

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARCEL BRILLOUIN

Comparaison des coefficients d'induction

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 11 (1882), p. 339-424

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1882_2_11__339_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPARAISON
DES
COEFFICIENTS D'INDUCTION,

PAR M. MARCEL BRILLOUIN,

CHARGÉ DU COURS DE PHYSIQUE A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

INTRODUCTION.

1. On sait de quelle importance, de quel usage journalier sont dans les laboratoires les méthodes de comparaison des résistances électriques, des forces électromotrices, des capacités. Les meilleures dispositions expérimentales ne sont pas toujours celles qui se prêtent le plus facilement au calcul théorique, même quand une très grande précision n'est pas nécessaire; c'est grâce aux méthodes de comparaison qu'il est possible de satisfaire séparément aux deux conditions. Outre les facilités qui en résultent pour les mesures absolues, ces méthodes sont indispensables dans toutes les applications industrielles, alors que les calculs directs seraient inabordables. Jusqu'ici pourtant les méthodes de comparaison des coefficients d'induction ne paraissent pas entrées dans la pratique. Ayant trouvé dans le grand Traité de Maxwell l'indication succincte de méthodes de comparaison, fondées, comme les méthodes précises citées plus haut, sur la réduction à zéro du courant dans un des fils d'un circuit fermé, j'ai entrepris d'étudier les conditions dans lesquelles ces méthodes sont sensibles et exactes.

2. Dans toutes ces méthodes, on emploie les courants induits par variation d'intensité. Lorsque, à travers un certain fil, l'intensité du courant permanent et la quantité totale d'électricité du courant instantané produit par la fermeture du circuit qui contient la pile sont nulles, il existe entre les coefficients d'induction des divers fils du circuit et leurs résistances une relation homogène séparément par rapport à ces deux ordres de variables. Sous certaines conditions, deux coefficients d'induction subsistent seuls, et leur rapport est donné par un rapport de résistances. Un galvanomètre sensible, des boîtes de résistances bien graduées et aussi rigoureusement que possible dépourvues de coefficient d'induction propre, sont les instruments essentiels.

L'électrodynamomètre, le téléphone ne pourraient remplacer le galvanomètre que dans une partie des méthodes. Ce sont en effet des instruments qui ne restent au zéro que pour un courant constamment nul. Or cette condition n'est pas satisfaite dans toutes les méthodes. Il est même toujours possible de modifier les circuits de manière que cette condition n'ait plus lieu, sans altérer ni la rigueur théorique de la méthode, ni la précision des mesures au galvanomètre. Le galvanomètre a d'ailleurs le grand avantage que ses indications changent de signe en passant par zéro.



CHAPITRE I.

EXPOSÉ DES LOIS EXPÉRIMENTALES DES COURANTS INSTANTANÉS.



3. Je commence par rappeler les lois physiques sur lesquelles je m'appuierai. Ces lois, établies expérimentalement dans certains cas simples, ont été excessivement généralisées; je m'efforcerai de préciser dans quelles conditions elles sont strictement applicables; j'en indiquerai les conséquences mathématiquement rigoureuses, sans intervention des principes de la Thermodynamique, et celles qui ont un caractère hypothétique. On se heurte, en effet (nos 5 et 6), en appli-

quant les lois telles qu'on les généralise, à une impossibilité logique : il est donc utile de marquer les points douteux, ceux où la généralisation a pu être trop hâtive. Ce n'est que l'ébauche d'une discussion complète, mais elle n'est pas déplacée ici ; car elle me permet d'établir que les méthodes décrites dans ce travail s'appuient directement sur les lois expérimentales, dans les conditions mêmes de leur démonstration, et sont indépendantes de toute théorie.

1° *Expériences de Biot et Savart. — Loi de Laplace.* — Cette loi est relative à l'action des courants constants sur les aimants permanents. Le courant est caractérisé en grandeur par un certain facteur qu'on appelle son *intensité*. Les expériences de Colladon (1) ont montré que cette intensité, quand elle est constante, est proportionnelle au flux d'électricité, la quantité d'électricité étant définie par la loi de Coulomb.

2° *Lois de Ohm* (2). — Ces lois, relatives au partage des courants permanents entre divers conducteurs, ont été établies par analogie avec les lois de propagation de la chaleur, et rattachées par Kirchhoff (3) (1849) aux principes de l'électricité statique. Ohm (1826), Fechner (1831), les ont contrôlées au moyen d'appareils électromagnétiques. C'est au moyen des mêmes appareils que Pouillet (4) les a découvertes à nouveau. Le développement de ces lois permet de trouver des méthodes de mesures relatives, simples et précises, pour les résistances des fils et les forces électromotrices des piles.

Les vérifications de ces lois au moyen d'appareils d'électricité statique ont d'abord porté sur la valeur et la distribution des potentiels : Kohlrausch (1853) a montré (5) que les différences de potentiel et les résistances déduites des mesures électrostatiques sont identiques à celles que fournissent les mesures électromagnétiques, quand les unités sont les mêmes. Ces expériences vérifiaient donc indirectement l'iden-

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XXIII, p. 62. — MASCART, *Traité d'Électricité statique*, t. I, p. 430.

(2) Voir en général : MASCART, *Traité d'Électricité statique*, t. II.

(3) *Pogg. Ann.*, t. LXXVIII. — *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. XLI.

(4) *Comptes rendus*, t. IV, p. 267.

(5) *Poggendorff Annalen*, t. LXXV et LXXVIII. — *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. XLI.

tité de l'intensité et du débit établie par Colladon. Une nouvelle confirmation a été fournie par les expériences de M. Gaugain (1) qui, grâce à l'invention de l'électromètre à décharges, a réussi à étudier les lois du débit dans les conducteurs médiocres.

4. Étudions de plus près une des conséquences des lois de Ohm, la relation qui existe entre les intensités et les flux d'électricité dans divers fils qui se réunissent en un même point.

Il est évident que, pendant l'état permanent, il ne peut y avoir accumulation indéfinie d'électricité; la somme totale des quantités d'électricité f apportées au sommet est donc nulle, dans l'état permanent,

$$(1) \quad \Sigma f = 0.$$

Lorsqu'il s'agit des intensités électromagnétiques constantes, la relation correspondante que donnent les lois de Ohm peut se déduire de la définition même de i par la loi de Laplace. On tire de cette loi, par des raisonnements mathématiques rigoureux (2), la relation

$$4\pi i = \int_C F_\sigma d\sigma.$$

C désigne une ligne fermée quelconque, sans point double, qui entoure le fil parcouru par le courant i ; $d\sigma$ est un élément de cette ligne, et F_σ , la projection sur l'élément $d\sigma$ de la force magnétique totale en ce point de la courbe. Considérons une nappe simple d'une aire superficielle limitée à la courbe C ; pour un observateur, debout sur le côté positif de cette surface, et regardant un point de la courbe limite C , l'arc σ croît vers sa gauche. L'intensité i doit être regardée comme positive lorsque le courant traverse la surface, en passant du côté négatif au côté positif.

De même, si la courbe entoure plusieurs courants,

$$4\pi \Sigma i = \int_C F_\sigma d\sigma.$$

(1) *Annales de Chimie et de Physique*. — MASCART, *Traité d'Électricité statique*, t. II, p. 465.

(2) MASCART et JOUBERT, *Leçons sur l'électricité et le magnétisme*, t. I, p. 488-492.

Prenons le sommet considéré comme centre d'une petite surface sphérique, et, sur cette surface, traçons une courbe géométrique C sans point double ⁽¹⁾, qui sépare l'aire de la sphère en deux régions, l'une a que traversent tous les fils, l'autre b , qu'aucun d'eux ne traverse. Choisissons la direction des arcs croissants sur la courbe, de manière que le côté positif de la région a regarde le sommet. On a

$$4\pi \Sigma i = \int_C F_\sigma d\sigma,$$

et les intensités sont regardées comme positives lorsqu'elles sont dirigées vers le sommet. Mais la région b , n'étant traversée par aucun fil, donne

$$-\int_C F_\sigma d\sigma = 0.$$

On a donc, pour toutes les intensités qui aboutissent au sommet,

$$(2) \quad \Sigma i = 0.$$

5. Je ne connais pas d'expériences qui établissent avec certitude que la loi de Laplace subsiste lorsque les courants sont variables. Il semble probable que la loi de la distance et celle de la direction de l'élément de courant restent vraies à cause de leur caractère purement géométrique. Quant à la grandeur du courant à chaque instant, elle est caractérisée par un coefficient, auquel on peut conserver le nom d'*intensité*; mais la relation entre cette intensité et le flux d'électricité statique au même instant n'a pas encore été établie avec certitude. L'application de la loi de Colladon donne lieu à une difficulté qu'il importe de rappeler. Pour cela, revenons aux flux d'électricité et aux intensités électromagnétiques dans des fils qui aboutissent au même sommet.

Le potentiel électrostatique, qui est uniforme quand aucun courant ne traverse les fils, est, au contraire, différent d'un point à l'autre

⁽¹⁾ Lorsque la courbe tracée sur la sphère a des points doubles, les résultats définitifs sont les mêmes, mais exigent une longue discussion dont Gauss a énoncé les principes. GAUSS, *Werke*, t. V, p. 620. — Paul LECORDIER, *Sur les aires sphériques de Gauss* (Thèse), 1870. — Voir aussi : B. RIEMANN, *Leçons sur la pesanteur, l'électricité et le magnétisme*, recueillies par Hattendorff.

pendant le courant. Le passage du premier état au second est accompagné d'une modification dans la distribution de l'électricité sur le fil. Pour en exagérer les effets, considérons en particulier un sommet qui communique directement avec un conducteur de grandes dimensions; le potentiel final V pour l'état permanent est le même que si ce corps n'existait pas. Les fils conducteurs lui ont donc apporté, pendant l'état variable, une charge totale CV , proportionnelle à sa capacité C : l'équation (1) ne peut donc pas subsister à chaque instant de l'état variable. Elle n'est exacte que pour le flux total entre deux époques $0, T$, où la distribution des potentiels reprend la même valeur: deux états permanents identiques ou une période entière d'un état périodique;

$$\sum \int_0^T f dt = 0.$$

6. Considérons maintenant les intensités électromagnétiques. Si la loi de la distance et de la direction de l'élément de courant sont les mêmes que pour l'état permanent, on en déduit rigoureusement, entre les intensités qui aboutissent au même sommet, la relation

$$\sum i = 0$$

à chaque instant. Cette relation, étant différente de celle des flux d'électricité, nous met en présence de trois hypothèses distinctes:

1° La loi de la distance et de la direction de l'élément de courant ne sont pas les mêmes pour des intensités variables que pour des intensités constantes.

Ou bien, ces deux lois restant exactes:

2° L'intensité électromagnétique n'est pas à chaque instant proportionnelle au flux d'électricité;

3° L'intensité électromagnétique est à chaque instant proportionnelle au flux d'électricité; mais, dans l'application de la relation (2) déduite de la loi de Laplace, en ne prenant que les intensités dans les fils conducteurs, nous n'avons pas tout compté: pendant l'état variable, l'espace occupé par le diélectrique est lui-même le siège de phénomènes de la nature d'une intensité, d'un flux d'électricité. Quand la charge totale d'un corps augmente de ΔM , un flux d'électricité égal à ΔM s'échappe du corps et rayonne à travers le diélectrique. C'est

l'hypothèse du déplacement électrique de Maxwell. Il faut introduire cette intensité totale dans la relation (2), ce qui la rend identique à l'équation des flux d'électricité.

7. Les très nombreuses expériences qu'on a faites sur les courants variables dans des circuits fermés complexes ne permettent pas de décider entre les deux dernières hypothèses. Dans presque toutes ces expériences, en effet, le galvanomètre mesure l'intensité intégrale ⁽¹⁾ $\int_0^T i dt$, entre deux époques où l'intensité reprend la même valeur : état initial et état final permanents identiques, ou état périodique. L'impulsion de l'aiguille du galvanomètre ou sa déviation moyenne ne mesure le couple magnétique instantané ou moyen qu'à cette condition. Lorsqu'il en est ainsi dans tous les fils du circuit, l'équation des flux d'électricité dans les fils seuls est identique à celle des intensités intégrales dans les fils seuls pour chaque sommet

$$\sum \int_0^T f dt = 0, \quad \sum \int_0^T i dt = 0.$$

On peut donc admettre, dans toutes ces expériences, la proportionnalité de l'intensité intégrale au flux total, sans qu'il en résulte aucune contradiction logique. Faraday ⁽²⁾ et Riess ⁽³⁾ ont montré la proportionnalité de la charge électrique totale des bouteilles de Leyde aux impulsions produites par leur décharge à travers un galvanomètre, et les expériences de comparaison des capacités qui reposent sur cette proportionnalité, faites depuis avec plus de précision, n'ont pas révélé de contradiction expérimentale certaine.

