1],$$

$$V_n = \frac{d^n V_0}{dz^n} = \frac{d^n P_0}{dz^n} + \frac{d^n(Q_0 \log z)}{dz^n}.$$

---

[1] En prenant $V_0 = P_0 + Q_0 \log z$, on suppose la constante α_0 nulle; et comme cette valeur doit être portée dans V_n, (10) et (14), il s'ensuit que cette fonction est complètement déterminée.

Les valeurs de P_0 et Q_0, d'où se déduisent toutes les fonctions P_n et Q_n, sont celles qui satisfont à l'équation (6), § I; on les déduit des formules (1) et (7) du présent paragraphe, en faisant $A = 1$ et $n = 0$, et l'on a

$$(15)\quad \begin{cases} Q_0 = 1 + \dfrac{z}{1.1} + \dfrac{z^2}{1.2.1.2} + \dfrac{z^3}{1.2.3.1.2.3} + \ldots, \\ P_0 = -2\left[\dfrac{z}{1.1} + \dfrac{z^2\left(1+\frac{1}{2}\right)}{1.2.1.2} + \dfrac{z^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{1.2.3.1.2.3} + \ldots\right]. \end{cases}$$

Dans le cas où $n = 1$, les équations à intégrer sont

$$(16)\quad \begin{cases} z\dfrac{d^2V_1}{dz^2} + 2\dfrac{dV_1}{dz} - V_1 = 0, \\ z\dfrac{d^2U_1}{dz^2} - U_1 = 0, \end{cases}$$

et l'on a alors

$$(17)\quad \begin{cases} Q_1 = 1 + \dfrac{z}{1.2} + \dfrac{z^2}{1.2.2.3} + \dfrac{z^3}{1.2.3.2.3.4} + \ldots, \\ P_1 = \dfrac{1}{z} - \left[\dfrac{z\left(1+\frac{1}{2}\right)}{1.2} + \dfrac{z^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{1.2.2.3} + \dfrac{z^3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}{1.2.3.2.3.4} + \ldots\right]. \end{cases}$$

Si dans P_1 on effectue les calculs indiqués aux numérateurs, on trouve

$$P_1 = \frac{1}{z} - \left[\frac{3z}{1.2.2} + \frac{14z^2}{1.2.2.3.2.3} + \frac{70z^3}{1.2.3.2.3.4.2.3.4} + \frac{404z^4}{1.2.3.4.2.3.4.5.2.3.4.5} + \frac{2688z^5}{1.2.3.4.5.2.3.4.5.6.2.3.4.5.6} + \ldots\right],$$

les nombres 3, 14, 70, 404, 2688, ... sont donnés par Euler [1].

19. Il est à peine nécessaire de faire observer que les séries employées jusqu'ici sont convergentes. D'abord la série Q_n ou Q_ν converge plus rapidement que celle qui représente le nombre e. La fonction P_n

---

[1] *Calcul intégral*, 2e édit., t. II, Chap. VII, p. 156.

se compose d'un polynôme limité et d'une série infinie dont le terme général est

$$T_p = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \times \frac{z^p\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)}{1.2.3\ldots p(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}.$$

Si l'on pose

$$H_p = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p},$$

le rapport du terme suivant T_{p+1} à T_p est représenté par

$$\frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{z}{(p+1)(n+p+1)} \times \frac{\left(H_p+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{n+p+1}\right)}{H_p},$$

ou

$$(18) \qquad \frac{T_{p+1}}{T_p} = \frac{z}{(p+1)(n+p+1)}\left[1+\frac{1}{H_p}\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{n+p+1}\right)\right].$$

A mesure que p augmente, l'expression entre crochets diminue et se rapproche de l'unité; le facteur $\frac{z}{(p+1)(n+p+1)}$ décroît jusqu'à devenir aussi petit qu'on voudra; donc, à partir d'un certain terme, si z conserve une valeur finie, ce rapport devient plus petit que l'unité, et, par suite, la série est convergente.

III.

AUTRES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

---

20. On peut donner une autre forme au développement des fonctions de Fourier en y introduisant comme facteur la fonction e^x.

En partant de la seconde équation différentielle (2 *bis*), § I,

$$(1) \qquad \frac{d^2 U_\nu}{dx^2} + \frac{1-2\nu}{x}\frac{dU_\nu}{dx} - U_\nu = 0,$$

où l'on sait que $U_\nu = x^\nu F_\nu$, et en posant

$$U_\nu = R e^{mx},$$

on obtient la nouvelle équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{d^2 R}{dx^2} + \left(\frac{1-2\nu}{x} + 2m\right)\frac{dR}{dx} + \left[m^2 + \frac{m(1-2\nu)}{x} - 1\right] R = 0.$$

Pour intégrer cette dernière équation, nous posons

$$R = A x^\alpha + B x^\beta + C x^\gamma + D x^\delta + \ldots,$$

et, en substituant dans (2), nous avons

$$\begin{aligned} &A\alpha(\alpha-2\nu)x^{\alpha-2} + Am(2\alpha-2\nu+1)x^{\alpha-1} + A(m^2-1)x^\alpha \\ &+ B\beta(\beta-2\nu)x^{\beta-2} + Bm(2\beta-2\nu+1)x^{\beta-1} + B(m^2-1)x^\beta \\ &+ C\gamma(\gamma-2\nu)x^{\gamma-2} + Cm(2\gamma-2\nu+1)x^{\gamma-1} + C(m^2-1)x^\gamma \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

On satisfait à cette équation en posant d'abord $m^2 - 1 = 0$, ce qui donne $m = \pm 1$, et en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x. Il y a deux manières d'opérer pour chacune des deux valeurs de m.

1° En prenant $m = -1$ et posant

$$\alpha = 2\nu, \quad \beta = 2\nu + 1, \quad \gamma = 2\nu + 2, \quad \delta = 2\nu + 3, \quad \ldots,$$

on a pour première intégrale

$$R_1 = A'_\nu x^{2\nu}\left[1 + \frac{2\nu+1}{1(2\nu+1)}x + \frac{(2\nu+1)(2\nu+3)}{1.2(2\nu+1)(2\nu+2)}x^2 + \frac{(2\nu+1)(2\nu+3)(2\nu+5)}{1.2.3(2\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+3)}x^3 + \ldots\right].$$

2° Si avec $m = -1$ on fait

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 3, \quad \ldots,$$

on obtient pour deuxième intégrale

$$R_2 = A''_\nu \left[1 + \frac{1-2\nu}{1(1-2\nu)}x + \frac{(1-2\nu)(3-2\nu)}{1.2(1-2\nu)(2-2\nu)}x^2 + \frac{(1-2\nu)(3-2\nu)(5-2\nu)}{1.2.3(1-2\nu)(2-2\nu)(3-3\nu)}x^3 + \ldots \right.$$

On a ainsi pour U_ν les deux valeurs

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} U'_\nu &= A'_\nu e^{-x} x^{2\nu} \left[1 + \frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{1(1+2\nu)} 2x + \frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2 + \ldots \right], \\ U''_\nu &= A''_\nu e^{-x} \left[1 + \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{1(1-2\nu)} 2x + \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}-\nu\right)}{1.2(1-2\nu)(2-2\nu)}(2x)^2 + \ldots \right]. \end{aligned} \right.$$

Remarque. — Si au lieu de $m = -1$ nous posons $m = +1$, nous aurons

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} U'''_\nu &= A'''_\nu e^{+x} x^{2\nu} \left[1 - \frac{\frac{1}{2}+\nu}{1(1+2\nu)} 2x + \frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2 - \ldots \right], \\ U^{\text{IV}}_\nu &= A^{\text{IV}}_\nu e^{x} \left[1 - \frac{\frac{1}{2}-\nu}{1(1-2\nu)} 2x + \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}-\nu\right)}{1.2(1-2\nu)(2-2\nu)}(2x)^2 - \ldots \right], \end{aligned} \right.$$

valeurs qui se déduisent des précédentes en changeant x en $-x$, et qui, par conséquent, ne donnent pas de nouvelles intégrales. On voit d'ailleurs que l'équation différentielle (1) ne change pas quand on y remplace x par $-x$.

De là découle une conséquence remarquable. En prenant $A'_\nu = A'''_\nu$, on a $U'_\nu = U'''_\nu$, ce qui donne

$$e^{x}\left[1 - \frac{\frac{1}{2}+\nu}{1(1+2\nu)} 2x + \frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2 - \ldots \right] = e^{-x}\left[1 + \frac{\frac{1}{2}+\nu}{1(1+2\nu)} 2x + \ldots \right],$$

c'est-à-dire que, si l'on effectue les produits indiqués dans les deux membres, on doit trouver de chaque côté une expression de la forme $1 + Ax^2 + Bx^4 + \ldots$, où les termes de degré impair ont disparu. De là on déduit

$$(5)\qquad e^{2x}=\frac{1+\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{1(1+2\nu)}2x+\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2+\ldots}{1-\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{1(1+2\nu)}2x+\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2-\ldots};$$

et on a ainsi la valeur de la fonction exponentielle sous la forme d'un rapport de deux séries infinies contenant un paramètre arbitraire ν.

L'égalité $U''_\nu = U^{\text{IV}}_\nu$ donne pour e^{2x} une expression qui ne diffère de la précédente que par le signe de ν.

Pour que les fonctions ainsi obtenues représentent exactement des fonctions cylindriques, il faut qu'elles satisfassent à une seconde condition. Or, de la première formule (3) on déduit, en supprimant l'accent,

$$V_\nu = U_\nu x^{-2\nu} = A_\nu e^{-x}\left[1+\frac{1+2\nu}{1(1+2\nu)}x+\frac{(1+2\nu)(3+2\nu)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}x^2+\ldots\right],$$

et de là

$$\frac{1}{x}\frac{dV_\nu}{dx}=\frac{A_\nu}{2\nu+2}e^{-x}\left[1+\frac{1(3+2\nu)}{3+2\nu}x+\frac{(3+2\nu)(5+2\nu)}{1.2(3+2\nu)(4+2\nu)}x^2+\ldots\right];$$

d'où l'on voit que, pour que la relation

$$V_{\nu+1}=\frac{1}{x}\frac{dV_\nu}{dx}$$

soit satisfaite, il faut qu'on ait

$$A_{\nu+1}=\frac{A_\nu}{2(\nu+1)},$$

relation identique à celle qui a été établie précédemment. Pour un paramètre entier n, on a

$$A_{n+1}=\frac{A_n}{2(n+1)},$$

et on en conclut

$$A_n=\frac{A_0}{2^n\,\Gamma(1+n)}.$$

21. Nous avons déjà observé que, pour passer des équations (2 *bis*), § I, aux équations (2), § I, il suffit de remplacer x par xi. Si nous faisons cette substitution dans les expressions (3), nous aurons les intégrales particulières de la seconde équation (2), § I, que nous désignerons par H_1 et H_2. En séparant dans la parenthèse la partie réelle de la partie imaginaire, nous avons

$$= A_1 e^{-ix} x^{2\nu} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)}{1.2(1+2\nu)(2+2\nu)}(2x)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\left(\frac{5}{2}+\nu\right)\left(\frac{7}{2}+\nu\right)}{1.2.3.4(1+2\nu)(2+2\nu)(3+2\nu)(4+2\nu)}(2x)^4 \ldots \right.$$
$$\left. + i\left[\frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}{1(1+2\nu)} 2x - \frac{\left(\frac{1}{2}+\nu\right)\left(\frac{3}{2}+\nu\right)\left(\frac{5}{2}+\nu\right)}{1.2.3(1+2\nu)(2+2\nu)(3+2\nu)}(2x)^3 + \ldots\right]\right\}$$

$$= A_2 e^{ix} \left\{ 1 - \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}-\nu\right)}{1.2(1-2\nu)(2-2\nu)}(2x)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\left(\frac{5}{2}-\nu\right)\left(\frac{7}{2}-\nu\right)}{1.2.3.4(1-2\nu)(2-2\nu)(3-2\nu)(4-2\nu)}(2x)^4 - \ldots \right.$$
$$\left. + i\left[\frac{\frac{1}{2}-\nu}{1(1-2\nu)}(2x) - \frac{\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\left(\frac{5}{2}-\nu\right)}{1.2.3(1-2\nu)(2-2\nu)(3-2\nu)}(2x)^3 + \ldots\right]\right\}$$

Si l'on désigne par M et N les séries qui entrent dans H_1, il vient

$$H_1 = A_1 x^{2\nu} e^{-ix}(M + iN) = A_1 x^{2\nu}[M\cos x + N\sin x + i(N\cos x - M\sin x)];$$

et, en changeant i en $-i$, on a

$$H'_1 = A_1 x^{2\nu} e^{ix}(M - iN) = A_1 x^{2\nu}[M\cos x + N\sin x - i(N\cos x - M\sin x)].$$

Comme ces deux valeurs H_1 et H'_1 doivent être identiques et réelles, on en conclut

$$(7) \qquad N\cos x - M\sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} x = \frac{N}{M};$$

on a ainsi

$$(8) \qquad H_1 = A_1 x^{2\nu}(M\cos x + N\sin x),$$

ou, en remplaçant N par sa valeur déduite de (7),

$$(8\ bis) \qquad H_1 = A_1 x^{2\nu}\frac{M}{\cos x}.$$

Il faut remarquer, en passant, que la formule (7) donne la valeur de

$\tang x$ sous forme du rapport de deux séries infinies, de la même manière que la formule (5) exprime e^{2x}.

Remarquons encore que, d'après (8 *bis*), la série M doit s'annuler pour les valeurs $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$, quelle que soit la valeur du paramètre ν; sans cela la valeur de H_1 deviendrait infinie pour chacune de ces valeurs de la variable, ce qui ne saurait être. Ces résultats s'accordent avec ceux que Kummer a obtenus par une méthode bien différente dans son Mémoire sur la série hypergéométrique ([1]).

Si dans (8) on remplace M par sa valeur déduite de (7), on trouve

$$H_1 = A_1 x^{2\nu} \frac{N}{\sin x}, \tag{8 ter}$$

et l'on voit par là que N doit s'annuler comme $\sin x$ pour les valeurs $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$. En multipliant les formules (8 *bis*) et (8 *ter*) respectivement par $\cos x$ et $\sin x$, et les ajoutant après les avoir élevées au carré, on obtient

$$H_1^2 = A_1^2 x^{4\nu}(M^2 + N^2), \quad \text{d'où} \quad H_1 = A_1 x^{2\nu}\sqrt{M^2 + N^2}. \tag{9}$$

En représentant par M′ et N′ les séries qui entrent dans H_2 (6), et qui ne diffèrent de M et N que par le signe de ν, on déduit de cette seconde intégrale des conséquences analogues à celles que nous venons d'indiquer.

Lorsque l'on a $\nu = n + \frac{1}{2}$, n étant un nombre entier, les fonctions M′ et N′ sont limitées, et la fonction H_2 représente la seconde intégrale sous forme finie. Nous reviendrons sur ce cas particulier.