Il ne semble pas probable qu'une compensation analogue puisse se produire pour les lois de la distance et de la direction de l'élément.

Il serait facile d'instituer des expériences permettant de contrôler la loi de Laplace et celle de Colladon et Faraday dans les deux cas parti-

(1) VERDET, *Ouvres*, t. IV. — *Conférences*, 1^{re} Partie, p. 365.

(2) *Experimental Researches*, t. I, p. 102.

(3) *Reibungselectricität*, Bd. I, p. 478. — MASCART, *Traité d'Electricité statique*, t. 1, p. 433.

culiers indiqués plus haut. Une confirmation directe et méthodique serait évidemment préférable à la probabilité que donne l'ensemble des faits connus.

8. Dans quelques autres expériences, l'intensité initiale et l'intensité finale ne sont les mêmes que dans le fil qui contient le galvanomètre, ou bien, on emploie un galvanomètre différentiel, et c'est la fonction linéaire $ai - bj$ des deux intensités i, j qui a des valeurs initiale et finale égales. Dans ces deux cas, l'impulsion de l'aiguille du galvanomètre mesure $\int i dt$ et $\int (ai - bj) dt$; mais l'équation des flux d'électricité et celle des intensités à chaque sommet sont différentes, et, à prendre les choses en toute rigueur, il faudrait tenir compte de cette différence et choisir entre les hypothèses 2 et 3. Remarquons toutefois que, pour l'effet total, la différence entre les deux équations (1) et (2) est en relation directe avec la grandeur des capacités; elle ne pourrait devenir appréciable que si certains points étaient en communication avec un corps conducteur de grandes dimensions, *éloigné de tout autre conducteur*. C'est dans ce cas seulement que la distribution des courants de l'hypothèse 3 à travers un diélectrique de grande étendue pourrait être mise en évidence. Si certains points communiquent avec un condensateur de grande capacité, l'épaisseur du diélectrique, siège des phénomènes de la troisième hypothèse, est trop faible pour les rendre appréciables; tout l'effet est produit par l'intensité dans les fils qui réunissent les deux armatures du condensateur à deux points du circuit éloignés l'un de l'autre; on peut alors calculer cette intensité au moyen de l'équation de charge du condensateur: l'intensité du courant est à chaque instant égale au produit de la capacité par l'accroissement de la différence de potentiel des deux armatures. On tiendra compte de l'influence totale du condensateur, en appliquant simplement la loi de Colladon et Faraday aux intensités intégrales et aux flux d'électricité, dans tous les fils conducteurs, sans s'occuper de ce qui se passe dans le diélectrique.

Au lieu de s'en tenir à l'effet total, si l'on étudie les diverses phases du phénomène variable, les deux hypothèses 2 et 3 pourront fournir des résultats nettement différents. C'est seulement par une étude expé-

rimentale des variations du courant dans un fil dont les extrémités communiquent avec des corps de grande capacité que l'on pourra trouver des raisons de préférer l'une ou l'autre hypothèse.

9. La généralisation de la loi d'Ampère sur les actions mutuelles des courants constants est sujette aux mêmes observations; mais rien ne permet d'affirmer que les facteurs qui caractérisent les deux courants restent proportionnels aux flux d'électricité, ou même (suivant la loi de Weber pour les courants permanents) aux intensités électromagnétiques. Les deux mêmes cas particuliers seraient intéressants pour les mêmes raisons.

L'influence de la forme des circuits dans l'action mutuelle des courants constants est définie par leur *potentiel mutuel électrodynamique*.

10. *Induction* ('). — Dans toutes les expériences qui suivent (nos 10-25), l'emploi du galvanomètre est légitimé par l'extension de la loi de Laplace seule, sans la loi de Colladon et Faraday, tant qu'il ne s'agit que de mesures électromagnétiques.

Lorsque deux circuits fermés immobiles sont voisins l'un de l'autre, et que l'intensité du courant dans l'un d'eux passe d'une valeur constante I , à une autre valeur constante $I + \Delta I$, un courant instantané est produit dans le second circuit.

Si la forme des parties voisines des deux circuits reste la même, quels que soient le diamètre des fils conducteurs, leur nature, la longueur des parties éloignées, il résulte des expériences de Lenz et de Felici, que l'intensité intégrale $\int j dt$ du courant induit est donnée par la relation

$$(1) \quad M\Delta I + R \int j dt = 0.$$

R est la résistance du circuit induit déterminée par les méthodes relatives aux courants constants. M est une constante qui ne dépend que

(') Voir, à la fin de ce travail, une Note sur les expériences de Faraday, Lenz et Felici, relatives à l'induction.

de la forme et de la position relative des deux circuits : on l'appelle *coefficient d'induction mutuelle* des deux circuits.

Lorsque le circuit induit est parcouru par un courant constant i , j désigne dans l'équation (1) l'excès de l'intensité à chaque instant sur l'intensité constante initiale et finale i . Si plusieurs courants inducteurs agissent à la fois sur le même circuit induit, il faut dans l'équation (1) remplacer le terme unique $M\Delta I$ par la somme des termes correspondants relatifs à chacun des courants inducteurs.

11. La comparaison de l'équation (1) avec l'équation relative à un courant constant dans le même circuit montre que l'effet produit par le changement d'intensité du courant inducteur est de la nature d'une force électromotrice instantanée. Si le circuit induit, au lieu d'être simple, est formé de plusieurs fils se réunissant en différents sommets, et que chacun d'eux soit soumis à l'induction d'un fil voisin, il est naturel de continuer la même comparaison en employant les valeurs des forces électromotrices instantanées, déduites par l'équation (1) d'expériences où le circuit est formé par un seul des fils directement uni au galvanomètre. Nous savons déjà que l'une de ces lois, prises sous la forme que leur a donnée Kirchhoff, la loi relative aux sommets,

$$(2) \quad \sum \int j \, dt = 0,$$

subsiste en toute rigueur quand l'état initial et l'état final du circuit sont identiques. Il résulte d'expériences de Felici, qu'il en est de même de la seconde loi,

$$(3) \quad S \left(r \int j \, dt + M\Delta I + \dots \right) = 0,$$

S indiquant qu'on ajoute tous les termes d'un circuit fermé en rapportant toutes les intensités à un même sens de parcours de ce circuit.

12. L'effet produit, étant d'autant plus grand que les deux circuits sont plus rapprochés, doit subsister lorsqu'ils se confondent. Toute variation d'intensité dans un circuit produit dans ce même circuit un

courant induit dont Faraday ⁽¹⁾ a réussi à démontrer l'existence. L'étude de la loi du courant ne peut pas se faire avec un circuit simple, car l'intensité finale différant de l'intensité initiale, les indications du galvanomètre n'ont pas de sens. Edlund ⁽²⁾ a imaginé une disposition des fils pour laquelle l'application de lois de la forme (2), (3) (n° 11), fournit des conséquences très simples qu'il a complètement vérifiées par expérience. Si dans un circuit complexe, ne comprenant aucun conducteur de capacité notable (n° 8), les intensités changent de valeurs, les lois (2), (3) s'appliquent encore, pourvu qu'on ajoute dans (3) un terme $L\Delta i$, relatif au changement d'intensité dans le fil lui-même, et que j désigne l'excès de l'intensité variable sur l'intensité finale i . Ce coefficient L porte le nom de *coefficient d'induction propre* ou *coefficient de self-induction*.

13. Reste à déterminer les constantes M et L . Des expériences de Felici, dont le principe est calqué sur celui des expériences fondamentales de l'électrodynamique, établissent que la constante M est proportionnelle au potentiel mutuel des deux circuits, lorsque ces circuits sont distincts et simples. Les circuits restant distincts, s'ils sont formés de plusieurs fils, tels que chacun d'eux fasse partie au moins d'un circuit fermé par des fils différents, il est facile ⁽³⁾ d'établir qu'on peut encore prendre M proportionnel au potentiel mutuel des deux fils, bien que leurs extrémités soient éloignées l'une de l'autre. Il n'y a d'ailleurs aucune ambiguïté dans la pratique, chaque partie du circuit étant formée par une bobine de fil dont les deux extrémités sont réunies au reste du circuit par deux conducteurs très voisins l'un de l'autre; la constante M se rapporte donc toujours à un circuit géométriquement fermé. C'est alors une intégrale double

$$M = \int_0^l \int_0^l m_{ss'} ds ds',$$

⁽¹⁾ Janvier 1835. *Experimental Researches*, t. I, p. 322.

⁽²⁾ 1849. *Poggendorff Annalen*, t. LXXVII, p. 161. *Annales de Chimie et de Physique*, t. III, p. 51.

⁽³⁾ *Annales de l'École Normale*, janvier 1881. — *Journal de Physique*.

$m_{ss'}$ étant une fonction de la distance et de l'orientation des deux éléments ds et ds' ⁽¹⁾.

14. Lorsque les deux circuits sont assez rapprochés pour que les dimensions des fils soient de même ordre que leurs distances, la valeur de M , comme celle du potentiel mutuel, doit être mise sous la forme d'une intégrale sextuple, étendue à toute la longueur des deux circuits, et à toute l'aire des sections des deux fils; car l'élément de l'intégrale doit être rapporté aux éléments de courant de dimensions transversales infiniment petites par rapport à leur distance mutuelle. On admet alors que la densité du courant est uniforme dans toute l'aire de chaque section du fil.

Bien que les deux circuits inducteur et induit aient toujours été distincts dans les expériences de Felici, il est naturel de regarder la loi élémentaire comme indépendante de cette condition, et de prendre pour le coefficient L ce que devient M quand les deux circuits sont amenés en coïncidence. Il semble que le dispositif d'Edlund permettrait de contrôler cette extension des résultats de Felici ⁽²⁾.

15. Résumons les résultats auxquels nous sommes arrivé :

Équations de Kirchhoff pour l'état permanent de circuits fermés quelconques :

$$(I) \quad \begin{cases} \text{Sommets} \dots \dots \dots & \Sigma i = 0. \\ \text{Circuits fermés} \dots \dots & S(r i - e) = 0. \end{cases}$$

Équations de la période variable entière :

$$(II) \quad \begin{cases} \text{Sommets} \dots \dots \dots & \Sigma \int j dt = 0. \\ \text{Circuits fermés} \dots \dots & S \left(r \int j dt + L \Delta i + M \Delta I + \dots \right) = 0, \end{cases}$$

avec la restriction du n° 8 pour la première des équations II.

⁽¹⁾ Lorsque les circuits sont géométriquement fermés, on peut choisir indifféremment pour $m_{ss'}$ la forme de Neumann $\frac{\cos \varepsilon}{r}$, ou celle de Weber $\frac{\cos \theta \cos \theta'}{r}$.

⁽²⁾ Ce contrôle peut être obtenu par une des méthodes que j'étudierai plus loin.

Telles sont les équations dont nous ferons usage pour établir les méthodes de comparaison des coefficients L et M.

Ces coefficients sont proportionnels aux potentiels électrodynamiques des circuits. Les regarder comme égaux à ces potentiels, c'est choisir l'unité de force électromotrice, et par suite l'unité de résistance électrodynamique. C'est cette unité que détermine directement la méthode de mesure de Rowland ⁽¹⁾. Cette méthode est fondée sur les expériences de Lenz et de Felici, sans aucune extension, et sans aucune hypothèse sur la relation entre le flux d'électricité et l'intensité intégrale du courant induit ⁽²⁾.

16. En admettant que les équations (II) s'appliquent non seulement à l'intensité intégrale, mais à l'intensité elle-même, on obtient les équations ordinairement employées dans l'étude des courants induits

⁽¹⁾ *American Journal of Sciences and Arts*, 1878. — *Journal de Physique*, t. VIII, p. 246.

⁽²⁾ Au lieu de faire varier l'intensité du courant inducteur, on peut la conserver constante, mais déplacer le courant de sa position actuelle A, à une position B où les variations d'intensité du courant inducteur soient sans influence sur le circuit induit. Une expérience de Felici montre que l'intensité intégrale due au déplacement du circuit, de B en A, est égale à celle due à l'établissement du même courant en A. Le système II doit donc être remplacé par le suivant :

$$(II_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Sommetts. } \Sigma \int j dt = 0, \\ \text{Circuits fermés. . . . } S \left[r \int j dt + \Delta(Li) + \Delta(MI) + \dots \right] = 0, \end{array} \right.$$

et, en prenant pour L, M les potentiels électrodynamiques eux-mêmes, on choisit une unité de résistance identique à celle du n° 15. C'est celle que donne directement la méthode de Kirchhoff (*Pogg. Ann.*, t. LXXVI; 1849), lorsque i , I ont des valeurs initiale et finale identiques.

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie à un circuit qui contient une roue de Barlow animée d'un mouvement de rotation uniforme dans un champ magnétique constant produit par des aimants ou des courants, on peut établir l'identité des unités de résistance électromagnétique et électrodynamique. C'est l'expérience du disque de Faraday (*Exp. Res.*, série I) ou celle de Lorenz (*Pogg. Ann.*, t. CLXIX; 1873. — *Journal de Physique*, t. II, p. 424).

Quant à l'unité déterminée par la méthode de Sir W. Thomson, ou par celle de Weber (oscillations et amortissement), il faut, pour établir leur identité avec les précédentes, supposer exacte l'équation différentielle de l'induction III (n° 16), à cause de la simultanéité des variations d'intensité et des déplacements de l'aiguille aimantée.

par variation d'intensité :

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Sommets} \dots\dots\dots \Sigma j = 0, \\ \text{Circuits fermés} \dots\dots \mathbf{S} \left(rj + \mathbf{L} \frac{di}{dt} + \mathbf{M} \frac{dI}{dt} + \dots \right) = 0. \end{array} \right.$$

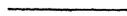
Pour avoir une conséquence mathématique du système (II), il faudrait ajouter, dans chacune des équations (III), un terme inconnu, soumis à la condition de disparaître par une intégration étendue à toute la durée du phénomène variable, ou à une période entière, quand il est périodique. Aussi, n'emploierai-je pas le système (III) pour établir la formule fondamentale des méthodes que je vais décrire; il servira seulement à en discuter certains détails secondaires (nos 26-29).

C'est à ce système d'équations que conduisent toutes les théories de l'induction; mais cet accord n'ajoute guère à sa probabilité, puisque c'est la forme la plus simple qu'on puisse donner aux équations différentielles de l'induction pour rester d'accord avec l'expérience. On peut invoquer, en faveur du système d'équations (III), les expériences relatives à la meilleure position du commutateur dans les machines magnétiques : les résultats sont d'accord avec les conséquences des équations (III), transformées de manière à tenir compte du mouvement. Le système d'équations (II_a) ne fournirait aucun renseignement sur cette question.



CHAPITRE II.

THÉORIE DES MÉTHODES DE COMPARAISON DES COEFFICIENTS D'INDUCTION.

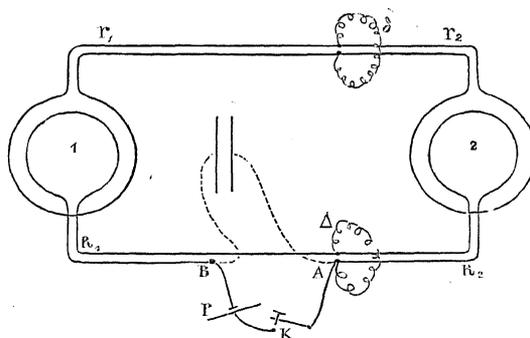


17. Les méthodes doivent permettre de comparer :

- 1° Deux coefficients d'induction mutuelle;
- 2° Deux coefficients de self-induction;
- 3° Un coefficient d'induction mutuelle et un coefficient de self-induction.

Pour la comparaison des coefficients d'induction mutuelle de deux paires de bobines, le courant d'une pile P (*fig. 1*) traverse successivement les deux bobines inductrices 1 et 2; une dérivation Δ peut être établie sur l'une d'elles; enfin, un interrupteur K permet d'ouvrir ou de fermer le circuit de la pile. Les deux bobines induites sont réunies en un circuit, et une dérivation δ peut être établie sur l'une d'elles.

Fig. 1.



Trois positions distinctes du galvanomètre permettent de faire la mesure :

a, b. Les deux bobines induites sont réunies de façon que la plus faible, 1, soit parcourue par la différence de leurs courants. C'est sur le trajet de celle-ci qu'il faut mettre le galvanomètre. On dispose de la dérivation Δ ou de celle δ de manière à annuler l'intensité intégrale du courant qui traverse le galvanomètre au moment de la fermeture du circuit de la pile. L'application des équations du système (I) (n° 15) au circuit inducteur, et du système (II) (n° 15) au circuit induit, donne, en appelant R_1 , R_2 , r_1 et r_2 les résistances comptées à partir des dérivi-vations Δ et δ :

a. Quand la dérivation Δ existe seule,

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\Delta}{\Delta + R_2};$$

b. Quand la dérivation δ existe seule,

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\delta}{\delta + r_2}.$$

c. La dérivation Δ n'existe pas. Les deux bobines induites sont réunies de façon que la dérivation δ reçoive la différence des courants induits. On y place le galvanomètre, et on ajoute à la bobine 2 des résistances telles que l'intensité intégrale soit nulle dans le galvanomètre au moment de la fermeture du circuit de la pile.

On a alors, par les équations (II) (n° 15),

$$(c) \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

C'est cette dernière disposition seule qu'a indiquée Maxwell (t. II, p. 354).

Il importe de remarquer que les coefficients de self-induction de tous les fils n'ont aucune influence; ils peuvent être quelconques. Mais on a écrit les équations en supposant que les dérivations δ , Δ et les fils de jonction ont un coefficient d'induction mutuelle nul, soit entre eux, soit avec les bobines 1 et 2. Il est bon, pour réaliser cette condition, de mettre très près l'un de l'autre les deux fils par lesquels entre et sort le même courant.

18. Dans toute disposition où le circuit induit est distinct du circuit inducteur, le galvanomètre étant l'instrument de mesure, les équations (II) montrent que les coefficients de self-induction n'ont aucun rôle. L'intensité initiale et l'intensité finale, dans chacun des fils du circuit induit, sont, en effet, nulles. Pour que le coefficient de self-induction d'un fil du circuit induit entre dans les équations, il faut que l'intensité du courant qui le traverse change de valeur; il faut donc que ce fil fasse partie du circuit inducteur. Pour que l'équation de l'état variable dans ce fil appartienne au système qui détermine l'intensité intégrale dans le galvanomètre, il faut que le galvanomètre fasse aussi partie du circuit inducteur. Enfin, pour que l'impulsion du galvanomètre mesure l'intensité intégrale, il faut que l'intensité initiale et l'intensité finale du courant qui le traverse soient identiques. L'intensité initiale, qui correspond au circuit ouvert, est nulle; il faut qu'il en soit de même de l'intensité finale. On ne peut obtenir ce résultat que par un réglage convenable de l'état permanent; l'arrangement le plus simple, dans lequel ce réglage soit susceptible de

précision, est le pont de Wheatstone; c'est celui que nous allons utiliser (1).

19. On peut l'employer, sans modification, à la comparaison de deux coefficients de self-induction (MAXWELL, t. II, p. 357).

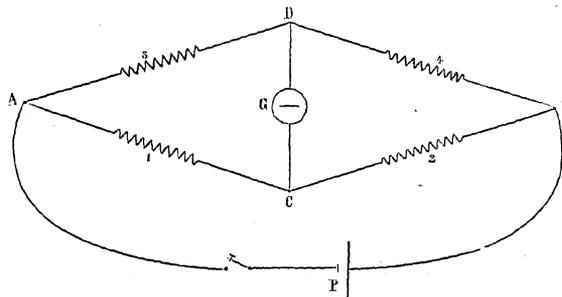
Les équations du pont réglé pour l'état permanent donnent (fig. 2):

$$\begin{aligned} \text{Circuit ACD} \dots\dots\dots r_1 i_1 - r_3 i_3 &= 0, \\ \text{Circuit BCD} \dots\dots\dots r_2 i_2 - r_4 i_3 &= 0. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$(i) \quad \frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{l_3}{l_1}.$$

Fig. 2.



Les équations (II) (n° 15) du pont, réglé pour que l'intensité intégrale, dans le fil CD du galvanomètre, soit nulle, donnent pour la fermeture de la pile :

$$\begin{aligned} \text{Circuit ACD} \dots\dots\dots r_1 \int j_1 dt + L_1 i_1 - r_3 \int j_3 dt - L_3 i_3 &= 0, \\ \text{Circuit BCD} \dots\dots\dots r_2 \int j_2 dt + L_2 i_2 - r_4 \int j_4 dt - L_4 i_4 &= 0. \end{aligned}$$

Entre ces équations et les deux équations (1), on peut éliminer i_1 ,

(1) Avec un galvanomètre ordinaire, l'arrangement de Poggendorff pour la mesure des forces électromotrices; avec un galvanomètre différentiel, celui d'Edlund pour l'étude de l'extra-courant, pourraient aussi fournir des méthodes de zéro pour la comparaison des coefficients de self-induction.

i_3 et $\int j_1 dt$, $\int j_3 dt$. Il suffit de diviser la première équation par r_4 , la seconde par r_2 et de les retrancher; il vient ainsi

$$\left(\frac{L_1}{r_1} - \frac{L_2}{r_2}\right)i_1 - \left(\frac{r_3}{r_1} - \frac{r_4}{r_2}\right)\int j_3 dt - \left(\frac{L_3}{r_1} - \frac{L_4}{r_2}\right)i_3 = 0,$$

et, au moyen des équations (1),

$$\frac{L_1}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} = 0.$$

20. Si l'on dispose d'une résistance r_4 , dont le coefficient d'induction propre soit négligeable, et de deux boîtes de résistances à division continue, dont le coefficient d'induction soit toujours négligeable, le pont de Wheatstone permettra de comparer les coefficients de self-induction de deux bobines. Les deux boîtes de résistances seront placées sur les côtés 2, 3; à l'une d'elles, 3, on ajoutera l'une des bobines, et l'autre bobine sera placée seule sur le côté 1.

Les coefficients d'induction L_2 , L_4 étant nuls, les équations de condition se réduisent à

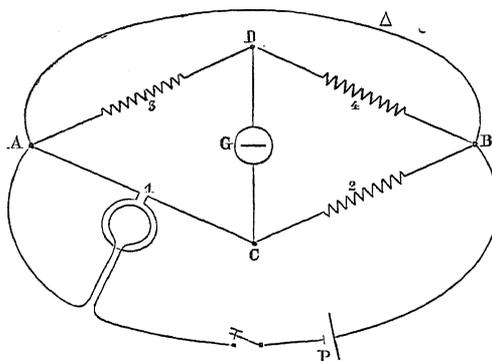
$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{L_1}{L_3},$$

dans lesquelles L_1 , L_3 , r_1 , r_4 sont données et invariables. Pour satisfaire à cette relation, il faut donc modifier r_2 et r_3 , ce qui exige bien deux boîtes de résistances divisées. Le rapport des coefficients d'induction est donné par le rapport des deux résistances r_2 , r_4 , résistances lues directement sur les boîtes, puisque ces côtés ne contiennent pas les bobines étudiées. Malheureusement, l'état permanent ne peut pas être réglé une fois pour toutes; chaque tâtonnement relatif à l'état variable dérègle l'état permanent. On peut modifier l'arrangement de manière à séparer les deux réglages (*Journal de Physique*, mars 1881, p. 109); mais deux nouvelles boîtes de résistances divisées, sans coefficient d'induction, deviennent nécessaires. Aussi n'ai-je pas pu soumettre cette disposition à l'expérience. Je n'en parlerai pas.

21. Pour la comparaison du coefficient d'induction mutuelle M de deux bobines avec le coefficient de self-induction L de l'une d'elles, on

peut faire séparément les deux réglages en ajoutant une dérivation variable Δ entre les deux sommets du pont A, B (*fig. 3*), auxquels aboutit la pile. La bobine dont on veut étudier le coefficient de self-induction est placée sur le côté 1 du pont; l'autre peut être placée sur le fil de la pile (MAXWELL, t. II, p. 356).

Fig. 3.