22. Dans le cas où le paramètre est un nombre entier n, la fonction U_ν'' (3) devient infinie à partir d'un certain terme, et ne peut représenter la seconde intégrale. Pour trouver cette intégrale, nous appliquons encore la méthode d'Euler. Si dans l'équation (2) nous faisons $m = -1$ et $\nu = n$, elle devient

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \left(\frac{1-2n}{x} - 2\right)\frac{dR}{dx} - \frac{1-2n}{x} R = 0, \tag{10}$$

([1]) *Journal de Crelle*, t. 15, § 26 du Mémoire cité.

et si nous posons

$$R = P + R_1 \log x,$$

R_1 représentant la première intégrale de l'équation (10), savoir

$$R_1 = A x^{2n}\left[1 + \frac{2n+1}{1(2n+1)}x + \frac{(2n+1)(2n+3)}{1.2(2n+1)(2n+2)}x^2 + \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{1.2.3(2n+1)(2n+2)(2n+3)}x^3 + \ldots\right],$$

nous avons pour déterminer P l'équation

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \left(\frac{1-2n}{x} - 2\right)\frac{dP}{dx} - \frac{1-2n}{x}P + \frac{2}{x}\frac{dR_1}{dx} - \frac{2nR_1}{x^2} - \frac{2R_1}{x} = 0.$$

On obtient la valeur de P en employant encore la méthode des coefficients indéterminés et posant

$$P = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \ldots + \mathfrak{L}x^{2n-2} + \mathfrak{M}x^{2n-1} + \mathfrak{N}x^{2n} + \mathfrak{P}x^{2n+1} + \mathfrak{Q}x^{2n+2} + \mathfrak{R}x^{2n+3} + \ldots;$$

On trouve ainsi

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} P = {} & 2An\frac{1.2.3\ldots(2n-1)(1-2n)(2-2n)\ldots(-2)(-1)}{(1-2n)(3-2n)(5-2n)\ldots[(4n-1)-2n]} \\ & \times\left\{1 + \frac{1-2n}{1(1-2n)}x + \frac{(1-2n)(3-2n)}{1.2(1-2n)(2-2n)}x^2 + \ldots + \frac{(1-2n)(3-2n)\ldots[(4n-3)-2n]}{1.2\ldots(2n-1)(1-2n)\ldots(-2)(-1)}x^{2n}\right\} \\ & + Ax^{2n}\left[\frac{(2n+1)\frac{1}{n+\frac{1}{2}}}{1(2n+1)}x + \frac{(2n+1)(2n+3)\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)}{1.2(2n+1)(2n+2)}x^2 + \ldots\right] \\ & - Ax^{2n}\left[\frac{(2n+1)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{1(2n+1)}x + \frac{(2n+1)(2n+3)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)}{1.2(2n+1)(2n+2)}x^2 + \ldots\right] \\ & + \mathfrak{N}x^{2n}\left[1 + \frac{2n+1}{1(2n+1)}x + \frac{(2n+1)(2n+3)}{1.2(2n+1)(2n+2)}x^2 + \ldots\right], \end{aligned}\right.$$

et la seconde valeur de U_n est alors

$$(12)\qquad U''_n = e^{-x}(P + R_1 \log x).$$

Il est facile de reconnaître que les séries (3) sont convergentes, car le terme général, qui contient x^p, est

$$\frac{(1\pm 2\nu)(3\pm 2\nu)(5\pm 2\nu)\ldots[(2p-1)\pm 2\nu]}{1.2.3\ldots p(1\pm 2\nu)(2\pm 2\nu)\ldots(p\pm 2\nu)}x^p;$$

le précédent est

$$\frac{(1\pm 2\nu)(3\pm 2\nu)(5\pm 2\nu)\ldots[(2p-3)\pm 2\nu]}{1.2.3\ldots(p-1)(1\pm 2\nu)(2\pm 2\nu)\ldots[(p-1)\pm 2\nu]}x^{p-1},$$

et le rapport de ces deux termes, qui est

$$\frac{2p-1\pm 2\nu}{p(p\pm 2\nu)}x = \frac{2-\dfrac{1\mp 2\nu}{p}}{p\pm 2\nu}x,$$

diminue à mesure que p augmente, et a pour limite o, tant que x conserve une valeur finie.

Les deux dernières séries qui entrent dans P sont aussi convergentes. Le terme général de la première peut être mis sous la forme suivante

$$\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ldots[2n+(2p-1)]\left(\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{n+\frac{3}{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n+\frac{2p-1}{2}}\right)}{1.2.3\ldots p(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+p)}x^p;$$

le précédent est

$$\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\ldots[2n+(2p-3)]\left(\dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{n+\frac{3}{2}}+\ldots+\dfrac{1}{n+\frac{2p-3}{2}}\right)}{1.2.3\ldots(p-1)(2n+1)(2n+2)\ldots(2n+p-1)}x^{p-1},$$

et si l'on pose

$$K = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\ldots+\frac{1}{n+\frac{2p-3}{2}},$$

le rapport de ces deux termes est représenté par

$$\frac{2n+2p-1}{p(2n+p)}\times\frac{K+\dfrac{1}{n+\frac{2p-1}{2}}}{K}x = \frac{2n+2p-1}{p(2n+p)}\left[1+\frac{1}{K\left(n+\frac{2p-1}{2}\right)}\right]x.$$

A mesure que p augmente, l'expression entre crochets tend vers l'unité, et le premier facteur

$$\frac{2n+p+p-1}{p(2n+p)} = \frac{1+\dfrac{p-1}{2n+p}}{p} = \frac{1+\dfrac{1-\dfrac{1}{p}}{1+\dfrac{2n}{p}}}{p}$$

diminue sans cesse et a pour limite o. Donc, à partir d'un terme assez éloigné, ce rapport devient plus petit que l'unité, et la série est convergente. On démontrerait de la même manière que la seconde l'est également.

23. Pour avoir la deuxième intégrale de la seconde équation (2), § I, lorsque le paramètre est un nombre entier et positif, il suffit de remplacer x par xi dans les valeurs de P et R_1 obtenues précédemment. Si avec $\mathfrak{N} = 0$ on pose

$$M_1 = 2n\,\frac{1.2\ldots(2n-1)(1-2n)\ldots(-2)(-1)}{(1-2n)(3-2n)\ldots[(4n-1)-2n]}\left|x^{-2n} - \frac{(1-2n)(3-2n)}{1.2(1-2n)(2-2n)}x^{2-2n}+\ldots\right|,$$

$$N_1 = 2n\,\frac{1.2\ldots(2n-1)(1-2n)\ldots(-2)(-1)}{(1-2n)(3-2n)\ldots[(4n-1)-2n]}$$
$$\times\left[\frac{1-2n}{1(1-2n)}x^{1-2n} - \frac{(1-2n)(3-2n)(5-2n)}{1.2.3(1-2n)(2-2n)(3-2n)}x^{3-2n}+\ldots\right],$$

$$M_2 = -\frac{(2n+1)(2n+3)}{1.2(2n+1)(2n+2)}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}\right)x^2$$
$$+\frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}{1.2.3.4(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}+\frac{1}{n+\frac{7}{2}}\right)x^4\ldots$$

$$N_2 = (2n+1)\frac{1}{n+\frac{1}{2}}x - \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{1.2.3(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$$
$$\times\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{n+\frac{3}{2}}+\frac{1}{n+\frac{5}{2}}\right)x^3+\ldots;$$

$$M_3 = \frac{(2n+1)(2n+3)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)}{1.2(2n+1)(2n+2)}x^2 - \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)}{1.2.3.4(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}++\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+4}\right)x^4+\ldots,$$

$$N_3 = -\frac{(2n+1)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)}{1(2n+1)}x + \frac{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{1.2.3(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}\right)x^3-\ldots,$$

$$M_4 = 1 - \frac{(1+2n)(3+2n)}{1.2(1+2n)(2+2n)}x^2 + \frac{(1+2n)(3+2n)(5+2n)(7+2n)}{1.2.3.4(1+2n)(2+2n)(3+2n)(4+2n)}x^4-\ldots,$$

$$N_4 = \frac{1+2n}{1(1+2n)}x - \frac{(1+2n)(3+2n)(5+2n)}{1.2.3(1+2n)(2+2n)(3+2n)}x^3+\ldots;$$

les valeurs de P et R_1 peuvent être mises sous la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} P = x^{2n}[M_1+M_2+M_3+i(N_1+N_2+N_3)],\\ R_1 = x^{2n}(M_4+iN_4); \end{cases}$$

de là on déduit pour la seconde intégrale cherchée

$$H_2 = A_2 x^{2n} e^{-ix}[M_1+M_2+M_3+M_4\log x + i(N_1+N_2+N_3+N_4\log x)],$$

expression que l'on ramène à la même forme que précédemment, en posant

$$M_1+M_2+M_3+M_4\log x = \mathfrak{M},$$
$$N_1+N_2+N_3+N_4\log x = \mathfrak{N}.$$

On a ainsi

$$(14)\qquad H_2 = A_2 x^{2n} e^{-ix}(\mathfrak{M}+i\mathfrak{N}),$$

et, en faisant disparaître les imaginaires,

$$(15)\qquad H_2 = A_2 x^{2n}(\mathfrak{M}\cos x + \mathfrak{N}\sin x),$$

avec la condition

$$(16)\qquad \mathfrak{M}\cos x - \mathfrak{N}\sin x = 0.$$

IV.

REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DE FOURIER PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

24. La forme donnée par Bessel à la fonction que nous étudions est la suivante :

$$(1)\qquad J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon;$$

ν désigne ici le paramètre constant et x la variable indépendante. C'est lorsque le paramètre est un nombre entier que l'expression (1) représente la fonction de première espèce; et c'est ce cas particulier que Bessel a étudié. Nous considérons ici le cas où ν est un nombre fractionnaire quelconque. Pour démontrer les principales propriétés de cette fonction nous comparons $J_\nu(x)$ aux deux fonctions voisines $J_{\nu-1}(x)$ et $J_{\nu+1}(x)$. De la définition (1) on déduit

$$\frac{dJ_\nu(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\sin\varepsilon\,d\varepsilon,$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\cos\varepsilon\,d\varepsilon,$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\sin\varepsilon\,d\varepsilon,$$

et, par suite,

$$(\text{A})\qquad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2\,\frac{dJ_\nu}{dx},$$

formule identique à (35), § I.

D'autre part, l'identité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\cos\varepsilon\,d\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\nu\varepsilon - x\sin\varepsilon)\left[\nu - (\nu - x\cos\varepsilon)\right]\frac{d\varepsilon}{x}$$

donne

$$(\mathrm{B}) \qquad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - \frac{\sin 2\nu\pi}{\pi x},$$

formule qui se confond avec (36), § I, lorsque ν est entier, et des relations (A) et (B) on déduit

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{d^2 J_\nu(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_\nu(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu(x) + \frac{(\nu + x)\sin 2\nu\pi}{2\pi x^2} = 0,$$

équation qui ne diffère que par son dernier terme de celle que nous avons étudiée jusqu'ici.

Si l'on pose

$$J_\nu(x) = x^\nu H(x) \quad \text{et} \quad \frac{\sin 2\nu\pi}{2\pi} = N,$$

il vient

$$\frac{d^2 H(x)}{dx^2} + \frac{1-2\nu}{x}\frac{dH(x)}{dx} + H(x) + N(\nu + x)x^{\nu-2} = 0;$$

en faisant

$$H(x) = A x^\nu + B x^{\nu+1} + C x^{\nu+2} + D x^{\nu+3},$$

et, substituant dans l'équation différentielle, on a

$$\begin{aligned}[A\nu(-\nu) + N\nu]x^{\nu-2} + [B(1+\nu)(1-\nu) + N]x^{\nu-1} + [A + C(2+\nu)(2-\nu)]x^\nu \\ + [B + D(3+\nu)(3-\nu)]x^{\nu+1} + [C + E(4+\nu)(4-\nu)]x^{\nu+2} + \ldots = 0;\end{aligned}$$

en égalant ensuite à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on obtient

$$A = \frac{N}{\nu}, \quad B = \frac{N}{\nu^2 - 1}, \quad C = \frac{A}{\nu^2 - 2^2} = \frac{N}{\nu}\frac{1}{\nu^2 - 2^2},$$

$$D = \frac{B}{\nu^2 - 3^2} = \frac{N}{(\nu^2 - 1^2)(\nu^2 - 3^2)}, \quad E = \frac{C}{\nu^2 - 4^2} = \frac{N}{\nu} \times \frac{1}{(\nu^2 - 2^2)(\nu^2 - 4^2)}, \quad \ldots,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}H(x) = \frac{N x^\nu}{\nu}\left[1 + \frac{x^2}{\nu^2 - 2^2} + \frac{x^4}{(\nu^2 - 2^2)(\nu^2 - 4^2)} + \ldots\right] \\ + N x^\nu \left[\frac{x}{\nu^2 - 1^2} + \frac{x^3}{(\nu^2 - 1^2)(\nu^2 - 3^2)} + \frac{x^5}{(\nu^2 - 1^2)(\nu^2 - 3^2)(\nu^2 - 5^2)} + \ldots\right],\end{aligned}$$

d'où

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} J_\nu(x) = \frac{\sin 2\nu\pi}{2\pi}\left\{\frac{1}{\nu}\left[1 + \frac{x^2}{\nu^2 - 2^2} + \frac{x^4}{(\nu^2-2^2)(\nu^2-4^2)} + \ldots\right.\right. \\ \left.\left. + \frac{x}{\nu^2 - 1^2} + \frac{x^3}{(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)} + \ldots\right]\right\}, \end{aligned}\right.$$

résultat identique à celui qu'a obtenu M. Anger en développant directement la fonction (1).

Cette série (D), qui est applicable pour toute valeur fractionnaire de ν, comprend, comme cas particulier, le développement qu'on doit trouver quand le paramètre est un nombre entier n. Dans ce cas, $\sin 2n\pi = 0$, et tous les termes finis de la série multipliés par ce facteur disparaissent; mais, à partir du terme en x^n, les dénominateurs comprenant le facteur $\nu^2 - n^2$ s'annulent, et la fonction prend la forme $\frac{0}{0}$.

Pour trouver sa vraie valeur, il y a deux cas à examiner, suivant que n est pair ou impair.