Les équations du pont réglé pour l'état permanent sont, en désignant par I l'intensité dans le fil APB de la pile :

$$\begin{aligned} \text{Circuit ACD} & \dots\dots\dots r_1 i_1 - r_3 i_3 = 0, \\ \text{Circuit BCD} & \dots\dots\dots r_2 i_1 - r_4 i_3 = 0, \\ \text{Circuit } \Delta\text{A DB} & \dots\dots\dots r_3 i_3 + r_4 i_3 - \Delta(I - i_1 - i_3) = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{i_3}{i_1}, \quad \text{et} \quad I = k i_1,$$

en posant

$$k = 1 + \frac{r_2}{r_4} + \frac{r_2}{r_4} \frac{r_3 + r_4}{\Delta}.$$

Les équations II (n° 15), quand Δ est choisi de telle sorte que l'intensité intégrale soit nulle dans le galvanomètre pendant la période variable de fermeture du circuit, sont

$$\begin{aligned} \text{Circuit ACD} & \dots\dots\dots r_1 \int j_1 dt + L_1 i_1 + MI - r_3 \int j_3 dt - L_3 i_3 = 0, \\ \text{Circuit BCD} & \dots\dots\dots r_2 \int j_1 dt + L_2 i_1 - r_4 \int j_3 dt - L_4 i_3 = 0. \end{aligned}$$

Divisant la première équation par r_1 , la seconde par r_2 et retranchant,

on a, en tenant compte des équations de l'état permanent,

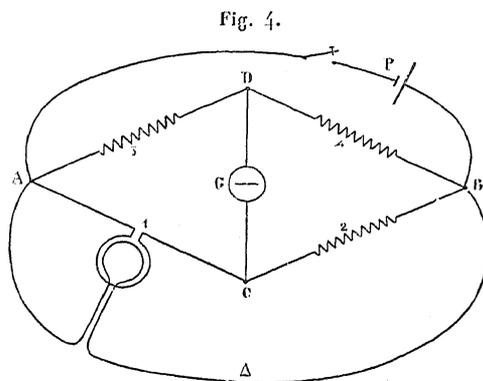
$$(1) \quad \frac{L_1 + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} = 0.$$

Si l'on dispose de trois boîtes de résistances sans coefficient d'induction, dont *une* à division continue, on en fera les côtés 2, 3, 4 du pont. Sur la dérivation Δ on mettra une boîte à division continue, qui peut avoir un coefficient d'induction quelconque.

L'équation (1) se réduira alors à

$$(2) \quad L + kM = 0, \quad k = 1 + \frac{r_2}{r_4} + \frac{r_2}{r_4} \frac{r_3 + r_4}{\Delta}.$$

22. Telle est la méthode de Maxwell, la seule que j'aie expérimentée. Il faut remarquer qu'elle n'est pas générale; elle suppose en effet L supérieur à M , car le nombre k est, quel que soit Δ , supérieur à $1 + \frac{r_2}{r_4}$. Pour la rendre absolument générale, il suffirait de placer la deuxième bobine sur le fil Δ lui-même (*fig. 4*).



La résistance Δ n'est plus donnée par la boîte graduée seule; mais ce n'est là qu'un désavantage apparent sur la précédente méthode; même dans cette dernière, pour être sûr que la résistance Δ est exprimée en même unité que les côtés du pont, il est indispensable de la mesurer en la substituant au côté 1, aussitôt le réglage obtenu.

Les équations de l'état permanent donnent alors

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4} = \frac{i_3}{i_1}, \quad (1 - i_1 - i_3) = i_1 k,$$

en posant

$$k = \frac{r_2}{r_4} \times \frac{r_3 + r_4}{\Delta}.$$

Pour l'état variable, l'équation du circuit ACD est seule changée ; elle devient

$$r_1 \int j_1 dt + L_1 i_1 + M(1 - i_1 - i_3) - r_3 \int j_3 dt - L_3 i_3 = 0,$$

et l'on en déduit l'équation définitive

$$\frac{L + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} = 0.$$

Maintenant k peut prendre une valeur positive quelconque par la variation de Δ .

Aussi est-ce cette disposition que je recommanderai d'employer, tant à cause de sa généralité certaine, que pour la simplicité de la valeur de k . C'est seulement en discutant les résultats des expériences faites au Collège de France que j'ai remarqué les avantages de cette disposition, et je regrette de n'avoir pu l'essayer. Les résultats en seront certainement aussi précis que ceux de la première méthode, avec les mêmes précautions (Chap. IV).

23. Deux expériences par les méthodes des nos 21 ou 22 pourront déterminer le rapport du coefficient de self-induction \mathcal{L} d'une bobine quelconque au coefficient d'induction mutuelle M de deux bobines connues.

D'une première expérience faite seulement avec les bobines connues, on tirera

$$L + kM = 0.$$

Cette première expérience peut être faite une fois pour toutes avec le soin nécessaire, et l'on peut regarder comme connu le rapport de L à M . Dans une seconde expérience, on ajoute au côté 1 du pont la bobine inconnue, en la mettant à une distance assez grande des deux bobines

connues, pour ne pas altérer M . On modifie convenablement r_3 et Δ , et l'on a

$$L + \mathcal{L} + k'M = 0,$$

d'où, par soustraction,

$$\mathcal{L} + (k' - k)M = 0,$$

ce qui détermine le rapport de \mathcal{L} à M .

Cette méthode me paraît très importante. Il est en effet facile de construire deux bobines dont le coefficient d'induction mutuelle soit théoriquement calculable en unités absolues C. G. S. avec telle précision que l'on voudra. Il suffit que la distance minima entre les fils d'une bobine et ceux de l'autre soit très supérieure au diamètre des fils. L'influence de ce diamètre, celle des irrégularités d'enroulement deviennent alors négligeables. Au contraire, il me paraît difficile de construire une bobine avec assez de précision pour que le calcul théorique de son coefficient de self-induction fournisse une approximation certaine, à cause de l'extrême proximité des portions de fil les plus actives. Ce n'est donc que par comparaison avec le coefficient d'induction mutuelle de deux bobines étalonnées qu'on pourra déterminer avec précision la valeur absolue du coefficient de self-induction d'une bobine.

24. Si l'on possédait des bobines à résistance constante, ce qui permet de faire une fois pour toutes le réglage relatif au courant permanent, mais à coefficient d'induction mutuelle variable suivant une loi connue, on pourrait substituer leur usage à celui de la dérivation Δ . Je suppose qu'on possède les trois boîtes de résistances nécessaires pour la mesure des résistances par le pont de Wheatstone, et que leur coefficient d'induction soit négligeable. On forme avec l'une de ces boîtes et la bobine inconnue le côté 3 du pont (*fig. 5*), et avec les deux autres, les côtés 2 et 4. On dispose les deux bobines à coefficient d'induction mutuelle gradué sur le côté 1 et le circuit de la pile.

Dans une première expérience, on obtient le réglage en employant une fraction h du coefficient d'induction mutuelle maximum M des deux bobines

$$\frac{L + h \left(1 + \frac{r_2}{r_h} \right) M}{r_1} - \frac{\mathcal{L}}{r_3} = 0.$$

Dans une deuxième expérience, on change r_4 , et l'on rétablit les deux réglages en changeant convenablement r_3 et h , sans altérer \mathcal{L} ,

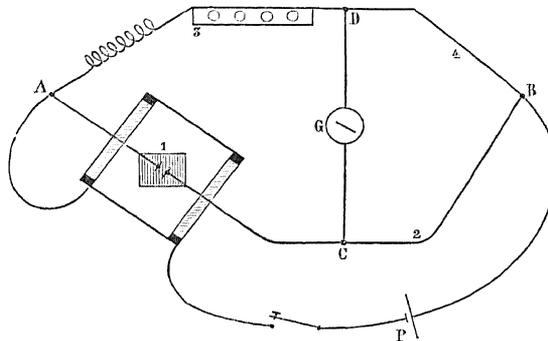
$$\frac{L + h' \left(1 + \frac{r_2}{r_4'} \right) M}{r_1} - \frac{\mathcal{L}}{r_3'} = 0.$$

Éliminant L par soustraction, et tenant compte des équations relatives à l'état permanent, on a

$$M \left[h' \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4'} \right) - h \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4} \right) \right] = \mathcal{L} \left(\frac{1}{r_4'} - \frac{1}{r_4} \right);$$

h, h', r_2, r_4, r_4' sont directement connus par les deux expériences. Quels que soient L, M, \mathcal{L} , il est toujours possible de choisir les rapports de r_2 à r_4 et à r_4' , tels que les limites entre lesquelles doivent rester h, h' permettent les réglages. La méthode est donc générale.

Fig. 5.



Les appareils à coefficient d'induction variable ont sur les boîtes de résistances l'avantage pratique que leur graduation peut être obtenue directement, par simple construction, sans aucun tâtonnement. Tels sont, par exemple, les deux appareils que je vais décrire.

25. Le premier appareil donne les multiples entiers d'une valeur déterminée. Il est formé d'une bobine inductrice intérieure, de fil un peu gros, et d'une bobine induite extérieure. Sur celle-ci, le fil n'est pas simple : c'est une corde de vingt fils isolés, légèrement tordus ensemble, et maintenus côte à côte par un large ruban de soie. Le

coefficient d'induction entre la bobine intérieure et un quelconque des vingt fils est alors le même, M . Au moyen d'un commutateur à clefs, on peut faire que le courant induit traverse $20 - p$ des fils dans un sens et les p autres en sens inverse. Le coefficient d'induction entre la bobine intérieure et les vingt fils ainsi réunis est $2(10 - p)M$, c'est-à-dire un nombre entier de fois $2M$ inférieur ou égal à 10. Mais ces fils sont toujours réunis bout à bout, et leur résistance reste la même, quand on change le coefficient d'induction mutuelle. Je désignerai ce premier appareil par la lettre A.

Le second appareil, destiné à fournir des subdivisions variant d'une manière continue, est formé d'une bobine inductrice extérieure cylindrique, sur laquelle un gros fil est très régulièrement enroulé. Une petite bobine intérieure, couverte de fil fin, est placée au centre de la première, et peut tourner autour d'un axe dirigé suivant un diamètre commun aux deux bobines. L'enroulement sur la bobine intérieure n'a d'ailleurs besoin d'aucune régularité. Les angles des axes de figure des deux bobines cylindriques peuvent être lus au dixième de degré sur un cercle divisé extérieur.

Si la bobine extérieure était infiniment longue, le coefficient d'induction mutuelle serait rigoureusement proportionnel au cosinus de l'angle des deux axes des bobines. Cette loi sera encore approchée en choisissant convenablement les dimensions des bobines, et l'appareil pourra servir à fractionner l'unité avec une précision suffisante. Voici les dimensions que j'ai essayées :

	Bobine inductrice.	Bobine induite.
	cm	cm
Longueur.....	19	4,7
Diamètre intérieur.....	10	1,0
Diamètre extérieur.....	12	5,0

Je désignerai ce second appareil par la lettre B.

Ces deux appareils ont été construits : le premier, chez M. Niaudet ; le second, chez M. Carpentier (¹). On en a écarté, bien entendu, toute

(¹) Pour la construction de ces appareils et pour leurs modifications successives, j'ai toujours trouvé chez M. Niaudet et M. Carpentier une complaisance dont je tiens à les remercier ici. Je dois, en outre, une reconnaissance particulière à l'Association française pour l'avancement des Sciences dont la libéralité m'a permis de faire construire tous les appareils dont j'ai eu besoin dans le cours de ce travail.

masse de fer, et même toute masse importante de métal conducteur capable de compliquer les effets d'induction.

CHAPITRE III.

COMPARAISON DE DEUX COEFFICIENTS D'INDUCTION MUTUELLE.

Discussion des méthodes.

26. Pour cette discussion, je me servirai des équations (III), n° 16.

La méthode *a*, n° 17, que j'ai employée dans mes premières expériences, présente un inconvénient sérieux : le passage du courant chauffe beaucoup les résistances Δ et R_2 , et d'une manière très inégale; aussi, le rapport $\frac{\Delta}{R_2}$ varie-t-il continuellement pendant l'expérience, ce qui rend le réglage difficile et la connaissance de ce rapport assez incertaine. En revanche, le courant induit, une fois le réglage fait, est constamment nul, ce qui évite toute irrégularité dans l'emploi du galvanomètre.

L'équation du circuit induit est, à chaque instant (*fig. 1*), n° 17,

$$(r_1 + r_2 + g)i + (l_1 + l_2 + G)\frac{di}{dt} + (M_1 + kM_2)\frac{dI}{dt} = 0,$$

g , G désignant la résistance et le coefficient d'induction propre du galvanomètre; l_1 , l_2 les coefficients d'induction propre des parties du circuit induit dont les résistances sont r_1 , r_2 .

Le réglage étant obtenu, k est déterminé de telle sorte que $M_1 + kM_2$ soit nul. L'équation multipliée par i , et intégrée pour toute la période variable, devient

$$(r_1 + r_2 + g) \int i^2 dt + (l_1 + l_2 + G) \int i \frac{di}{dt} dt = c.$$

Le deuxième terme est nul, puisque les valeurs initiale et finale de i sont nulles. Le premier terme est donc aussi nul. Comme tous les éléments de l'intégrale sont positifs, il faut que tous soient nuls séparément : i est donc constamment nul.

27. Dans les deux méthodes b , c , n° 17, le rapport des coefficients d'induction est donné en fonction des résistances du circuit induit seul. La chaleur produite par le courant instantané qui les traverse est beaucoup moins gênante que dans la disposition a , et il suffit d'espacer un peu les expériences, quand on approche du dernier réglage, pour que la température des bobines soit la même que celle de l'air ambiant. Leur résistance est alors connue au moyen d'expériences faites antérieurement à des températures constantes variées. En revanche, quand l'intensité intégrale est nulle, le courant n'est pas nul à chaque instant; ce sont deux courants successifs de signes contraires qui se compensent, et des difficultés particulières peuvent alors se présenter dans l'emploi du galvanomètre (nos 37 et 38).

28. b . Dans cette méthode, les équations du courant induit sont

$$\begin{aligned} (r_1 + g)i_1 + (l_1 + G) \frac{di_1}{dt} + M_1 \frac{dI}{dt} &= \delta(i_2 - i_1) + \lambda \frac{d(i_2 - i_1)}{dt}, \\ r_2 i_2 + l_2 \frac{di_2}{dt} + M_2 \frac{dI}{dt} &= -\delta(i_2 - i_1) - \lambda \frac{d(i_2 - i_1)}{dt}, \end{aligned}$$

λ désignant le coefficient d'induction propre de la résistance δ ; comme le galvanomètre est compris dans la partie du circuit induit qui contient la bobine 1, on a mis les termes correspondants g , G en évidence.

La condition pour que $\int_0^\infty i_1 dt$ soit nul est, n° 17,

$$M_1(r_2 + \delta) + \delta M_2 = 0.$$

On voit de suite que $\int_0^\infty i_2 dt$ ne peut pas être nul en même temps; car cela conduirait à l'égalité des deux rapports $\frac{r_2 + \delta}{\delta}$, $\frac{\delta}{r_1 + g + \delta}$, dont l'un est supérieur, l'autre inférieur à l'unité.

Éliminons $\frac{dI}{dt}$ entre les deux équations, il reste

$$i_1[(r_2 + \delta)(r_1 + g) + r_2\delta] + \frac{di_1}{dt}[(r_2 + \delta)(l_1 + G) + r_2\lambda] + \frac{di_2}{dt}(l_2\delta - r_2\lambda) = 0,$$

i_1 ne peut être constamment nul; en effet, $\int_0^\infty i_2 dt$ ne peut pas être nul, donc $\frac{di_2}{dt}$ est différent de zéro à chaque instant; d'autre part, son coefficient n'est pas nul en général, et le dernier terme subsiste dans l'équation.

c. Les équations du circuit induit sont

$$\begin{aligned} r_1 i_1 + l_1 \frac{di_1}{dt} + M_1 \frac{dI}{dt} &= g(i_2 - i_1) + G \frac{d(i_2 - i_1)}{dt}, \\ r_2 i_2 + l_2 \frac{di_2}{dt} + M_2 \frac{dI}{dt} &= -g(i_2 - i_1) - G \frac{d(i_2 - i_1)}{dt}, \end{aligned}$$

la dérivation δ ne contenant que le galvanomètre; sa résistance δ et son coefficient d'induction λ sont remplacés par g , G .

Pour que $\int_0^\infty (i_2 - i_1) dt$ soit nul, il faut qu'on ait, n° 17,

$$M_1 r_2 = M_2 r_1.$$

Remarquons de suite que $\int_0^\infty i_1 dt$ ne peut pas être nul en même temps, car il faudrait que $\int_0^\infty i_2 dt$ fût aussi nul, et nous venons de voir que ces deux intégrales ne peuvent être nulles à la fois.

Éliminons $\frac{dI}{dt}$, il reste

$$\begin{aligned} [g(r_1 + r_2) + r_1 r_2](i_2 - i_1) \\ + [G(r_1 + r_2) + l_2 r_1] \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} + (l_2 r_1 - l_1 r_2) \frac{di_1}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Le réglage de l'intensité intégrale $\int_0^\infty (i_2 - i_1) dt$ ne suffit pas à rendre $(i_2 - i_1)$ constamment nul; car, dans cette équation, ni $\frac{di_1}{dt}$ ni son coefficient ne sont nuls en général.

29. Pour rendre l'intensité constamment nulle, il faudrait satisfaire à une condition relative aux coefficients de *self-induction* du circuit

$$\begin{array}{l} \text{Méthode } b \dots\dots\dots \frac{l_2}{r_2} = \frac{\lambda}{\delta} \\ \text{Méthode } c \dots\dots\dots \frac{l_2}{r_2} = \frac{l_1}{r_1} \end{array}$$

On pourrait donc, en employant l'électrodynamomètre ou le téléphone comme indicateur du courant, tirer de là une méthode de comparaison des coefficients de *self-induction*, sur laquelle l'échauffement par le courant permanent n'aurait pas d'influence. Mais il faudrait toujours deux réglages, qu'il serait d'ailleurs impossible de faire séparément; et ces instruments, n'indiquant pas le sens des courants, guident mal les tâtonnements. Enfin, les raisonnements supposent que la loi du courant à chaque instant est donnée par les seules équations III, n° 16; on verra plus loin, nos 37 et 38, combien elle peut être altérée par une petite capacité placée sur le circuit inducteur.

Expériences faites par la méthode *a*.

(Nancy; mars 1881.)

30. Les deux paires de bobines à comparer sont placées sur une grande table, à environ 2 mètres l'une de l'autre. La dérivation Δ , placée sur une petite table à côté de l'observateur, est formée par une boîte de résistances de GaiFFE, divisée en ohms et en fractions d'ohm. Le fil des bobines n'est pas replié sur lui-même : aussi faut-il placer la boîte assez loin des autres appareils; elle n'est pas réglée à plus de 0,001; toutes les mesures auxquelles elle servira comporteront donc des erreurs de même ordre.

Le galvanomètre a une résistance d'environ 900 ohms; il est posé sur une console en pierre très solide, scellée dans un mur de façade. L'aiguille astatique est formée de deux petits aimants courts; elle porte un petit miroir plan, excellent, qui permet de lire les déviations par réflexion et une toile métallique à mailles très fines, dont le frottement dans l'air amortit les oscillations bien plus rapidement que ne

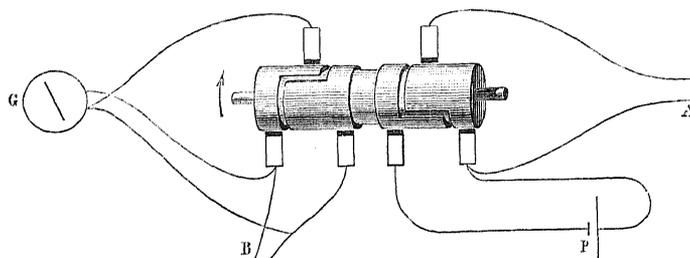
ferait une lame pleine de mêmes dimensions. Le tout est protégé contre les mouvements de l'air extérieur par une boîte en carton qui ne présente qu'une ouverture, fermée par une glace plane, pour le passage de la lumière. A environ 1 mètre du galvanomètre sont placées, sur un support solidement fixé au plancher, la règle divisée en millimètres et la lunette viseur munie d'un réticule. Le grossissement de la lunette permet d'apprécier le quart de millimètre; la stabilité de l'ensemble rend cette lecture absolument sûre.

Tous les fils de jonction cheminent côte à côte, de manière à n'exercer aucune action extérieure.

31. Le galvanomètre (dépourvu d'amortisseur) n'étant pas assez sensible pour faire des mesures précises avec une seule interruption, on a eu recours à un interrupteur tournant (¹) (*fig. 6*). A chaque tour, les communications sont établies dans l'ordre suivant :

- Communication du galvanomètre avec le circuit induit B;
- Fermeture du circuit inducteur A;
- Fermeture du galvanomètre sur lui-même;
- Ouverture du circuit inducteur A.

Fig. 6.



Le galvanomètre ne reçoit ainsi que le courant induit de fermeture; le circuit induit n'est jamais ouvert.

L'interrupteur fait environ dix tours par seconde, et ces dix interruptions donnent à l'aiguille du galvanomètre, suffisamment amortie,

(¹) Les roues de Masson, ou mieux le rhéotrope Wartmann, tel que le construit la Société de Genève, rempliraient le même but.

une déviation permanente. La sensibilité est accrue tant par la fréquence des interruptions que par la substitution d'une déviation permanente à une impulsion. On sait, en effet, que, si une seule interruption produit une impulsion θ sur l'aiguille non amortie, dont la durée d'oscillation est T , n interruptions par seconde produiront sur l'aiguille amortie une déviation permanente δ , liée à θ par la relation

$$\delta = n \frac{T}{2\pi} \theta,$$

et $\frac{T}{2\pi}$ est toujours plus grand que 1 seconde, pour qu'on puisse lire les impulsions.

L'interrupteur était mis en mouvement par une machine Gramme, à aimant Jamin, dans laquelle passait le courant de 6 éléments d'Arsonval à écoulement (1), qui sont restés montés plusieurs mois. Quatre éléments pareils produisaient le courant inducteur.

L'interrupteur, la machine Gramme et les piles sont placés dans une pièce voisine, à plus de 5 mètres de tous les autres appareils. On a vérifié, par des expériences directes, que ni l'aimant de la machine Gramme, ni le courant qui traverse son anneau n'ont aucune action soit sur le galvanomètre, soit sur les diverses parties des circuits inducteur et induit; que les diverses parties du circuit inducteur n'ont aucune action directe sur le galvanomètre ou sur les parties du circuit induit autres que les deux paires de bobines à étudier.

32. La résistance R_2 a été évaluée à diverses températures, en la comparant, par la méthode du pont de Wheatstone, à la boîte de Gaiffe, les deux autres côtés du pont étant formés par des bobines de 10 et 1000 ohms. Les expériences ont porté sur l'appareil A, à vingt fils, n° 25, et sur une paire de bobines auxiliaires D, intermédiaire entre le maximum et le minimum de l'appareil A.

Première série : $kM_A > M_D$. — La résistance R_2 est celle de la bobine inductrice de l'appareil A. Dans les limites de température des expé-

(1) *La lumière électrique*, t. V, p. 121; 1881.

riences, on a

$$R_2 = 44,95 + 0,218(t - 10^{\circ}, 2),$$

l'unité étant la résistance à la température t de la bobine numérotée 1 ohm, dans la boîte de Gaiffe. Désignant par M_A le maximum du coefficient d'induction de l'appareil A, et par h la fraction de ce maximum que l'on emploie, on a

$$\frac{hM_A}{M_D} = \frac{\Delta + R_2}{\Delta}.$$

Voici quelques-unes des expériences :

TABLEAU I.

h .	t .	Δ .	$\frac{\Delta + R_2}{\Delta}$.	$\frac{M_A}{M_D}$.
1.....	15 ^o	68,5 \pm 0,1	1,671	1,671
0,9.....	14,2	91,6 \pm 0,1	1,500	1,666
0,8'.....	14,7	138,9 \pm 0,1	1,338	1,672
0,8.....	14,8	139,2 \pm 0,1	1,330	1,662
0,8.....	14,2	137,6 \pm 0,1	1,333	1,666
Moyenne.....				1,667

La dernière colonne contient les valeurs du rapport $\frac{M_A}{M_D}$ déduites des nombres de l'avant-dernière colonne. Leur concordance est à peu près satisfaisante, les différences avec la moyenne étant inférieures à $\frac{1}{300}$. La valeur inscrite de Δ est la valeur lue, augmentée de la résistance des fils de jonction $0^{\text{ohm}},37$.

33. *Deuxième série* : $hM_A < M_D$. — Toutes les expériences de cette série ont été faites à la même température $12^{\circ},6$. La résistance R_2 est celle de la bobine inductrice D, augmentée d'une résistance près de sept fois plus grande, pour que les valeurs de Δ ne soient pas trop petites,

$$R_2 = 18,49.$$

La formule de calcul est

$$\frac{hM_A}{M_D} = \frac{\Delta}{\Delta + R_2}.$$

La dernière colonne contient les valeurs de $\frac{M_A}{M_D}$, déduites des nombres de l'antépénultième. L'avant-dernière colonne est calculée au moyen des trois premières lignes du tableau, seules.

TABLEAU II.

$h.$	$\Delta.$	$\frac{\Delta}{\Delta + R_2}$	Calculé.	$\frac{M_A}{M_C}$
0,1.....	3,69	0,1663		1,663
0,2.....	9,35	0,336		1,680
0,2'.....	9,33	0,335		1,675
0,1 + 0,2.....	18,62	0,5017	0,502	1,672
0,1 + 0,2'.....	18,70	0,5028	0,501	1,676
0,2 + 0,2'.....	37,5	0,669	0,671	1,672
0,1 + 0,2 + 0,2'...	92,7	0,8336	0,837	1,667
0,5.....	92,5	0,8334		1,667

L'accord des valeurs de ce tableau paraîtra encore satisfaisant, si l'on considère la petitesse de la dérivation Δ et l'erreur considérable qu'elle comporte par cette raison.