Si n est pair, le dénominateur du terme en x^n est

$$\begin{aligned} &\nu(\nu^2-2^2)(\nu^2-4^2)\ldots(\nu^2-n^2) \\ &\quad = (\nu-n)[\nu-(n-2)]\ldots(\nu-4)(\nu-2)\nu(\nu+2)\ldots(\nu+n), \end{aligned}$$

et si l'on fait $\nu = n$, cette expression revient à

$$0.2.4.6\ldots(n-2)n(n+2)\ldots 2n = 0.1.2.3\ldots n.2^n.$$

Si n est impair, le dénominateur du terme en x^n est

$$\begin{aligned} &(\nu^2-1^2)(\nu^2-3^2)\ldots(\nu^2-n^2) \\ &\quad = (\nu-n)[\nu-(n-2)][\nu-(n-4)]\ldots(\nu-3)(\nu-1)(\nu+1)(\nu+3)\ldots(\nu+n); \end{aligned}$$

et pour $\nu = n$, cette expression revient à

$$0.2.4.6\ldots(n-3)(n-1)(n+1)(n+3)\ldots 2n = 0.1.2.3\ldots n.2^n.$$

On voit par là qu'en supprimant le rapport $\frac{\sin 2n\pi}{(n-n)} = \frac{0}{0}$ on trouve, pour n entier, pair ou impair,

$$(\mathrm{E})\quad J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right.$$

et c'est la forme que prend la fonction de première espèce, lorsqu'on y conserve la variable x.

Lorsque le paramètre est purement imaginaire et représenté par νi, la formule (D) devient

$$\mathrm{J}_{\nu i}(x) = \frac{e^{2\nu\pi} - e^{-2\nu\pi}}{4\nu\pi}\left[1 - \frac{x^2}{\nu^2+2^2} + \frac{x^4}{(\nu^2+2^2)(\nu^2+4^2)} - \frac{x^6}{(\nu^2+2^2)(\nu^2+4^2)(\nu^2+6^2)} + \ldots\right]$$
$$- i\frac{e^{2\nu\pi} - e^{-2\nu\pi}}{4\pi}\left[\frac{x}{\nu^2+1^2} - \frac{x^3}{(\nu^2+1^2)(\nu^2+3^2)} + \frac{x^5}{(\nu^2+1^2)(\nu^2+3^2)(\nu^2+5^2)} - \ldots\right].$$

Tous ces résultats concordent avec ceux qu'a indiqués M. Anger dans ses recherches sur la fonction $\mathrm{J}_\nu(x)$ (¹) et qu'il a déduits de la considération de l'intégrale définie.

Lorsque le paramètre est un nombre entier n, l'équation différentielle (C) se réduit à

$$\text{(C')} \qquad \frac{d^2\mathrm{J}_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\mathrm{J}_n(x)}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)\mathrm{J}_n(x) = 0,$$

et la fonction de première espèce se présente sous la forme

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\varepsilon - x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

ce qui revient à

$$\mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\varepsilon.\cos(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin n\varepsilon.\sin(n\sin\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Or, si le paramètre est un nombre pair $2n$, on a

$$\int_0^{2\pi} \sin 2n\varepsilon \sin(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon = 0;$$

et si c'est un nombre impair, $2n+1$, on a

$$\int_0^{2\pi} \cos(2n+1)\varepsilon\cos(x\cos\varepsilon)\,d\varepsilon = 0;$$

(¹) *Neueste Schriften*, etc., année 1855, p. 15 et suiv.

par suite, suivant l'un ou l'autre cas, la fonction de Fourier prend l'une ou l'autre des deux formes

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
J_{2n}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos 2n\varepsilon \cos(n \sin\varepsilon)\,d\varepsilon,\\
J_{2n+1}(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2n+1)\varepsilon \sin(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon.
\end{aligned}
\right.
$$

La troisième forme que l'on rencontre est donnée par la relation

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\varepsilon\cos(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{x^n}J_n(x),
$$

qu'on démontre facilement en développant en série $\cos(x \sin\varepsilon)$ et en évaluant les intégrales de la forme $\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\varepsilon \sin^p\varepsilon\, d\varepsilon$, qui se ramènent toutes à la première

$$
\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}2\pi.
$$

On trouve ainsi

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\varepsilon\cos(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon\\
&= \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left[1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)}\cdots\cdots\right]\\
&= \frac{1}{x^n}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{x}{2}\right)^n\left[1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\ldots\right];
\end{aligned}
$$

de là on déduit

$$
(4)\qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\varepsilon\cos(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon.
$$

De la même manière on obtient

$$
(4\,bis)\qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\varepsilon\cos(x\cos\varepsilon)\,d\varepsilon;
$$

C'est de cette dernière formule que part M. Lommel, dans ses *Études sur les fonctions de Bessel* (1).

M. Schlömilch et après lui M. Neumann font remarquer d'ailleurs que les formules (4) et (4 *bis*) se déduisent des précédentes (3), à l'aide d'une formule de transformation démontrée par Jacobi dans un Mémoire intitulé : *Formula transformationis integralium definitorum* (2).

Ces deux dernières formes d'intégrales (4) et (4 *bis*) peuvent être ramenées à une seule. Remarquons en effet que les produits $\cos^{2n}\varepsilon\cos(x\sin\varepsilon)$ et $\sin^{2n}\varepsilon\cos(x\cos\varepsilon)$ passent par les mêmes valeurs dans les quatre quadrants, et que, par conséquent, les intégrales prises entre zéro et 2π valent quatre fois les intégrales prises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire qu'on a

$$J_n(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\varepsilon\cos(x\sin\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

ou

$$J_n(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varepsilon\cos(x\cos\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Si l'on fait $\sin\varepsilon = u$ dans la première, et $\cos\varepsilon = u$ dans la seconde, on arrivera à la forme unique

$$(5)\qquad J_n(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^1 \cos(xu)\,(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\,du.$$

Comme on a

$$\cos(xu) = \frac{e^{ixu}+e^{-ixu}}{2}$$

et

$$\int_0^1 e^{-ixu}(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\,du = \int_{-1}^0 e^{ixu}(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\,du,$$

il vient

$$(6)\qquad J_n(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_{-1}^{+1} e^{ixu}(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\,du.$$

---

(1) *Studien über Bessels'chen Functionen*, etc.

(2) *Journal de Crelle*, t. 15, p. 13.

ce que l'on peut écrire

$$(6\ bis)\qquad J_n(x)=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}e^{ixu}(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}du.$$

En remplaçant dans (4) et (4 *bis*) $\cos(x\sin\varepsilon)$ et $\cos(x\cos\varepsilon)$ par des exponentielles, et prenant les limites o et π, on a encore

$$(7)\qquad \begin{cases} J_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\displaystyle\int_0^{\pi}e^{ix\sin\varepsilon}\cos^{2n}\varepsilon\,d\varepsilon,\\[2ex] J_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\displaystyle\int_0^{\pi}e^{ix\cos\varepsilon}\sin^{2n}\varepsilon\,d\varepsilon.\end{cases}$$

Les formules qui précèdent sont établies dans le cas où le paramètre n est entier. Si l'on considère la dernière expression, avec un paramètre quelconque ν, soit

$$(7\ bis)\qquad J_\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}e^{ix\cos\varepsilon}\sin^{2\nu}\varepsilon\,d\varepsilon,$$

on peut démontrer, comme l'a fait M. Lommel, que cette fonction satisfait aux relations fondamentales qui caractérisent les fonctions cylindriques, savoir

$$\frac{2\nu}{x}J_\nu=J_{\nu-1}+J_{\nu+1},$$

$$2\frac{dJ_\nu}{dx}=J_{\nu-1}-J_{\nu+1},$$

formules analogues à (35) et (36), § I; cette expression représente donc une fonction de Fourier pour toute valeur de ν.

25. Dans ses recherches sur la fonction $J_\nu(x)$, M. Anger démontre que les fonctions représentées par les formules (3), où le paramètre est entier, jouissent des propriétés (A) et (B). Pour cela, il suit une voie toute différente de celles indiquées jusqu'ici. En appliquant la méthode de développement de Fourier, et en ayant égard aux formules (3), il pose

$$\cos(x \sin\varepsilon) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\varepsilon + 2J_4(x)\cos 4\varepsilon + 2J_6(x)\cos 6\varepsilon + \ldots$$
$$\sin(x \sin\varepsilon) = \quad 2J_1(x)\sin\varepsilon \quad + 2J_3(x)\sin 3\varepsilon + 2J_5(x)\sin 5\varepsilon + \ldots;$$

il remplace ensuite ε par $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ce qui donne

$$\cos(x \cos\varepsilon) = J_0(x) - 2J_2(x)\cos 2\varepsilon + 2J_4(x)\cos 4\varepsilon - 2J_6(x)\cos 6\varepsilon + \ldots$$
$$\sin(x \cos\varepsilon) = \quad 2J_1(x)\cos\varepsilon \quad - 2J_3(x)\cos 3\varepsilon + 2J_5(x)\cos 5\varepsilon - \ldots;$$

il différentie ces dernières équations d'abord par rapport à ε, puis par rapport à x; et c'est en comparant chaque fois les relations ainsi obtenues avec les précédentes, multipliées respectivement par $\sin\varepsilon$ et $\cos\varepsilon$, qu'il obtient les relations (A) et (B), par lesquelles on définit les fonctions cylindriques.

M. Neumann déduit de ces développements une autre forme pour $J_n(x)$. Il observe que l'on peut écrire

$$\cos(x \cos\varepsilon) = J_0(x) + 2i^2J_2(x)\cos 2\varepsilon + 2i^4J_4(x)\cos 4\varepsilon + \ldots$$
$$i\sin(x \cos\varepsilon) = \quad 2iJ_1(x)\cos\varepsilon \quad + 2i^3J_3(x)\cos 3\varepsilon + \ldots;$$

de là il déduit, par addition,

$$e^{ix\cos\varepsilon} = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} i^n J_n(x)\cos n\varepsilon,$$

et, par suite,

$$i^n J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varepsilon}\cos n\varepsilon\, d\varepsilon,$$

d'où

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varepsilon}\cos n\varepsilon\, d\varepsilon, \tag{8}$$

formule valable pour tout paramètre entier, pair ou impair.

M. Schlömilch a publié dans son Journal [1] un Mémoire sur la

[1] *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, etc.

transcendante de Bessel. Il prend pour point de départ la relation suivante :

$$(9)\quad e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)} = J_0 + J_1 u + J_2 u^2 + J_3 u^3 + J_4 u^4 + \ldots + \frac{J_{-1}}{u} + \frac{J_{-2}}{u^2} + \frac{J_{-3}}{u^3} + \frac{J_{-4}}{u^4} + \ldots.$$

En changeant ici u en $-\frac{1}{u}$ et réciproquement, il conclut d'abord qu'on a

$$(10)\qquad J_{-n} = (-1)^n J_n;$$

en prenant d'un côté la dérivée par rapport à u, qui est pour le premier membre $\frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)e^{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)}$; de l'autre, en multipliant la relation précédente par $\frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)$, et égalant entre eux les coefficients des mêmes puissances de u, il obtient la relation

$$(11)\qquad \frac{2n}{x} J_n = J_{n-1} + J_{n+1}.$$

Si l'on multiplie entre eux les développements $e^{\frac{xu}{2}}$ et $e^{-\frac{x}{2u}}$, on obtient, pour les coefficients des diverses puissances de u,

$$J_0(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.1} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2.1.2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1.2.3.1.2.3} + \ldots,$$

$$J_1(x) = \frac{\frac{x}{2}}{1}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2.2.3} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1.2.3.2.3.4} + \ldots\right],$$

$$J_2(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.2}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.3} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2.3.4} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1.2.3.3.4.5} + \ldots\right],$$

et généralement

$$(12)\quad J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1.2.3\ldots n}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1.2.3(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots\right].$$

De cette série, en différentiant le terme

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p}}{1.2.3\ldots p.1.2\ldots n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)},$$

on déduit

$$\frac{\left(\frac{n+2p}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}}{1.2.3\ldots p.1.2\ldots n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}}{1.2.3\ldots p.1.2\ldots n(n+1)\ldots(n+p-1)}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2p-1}}{1.2\ldots(p-1)1.2\ldots n(n+1)\ldots(n+p)},$$

et de là on conclut sans peine la relation

$$2\frac{dJ_n}{dx} = J_{n-1} - J_{n+1}, \tag{13}$$

ce qui montre que la fonction J_n est une fonction de Fourier.

26. Dans son Mémoire sur les fonctions de Fourier et Bessel [1], M. Heine fait remarquer que les fonctions qu'il appelle *cylindriques* peuvent être considérées comme limites des fonctions sphériques de première et deuxième espèce; mais, sans passer par ces considérations, qui nécessitent une longue étude, cet auteur démontre que les fonctions cylindriques sont représentées par les formules (7) et (8).

Il pose

$$e^{x\cos\varepsilon} = f_0(x) + 2f_1(x)\cos\varepsilon + 2f_2(x)\cos 2\varepsilon + \ldots + 2f_n(x)\cos n\varepsilon + \ldots; \tag{14}$$

multipliant par $\cos n\varepsilon\, d\varepsilon$ et intégrant entre zéro et π, il déduit de là

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\varepsilon}\cos n\varepsilon\, d\varepsilon$$
$$= \frac{x^n}{2.4.6\ldots 2n}\left[1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} + \ldots\right].$$

(1) *Journal de Crelle*, t. 69.

Cette fonction ne se confond pas exactement avec $J_n(x)$, mais il est facile de voir qu'on a

$$J_n(x) = (-i)^n f_n(xi),$$

et que, prise sous la forme $y = \int_0^\pi e^{-x\cos\varepsilon} \cos n\varepsilon \, d\varepsilon$, elle représente une intégrale particulière de l'équation différentielle (1 *bis*), § I, savoir :

$$(15) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Si l'on substitue en effet à y dans cette dernière équation l'intégrale définie $\int_a^b e^{-x\cos\varepsilon} \cos n\varepsilon \, d\varepsilon$, on obtient

$$a) \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2)\, y = -\left[e^{-x\cos\varepsilon}(x \sin\varepsilon \cos n\varepsilon + n \sin n\varepsilon)\right]_a^b,$$

et les limites pour lesquelles s'annule cette dernière expression sont $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \pi$, et la valeur infinie pour laquelle $e^{-x\cos\varepsilon}$ s'évanouit. C'est ainsi qu'on arrive pour l'équation différentielle (15) aux deux intégrales

$$(16) \qquad f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-x\cos\varepsilon} \cos n\varepsilon \, d\varepsilon,$$

$$(17) \qquad F_n(x) = \int_0^\infty e^{-x\cos i\varepsilon} \cos ni\varepsilon \, d\varepsilon,$$

ou

$$(16\ bis) \qquad f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-x\cos\varepsilon + in\varepsilon} \, d\varepsilon,$$

$$(17\ bis) \qquad F_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\cos i\varepsilon - n\varepsilon} \, d\varepsilon.$$

A la relation (16) on peut, comme l'observe M. Heine, appliquer la formule de transformation de Jacobi, et l'on a

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\, \frac{x^n(-1)^n}{1.3.5\ldots(2n-1)} \int_0^\pi e^{-x\cos\varepsilon} \sin^{2n}\varepsilon \, d\varepsilon.$$

Or, en substituant dans l'équation différentielle (15) l'intégrale $y = x^n \int_a^b e^{-x\cos\varepsilon} \sin^{2n}\varepsilon\, d\varepsilon$, on obtient

$$(b) \qquad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2) y = \left(x^{n+1} e^{-x\cos\varepsilon} \sin^{2n+1}\varepsilon \right)_a^b.$$

Les limites qui annulent le second membre sont $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \pi$, et la valeur infinie de ε qui annule $e^{-x\cos\varepsilon}$. On arrive ainsi aux deux nouvelles formes

$$(18) \qquad f_n(x) = A x^n \int_0^\pi e^{-x\cos\varepsilon} \sin^{2n}\varepsilon\, d\varepsilon,$$

$$(19) \qquad F_n(x) = B x^n \int_0^\infty e^{-x\cos i\varepsilon} \sin^{2n} i\varepsilon\, d\varepsilon,$$

et, dans les deux cas, M. Heine représente la fonction de deuxième espèce sous la même forme que celle de première espèce.