Avec les trois premières lignes et la dernière, nous pouvons former les mêmes combinaisons que dans le tableau I; voici la comparaison des résultats directs du tableau I et de ceux obtenus par addition des nombres du tableau II.

TABLEAU III.

$h.$	Direct.	Par addition.
1,0 = 0,1 + 0,2 + 0,2' + 0,5.....	1,671	1,670
0,9 = 0,2 + 0,2' + 0,5.....	1,500	1,504
0,8' = 0,2' + 0,1 + 0,5.....	1,338	1,334
0,8 = 0,2 + 0,1 + 0,5.....	1,333	1,335

On doit conclure des tableaux qui précèdent que les expériences sont impuissantes à mettre en évidence une différence entre la véritable valeur de h et celle qu'on a admise comme fournie par la construction, non par défaut de sensibilité, mais à cause des incertitudes sur la valeur des résistances employées.

Expériences faites par la méthode *c*.

(Paris, septembre-octobre 1881. — Laboratoire de M. Mascart.)

34. Pour obtenir une stabilité suffisante, le galvanomètre, l'échelle divisée et la lunette ont été installés sur la surface horizontale qui termine un des murs de façade, à la hauteur d'une fenêtre. Le galvanomètre de Thomson à grande résistance (7000 ohms environ) est très sensible; son aiguille astatique est munie d'un petit miroir concave de 0^m,60 de distance focale principale. C'est à cette distance qu'on a placé l'échelle divisée en millimètres; on la regarde avec une lunette à réticule, pointée à l'infini. Le dixième de millimètre de l'échelle est facile à apprécier.

Les paires de bobines à comparer sont placées sur une table; l'appareil A, à plus de 2^m,50 du galvanomètre, et l'appareil B, dont la bobine induite est à orientation variable, environ 2^m,50 plus loin. Ces distances n'étaient pas suffisantes pour que l'action directrice des bobines sur l'aiguille du galvanomètre fût négligeable dans toutes les positions; mais on les a orientées séparément de manière qu'il en soit ainsi. Le déplacement du zéro dû à l'appareil A était, dans l'orientation la plus défavorable, 1^{mm} environ; mais on pouvait tourner de $\pm 10^\circ$ environ à droite et à gauche de la position la plus favorable, sans observer la moindre déviation. Pour l'appareil B, placé bien plus loin, l'effet du courant inducteur était très faible (valeur maximum, 0^{mm},4) et les limites de l'orientation convenable très étendues. Quant à l'effet de la bobine induite, dont l'orientation est variable, on s'est assuré directement, en la fermant sur elle-même, que, dans aucune orientation, le courant induit n'a d'action directe sur le galvanomètre.

Enfin, en fermant le circuit induit sur lui-même d'une part, le galvanomètre sur lui-même d'autre part, on s'est assuré que les bobines, ainsi orientées, n'induisent dans le galvanomètre aucun courant.

Les résistances additionnelles placées sur la même table que les deux appareils, à peu près à égale distance de chacun d'eux, sont celles d'une excellente boîte d'Elliott (n° 434), appartenant au laboratoire de Physique du Collège de France. Elle est construite en alliage platine-

argent. Le fil de toutes les bobines a été ployé en double avant d'être enroulé; il n'a aucune action extérieure.

Tous les fils de jonction sont doublés et soigneusement isolés. La pile se compose de dix éléments Daniell, moyen modèle; le galvanomètre étant très sensible, je n'ai pas eu recours à l'interrupteur tournant: je me suis contenté d'observer les impulsions produites, par l'ouverture et la fermeture du circuit inducteur, entre une pointe de cuivre amalgamé et du mercure. Pour le dernier réglage, les mouvements étaient amplifiés par la méthode de Weber, en ouvrant et fermant le circuit inducteur à chaque passage de l'aiguille du galvanomètre par le zéro. On suppose, en agissant ainsi, que les impulsions produites à l'ouverture et à la fermeture du circuit sont identiques, comme le sont, en effet, les intensités intégrales du courant induit. On verra plus loin (nos 37-38) quelle précaution est nécessaire dans le réglage du galvanomètre.

35. Dans la méthode actuelle, le passage du courant induit n'échauffe pas sensiblement les fils dont la résistance entre dans la formule. La température de ces fils est donc la même que celle de l'air ambiant, pourvu que celle-ci ne varie que très lentement; elle fait connaître leur résistance au moyen d'une table ou d'une courbe, construites à l'aide de quelques expériences préliminaires.

Toutes ces résistances ont été déterminées par la méthode du pont de Wheatstone, en fonction de l'ohm de la boîte d'Elliott, à la même température variable. L'unité de résistance dépend donc de la température, mais cela n'a aucune influence, puisque les formules ne contiennent que des rapports de résistances. Les expériences de graduation ont été faites à un petit nombre de températures stationnaires, comprises entre 12° et 18°. Elles ont servi à tracer une courbe, d'où l'on déduit la résistance à une température quelconque. Entre ces limites de température, la courbe se réduit, en général, à une droite; pourtant, celle de l'appareil B s'en écarte sensiblement. En outre, l'inclinaison de la droite n'est pas la même pour trois bobines de provenances différentes, toutes trois construites en fil de cuivre.

36. Il est très important de ne faire les mesures qu'à une tempéra-

ture stationnaire. Ayant voulu faire une série de déterminations dans la même journée, un fourneau à gaz, placé dans la salle à grande distance des appareils, fut allumé dès le matin. Vers dix heures, la température de l'air au voisinage des appareils était de 14° ; à deux heures et demie, elle atteignait 18° . Le gaz fut alors éteint, et la température baissa peu à peu. Bien que la variation n'eût pas été rapide (4° en quatre heures et demie), les résistances déterminées à des températures égales du thermomètre placé près des appareils, pendant l'élévation et la diminution de la température, différaient très notablement.

Pour restreindre autant que possible les incertitudes qui proviennent de cette cause, toutes les expériences sur les coefficients d'induction ont été faites à des températures comprises entre $15^{\circ},9$ et $16^{\circ},6$, et les corrections appliquées seulement à ces petites différences. Pour cela, tout l'air de la salle était chauffé lentement par des fourneaux à gaz, éloignés des appareils; quand la température atteignait $15^{\circ},7$ environ, la flamme était baissée, puis éteinte. Pendant ces journées d'automne, où la température extérieure était de 12° à 13° , on pouvait disposer de près de trois heures, pendant lesquelles la température continuait à monter jusqu'à 16° , puis baissait très lentement.

Les expériences ont été faites au jour ou à la lumière d'une bougie placée très près de l'échelle divisée. Toutes les sources de lumière un peu intenses, placées de manière à éclairer l'échelle entière, produisaient un déplacement lent et continu du zéro suffisant pour ôter toute concordance aux expériences.

37. Avec ces précautions, j'espérais obtenir de suite de bons résultats. J'ai été arrêté pendant quelque temps par un phénomène bizarre. Quand le réglage des résistances approchait de la perfection, les impulsions produites, à la fermeture et à l'ouverture du circuit inducteur, n'étaient pas symétriques par rapport au zéro. L'impulsion produite à l'ouverture différait d'environ $-0^{\text{mm}},7$ de l'impulsion produite à la fermeture. En outre, cette différence conservait sa grandeur et son signe, dans quelque sens que le galvanomètre ou la pile fussent attachés aux circuits induit et inducteur.

En étudiant la méthode, je reconnus alors que le courant n'est pas constamment nul lorsque les résistances sont réglées, et je cherchai à

modifier la loi du courant sans altérer le réglage du circuit induit, en plaçant une capacité en dérivation entre les deux points A, B du circuit inducteur (*fig. 1, n° 17*). (*Voir n° 74.*)

L'influence de la capacité est *nulle* sur l'impulsion produite à la fermeture du circuit inducteur.

L'impulsion produite à l'ouverture du circuit inducteur varie considérablement avec la capacité, comme le montre le tableau suivant :

Capacité	}	0,00	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,60	1,00
en microfarads.										
Impulsion	}	-0,7	-2,1	-4,1	-6,0	-6,0	-5,7	-4,0	-2,1	-1,0
en millimètres.										

L'impulsion ne change ni en grandeur ni en signe, quand on change le sens d'attache de la pile ou du galvanomètre au reste des circuits.

38. Ainsi, l'effet est en relation directe avec la loi de variation du courant induit. Or l'aiguille du galvanomètre porte un amortisseur formé d'une mince palette d'aluminium, qu'on ne peut enlever sans tout détruire. Si cette lame métallique n'est pas orientée d'une manière absolument symétrique par rapport aux bobines du galvanomètre, des courants peuvent y être induits même quand l'intensité intégrale est nulle. L'action électrodynamique totale qui s'exerce entre ces courants et ceux du galvanomètre est évidemment indépendante en grandeur et en signe du sens de ceux-ci. En déplaçant le zéro du galvanomètre au moyen de l'aimant directeur, on doit donc changer la grandeur et le signe de l'effet observé, mais non la loi de variation avec la capacité. On constate en effet que l'impulsion maximum a toujours lieu quand la capacité est 0,25 microfarad, mais que sa valeur dépend de la position du zéro.

Zéro.....	139	155	172	180	185	211
Impulsion pour C = 0,25.....	- 2,3	- 1,5	- 0,7	0,0	+ 0,4	+ 1,5

On peut donc trouver une position du zéro pour laquelle l'impulsion à l'ouverture est nulle, en même temps que l'impulsion à la fermeture. Cette position est déterminée avec précision grâce à la capacité additionnelle. Pour toutes les observations qui seront citées, le zéro est ainsi déterminé, et la capacité ensuite enlevée. La symétrie des impul-

sions de fermeture et de rupture rend alors applicable la méthode d'amplification de Weber.

Résultats.

39. 1° *Comparaison de l'appareil A avec l'appareil B fixé dans une position invariable.* — Toutes ces expériences ont été faites à la température de 16°, 1. La formule de calcul est

$$\frac{hM_A}{M_B} = \frac{r_A + r}{r_B},$$

où l'on a

$$r_A = 1264, 1, \quad r_B = 974, 2.$$

TABLEAU IV.

$h.$	$r.$	O.	C.	$\frac{O - C}{O}$.
0,1	191 ± 0,5	1,493 ± 0,001	1,491	+ 0,0013
0,2	1639 ± 3	2,980 ± 0,003	2,981	- 0,0003
0,2'	1640 ± 3	2,981 ± 0,003	2,981	0,0000
0,5	5994 ± 3	7,450 ± 0,003	7,452	- 0,0003

La colonne C donne le nombre qu'on obtiendrait en prenant la fraction indiquée par h du total de la colonne O. La dernière colonne, comparée aux erreurs probables des mesures, montre qu'en adoptant pour h la valeur donnée par construction, on ne s'expose pas à une erreur supérieure au millième de la valeur exacte; elle est même probablement bien inférieure.

40. 2° *Comparaison de l'appareil B à graduation continue avec 0,5 de l'appareil A.* — Je me contenterai de citer l'une des séries d'expériences. Le zéro (position d'induction mutuelle nulle) déterminé directement est dans cette série à +5°,60 exactement. Le vernier au dixième de degré permet d'apprécier le vingtième; l'angle d'une direction quelconque avec la direction du zéro est donc connu à moins de 0°,1 près. Néanmoins l'erreur qui peut en résulter est très supérieure à celle qui provient de la détermination électrique. Le tableau suivant résume les résultats. Dans la première colonne sont les angles α comptés à partir du zéro; dans la seconde, les valeurs corres-

pondantes observées du rapport de M_B pour chaque angle, à $0,5 M_A$. La valeur du maximum, $0,5272$, a été déterminée au moyen des angles de 70° , 80° , 90° , 100° et 110° , par l'application de la loi du sinus. Une petite erreur dans la détermination de ces angles est complètement inappréciable sur le sinus. Le maximum est donc très bien connu; les nombres de la colonne C_1 ont été calculés au moyen de ce maximum et de la loi du sinus. La colonne $O - C_1$ contient les différences, qui atteignent des valeurs très supérieures aux erreurs possibles de mesure électrique, erreurs toujours inférieures à $\frac{1}{500}$ de la valeur mesurée. L'erreur qu'entraînerait une incertitude de $0^\circ,1$ sur la mesure de l'angle est inscrite dans la colonne θ . Enfin, la colonne ε contient la somme des deux erreurs possibles, dans la lecture de l'angle et dans la mesure électrique.

TABLEAU V.