Remarque. — Ces dernières formes sont applicables quelle que soit la valeur du paramètre n, qu'elle soit entière ou fractionnaire; c'est ce qui résulte de la condition (b). Au contraire, la relation (a) montre que la formule (16) ne peut être employée que si n est un nombre entier. Toutefois, lorsque n est un nombre rationnel et fractionnaire, ayant pour dénominateur δ, la même intégrale satisfait à la condition (a), si elle est prise entre zéro et $\delta\pi$.

27. M. Hermann Hankel a publié, dans les *Mathematische Annalen* (¹), un Mémoire sur les fonctions cylindriques de première et de deuxième espèce. En partant de l'équation différentielle (1), § I, il arrive à l'intégrale (b), mise sous la forme

$$(20) \qquad y = x^\nu \int_a^b e^{ixu} (u^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}}\, du,$$

et, pour déterminer les limites (a) et (b), il observe que, pour satisfaire

(¹) CLEBSCH et NEUMANN, t. I, p. 467.

à l'équation différentielle, on doit avoir

$$\left[e^{ixu}(u^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}\right]_a^b=0.$$

Si l'on a $\nu+\frac{1}{2}>0$, ou $\nu>-\frac{1}{2}$, cette expression s'annule pour $u=+1$, $u=-1$ et $u=\infty i$; de là résultent les trois intégrales suivantes

$$(a)\qquad x^\nu\int_{-1}^{+1}e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}du,$$

$$(b)\qquad x^\nu\int_{+1}^{\infty i}e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}du,$$

$$(c)\qquad x^\nu\int_{-1}^{\infty i}e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}du,$$

entre lesquelles on doit avoir la relation linéaire

$$\int_{-1}^{+1}+\int_{+1}^{\infty i}+\int_{\infty i}^{-1}=0.$$

Dans ces intégrales on va d'une limite à l'autre par une ligne simple qui ne contourne aucun des points de ramification. On obtient une autre classe d'intégrales si, au contraire, la courbe d'intégration revient à son point de départ en contournant un ou deux de ces points. De cette façon on a cinq intégrales nouvelles

$$(d)\qquad x^\nu\int_{+1}^{+1}e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}du,$$

$$(e)\qquad x^\nu\int_{-1}^{-1}e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}du,$$

$$(f),\ (g),\ (h)\qquad x^\nu\int_{\infty i}^{\infty i}e^{ixu}(u^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}du;$$

dans la première la courbe d'intégration enveloppe le point $u=-1$; dans la seconde elle contourne le point $u=+1$; enfin la dernière peut être prise sur trois contours distincts, entourant l'un le point $u=+1$, l'autre le point $u=-1$, et le troisième ces deux points à la fois. On a ainsi huit formes d'intégrales. Il est évident que chacune de ces intégrales doit être une fonction linéaire de deux autres, et c'est ce que l'auteur met en évidence dans la suite de son Mémoire.

Ce n'est pas tout, comme l'équation différentielle (1), § I, ne change pas quand on remplace $+\nu$ par $-\nu$, on peut aussi prendre pour intégrale l'expression

$$(21)\qquad y = x^{-\nu}\int_a^b e^{ixu}(u^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}}\,du,$$

et déterminer les limites par la condition

$$\left[e^{ixu}(u^2-1)^{-\nu+\frac{1}{2}}\right]_a^b = 0.$$

Si l'on a $-\nu+\frac{1}{2}>0$, ou $\nu<\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si ν décroît depuis $+\frac{1}{2}$ jusqu'à $-\infty$, cette dernière expression s'annule aussi pour $u=+1$, $u=-1$ et $u=\infty i$; et l'on déduit de (21) huit nouvelles formes d'intégrales, analogues aux précédentes. Mais il faut remarquer que ces huit intégrales ne peuvent être prises en même temps que les huit précédentes (ce qui porte alors le nombre à seize), que dans le cas où le paramètre ν satisfait à la double condition $\nu+\frac{1}{2}>0$ ou $\nu>-\frac{1}{2}$, et $-\nu+\frac{1}{2}>0$, c'est-à-dire $\nu<\frac{1}{2}$, ou, en d'autres termes, lorsque ν est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. Lorsque cela n'a pas lieu, c'est-à-dire lorsqu'on a $\nu>\frac{1}{2}$ ou $\nu<-\frac{1}{2}$, la dernière expression ou la première ne s'annulent que pour $u=\infty i$, et l'on n'a alors que trois nouvelles intégrales analogues à (f), (g), (h), ce qui réduit le nombre total à onze.

V.

ÉTUDE DE NOUVELLES INTÉGRALES.

28. Dans le cours de mes recherches j'ai été conduit à la forme nouvelle

$$(1)\qquad V_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon+(z-1)\sin\varepsilon]\,d\varepsilon,$$

qui représente la fonction V_ν avec la variable z, et se rapproche de celle donnée par Bessel.

Il est facile de démontrer que cette fonction, quand le paramètre est entier, jouit des propriétés qui caractérisent les fonctions cylindriques. On a, en effet,

$$\begin{aligned}\frac{dV_\nu(z)}{dz} = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon + (z-1)\sin\varepsilon]\cos\varepsilon\, d\varepsilon \\ & -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\sin[\nu\varepsilon + (z-1)\sin\varepsilon]\sin\varepsilon\, d\varepsilon \\ = & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[(\nu+1)\varepsilon + (z-1)\sin\varepsilon]\, d\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui revient à

$$\frac{dV_\nu}{dz} = V_{\nu+1}. \tag{2}$$

Si l'on combine par addition et soustraction les valeurs de $V_{\nu-1}$ et $V_{\nu+1}$, on a

$$V_{\nu-1} + V_{\nu+1} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon + (z-1)\sin\varepsilon]\cos\varepsilon\, d\varepsilon,$$

$$V_{\nu-1} - V_{\nu+1} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\sin[\nu\varepsilon + (z-1)\sin\varepsilon]\sin\varepsilon\, d\varepsilon;$$

d'ailleurs, on voit facilement que

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon + (z-1)\sin\varepsilon]\cos\varepsilon\, d\varepsilon \\ &= \int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon + (z-1)\sin\varepsilon][\nu + (z-1)\cos\varepsilon - \nu]\frac{dz}{z-1} \\ &= \frac{1}{z-1}\left\{ e^{(z+1)\cos\varepsilon}\sin[\nu\varepsilon + (z-1)\sin\varepsilon]\right\}_0^{2\pi} \\ &\quad + \frac{z+1}{z-1}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\sin[\nu\varepsilon + (z-1)\sin\varepsilon]\, d\varepsilon \\ &\quad - \frac{\nu}{z-1}\int_0^{2\pi} e^{(z+1)\cos\varepsilon}\cos[\nu\varepsilon + (z-1)\sin\varepsilon]\, d\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$V_{\nu-1}+V_{\nu+1}=\frac{2e^{z+1}\sin 2\nu\pi}{2\pi(z-1)}+\frac{z+1}{z-1}(V_{\nu-1}-V_{\nu+1})-\frac{2\nu}{z-1}V_\nu$$

ou

$$zV_{\nu+1}+\nu V_\nu-V_{\nu-1}=\frac{e^{z+1}\sin 2\nu\pi}{2\pi},$$

et, en changeant ν en $\nu+1$, on a

$$(3)\qquad zV_{\nu+2}+(1+\nu)V_{\nu+1}-V_\nu=\frac{e^{z+1}\sin 2\nu\pi}{2\pi},$$

puis, remplaçant $V_{\nu+1}$ et $V_{\nu+2}$ par $\frac{dV_\nu}{dz}$ et $\frac{d^2V_\nu}{dz^2}$, on arrive à l'équation différentielle

$$(4)\qquad z\frac{d^2V_\nu}{dz^2}+(1+\nu)\frac{dV_\nu}{dz}-V_\nu=\frac{e^{z+1}\sin 2\nu\pi}{2\pi},$$

qui, pour un paramètre entier n, revient à

$$(4\ bis)\qquad z\frac{d^2V_n}{dz^2}+(1+n)\frac{dV_n}{dz}-V_n=0.$$

Pour développer en série la fonction V_ν, on peut, en partant de la formule de Maclaurin, poser

$$V_\nu=A_0+A_1\frac{z}{1}+A_2\frac{z^2}{1.2}+A_3\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots,$$

les coefficients A_0, A_1, A_2, ... désignant les valeurs de V_ν, $\frac{dV_\nu}{dz}$, $\frac{d^2V_\nu}{dz^2}$, ... pour $z=0$. Or, on déduit de l'équation (4), par des différentiations successives et en posant $N=\frac{e\sin 2\nu\pi}{2\pi}$,

$$\begin{aligned}
z\frac{d^2V_\nu}{dz^2}+(1+\nu)\frac{dV_\nu}{dz}-V_\nu&=Ne^z,\\
z\frac{d^3V_\nu}{dz^3}+(2+\nu)\frac{d^2V_\nu}{dz^2}-\frac{dV_\nu}{dz}&=Ne^z,\\
z\frac{d^4V_\nu}{dz^4}+(3+\nu)\frac{d^3V_\nu}{dz^3}-\frac{d^2V_\nu}{dz^3}&=Ne^z,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En faisant $z=0$ et admettant que, pour cette valeur, les dérivées

$\frac{d^2V_\nu}{dz^2}$, $\frac{d^3V_\nu}{dz^3}$, ... ne deviennent pas infinies, on déduit des relations précédentes

$$\begin{aligned}(1+\nu)A_1 - A_0 &= N,\\ (2+\nu)A_2 - A_1 &= N,\\ (3+\nu)A_3 - A_2 &= N,\\ \dots\dots\dots&\dots\dots,\end{aligned}$$

et de là il vient

$$A_1 = \frac{A_0}{1+\nu} + \frac{N}{1+\nu},$$

$$A_2 = \frac{A_0}{(1+\nu)(2+\nu)} + \frac{N}{(1+\nu)(2+\nu)} + \frac{N}{2+\nu},$$

$$A_3 = \frac{A_0}{(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} + \frac{N}{(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)} + \frac{N}{(2+\nu)(3+\nu)} + \frac{N}{3+\nu},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On obtient ainsi

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}V_\nu = A_0&\left[1+\frac{z}{1(1+\nu)}+\frac{z^2}{1.2(1+\nu)(2+\nu)}+\frac{z^3}{1.2.3(1+\nu)(2+\nu)(3+\nu)}+\dots\right]\\ &+\frac{Nz}{1(1+\nu)}\left[1+\frac{z}{2(2+\nu)}+\frac{z^2}{2.3(2+\nu)(3+\nu)}+\dots\right]\\ &+\frac{Nz^2}{1.2(2+\nu)}\left[1+\frac{z}{3(3+\nu)}+\dots\right]\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\end{aligned}\right.$$

quand le paramètre est un nombre entier n, on a $N = 0$, et l'on retombe sur la série connue.

29. Pour trouver directement une forme d'intégrale applicable à la première équation (3 *bis*), § I, nous posons

$$(6)\qquad V_\nu = \int_a^b e^{-\frac{z}{u}}U\,du$$

(U fonction à déteminer), ce qui donne

$$z\frac{d^2V_\nu}{dz^2} + (1+\nu)\frac{dV_\nu}{dz} - V_\nu = \int_a^b e^{-\frac{z}{u}}U\,du\left(\frac{z}{u^2} - \frac{1+\nu}{u} - 1\right).$$

Si nous observons d'autre part qu'on a

$$\int_a^b \frac{d}{du}\left(e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\right)du = \left(e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\right)_a^b = \int_a^b \frac{z}{u^2}e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\,du + \int_a^b e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\,\frac{d\log \mathrm{U}}{du}\,du,$$

nous pouvons écrire

$$z\frac{d^2\mathrm{V}_\nu}{dz^2} + (1+\nu)\frac{d\mathrm{V}_\nu}{dz} - \mathrm{V}_\nu = \left(e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\right)_a^b - \int_a^b e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\,du\left(\frac{d\log \mathrm{U}}{du} + \frac{1+\nu}{u} + 1\right),$$

et nous voyons par là qu'on satisfait à l'équation (3), § I, en posant

$$\left(e^{-\frac{z}{u}}\mathrm{U}\right)_a^b = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\log \mathrm{U}}{du} + \frac{1+\nu}{u} + 1 = 0;$$

de cette dernière on déduit par l'intégration, et en supposant la constante nulle,

$$\mathrm{U} = u^{-(1+\nu)}e^{-u},$$

et on détermine les limites (a) et (b) en posant

$$\left(e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1+\nu)}\right)_a^b = 0.$$

Or, il est facile de voir que les valeurs de u qui annulent l'expression $e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1+\nu)} = \dfrac{1}{e^{\frac{z}{u}}e^{u}u^{1+\nu}}$, sont zéro et ∞. Pour $u = \infty$, la chose est évidente. Pour $u = 0$, on a $e^u = 1$, et il suffit de chercher la limite de $\left(\dfrac{1}{e^{\frac{z}{u}}u^{1+\nu}}\right)_{u=0}$. Si l'on suppose ν compris entre zéro et 1, cas auquel on peut toujours ramener ceux où ν est > 1, on remarquera que la valeur de $e^{\frac{z}{u}}u^{1+\nu}$ est comprise entre $e^{\frac{z}{u}}u^2$ et $e^{\frac{z}{u}}u$; et si l'on développe $e^{\frac{z}{u}}$, il vient

$$e^{\frac{z}{u}}u^2 = u^2 + \frac{zu}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3\,u} + \frac{z^4}{1.2.3.4\,u^2} + \dots,$$

$$e^{\frac{z}{u}}u = u + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2\,u} + \frac{z^3}{1.2.3\,u^2} + \dots,$$

expressions qui deviennent infinies pour $u = 0$; par suite, on a

$$\left(\frac{1}{e^{\frac{z}{u}} u^{1+\nu}}\right)_{u=0} = 0.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$V_\nu = \int_0^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du \quad (7)$$ [1];

remarquons en passant que, dans ce cas, l'expression qui se trouve sous le signe d'intégration se confond avec celle qu'il faut annuler aux limites pour satisfaire à l'équation différentielle.

En supposant la variable imaginaire, on peut intégrer le long d'une courbe contournant le point zéro et allant de ∞ à ∞; on a ainsi

$$V'_\nu = \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du. \quad (8)$$

On obtient, comme nous l'avons vu, une seconde forme d'intégrale en posant $V_\nu = z^{-\nu} U_\nu$, la fonction U_ν satisfaisant à la seconde équation (3 *bis*), § I. Cela donne les deux autres intégrales

$$V''_\nu = z^{-\nu} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{\nu-1}\, du, \quad (9)$$

$$V'''_\nu = z^{-\nu} \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{\nu-1}\, du. \quad (10)$$

De ces quatre formes, deux seulement sont distinctes, et nous allons considérer en particulier les expressions (8) et (10).

---

(1) Dans un Mémoire publié dans les *Annales de Milan*, M. Schläfli pose

$$V_\nu = \int_a^b e^{-zu}\, U\, du,$$

et arrive à l'intégrale

$$V_\nu = \int_0^\infty e^{-\left(zu + \frac{1}{u}\right)} u^{\nu-1}\, du,$$

qui ne diffère de (7) que parce que u y est remplacé par $\frac{1}{u}$.

30. Si dans $\mathrm{\hat{V}}_\nu$ nous développons $e^{-\frac{z}{u}}$, nous avons

$$\mathrm{V}'_\nu = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+\nu+p)}\, du.$$

En désignant par $\mathrm{A}(\nu+p)$ cette dernière intégrale, et appliquant la méthode d'intégration par partie, nous avons

$$\mathrm{A}(\nu+p) = \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+\nu+p)}\, du = -\left(\frac{e^{-u} u^{-(\nu+p)}}{\nu+p}\right)_\infty^\infty - \frac{1}{\nu+p} \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(\nu+p)}\, du;$$

de là on déduit successivement

$$\mathrm{A}(\nu+p) = -\frac{\mathrm{A}(\nu+p-1)}{\nu+p},$$

$$\mathrm{A}(\nu+p-1) = -\frac{\mathrm{A}(\nu+p-2)}{\nu+p-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\mathrm{A}(\nu+1) = -\frac{\mathrm{A}(\nu)}{\nu+1},$$

et, par suite,

$$\mathrm{A}(\nu+p) = \frac{(-1)^p \mathrm{A}(\nu)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+p)} = \frac{(-1)^p \mathrm{A}(\nu)\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+p+1)}.$$

Pour $\mathrm{A}(\nu)$ on a

$$\mathrm{A}(\nu) = \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du = \int_\infty^0 e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du + e^{-2\nu\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du,$$

ou

$$\mathrm{A}(\nu) = (e^{-2\nu\pi i} - 1) \int_0^\infty e^{-u} u^{-(1+\nu)}\, du = -2i \sin\nu\pi\, e^{-\nu\pi i}\, \Gamma(-\nu);$$

mais, d'après une formule connue, on sait que

$$\Gamma(-\nu)\,\Gamma(1+\nu) = -\frac{\pi}{\sin\nu\pi};$$

il vient donc

et, par suite,

$$A(\nu+p)=\frac{2\pi i(-1)^p e^{-\nu\pi i}}{\Gamma(\nu+p+1)}\ [1].$$

On a ainsi

$$(11)\qquad V'_\nu=2\pi i\,e^{-\nu\pi i}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)}=\int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1+\nu)}\,du.$$

En traitant de la même manière l'intégrale (10), nous obtenons

$$(12)\qquad V''_\nu=2\pi i\,e^{\nu\pi i}z^{-\nu}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(-\nu+p+1)}=z^{-\nu}\int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1-\nu)}\,du;$$

de là nous déduisons

$$(13)\qquad \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)}=\frac{e^{\nu\pi i}}{2\pi i}\int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1+\nu)}\,du,$$

$$(14)\qquad \sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(-\nu+p+1)}=\frac{e^{-\nu\pi i}}{2\pi i}\int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}}e^{-u}u^{-(1-\nu)}\,du.$$

Dans le cas où le paramètre est un nombre entier n, tous les termes, à partir de celui qui contient z^n, deviennent infinis dans (12) ou (14). Il faut alors séparer l'intégrale (10) en deux, et poser, en la désignant par V_n,

$$V_n=z^{-n}\sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p}\int_\infty^\infty e^{-u}u^{-(1+p-n)}\,du$$
$$+z^{-n}\sum_{p=n}^{p=\infty}\frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p}\int_\infty^\infty e^{-u}u^{-(1+p-n)}\,du.$$

La première partie est nulle, car les intégrales $\int_\infty^\infty e^{-u}u^{n-p-1}\,du$, prises le long d'un contour fermé dans lequel la fonction $e^{-u}u^{n-p-1}$ est finie,

---

[1] Cette formule, qui revient à $\frac{1}{2\pi i}\int_\infty e^{-u}u^{-(1+\nu+p)}\,du=\frac{e^{-(\nu+p)\pi i}}{\Gamma(\nu+p+1)}$, s'accorde avec celle qui a été donnée par Weierstrass quand ν est entier.

continue et monodrôme, sont toutes nulles tant que p est $\leqq n-1$, et l'on a, en remplaçant p par $n+p$,

$$V_n = (-1)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots n(n+1).(n+2)\ldots(n+p)} \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+p)}\, du.$$

Si l'on pose comme précédemment

$$A(p) = \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+p)}\, du,$$

il vient

$$A(p) = \frac{(-1)^p A_0}{1.2.3\ldots p}.$$

Pour évaluer $A(0)$, remarquons qu'on a

$$A(0) = \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-1}\, du,$$

et

$$\int_\infty^\infty = \int_\infty^1 + \int_1^1 + \int_1^\infty,$$

la seconde intégrale $\int_1^1$ étant prise le long d'une courbe qui contourne le point zéro ; et comme la fonction $e^{-u}u^{-1}$ est finie, continue et monodrôme de 1 à ∞, les intégrales $\int_\infty^1$ et $\int_1^\infty$ sont égales et de signes contraires; de sorte qu'on a

$$\int_\infty^\infty e^{-u} u^{-1}\, du = \int_1^1 e^{-u} u^{-1}\, du.$$

L'intégrale $\int_1^1$ peut être prise le long d'un cercle de rayon 1, et ayant pour centre l'origine. Posons $u = e^{\varphi i}$, nous aurons

$$du = i\, d\varphi . e^{\varphi i},$$

et pour $u = 1$,

$$\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 2\pi,$$

de cette façon, puisque

$$e^{-u} = 1 - \frac{u}{1} + \frac{u^2}{1.2} - \frac{u^3}{1.2.3} + \ldots = 1 - \frac{e^{\varphi i}}{1} + \frac{e^{2\varphi i}}{1.2} - \ldots,$$

il vient

$$\int_1^1 e^{-u} u^{-1} du = i \int_0^{2\pi} d\varphi \left(1 - \frac{e^{\varphi i}}{1} + \frac{e^{2\varphi i}}{1.2} - \ldots\right) = 2\pi i;$$

par suite on a

$$\text{(15)} \qquad A(0) = 2\pi i,$$

et

$$\text{(16)} \qquad V_n = 2\pi i(-1)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(p+n+1)},$$

valeur identique à celle qu'on déduit de (11) en remplaçant ν par n; ce qui montre que, dans le cas où le paramètre est entier, les deux intégrales (11) et (12) se confondent, et nous n'avons ainsi qu'une seule intégrale particulière.

31. Pour trouver dans ce cas la seconde intégrale, nous partons de la deuxième équation (3 *bis*), § I, dont les intégrales

$$U_1 = z^\nu \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+\nu)} du,$$

$$U_2 = \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1-\nu)} du$$

sont égales à celles de la première (3 *bis*) multipliées par z^ν. Si l'on suppose $\nu = n + \varepsilon$, n nombre entier et ε quantité très petite, l'expression

$$U = \frac{z^{n+\varepsilon} \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+n+\varepsilon)} du - \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1-n-\varepsilon)} du}{\varepsilon}$$

est encore une intégrale de l'équation citée, quelque petite que soit la quantité ε; sa limite pour $\varepsilon = 0$ est donc la seconde intégrale cherchée.

Désignons par U_n cette limite, qui est la dérivée $\left(\frac{dU}{d\nu}\right)_{\nu=n}$, nous aurons

$$(17)\quad \begin{cases} U_n = z^n \log z \displaystyle\int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+n)}\, du \\ \qquad - z^n \displaystyle\int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1+n)} \log u\, du - \displaystyle\int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(1-n)} \log u\, du, \end{cases}$$

ou, en représentant par I_1, I_2, I_3 les trois intégrales définies qui y entrent,

$$(17\ bis)\qquad U_n = I_1 z^n \log z - I_2 z^n - I_3.$$

La valeur de la première est donnée par la formule (11), et nous avons

$$I_1 = 2\pi i e^{-n\pi i} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1)}.$$

Pour la seconde, nous avons, en développant $e^{-\frac{z}{u}}$,

$$I_2 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+n+p)} \log u\, du;$$

et, si nous posons

$$B(n+p) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+n+p)} \log u\, du,$$

nous voyons qu'on a

$$B(n+p) = -\frac{dA(n+p)}{dn};$$

or, la valeur précédente de $A(\nu+p)$ donne

$$A(n+p) = \frac{2\pi i(-1)^p e^{-n\pi i}}{\Gamma(n+p+1)}$$

et, par suite,

$$B(n+p) = -\frac{2\pi^2(-1)^p e^{-n\pi i}}{\Gamma(n+p+1)} + \frac{2\pi i(-1)^p e^{-n\pi i} \Psi(n+p+1)}{\Gamma(n+p+1)};$$

nous avons donc

$$I_2 = -2\pi^2 e^{-n\pi i} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1)} + 2\pi i e^{-n\pi i} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p \Psi(n+p+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1)}.$$

Si dans la troisième intégrale on développe également $e^{-\frac{z}{u}}$, on a

$$I_3 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_{\alpha}^{\infty} u^{-(1-n+p)} \log u . e^{-u}\, du;$$

si l'on pose

$$B(n-p) = \int_{\alpha}^{\infty} u^{n-p-1} \log u . e^{-u}\, du$$

et qu'on intègre par partie, il vient

$$B(n-p) = \left(\frac{u^{n-p} \log u . e^{-u}}{n-p}\right)_{\alpha}^{\infty} + \frac{1}{n-p}\int_{\alpha}^{\infty} u^{n-p} \log u . e^{-u}\, du$$
$$- \frac{1}{n-p}\int_{\alpha}^{\infty} u^{n-p-1} e^{-u}\, du.$$

Tant qu'on a $p \leq n-1$, la dernière intégrale, comme nous l'avons déjà observé, est nulle, et dans ce cas l'on a

$$B(n-p) = \frac{B(n-p+1)}{n-p};$$

c'est ce qui conduit à séparer la valeur de I_3 en deux parties, que nous désignons par I'_3 et I''_3, et nous posons

$$I'_3 = \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+p-n)} \log u\, du,$$

$$I''_3 = \sum_{p=n}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+p-n)} \log u\, du.$$

La première partie I'_3 est facile à calculer. De la valeur précédente de $B(n-p)$ on déduit

$$B(n-p+1) = (n-p)\, B(n-p),$$

puis, en changeant p en $p+1$, $p+2$, ...,

$$\begin{aligned} B(n-p) &= (n-p-1)\,B(n-p-1),\\ B(n-p-1) &= (n-p-2)\,B(n-p-2),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ B(2) &= 1\,B(1), \end{aligned}$$

d'où

$$B(n-p) = 1.2.3\ldots(n-p-1)\,B(1);$$

d'ailleurs on a

$$B(1) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-u}\log u\,du = -(e^{-u}\log u)_{\infty}^{\infty} + \int_{\infty}^{\infty} e^{-u}\frac{du}{u} = 2\pi i;$$

par suite

$$B(n-p) = 2\pi i\,\Gamma(n-p),$$

et

$$I'_3 = 2\pi i \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p z^p\,\Gamma(n-p)}{\Gamma(p+1)}.$$

Quant à I''_3, remarquons que, si l'on remplace p par $p+n$, il vient

$$I''_3 = (-1)^n z^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots n(n+1)\ldots(n+p)} \int_{\infty}^{\infty} e^{-u}\,u^{-(1+p)}\log u\,du,$$

et que cette valeur est analogue à celle de I_2; de là on conclut

$$I''_3 = -2\pi^2(-1)^n z^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(n+p+1)} + 2\pi i(-1)^n z^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p\,\Psi(p+1)}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(n+p+1)}.$$

On a donc finalement, puisque $e^{-n\pi i} = (-1)^n$,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} U_n = 2\pi i(-1)^n \Bigg\{ & z^n \log z \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(n+p+1)} \\ & - z^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1)}\,[\Psi(n+p+1)+\Psi(p+1)]\Bigg\} \\ & - 2\pi i \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p z^p\,\Gamma(n-p)}{\Gamma(p+1)} + 4\pi^2(-1)^n z^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1)}. \end{aligned}\right.$$

En supprimant le dernier terme qui est la première intégrale particulière, et divisant par z_{0}^{n}, on a la seconde intégrale de la première équation différentielle (3 *bis*), § I, que nous désignons par Y_n, savoir

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} Y_n = & -2\pi i z^{-n} \sum_{p=0}^{p=n-1} \frac{(-1)^p z^p \Gamma(n-p)}{\Gamma(p+1)} \\ & + 2\pi i (-1)^n \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(n+p+1)} [\log z - \Psi(n+p+1) - \Psi(p+1)], \end{aligned}\right.$$

résultats qui s'accordent avec ceux que nous avons obtenus au § II et avec ceux qui sont donnés par M. H. Hankel ([1]).

32. Du cas où le paramètre est un nombre entier n, on peut déduire aisément celui où $n = 0$. Mais il est aussi facile d'établir directement les développements qui conviennent à ce cas. D'après ce qui précède, la fonction

$$U_\nu = \frac{\int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{\nu-1} du - z^\nu \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-(\nu+1)} du}{\nu}$$

est une intégrale de la deuxième équation (3 *bis*), § I, quelque petite que soit la valeur de ν. Pour $\nu = 0$, cette expression se réduit à $\frac{0}{0}$; et, pour avoir la valeur vers laquelle elle tend à cette limite, nous prenons, comme précédemment, la dérivée des deux termes par rapport à ν, et nous faisons ensuite $\nu = 0$, ce qui donne

$$(20)\qquad Y_0 = 2\int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-1} \log u\, du - \log z \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-1} du,$$

ou

$$(20\ bis)\qquad Y_0 = \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} \log \frac{u^2}{z} \frac{du}{u}.$$

Remarque. — On peut démontrer *a posteriori* que cette expression est une intégrale de l'équation (6), § I; car, si l'on y remplace V_0 par la

([1]) CLEBSCH et NEUMANN, *Mathematische Annalen*, t. I, p. 471.

valeur

$$Y_0 = \int_a^b e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} \log \frac{u^2}{z} \frac{du}{u},$$

on trouve

$$z \frac{d^2 Y_0}{dz^2} + \frac{dY_0}{dz} - Y_0 = \left(\log \frac{u^2}{z} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-1} \right)_a^b.$$

Cette dernière expression, qui revient à $\dfrac{2\log u - \log z}{u e^u e^{\frac{z}{u}}}$, est nulle pour o et ∞ ; c'est ce qui a été démontré précédemment pour $\dfrac{1}{u e^u e^{\frac{z}{u}}}$ et par suite pour $\dfrac{\log z}{u e^u e^{\frac{z}{u}}}$.