α .	O.	C_1 .	$O - C_1$.	θ .	ε .	C_2 .	$O - C_2$.
$5^\circ,1$	471	469	+ 2	9	10	464	+ 7
$10,1$	918	924	--- 6	9	11	914	+ 4
$15,1$	1364	1373	--- 9	9	12	1361	+ 3
$20,1$	1800	1812	--- 12	9	12,5	1795	+ 5
$25,1$	2217	2236	--- 19	8	12,5	2217	0
$30,1$	2635	2645	--- 10	8	13	2630	+ 5
$35,1$	3010	3032	--- 22	7,5	13,5	3011	--- 1
$40,1$	3386	3397	--- 11	7	13,5	3383	+ 3
$45,1$	3715	3745	--- 30	6,5	14	3725	--- 10
$50,1$	4035	4045	--- 10	6	14	4032	+ 3
$60,1$	4555	4572	--- 17	4,6	13,6	4563	--- 8
$70,1$	4950	4959	--- 9	3	13	4957	--- 7
$80,1$	5192	5193	--- 1	1,6	12,6	5198	--- 6
$90,1$	5279	5272	+ 7	0	10,5	5278	+ 1
$100,1$	5191	5190	+ 1	--- 1,6	12,6	5196	--- 5
$110,1$	4950	4953	+ 3	--- 3	13	4954	--- 4

N. B. — Tous les nombres ont été multipliés par 10^4 avant d'être inscrits.

Ainsi, l'application de la loi du sinus à cet appareil est permise, si on ne lui demande pas une précision supérieure au centième. On pourrait même choisir une valeur du maximum un peu inférieure, $0,5258$, qui donne une différence inférieure à $\frac{1}{200}$; mais j'ai préféré conserver la valeur du maximum déterminée directement.

41. Les différences peuvent provenir de deux causes distinctes :

1° L'appareil étant bien centré, la bobine extérieure n'est pas assez longue pour que la loi du sinus soit exacte. Alors le coefficient d'induction peut être développé en sinus et cosinus de l'angle et de ses multiples; mais le coefficient d'induction doit évidemment changer de signe sans changer de valeur absolue, quand on remplace α par $-\alpha$, ou par $\pi + \alpha$, cet angle étant compté à partir de la position d'induction mutuelle nulle. Le développement ne doit donc contenir aucun cosinus et seulement les sinus des angles impairs; le premier terme de correction sera de la forme $a \sin 3\alpha$.

2° L'axe autour duquel tourne la bobine intérieure ne passe exactement ni par le centre de la bobine mobile, ni par celui de la bobine fixe. L'erreur qui en provient change de signe quand la bobine mobile occupe deux positions distantes de 180° ; elle est donc de la forme $b \sin 2\alpha + c \cos 2\alpha$.

Malheureusement les différences sont trop faibles, surtout eu égard à l'incertitude sur la valeur de l'angle, pour déterminer avec certitude la forme de la correction. Toutefois la comparaison avec les résultats obtenus de l'autre côté du zéro et le soin apporté à la construction me font regarder la seconde cause d'erreur comme très faible.

J'ai inscrit, dans la colonne C_2 , les nombres calculés par la formule

$$10^4 M_\alpha = (5272 - 10) \sin \alpha - 15 \sin 3\alpha,$$

et les différences $O - C_2$ sont toutes inférieures aux nombres de la colonne ε . La formule permet alors de déterminer M_α avec une erreur moindre que $\frac{1}{500}$ du maximum.

Les deux appareils A et B n'auraient besoin que de très faibles modifications pour donner, par construction, des coefficients compris entre 0 et $10M$, à moins de $\frac{1}{1000}$ près de M . Ils pourraient donc servir, comme je l'ai indiqué au n° 24.

Valeurs absolues.

42. M. Mascart a mis à ma disposition deux bobines cylindriques de même longueur, destinées à des mesures de courant en valeur absolue par la balance électrodynamique. Je les désignerai par la lettre C.

Voici leurs dimensions, telles qu'elles ont été déterminées pendant la construction même :

	Diamètre moyen déduit de la longueur totale du fil.	Longueur de la bobine.	Nombre total des tours.
Grande bobine 1	10,9 ^{cm}	48,5 ^{cm}	3263
Petite » 2	4,98	48,5	3272

Leur coefficient d'induction mutuelle est donné par la formule (MAXWELL, t. II, p. 282)

$$M = 4\pi^2 \frac{n_1 n_2}{l_1 l_2} R_2^2 (l_1 - 2R_1 \varepsilon),$$

$$\varepsilon = 0,500 + 0,0625 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \dots + \frac{l_1 - \sqrt{l_1^2 + R_1^2}}{2R_2}$$

lorsque leurs axes et leurs milieux coïncident. On trouve ainsi

$$M_0 = 4,79 \times 10^7 \text{ C. G. S.}$$

en négligeant l'influence du diamètre des fils et de l'épaisseur des quatre couches. La valeur calculée par la formule simple, où l'on néglige l'influence des extrémités, serait notablement différente, $5,39 \times 10^7$. Je pense que la valeur $4,79 \cdot 10^7$ est exacte à $\frac{1}{500}$ près environ. On peut alors se faire une idée de la valeur absolue des deux autres appareils.

43. Voici les résultats de la comparaison directe avec l'appareil A tout entier :

$r_C = 108$ ohms à $16^\circ, 6$. Sa valeur a été ramenée dans chaque cas à la température t .

t .	r .	$\frac{r_A}{r_C + r}$	Observations.
16,3	135,7 \pm 0,5	5,190	La bobine intérieure C est à peu près au centre de l'autre; les milieux des longueurs sont en coïncidence.
17,07	136,5 \pm 0,2	5,177	
17,05	136,8 \pm 0,2	5,170	La bobine intérieure est très excentrique; elle repose sur la bobine la plus large. Les milieux des longueurs sont en coïncidence.
17,2	137,5 \pm 0,5	5,154	
17,0	129,5 \pm 0,2	5,328	Bobines excentrées; milieux des longueurs à 3 ^{cm} , 8 l'un de l'autre.

On voit, par ce Tableau, que l'excentricité des axes n'a qu'une influence médiocre sur la valeur du coefficient d'induction mutuelle. La distance du milieu des longueurs a , au contraire, une importance considérable.

Les deux premières expériences donnent

$$1 M_A = 5,18 M_C = 5,18 \times 4,79 \times 10^7 = 2,48 \times 10^8$$

et (n° 40)

$$\max M_B = 0,5 M_A \times 0,5272 = 0,527 \times 1,24 \times 10^8 = 6,53 \times 10^7.$$

Telles sont, à peu près, les valeurs absolues des coefficients d'induction mutuelle des deux appareils A et B.

CHAPITRE IV.

COMPARAISON D'UN COEFFICIENT DE SELF-INDUCTION ET D'UN COEFFICIENT D'INDUCTION MUTUELLE.

Méthode de Maxwell. — Discussion.

44. Je n'ai employé que la méthode de Maxwell (n° 21).

Pour obtenir un changement de signe des impulsions du galvanomètre, il faut choisir r_2 et r_4 tels que l'on ait

$$\frac{L}{M} > 1 + \frac{r_2}{r_4},$$

ce qui exige déjà que L soit supérieur à M . Il faut, en outre, que M soit négatif, ce qu'on obtient en attachant convenablement les fils.

Pour que la relation simple (2) (n° 21) soit applicable, il faut que les côtés 2, 3, 4 du pont n'aient qu'un coefficient d'induction insensible. Lorsque le fil des boîtes de résistances n'est pas ployé en double, les

valeurs de k peuvent être très différentes, pour la même paire de bobines; je n'en citerai qu'un exemple : c'est un essai fait avec les boîtes de Gaiffe dont je disposais à Nancy :

	r_1 .	r_2 .	r_3 .	r_4 .	Δ .	k .
Appareil A.....	1000	106,3	84		212,4	23,6
»	1000	102,3	81,16		3000	14

Cet essai, fait au moyen de l'interrupteur tournant (n° 31), m'a pourtant montré avec quelle précision on peut régler la résistance Δ . On peut donc espérer de bons résultats, mais il est indispensable que les fils soient ployés en double; cette condition elle-même n'est pas toujours suffisante (nos 60 et 61); au moins elle rend possible l'élimination du coefficient inconnu.

45. *Discussion.* — Examinons ce qui se passerait si les résistances du pont n'étaient pas bien réglées.

1° *État permanent.* Désignons par j l'intensité du courant dans le galvanomètre, dont la résistance est g , par I l'intensité du courant qui traverse la pile P, et posons

$$J = i_1 + i_3;$$

les équations des circuits fermés ACD, BCD, A Δ BD (*fig.* 3, n° 21) sont

$$r_1 i_1 + gj - r_3 i_3 = 0,$$

$$r_2 i_1 - r_2 j - gj - r_4 i_3 - r_4 j = 0,$$

$$\Delta(I - J) = r_3 i_3 + r_4(i_3 + j).$$

De ces équations on peut tirer, par des calculs faciles,

$$(1) \quad \begin{cases} r_2 r_3 - r_1 r_4 = D \frac{I}{J}, \\ i_1 = J \frac{r_3}{r_1 + r_3} - j \frac{g}{r_1 + r_3}, \\ i_3 = J \frac{r_1}{r_1 + r_3} + j \frac{g}{r_1 + r_3}, \\ I = J \left(1 + \frac{Q^N}{\Delta \mathcal{R}} \right) + j \frac{r_1 r_4 - r_2 r_3}{\Delta \mathcal{R}}, \end{cases}$$

en posant, comme on en a l'habitude,

$$(2) \quad \begin{cases} \mathcal{R} = r_1 + r_2 + r_3 + r_4, \\ \mathcal{Q} = (r_1 + r_3)(r_2 + r_4), & \mathcal{Q}' = (r_1 + r_2)(r_3 + r_4), \\ \mathbf{D} = g\mathcal{R} + \mathcal{Q}. \end{cases}$$

46. *Période variable.* — Pour simplifier l'écriture, désignons par la lettre q les intensités intégrales qui entrent dans les équations (II) (n° 15); en se rappelant la définition de cette quantité (nos 10 et 12) quand l'intensité finale n'est pas nulle, on voit que, pendant un temps t supérieur à la durée de la période variable, le galvanomètre a été parcouru par une intensité intégrale $j_t + q$; j est déterminé par le paragraphe précédent, occupons-nous de q .

Les équations (II) (n° 15), appliquées aux circuits fermés ACD, BCD, donnent

$$\begin{aligned} r_1 q_1 + \mathbf{L}_1 i_1 + \mathbf{M}\mathbf{I} + gq + \mathbf{G}j - r_3 q_3 - \mathbf{L}_3 i_3 &= 0, \\ r_2 q_1 + \mathbf{L}_2 i_1 - r_4 q_3 - \mathbf{L}_4 i_3 - (r_2 + r_4 + g)q - (\mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_4 + \mathbf{G})j &= 0, \end{aligned}$$

où \mathbf{G} désigne le coefficient de self-induction du galvanomètre.

Je vais tirer de ces équations la valeur de q en fonction de la somme $q_1 + q_3$, que j'appelle \mathbf{Q} . Cette substitution, faite dans les équations, donne

$$\begin{aligned} -\mathbf{D}q - (r_1 r_4 - r_2 r_3)\mathbf{Q} - \mathcal{R}\mathbf{G}j - (r_1 + r_3)(\mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_4)j \\ - (r_2 + r_4)(\mathbf{L}_1 i_1 + \mathbf{M}\mathbf{I} - \mathbf{L}_3 i_3) + (r_1 + r_3)(\mathbf{L}_2 i_1 - \mathbf{L}_4 i_3) &= 0, \end{aligned}$$

et, en substituant les valeurs de i_1, i_3, \mathbf{I} , tirées de (I) (n° 45),

$$(3) \quad \begin{cases} -\mathbf{D}q + \mathbf{D}\frac{j}{\mathbf{J}}\mathbf{Q} - \mathcal{R}\mathbf{G}j + (\mathbf{L}_2 r_3 - \mathbf{L}_4 r_1)\mathbf{J} - j(\mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_4)(r_1 + r_3 + g) \\ - (r_2 + r_4)\left[\mathbf{L}_1 \frac{r_3 \mathbf{J} - g j}{r_1 + r_3} + \mathbf{M} \frac{(\Delta\mathcal{R} + \mathcal{Q}')\mathbf{J} + (r_1 r_4 - r_2 r_3)j}{\Delta\mathcal{R}} - \mathbf{L}_3 \frac{r_1 \mathbf{J} + g j}{r_1 + r_3}\right] &= 0. \end{cases}$$

47. Or on a

$$r_2 r_3 - r_1 r_4 = \frac{\mathbf{D}j}{\mathbf{J}},$$

d'où, en ajoutant et retranchant $r_3 r_4$,

$$(r_2 + r_4)r_3 - (r_1 + r_3)r_4 = \mathbf{D}\frac{j}{\mathbf{J}}.$$

Remplaçons D par sa valeur, et multiplions les deux membres par $\frac{J}{r_1 + r_3}$, il vient

$$\frac{r_2 + r_4}{r_1 + r_3} r_3 J - r_4 J = j \left(g + g \frac{r_2 + r_4}{r_1 + r_3} + r_2 + r_4 \right),$$

d'où enfin

$$\frac{r_2 + r_4}{r_1 + r_3} r_3 J - \frac{r_2 + r_4}{r_1 + r_3} g j = r_4 J + j(g + r_2 + r_4).$$

Le premier membre de cette équation est le coefficient de L_1 dans l'équation (3) (n° 46); on peut mettre ce terme sous la forme plus simple

$$(4) \quad - [r_4 J + j(g + r_2 + r_4)] L_1.$$

On trouvera de même

$$\frac{r_2 + r_4}{r_1 + r_3} r_1 J + g j \frac{r_2 + r_4}{r_1 + r_3} = r_2 J - j(g + r_2 + r_4),$$

d'où, pour le terme en L_3 ,

$$(5) \quad + L_3 [r_2 J - j(g + r_2 + r_4)].$$

48. Transformons maintenant le terme en M,

$$- (r_2 + r_4) M \left(J + \frac{r_1 + r_2}{\Delta} \frac{r_3 + r_4}{\mathfrak{R}} J + j \frac{r_1 r_4 - r_2 r_3}{\Delta \mathfrak{R}} \right),$$

et mettons-y en évidence la quantité k (n° 21).