D'ailleurs, comme pour $u = 0$ et $u = \infty$, on a $\dfrac{1}{e^u e^{\frac{z}{u}}} = 0$, il suffit de considérer ce que devient $\dfrac{2\log u}{u}$. Soit $u = e^\varphi$, on aura

$$\frac{2\log u}{u} = \frac{2\varphi}{e^\varphi} = \frac{2\varphi}{1 + \frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^2}{1.2} + \ldots};$$

or, pour $u = 0$, $\varphi = -\infty$, et pour $u = \infty$, $\varphi = \infty$; dans ces deux cas l'expression $\frac{2\varphi}{e^\varphi}$ est nulle. On peut donc prendre pour seconde intégrale de l'équation limite

$$Y_0 = \int_0^\infty \log \frac{u^2}{z} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} \frac{du}{u}.$$

Pour développer en série, considérons la deuxième intégrale qui entre dans (20), savoir

$$I_1 = \int_\infty^\infty e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} u^{-1} du,$$

et qui, si l'on développe $e^{-\frac{z}{u}}$, revient à

$$I_1 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_\infty^\infty e^{-u} u^{-(1+p)} du.$$

Comme, d'après ce qui précède, on a

$$A(p) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+p)} du = \frac{2\pi i(-1)^p}{1.2.3\ldots p},$$

il vient

$$I_1 = 2\pi i \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{[\Gamma(p+1)]^2}.$$

La première intégrale

$$I_2 = \int_{\infty}^{\infty} e^{-\frac{z}{u}} e^{-u} \log u \frac{du}{u}$$

revient à

$$I_2 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p z^p}{1.2.3\ldots p} \int_{\infty}^{\infty} e^{-u} u^{-(1+p)} \log u \, du,$$

ou, d'après ce qu'on a vu, à

$$I_2 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{[\Gamma(p+1)]^2} [-2\pi^2 + 2\pi i \Psi(p+1)].$$

On a donc

$$Y_0 = -4\pi^2 \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{[\Gamma(p+1)]^2} + 2\pi i \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{[\Gamma(p+1)]^2} [2\Psi(p+1) - \log z].$$

Si l'on supprime le premier terme, qui est à lui seul une intégrale particulière, et qu'on change les signes, il vient

$$(21) \qquad Y_0 = 2\pi i \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{z^p}{[\Gamma(p+1)]^2} [\log z - 2\Psi(p+1)],$$

formule qu'on déduit immédiatement de (19) en faisant $n = 0$.

VI.

CAS OU LE PARAMÈTRE ν EST DE LA FORME $\nu = n + \frac{1}{2}$.

---

33. M. Lommel a examiné en particulier le cas où $\nu = n + \frac{1}{2}$, n étant un nombre entier ([1]). Dans ce cas, on a

$$1 + 2\nu = 2n + 2, \quad 1 - 2\nu = -2n,$$

et les équations différentielles qui peuvent remplacer l'équation (1 *bis*, § 1) sont les suivantes :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{x}\frac{dy}{dx} - y = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy_1}{dx} - y_1 = 0, \tag{1 bis}$$

Il résulte de ce qui a été démontré que, si l'on a une intégrale de l'équation (1), en la multipliant par x^{2n+1}, on aura une intégrale de (1 *bis*); il suffit donc d'intégrer l'une des deux équations précédentes.

Ce sont les équations (1) et (1 *bis*) que considère M. Serret dans un Mémoire inséré au *Journal de Liouville* ([2]) et qu'il intègre à l'aide de la méthode des différentielles à indices quelconques. Pour établir les formules auxquelles arrive cet auteur, nous suivons une marche toute différente, et qui paraît assez simple. Prenons les équations (1) et (1 *bis*) sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{2}\frac{dy}{dx} - m^2y = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dy_1}{dx} - m^2y_1 = 0. \tag{2 bis}$$

([1]) *Studien über die Besselschen Functionen*, p. 51.

([2]) *Journal de Liouville*, t. 9, p. 193.

Si, dans la première, nous posons, comme M. Serret,

$$y = \mathrm{R}e^{\mu x},$$

et en même temps $\mu^2 - m^2 = 0$, en prenant d'abord $\mu = +m$, il vient

$$(3) \qquad x\frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} + [2mx + 2(n+1)]\frac{d\mathrm{R}}{dx} + 2m(n+1)\mathrm{R} = 0.$$

Cette équation est de la même forme que la suivante :

$$(4) \qquad x\frac{d^2u}{dx^2} + (2mx - k)\frac{du}{dx} - 2mku = 0,$$

qui admet comme intégrale particulière

$$u = e^{-2mx}.$$

Si dans (4) on fait

$$u = x^{k+1}u',$$

il vient

$$(5) \qquad \frac{x\,d^2u'}{dx^2} + (2mx + k + 2)\frac{du'}{dx} + 2mu' = 0,$$

et si l'on différentie h fois cette dernière, on obtient

$$(6) \qquad x\frac{d^{h+2}u'}{dx^{h+2}} + (2mx + k + h + 2)\frac{d^{h+1}u'}{dx^{h+1}} + 2m(h+1)\frac{d^hu'}{dx^h} = 0,$$

équation qu'on rend identique à (3) en prenant

$$k = h = n,$$

ce qui donne

$$(7) \qquad \mathrm{R} = \mathrm{K}\frac{d^nu'}{dx^n} = \mathrm{K}\frac{d^n(e^{-2mx}x^{-n-1})}{dx^n} \quad (\mathrm{K}\ \text{const.}),$$

et l'on a ainsi pour première intégrale de (2)

$$(8) \qquad y' = \mathrm{A}\,e^{mx}\frac{d^n(e^{-2mx}x^{-n-1})}{dx^n} \quad (\mathrm{A}\ \text{const.}).$$

Si l'on fait en second lieu $\mu = -m$, il vient

$$y'' = \mathrm{B}\, e^{-mx} \frac{d^n(e^{2mx} x^{-n-1})}{dx^n}; \tag{8 bis}$$

l'intégrale générale est donc

$$y = \mathrm{A}\, e^{mx} \frac{d^n(e^{-2mx} x^{-n-1})}{dx^n} + \mathrm{B}\, e^{-mx} \frac{d^n(e^{2mx} x^{-n-1})}{dx^n}. \tag{9}$$

De là, en s'appuyant sur la formule connue

$$x^{-n-1} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty e^{-ux} u^n \, du,$$

on déduit

$$y = \mathrm{A}\, e^{-mx} \int_0^\infty e^{-ux} u^n (u+2m)^n \, du + \mathrm{B}\, e^{mx} \int_0^\infty e^{-ux} u^n (u-2m)^n \, du. \tag{10}$$

34. On peut, d'ailleurs, appliquer à l'équation (3) la méthode que nous avons déjà employée précédemment. En posant

$$\mathrm{R} = \int_a^b \frac{e^{-ux}\,\mathrm{U}\, du}{u(2m-u)},$$

nous avons

$$\begin{aligned}
&x \frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} + [2mx + 2(n+1)] \frac{d\mathrm{R}}{dx} + 2m(n+1)\,\mathrm{R} \\
&= -\int_a^b \frac{e^{-ux}\,\mathrm{U}\, du}{u(u-2m)} [u(2m-u)x - 2(n+1)(m-u)] \\
&= -\int_a^b e^{-ux}\,\mathrm{U}\, du \left(x - \frac{n+1}{u} - \frac{n+1}{u-2m}\right).
\end{aligned}$$

Comme, d'un autre côté, on a identiquement

$$\int_a^b \frac{d}{du}(e^{-ux}\,\mathrm{U})\, du = [e^{-ux}\,\mathrm{U}]_a^b = -x \int_a^b e^{-ux}\,\mathrm{U}\, du + \int_a^b e^{-ux}\,\mathrm{U} \frac{d \log \mathrm{U}}{du}\, du,$$

il vient

$$\begin{aligned}
&x \frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2} + [(2mx + 2(n+1)] \frac{d\mathrm{R}}{dx} + 2m(n+1)\mathrm{R} \\
&= (e^{-ux}\mathrm{U})_a^b - \int_a^b e^{-ux}\,\mathrm{U}\, du \left(\frac{d \log \mathrm{U}}{du} - \frac{n+1}{u} - \frac{n+1}{u-2m}\right),
\end{aligned}$$

et, pour satisfaire à l'équation (3), on voit qu'il suffit de poser

$$\frac{d \log \mathrm{U}}{du} - \frac{n+1}{u} - \frac{n+1}{u-2m} = 0, \quad (e^{-ux}\mathrm{U})_a^b = 0;$$

de là on déduit

$$\mathrm{U} = u^{n+1}(u-2m)^{n+1},$$

et les limites qui annulent l'expression $e^{-ux}u^{n+1}(u-2m)^{n+1}$ sont 0, $2m$ et ∞. On a donc les trois intégrales particulières

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R}_1 &= \int_0^{\infty} e^{-ux} u^n (u-2m)^n\, du, \\ \mathrm{R}_2 &= \int_{2m}^{\infty} e^{-ux} u^n (u-2m)^n\, du, \\ \mathrm{R}_3 &= \int_0^{2m} e^{-ux} u^n (u-2m)^n\, du. \end{aligned} \right.$$

Si l'on change m en $-m$, on trouve de même

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{R}'_1 &= \int_0^{\infty} e^{-ux} u^n (u+2m)^n\, du, \\ \mathrm{R}'_2 &= \int_{-2m}^{\infty} e^{-ux} u^n (u+2m)^n\, du, \\ \mathrm{R}'_3 &= \int_{-2m}^{0} e^{-ux} u^n (u+2m)^n\, du, \end{aligned} \right.$$

résultats qui s'accordent avec ceux qu'a obtenus M. Serret.

Remarque. — Il est bon d'observer que les formes d'intégrales précédentes peuvent se déduire aisément de la méthode suivie par Euler, Jacobi, Kummer, etc. On sait que l'équation différentielle

$$(13) \qquad x(1-x)\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \alpha\beta\mathrm{Y} = 0$$

admet comme intégrale particulière la série à quatre éléments

$$\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots,$$

et que cette série peut être représentée par l'intégrale définie

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du}{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\,du} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}\,du \quad (^1). \end{aligned} \right.$$

Si l'on observe, comme le fait Hansen [2], que la fonction de Fourier est la limite de $F\left(\alpha, \beta, \gamma, -\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)$, lorsque les deux paramètres α et β deviennent infinis, il suffit de chercher ce que devient, dans cette hypothèse, la limite de l'intégrale précédente. Or on trouve aisément les limites de l'équation différentielle et de la série; mais, pour arriver à la limite de l'intégrale définie, il faut d'abord passer par le cas où un seul des éléments α devient infini. Dans ce cas, l'équation différentielle (13) et l'intégrale (14) deviennent

$$(15)\qquad x\frac{d^2Y}{dx^2} + (\gamma - x)\frac{dY}{dx} - \beta Y = 0,$$

$$(16)\qquad Y = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}e^{xu}\,du.$$

Or si, dans l'équation (3), on change x en $-x$, et si l'on fait $2m = 1$, elle devient

$$(3\ bis)\qquad x\frac{d^2R}{dx^2} + [2(n+1) - x]\frac{dR}{dx} - (n+1)R = 0,$$

équation de même forme que (15); par conséquent, pour avoir une intégrale de (3), il suffira de changer x en $-x$ dans (16), et de faire $\gamma = 2(n+1)$, $\beta = n+1$; ce qui donne

$$(17)\qquad R = \frac{\Gamma[2(n+1)]}{[\Gamma(n+1)]^2}\int_0^1 u^n(1-u)^n e^{-xu}\,du,$$

et c'est le résultat qu'on obtient en faisant $2m = 1$ dans R_3 (11).

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 15. — KUMMER, *Sur la série hypergéométrique*.
[2] *Abhandlung der Sächsischen Gesellschaft*, etc., t. II, p. 252; 1855.

De là on déduit

$$(18)\qquad y = \mathrm{R}e^{\frac{x}{2}} = \frac{\Gamma[2(n+1)]}{[\Gamma(n+1)]^2}\int_0^1 u^n(1-u)^n e^{\frac{x}{2}(1-2u)}\,du$$

pour une des intégrales particulières de l'équation (2) où l'on suppose $m = \frac{1}{2}$, et qui, par conséquent, ne contient qu'un paramètre.

En posant $1 - 2u = v$, on arrive à

$$(18\ bis)\qquad \mathrm{R}e^{\frac{x}{2}} = y = \frac{\Gamma[2(n+1)]}{2^{2n+1}[\Gamma(n+1)]^2}\int_{-1}^{+1}(1-v^2)^n e^{\frac{xv}{2}}\,dv;$$

on déduit de là une formule qui se trouve démontrée d'une manière bien différente dans le Mémoire de Kummer : en égalant en effet les deux valeurs de R, déduites de (17) et (18 *bis*), et changeant x en $-x$ et n en $n-1$, on obtient

$$\int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{n-1}e^{xu}\,du = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2^{2n-1}}\int_{-1}^{+1}(1-v^2)^{n-1}e^{-\frac{xv}{2}}\,dv;$$

et, si l'on développe ces deux intégrales en série, il vient

$$1 + \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)}x^2 + \ldots$$
$$= e^{\frac{x}{2}}\left[1 + \frac{x^2}{1\left(n+\frac{1}{2}\right)2^4} + \frac{x^4}{1.2\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)2^8} + \ldots\right],$$

ce qui n'est autre que la formule (8), § 26 du Mémoire cité.

35. Pour avoir la seconde forme d'intégrale donnée par M. Serret, nous partons de l'équation (2 *bis*). En faisant $y_1 = \mathrm{R}_1 e^{\mu x}$, $\mu^2 - m^2 = 0$, et prenant d'abord $\mu = m$, nous avons, pour déterminer R_1,

$$(19)\qquad x\frac{d^2\mathrm{R}_1}{dx^2} + (2mx - 2n)\frac{d\mathrm{R}_1}{dx} - 2mn\mathrm{R}_1 = 0,$$

équation qui, par $(n+1)$ différentiations, donne

$$(19\ bis)\qquad x\frac{d^{n+3}\mathrm{R}_1}{dx^{n+3}} + (2mx - n + 1)\frac{d^{n+2}\mathrm{R}_1}{dx^{n+2}} + 2m\frac{d^{n+1}\mathrm{R}_1}{dx^{n+1}} = 0.$$

D'autre part, si dans l'équation (5) on fait $k = -n-1$ et $u' = u'_1$, il vient

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &x\frac{d^2 u'_1}{dx^2}+(2mx-n+1)\frac{du'_1}{dx}+2mu'_1=0,\\ &u'_1=ux^n=x^n e^{-2mx};\end{aligned}\right.$$

de la comparaison des équations (19 *bis*) et (20) l'on conclut

$$C\frac{d^{n+1}R_1}{dx^{n+1}}=u'_1\quad (C \text{ const.})$$

et, par suite,

$$(21)\qquad C\frac{d^{n+1}(y_1 e^{-mx})}{dx^{n+1}}=x^n e^{-2mx};$$

de là on déduit, en employant la notation de M. Liouville,

$$y_1=A_1 e^{mx}\int^{n+1} x^n e^{-2mx}\,dx^{n+1}.$$

En changeant m en $-m$, on a la seconde intégrale particulière, et par conséquent l'intégrale générale de (2 *bis*) est

$$(22)\qquad y_1=A_1 e^{mx}\int^{n+1} x^n e^{-2mx}\,dx^{n+1}+B_1 e^{-mx}\int^{n+1} x^n e^{2mx}\,dx^{n+1}.$$

Remarque. — Comme, entre deux intégrales particulières correspondantes des équations (2) et (2 *bis*), on a

$$y_1=x^{2n+1}y,$$

la relation (21) donne

$$C\frac{d^{n+1}(x^{2n+1}ye^{-mx})}{dx^{n+1}}=x^n e^{-2mx};$$

et si l'on remplace ici ye^{-mx} par sa valeur déduite de (8), on obtient

$$C\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left[x^{2n+1}\frac{d^n(e^{-2mx}x^{-n-1})}{dx^n}\right]=x^n e^{-2mx},$$

ce qui revient à

$$\int^{n+1} x^n e^{-2mx}\,dx^{n+1}=Cx^{2n+1}\frac{d^n(e^{-2mx}x^{-n-1})}{dx^n},$$

autre formule indiquée par M. Serret, et où il est facile de vérifier que pour la constante on a

$$C = \left(-\frac{1}{2m}\right)^{2n+1}.$$

Pour passer des intégrales multiples (22) à des intégrales simples, il suffit d'appliquer la formule de M. Liouville, et celle qu'en a déduite M. Serret. Mais l'on peut aussi déduire immédiatement ces nouvelles intégrales des précédentes (10) en faisant $ux = 2mu'$; on obtient ainsi

$$y = Ae^{-mx}\left(\frac{2m}{x}\right)^{2n+1}\int_0^\infty e^{-2mu'}u'^n(x+u')^n\,du'$$
$$+ B(-1)^n e^{mx}\left(\frac{2m}{x}\right)^{2n+1}\int_0^\infty e^{-2mu'}u'^n(x-u')^n\,du';$$

si l'on observe que $y_1 = x^{2n+1}y$, y_1 et y étant deux intégrales correspondantes, on a, en désignant par A et B deux nouvelles constantes, et supprimant l'accent de u',

$$(23)\quad y_1 = Ae^{-mx}\int_0^\infty e^{-2mu}u^n(x+u)^n\,du + Be^{mx}\int_0^\infty e^{-2mu}u^n(x-u)^n\,du,$$

formule identique à celle qui est donnée par M. Serret.

Il est bon de remarquer, en passant, que la première forme d'intégrale (10), si l'on y fait $m = 1$, revient à

$$y = 2^n Ae^{-x}\int_0^\infty e^{-ux}u^n\left(1+\frac{u}{2}\right)^n du + B(-2)^n e^{x}\int_0^\infty e^{-ux}u^n\left(1-\frac{u}{2}\right)^n du$$

ou

$$(24)\quad y = Ae^{-x}\int_0^\infty e^{-ux}u^n\left(1+\frac{u}{2}\right)^n du + Be^{x}\int_0^\infty e^{-ux}u^n\left(1-\frac{u}{2}\right)^n du$$

(A et B nouvelles const.),

et que les deux formes d'intégrales particulières qui entrent dans cette expression sont analogues à celles qui sont données par M. Hermann Hankel dans son Mémoire sur les fonctions cylindriques (*Mathematische Annalen*, vol. I, p. 491).

La seconde forme (23) revient à celle qui est donnée par M. Lommel dans ses *Études sur les fonctions de Bessel* (p. 63); car, si l'on fait

$m = 1$, et qu'on remplace $2u$ par u, il vient

$$(25)\quad y = \frac{A x^n e^{-x}}{2^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^n \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^n du + \frac{B x^n e^x}{2^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^n \left(1 - \frac{u}{2x}\right)^n du.$$

36. Si l'on développe R_1 en série, on trouve, en supposant $2m = 1$, les trois expressions suivantes :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} R_1 &= A_1 x^{2n+1}\left[1 - \frac{(1+n)}{1(2+2n)} x + \frac{(1+n)(2+n)}{1.2(2+2n)(3+2n)} x^2 - \ldots\right], \\ R_2 &= A_2\left[1 - \frac{n}{1.2n} x + \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)} x^2 \right. \\ &\qquad \left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)} + \ldots\right], \\ R_3 &= A_3 x^n\left[1 - \frac{n(n+1)}{1}\frac{1}{x} + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2}\frac{1}{x^2} \right. \\ &\qquad - \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}\frac{1}{x^3} + \ldots \\ &\qquad \left. + (-1)^n \frac{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}\frac{1}{x^n}\right]. \end{aligned}\right.$$

Ce qui est remarquable, c'est que, lorsque n est un nombre entier, comme nous le supposons ici, les valeurs de R_2 et R_3 sont limitées et ne diffèrent que par un facteur constant. Car si l'on ordonne R_3 suivant les puissances croissantes de x, on peut écrire

$$\begin{aligned} R_3 &= A_3(-1)^n \frac{1.2.3\ldots n(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n} \\ &\times\left[1 - \frac{n}{1.2n} x + \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)} x^2 - \ldots + (-1)^n \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots n(n+1)\ldots 2n} x^n\right], \end{aligned}$$

d'où l'on voit qu'on aura $R_2 = R_3$, si les constantes A_2 et A_3 satisfont à la relation

$$A_2 = A_3(-1)^n (n+1)(n+2)\ldots 2n,$$

remarque que je crois nouvelle. Dans ce cas, les deux solutions particulières de l'équation (19) sont représentées, l'une par la série infinie R_1 développée suivant les puissances croissantes de la variable, et l'autre par R_2, polynôme limité et du degré n.

Si n n'est pas entier, la fonction R_2 est, comme R_1, une série convergente développée suivant les puissances croissantes de x, tandis que R_3, qui est développée suivant les puissances décroissantes de cette variable, est une série du genre de celles qu'on nomme *semi-convergentes*.

VII.

QUELQUES CONSÉQUENCES RELATIVES A LA FONCTION EXPONENTIELLE.

---

37. En étudiant les formules où entre la fonction exponentielle e^{mx}, on arrive à quelques conséquences qui méritent d'être signalées. C'est une indication que je dois à la bienveillance de M. Hermite, qui m'a conduit aux résultats exposés dans ce paragraphe et qui s'accordent avec ceux que ce savant a démontrés dans un Mémoire publié dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (année 1873).

Considérons l'expression $D_x^n\left(\frac{e^{2mx}}{x^{n+1}}\right)$, qui entre dans la formule (8 *bis*), § VI, et faisons $2m = 1$, nous aurons

$$(1) \qquad D_x^n\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right) = D_x^n\left(\frac{1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots}{x^{n+1}}\right);$$

en séparant le second membre en deux parties, nous obtenons

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} D_x^n\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right) &= D_x^n\left(\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{1}{1.x^n}+\frac{1}{1.2.x^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots nx}\right) \\ &\quad + D_x^n\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}\left[1+\frac{x}{n+2}+\frac{x^2}{(n+2)(n+3)}+\ldots\right], \end{aligned}\right.$$

ce qui revient à

$$(2\,bis) \qquad D_x^n\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right) = \frac{P(x)}{x^{2n+1}} + S(x),$$

$P(x)$ désignant un polynôme du degré n et $S(x)$ une série infinie de la forme $\alpha + \alpha' x + \alpha'' x^2 + \ldots$.

D'un autre côté, si l'on considère $\frac{e^x}{x^{n+1}}$ comme le produit de deux facteurs e^x et $x^{-(n+1)}$, on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & D_x^n[e^x x^{-(n+1)}] \\ & = e^x\left[x^{-(n+1)} - \frac{n}{1}(n+1)x^{-(n+2)} + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2}x^{-(n+3)} - \ldots\right], \end{aligned}\right.$$

ou

$$(3\,bis)\qquad D_x^n\left(\frac{e^x}{x^{n+1}}\right) = e^x\frac{Q(x)}{x^{2n+1}},$$

$Q(x)$ désignant encore un polynôme du degré n.

Des relations ($2\,bis$) et ($3\,bis$) on déduit

$$e^x\frac{Q(x)}{x^{2n+1}} = \frac{P(x)}{x^{2n+1}} + S(x),$$

et de là il vient

$$(4)\qquad e^x = \frac{P(x)}{Q(x)} + x^{2n+1}\frac{S(x)}{Q(x)},$$

expression remarquable de la fonction exponentielle.

Il est facile de conclure de ce qui précède les valeurs de $P(x)$, $Q(x)$ et $S(x)$. On a d'abord

$$\begin{aligned} & D_x^n\left(\frac{1}{x^{n+1}} + \frac{1}{1.x^n} + \frac{1}{1.2.x^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots nx}\right) \\ & = \frac{(-1)^n}{x^{2n+1}}\left[(n+1)(n+2)\ldots 2n + \frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1}x\right. \\ & \qquad\left. + \frac{(n-1)n(n+1)\ldots(2n-2)}{1.2}x^2 + \ldots + x^n\right] \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & P(x) = (-1)^n(n+1)(n+2)\ldots 2n \\ & \qquad\times\left[1 + \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2 + \ldots + \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots 2n}x^n\right]; \end{aligned}\right.$$

puis les relations (3) et (3 *bis*) donnent

$$Q(x) = x^n - \frac{n}{1}(n+1)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n+1)(n+2)x^{n-2} - \ldots (-1)^n \frac{1.2.3\ldots 2n}{1.2.3\ldots n},$$

ou

$$(6)\left\{\begin{aligned} Q(x) &= (-1)^n(n+1)(n+2)\ldots 2n \\ &\times\left[1 - \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2 - \ldots (-1)^n \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots 2n}x^n\right],\end{aligned}\right.$$

d'où cette conséquence remarquable que $Q(x)$ se déduit de $P(x)$ par le changement de x en $-x$; enfin pour $S(x)$ on a

$$\begin{aligned} S(x) = D_x^n \frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)}\Bigg[1 &+ \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{x^n}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+1)} \\ &+ \frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+2)} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+3)} + \ldots\Bigg]\end{aligned}$$

ou

$$(7)\qquad S(x) = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(2n+1)}\left[1 + \frac{(n+1)}{1(2n+2)}x + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2(2n+2)(2n+3)}x^2 + \ldots\right],$$

série qui se confond avec R_1 (26), § VI, au facteur x^{2n+1} près, si on y change x en $-x$.

38. Au lieu de partir de la différentielle $D_x^n\left(\frac{e^{2mx}}{x^{n+1}}\right)$, on peut arriver aux mêmes résultats en partant de l'intégrale définie R_3 (11), § VI, ou de la suivante, que je désigne par I,

$$I = \int_0^{2m} e^{-ux}u^n(2m-u)^n\,du,$$

et qui devient, quand on fait $2m = 1$,

$$(8)\qquad I = \int_0^1 e^{-ux}u^n(1-u)^n\,du.$$

On peut appliquer à cette intégrale, comme l'a fait M. Lommel dans ses *Études sur les fonctions de Bessel* (p. 51), la formule élémentaire

$$\int e^{-ux}F(u)\,du = -e^{-ux}\left[\frac{F(u)}{x} + \frac{F'(u)}{x^2} + \frac{F''(u)}{x^3} + \ldots\right].$$

Dans le cas actuel on a

$$F(u) = u^n(1-u)^n,$$

et l'on voit qu'aux limites o et 1, on a

$$F(u) = 0, \quad F'(u) = 0, \quad F''(u) = 0, \quad \ldots, \quad F^{n-1}(u) = 0;$$

d'autre part, les dérivées d'ordre supérieur à $2n$ sont identiquement nulles; il vient donc

$$\int_0^1 e^{-ux} F(u)\,du = -\left\{ e^{-ux}\left[\frac{F^n(u)}{x^{n+1}} + \frac{F^{n+1}(u)}{x^{n+2}} + \ldots + \frac{F^{2n}(u)}{x^{2n+1}}\right]\right\}_0^1.$$

Comme pour $u=0$, on a $e^{-ux}=1$, et pour $u=1$, $e^{-ux}=e^{-x}$, on peut écrire

$$(9) \qquad \int_0^1 e^{-ux} F(u)\,du = \frac{Q'(x) - P'(x)e^{-x}}{x^{2n+1}},$$

$Q'(x)$ et $P'(x)$ désignant comme précédemment des polynômes du degré n.

On a d'ailleurs, en développant e^{-ux},

$$(10) \qquad \begin{aligned} \int_0^1 e^{-ux} u^n(1-u)^n\,du &= \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p x^p}{1.2.3\ldots p}\int_0^1 u^{n+p}(1-u)^n\,du \\ &= \Gamma(n+1)\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p x^p \Gamma(n+p+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+p+2)} = S'(x); \end{aligned}$$

et de (9) et (10) on déduit

$$\frac{Q'(x) - P'(x)e^{-x}}{x^{2n+1}} = S'(x),$$

d'où

$$(11) \qquad e^{-x} = \frac{Q'(x)}{P'(x)} - x^{2n+1}\frac{S'(x)}{P'(x)},$$

formule analogue à (4).

Cette seconde méthode permet de calculer aussi assez facilement les fonctions $P'(x)$ et $Q'(x)$. Si l'on pose $1-u=u'$, on a

$$F(u) = u^n(1-u)^n = u^n u'^n,$$

et le développement du binôme donne

$$F(u+h)=(u+h)^n(1-u-h)^n=(u+h)^n(u'-h)^n$$

$$=\left[u^n+\frac{n}{1}hu^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}h^2u^{n-2}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{1.2}h^{n-2}u^2+\frac{n}{1}h^{n-1}u+h^n\right]$$
$$\times\left[u'^n-\frac{n}{1}hu'^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}h^2u'^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h^3u'^{n-3}+\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{1.2}h^{n-2}u'^2+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}h^{n-1}u'+(-1)^nh^n\right];$$

de là il vient, si l'on met en évidence les termes qui contiennent h^n, h^{n+1}, ..., h^{2n},

$$F(u+h)=\ldots$$
$$+h^n\left[u'^n-\frac{n}{1}\frac{n}{1}uu'^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{n(n-1)}{1.2}u^2u'^{n-2}-\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}\frac{n}{1}u^{n-1}u'+(-1)^nu^n\right]$$
$$+h^{n+1}\left[-\frac{n}{1}u'^{n-1}+\frac{n}{1}\frac{n(n-1)}{1.2}uu'^{n-2}-\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}\frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}u'+(-1)^n\frac{n}{1}u^{n-1}\right]$$
$$+h^{n+2}\left[\frac{n(n-1)}{1.2}u'^{n-2}-\ldots+(-1)^n\frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+h^{2n}(-1)^n$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

Il est bon de remarquer que les premiers termes des polynômes qui multiplient h^n, h^{n+1}, ... sont ceux du développement du binôme $(u'-1)^n$; les derniers se confondent avec ceux de $(-1)^n(u+1)^n$, et ce sont ces termes qu'il suffit de connaître dans la question actuelle.

D'autre part, d'après le théorème de Taylor, on a

$$F(u+h)=F(u)+\frac{h}{1}F'(u)+\frac{h^2}{1.2}F''(u)+\ldots+\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^n(u)+\ldots,$$

et des deux développements de $F(u+h)$ on déduit

$$\frac{F^n(u)}{1.2.3\ldots n} = u'^n - \frac{n}{1}\frac{n}{1} u'^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{n(n-1)}{1.2} u'^{n-2}u^2 \ldots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}\frac{n}{1} u' u^{n-1} + (-1)^n u^n,$$

$$\frac{F^{n+1}(u)}{1.2\ldots n(n+1)} = -\frac{n}{1} u'^{n-1} + \frac{n}{1}\frac{n(n-1)}{1.2} u'^{n-2}u - \ldots + (-1)^n \frac{n}{1} u^{n-1},$$

$$\frac{F^{n+2}(u)}{1.2\ldots(n+1)(n+2)} = \frac{n(n-1)}{1.2} u'^{n-2} - \ldots + (-1)^n \frac{n(n-1)}{1.2} u^{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{F^{2n}(u)}{1.2\ldots 2n} = (-1)^n.$$

Pour $u=0$, on a $u'=1$; et tous les termes qui dans ces dérivées contiennent u en facteur s'annulent, ce qui donne

$$\left[\frac{F^n(u)}{1.2.3\ldots n}\right]_{u=0} = 1,$$

$$\left[\frac{F^{n+1}(u)}{1.2.3\ldots n(n+1)}\right]_{u=0} = -\frac{n}{1},$$

$$\left[\frac{F^{n+2}(u)}{1.2\ldots(n+1)(n+2)}\right]_{u=0} = \frac{n(n-1)}{1.2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

de là on conclut

$$\frac{Q'(x)}{x^{2n+1}} = 1.2.3\ldots n\left[\frac{1}{x^{n+1}} - \frac{n(n+1)}{1}\times\frac{1}{x^{n+2}} + \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2}\frac{1}{x^{n+2}} - \ldots\right],$$

ou, en ordonnant en sens inverse et multipliant par x^{2n+1},

$$Q'(x) = 1.2.3\ldots 2n(-1)^n\left[1 - \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2 - \ldots\right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{1.2.3\ldots 2n} x^n\right].$$

Pour $u=1$ on a $u'=0$, et tous les termes qui contiennent u' en facteur disparaissent, de sorte qu'il vient

$$\left[\frac{F^n(u)}{1.2.3\ldots n}\right]_{u=1}=(-1)^n,$$
$$\left[\frac{F^{n+1}(u)}{1.2.3\ldots n(n+1)}\right]_{u=1}=(-1)^n\frac{n}{1},$$
$$\left[\frac{F^{n+2}(u)}{1.2\ldots(n+1)(n+2)}\right]_{u=1}=(-1)^n\frac{n(n-1)}{1.2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et par suite

$$\frac{P'(x)}{x^{2n+1}}=1.2.3\ldots n(-1)^n\left[\frac{1}{x^{n+1}}+\frac{n(n+1)}{1.x^{n+2}}+\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1.2.x^{n+3}}+\ldots\right],$$

ou

$$P'(x)=1.2.3\ldots 2n(-1)^n\left[1+\frac{n}{1.2n}x+\frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2+\ldots+\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots 2n}x^n\right].$$

On retrouve ainsi, à un facteur près, les valeurs (5) et (6). D'ailleurs $S'(x)$ est donnée par la formule (10), et elle ne diffère de $S(x)$ que par un facteur constant et parce que x y est remplacé par $-x$.

39. Proposons-nous de trouver la relation qui existe entre le rapport $\frac{P(x)}{Q(x)}$ et les réduites successives de la fraction continue qui représente e^x. Dans son Mémoire sur la série hypergéométrique, Gauss donne la formule

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} F(\alpha,1,\gamma,x)&=1+\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots\\ &=\cfrac{1}{1-\cfrac{ax}{1-\cfrac{bx}{1-\cfrac{cx}{1-\cfrac{dx}{1-\ldots}}}}}\end{aligned}\right.$$

avec les valeurs suivantes

$$a=\frac{\alpha}{\gamma},\qquad b=\frac{1(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)},$$
$$c=\frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)},\qquad d=\frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)},$$
$$e=\frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\gamma+3)(\gamma+4)},\qquad f=\frac{3(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+4)(\gamma+5)},$$

Comme la fonction e^x est là limite de la série

$$F\left(k, 1, 1, \frac{x}{k}\right) = 1 + \frac{k}{1}\frac{x}{k} + \frac{k(k+1)}{1.2}\frac{x^2}{k^2} + \frac{k(k+1)(k+2)}{1.2.3}\frac{x^3}{k^3} + \ldots$$

pour $k = \infty$, on peut lui appliquer la formule (12), en remplaçant α par k, γ par 1 et x par $\frac{x}{k}$. Si l'on porte ces valeurs dans les parties intégrantes de la fraction continue, en faisant tendre k vers ∞, on obtient

$$\begin{aligned}
ax &= \frac{k}{1}\frac{x}{k} = \frac{x}{1}, & bx &= \frac{1(1-k)}{1.2}\frac{x}{k} = -\frac{x}{1.2},\\
cx &= \frac{(k+1).1}{2.3}\frac{x}{k} = \frac{x}{2.3}, & dx &= \frac{2(2-k)}{3.4}\frac{x}{k} = -\frac{2x}{3.4},\\
ex &= \frac{(k+2).2}{4.5}\frac{x}{k} = \frac{2x}{4.5}, & fx &= \frac{3(3-k)}{5.6}\frac{x}{k} = -\frac{3x}{5.9},\\
gx &= \frac{(k+3).3}{6.7}\frac{x}{k} = \frac{3x}{6.7}, & hx &= \frac{4(4-k)}{7.8}\frac{x}{k} = -\frac{4x}{7.8},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

et de là on conclut

$$e^x = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + \cfrac{\frac{x}{2}}{1 - \cfrac{\frac{x}{6}}{1 + \cfrac{\frac{x}{6}}{1 - \cfrac{\frac{x}{10}}{1 + \cfrac{\frac{x}{10}}{1 - \cfrac{\frac{x}{14}}{1 + \cfrac{\frac{x}{14}}{1 - \ldots}}}}}}}}} \tag{13}$$

En désignant par $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}, \cdots$ les réduites consécutives, nous avons

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{1}{1}, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{1-x}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}},$$

$$\frac{A_3}{B_3} = \frac{1+\frac{x}{3}}{1-\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{6}}, \quad \frac{A_4}{B_4} = \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}},$$

$$\frac{A_5}{B_5} = \frac{1+\frac{2x}{5}+\frac{x^2}{12}}{1-\frac{3x}{5}+\frac{3x^2}{10}-\frac{x^3}{60}}, \quad \frac{A_6}{B_6} = \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{10}+\frac{x^3}{120}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{10}-\frac{x^3}{120}}, \quad \ldots;$$

d'un autre côté, en désignant par $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ du degré n, on a

$$\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{1+\frac{n}{1.2n}x+\frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}x^3+\ldots+\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots 2n}x^n}{1-\frac{n}{1.2n}x+\frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}x^2-\ldots+(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots 2n}x^n},$$

et, si l'on fait successivement $n=0$, $n=1$, $n=2$, ..., il vient

$$\frac{P_0(x)}{Q_0(x)} = \frac{1}{1}, \quad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}, \quad \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}}, \quad \ldots;$$

d'où l'on voit qu'on a

$$(14) \qquad \frac{A_0}{B_0} = \frac{P_0(x)}{Q_0(x)}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \quad \frac{A_4}{B_4} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}, \quad \ldots;$$

et, en général, $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{2n}}{B_{2n}}$.

40. En supposant n suffisamment grand, et effectuant le quotient $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, on peut obtenir la fonction

$$e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots$$

avec un aussi grand nombre de termes qu'on voudra.

Pour qu'en effectuant cette division on trouve le développement de e^x, il faut que les premiers termes des restes successifs soient $\frac{x}{1}$, $\frac{x^2}{1.2}$, $\frac{x^3}{1.2.3}$, $\frac{x^4}{1.2.3.4}$, ... On est ainsi conduit aux relations suivantes qui, si je ne me trompe, n'ont pas été signalées jusqu'à présent :

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{n}{1.2n} = \frac{1}{1.2},\\
&\frac{2n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)} - \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)} + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1.2.3},\\
&\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)} - \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}\,\frac{1}{1.2} + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3.4},\\
&\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}\,\frac{1}{1.2} - \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}\,\frac{1}{1.2.3} + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{1.2.3.4.5},\\
&\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\,\frac{1}{1.2}\\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.2n(2n-1)(2n-2)}\,\frac{1}{1.2.3} - \frac{n(n-1)}{1.2.2n(2n-1)}\,\frac{1}{1.2.3.4}\\
&\quad + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules, dans les seconds membres desquelles entre l'expression $\frac{1}{1.2.3\ldots p}$, semblent être de deux sortes, les unes applicables au cas où p est pair, et les autres, au cas où p est impair. Nous verrons dans la suite comment elles se déduisent d'une seule série de relations où entrent deux paramètres

41. Elles subsistent, quelle que soit la valeur de n, pourvu que ce paramètre soit suffisamment grand. Elles sont encore vraies lorsqu'on remplace n par $-n$, et l'on a

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{2n(n+1)(n+2)}{1.2.3.2n(2n+1)(2n+2)} - \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)} + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1.2.3},\\
&\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.2n(2n+1)(2n+2)} - \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)}\,\frac{1}{1.2} + \frac{n}{1.2n}\,\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3.4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Or, si l'on change n en $-n$ dans les polynômes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$, on obtient deux fonctions, qui, d'après la loi de formation des termes, peuvent se prolonger à l'infini, et il résulte de ce qui précède que le quotient de ces séries représente la fonction exponentielle. Ces deux séries peuvent se déduire de $R_1(26)$, § VI; car si l'on supprime le facteur x^{2n+1}, et si l'on remplace $n+1$ par n, il vient

$$R_1 = 1 - \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)}x^2 - \ldots,$$

et, en changeant x en $-x$, on a

$$R'_1 = 1 + \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)}x^2 + \ldots.$$

On peut vérifier sans peine que la fonction exponentielle est égale au rapport de ces deux séries; car si l'on effectue le produit de R_1 par $e^{\frac{x}{2}}$, on obtient

$$R_1 e^{\frac{x}{2}} = 1 + \frac{1}{2(2n+1)}\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2.4(2n+1)(2n+2)}\frac{x^4}{16} + \ldots, \tag{17}$$

expression qui ne change pas lorsqu'on change x en $-x$; on a donc

$$R_1 e^{\frac{x}{2}} = R'_1 e^{-\frac{x}{2}},$$

d'où

$$e^x = \frac{R'_1}{R_1}. \tag{18}$$

Cette relation résulte, d'ailleurs, de l'identité suivante

$$e^x \int^1 e^{-ux} u^{n-1}(1-u)^{n-1}\,du = \int_0^1 e^{x(1-u)} u^{n-1}(1-u)^{n-1}\,du, \tag{19}$$

qui donne

$$e^x = \frac{\displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{n+p-1}\,du}{\displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p x^p}{1.2.3\ldots p}\int_0^1 u^{n+p-1}(1-u)^{n-1}\,du}$$

ou

$$(20)\quad e^x = \frac{\displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{x^p \Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+p)}}{\displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p x^p \Gamma(n+p)}{\Gamma(p+1)\Gamma(2n+p)}} = \frac{1 + \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)}x^2 + \ldots}{1 - \frac{n}{1.2n}x + \frac{n(n+1)}{1.2.2n(2n+1)}x^2 - \ldots}.$$

42. Dans les formules précédentes, il n'y a qu'un seul paramètre arbitraire n. Mais si, au lieu de l'identité (19), on part de la suivante

$$(21)\quad e^x \int_0^1 e^{-ux} u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}\,du = \int_0^1 e^{x(1-u)} u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}\,du,$$

et si l'on observe qu'on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^{x(1-u)} u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}\,du \\
&\quad = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha+p-1}\,du \\
&\quad = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{x^p}{1.2.3\ldots p}\,\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+p)}{\Gamma(\alpha+\beta+p)} \\
&\quad = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+p-1)}{1.2.3\ldots p(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+p-1)}\,x^p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 e^{-ux} u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}\,du \\
&\quad = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p x^p}{1.2.3\ldots p}\int_0^1 u^{\beta+p-1}(1-u)^{\alpha-1}\,du \\
&\quad = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p \beta(\beta+1)\ldots(\beta+p-1)}{1.2.3\ldots p(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+p-1)}\,x^p,
\end{aligned}$$

on en conclut

$$(22)\quad e^x = \frac{1 + \frac{\alpha}{1(\alpha+\beta)}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}x^2 + \ldots}{1 - \frac{\beta}{1(\alpha+\beta)}x + \frac{\beta(\beta+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}x^2 - \ldots},$$

formule qui n'est autre que la relation (4), § 26, du Mémoire de Kummer ([1]).

Le quotient des deux séries infinies (22) devant être

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots,$$

si l'on effectue la division, on voit qu'on doit avoir les relations

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}-\frac{\beta(\beta+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}+\frac{\beta}{1(\alpha+\beta)}=\frac{1}{1.2},$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}$$
$$-\frac{\beta(\beta+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\,\frac{1}{1}+\frac{\beta}{1(\alpha+\beta)}\,\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1.2.3},$$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{1.2.3.4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}-\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1.2.3.4(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)}$$
$$+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)}\,\frac{1}{1}-\frac{\beta(\beta+1)}{1.2(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\,\frac{1}{1.2}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{1.2.3.4},$$

. . . .

qui donnent les formules (16) lorsqu'on y fait $\alpha=\beta=n$.

([1]) *Journal de Crelle*, t. 15.