En remarquant qu'on a

$$r_4 k = r_2 + r_4 + r_2 \frac{r_3 + r_4}{\Delta},$$

quelques réductions très simples donnent au terme M la forme

$$- r_4 k M - \frac{(r_3 + r_4) J + (r_2 + r_4) j}{\Delta \mathfrak{R}} (r_1 r_4 - r_2 r_3) M,$$

et successivement

$$- r_4 k M - \frac{Dj}{\Delta \mathfrak{R}} M \left[r_3 + r_4 + \frac{j}{J} (r_2 + r_4) \right],$$

au moyen de la relation

$$r_1 r_4 - r_2 r_3 = -D \frac{J}{j},$$

et enfin

$$(6) \quad -r_4 k M + \frac{J}{\Delta} [g(r_3 + r_4) + r_3(r_2 + r_4)] M.$$

49. Les expressions (4), (5), (6) donnent, pour le dernier terme de l'équation (3),

$$J[-r_4(L_1 + kM) + L_3 r_2] \\ + j \left[-(L_1 + L_3)(g + r_2 + r_4) + M \frac{g(r_3 + r_4) + r_3(r_2 + r_4)}{\Delta} \right],$$

et cette équation peut alors s'écrire

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} -Dq + D \frac{J}{j} Q - \mathfrak{R} G_j \\ -j \left[(L_1 + L_3)(g + r_2 + r_4) + (L_2 + L_4)(g + r_1 + r_3) - M \frac{g(r_3 + r_4) + r_3(r_2 + r_4)}{\Delta} \right] \\ - J[r_4(L_1 + kM) - r_2 L_3 - r_3 L_2 + r_1 L_4] = 0 \end{array} \right.$$

ou

$$-Dq + D \frac{J}{j} Q - \mathfrak{R} G_j + D j \left(\frac{L_3}{r_3} + \frac{L_2}{r_2} \right) \\ - j \left[(L_1 + L_3)(g + r_2 + r_4) + (L_2 + L_4)(g + r_1 + r_3) - M \frac{g(r_3 + r_4) + r_3(r_2 + r_4)}{\Delta} \right] \\ - r_1 r_4 J \left(\frac{L_1 + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} \right) = 0,$$

et, en la résolvant,

$$(8) \quad \frac{q}{j} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{r_1 r_4}{D} \frac{J}{j} \left(\frac{L_1 + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} \right) \\ + \frac{Q}{j} - \frac{\mathfrak{R} G}{D} + \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_2}{r_2} + M \frac{g(r_3 + r_4) + r_3(r_2 + r_4)}{\Delta D} \\ - \frac{(L_1 + L_3)(g + r_2 + r_4)}{D} - \frac{(L_2 + L_4)(g + r_1 + r_3)}{D} \end{array} \right.$$

50. Il est facile de se rendre compte de l'ordre relatif des différents termes du second membre. Je suppose que $\frac{M}{r_1}$ soit de l'ordre de 10^{-n}

C. G. S. On peut regarder l'ensemble des deux dernières lignes comme étant à peu près du même ordre; n est ordinairement compris entre 2 et 4.

L'équation (8) pourra donc s'écrire

$$\frac{q}{j} = 10^{-n} \left[-\frac{r_1 r_4}{D} \left(\frac{L_1}{M} + k - \frac{r_1 L_2}{r_2 M} - \frac{r_1 L_3}{r_3 M} + \frac{r_1 L_4}{r_4 M} \right) \frac{J}{j} + h \right],$$

h étant un nombre peu différent de l'unité.

On a réglé l'état permanent de manière que

$$\frac{r_1 r_4}{D} \frac{J}{j}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left(\frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} - 1 \right)^{-1},$$

soit de l'ordre de 10^α , et on veut régler l'état variable de manière que

$$\frac{L_1}{M} + k - \frac{r_1}{r_2} \frac{L_2}{M} - \frac{r_1}{r_3} \frac{L_3}{M} + \frac{r_1}{r_4} \frac{L_4}{M}$$

soit de l'ordre de $10^{-\beta}$. Il faudra que l'on ait

$$\frac{q}{j} = 10^{-n} (h' 10^{\alpha-\beta} + h),$$

en désignant par h' un nombre peu différent de l'unité. On voit d'abord qu'on ne peut pas donner à β une valeur supérieure à α , parce que le terme h , qui n'a aucun rapport avec ce qu'on veut mesurer, deviendrait prédominant. On peut atteindre en toute sécurité pour β la valeur $\alpha - 2$ ou même $\alpha - 1$, lorsque M ne diffère pas trop de L .

Par exemple, pour déterminer k à 0,0001 près, il faudrait avoir réglé les résistances à 0,000001 ou au moins 0,00001 près. C'est donc une limite qu'il paraît à peu près impossible de dépasser et même difficile d'atteindre.

51. Le terme en h étant négligeable, on voit qu'on a sensiblement

$$\frac{q}{j} = h' 10^{\alpha-\beta-n},$$

et $\alpha - \beta - n$ est compris entre $1 - n$ et $2 - n$; c'est donc toujours un nombre négatif, généralement compris entre -2 et -3 ; et, pour

obtenir toute la précision dont la méthode est susceptible, il faudrait que le galvanomètre fût cent à mille fois plus sensible aux courants instantanés qu'aux courants constants. Or, le rapport des quantités q et j qui produisent une impulsion et une déviation permanente du même nombre de divisions est

$$\frac{q}{j} = \frac{T}{\pi}.$$

C'est l'inverse du rapport des sensibilités, et, dans les galvanomètres ordinaires, ce temps varie de une à trois secondes environ ⁽¹⁾. Il est donc indispensable de recourir à un interrupteur tournant, employé comme au n° 31. L'aiguille prend alors une déviation fixe, et le rapport des sensibilités est égal au nombre N des fermetures du circuit par seconde.

52. Rappelons l'ordre des contacts établis par l'interrupteur :

1° La pile étant ouverte, le galvanomètre, dans lequel tout courant a disparu, est réuni aux sommets C, D du pont ;

2° Un quart de tour après, la pile est fermée; le galvanomètre est alors parcouru, pendant un quart de tour, par un courant dont l'intensité intégrale est (n° 46)

$$j \times \frac{1}{4N} + q,$$

à condition que le temps $\frac{1}{4N}$ soit suffisant pour arriver à l'état permanent;

3° A la fin de ce second quart de tour, le galvanomètre est fermé sur lui-même. Il était parcouru par un courant j , qui tombe à zéro en

(1) Un choix convenable des diverses pièces mobiles permet de diminuer notablement ce rapport $\frac{T}{\pi}$, en conservant toute la sensibilité au courant permanent; mais c'est encore insuffisant. Il faudrait atteindre au moins une sensibilité dix fois plus grande au courant instantané qu'au courant permanent, c'est-à-dire réduire T à moins de $\frac{1}{4}$ de seconde, sans augmenter la force directrice; et, à cause de la rapidité du mouvement, l'impulsion ne pourrait être lue qu'en lui donnant une amplitude constante, par l'ouverture et la fermeture du circuit à chaque passage au zéro (méthode de Weber), c'est-à-dire plus de six fois par seconde. Un mécanisme serait donc encore nécessaire.

produisant un extra-courant dont l'intensité intégrale q' est donnée par

$$gq' - Gj = 0 \quad (\text{Ch. II, n}^\circ 15);$$

4° Puis la pile est ouverte sans produire aucun effet sur le galvanomètre, et tout recommence.

On remarquera que, par cette manière d'employer l'interrupteur, les circuits ACD, BCD, qui seuls ont fourni des équations de l'état variable employées aux n^{os} 21, 22, 23, 24 et 46, ne sont jamais ouverts. Le courant de fermeture étant seul recueilli par le galvanomètre, on est bien dans les conditions auxquelles correspondent les équations.

L'intensité intégrale qui parcourt le galvanomètre en une seconde est donc

$$\frac{1}{4}j + (q + q')N.$$

L'intensité $\frac{1}{4}j$ est insensible, puisque l'intensité j était elle-même insensible pendant l'état permanent. Quant au terme q' , il ne modifie pas sensiblement la valeur du coefficient de j tout entier (8) (n^o 49), et les conclusions du n^o 50 subsistent entièrement.

53. Le terme principal est donc

$$-N \frac{r_1 r_4 J}{D} \left(\frac{L_1 + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} \right).$$

En le rapprochant de la valeur de j ,

$$j = \frac{r_1 r_4}{D} J \left(\frac{r_2 r_3}{r_1 r_4} - 1 \right),$$

on voit :

1° Que les conditions du maximum de sensibilité du pont sont les mêmes que pour l'état permanent. Elles ne dépendent, en effet, que du facteur $\frac{r_1 r_4}{D} J$; il y a évidemment tout avantage à ce que Δ soit le plus grand possible, ce qui rapproche la valeur de J de celle de I ;

2° Que l'erreur sur le rapport $\frac{L}{M}$ des coefficients d'induction sera $\frac{1}{N} \frac{r_1}{M}$ fois l'erreur sur le rapport des résistances dans la même expérience, lorsque L_2, L_3, L_4 sont négligeables. Par exemple, avec les bobines que

j'employais (appareil C), on avait environ

$$\frac{M}{r_1} = 0,0005 \text{ C.G.S.}$$

Supposons que N soit égal à 10 (¹); pour connaître k à 0,0005 près, il faut avoir réglé les résistances à environ $\frac{1}{400000}$ près.

Lorsque les bobines sont très éloignées, et que $\frac{M}{r_1}$ est petit, le rapport k ne peut plus être déterminé avec précision. On peut bien augmenter N, mais jusqu'à une certaine limite seulement, limite qui est fixée non par la grandeur de M, mais par celle de L, puisqu'il faut que l'état permanent soit atteint avant de rompre le circuit.

Disposition des expériences.

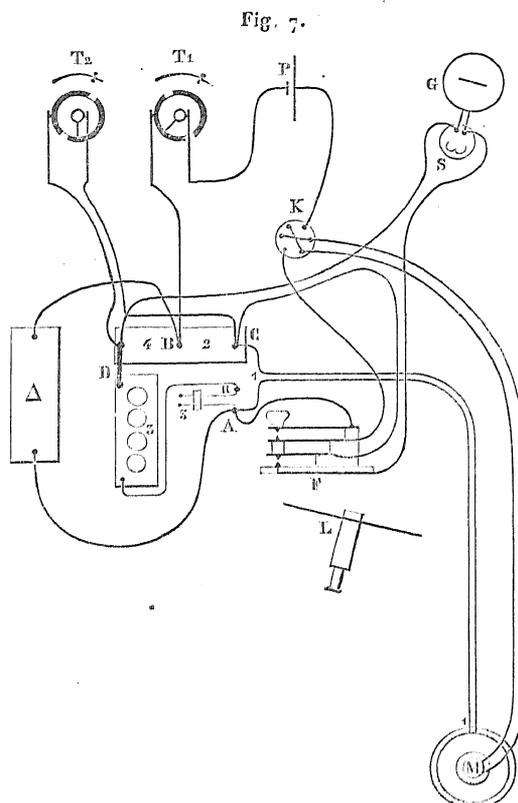
54. Les appareils ont été disposés à peu près comme dans la précédente méthode de mesure. L'ensemble des deux bobines à comparer formant le côté 1 du pont est placé à plus de 4 mètres du galvanomètre. Sur une table voisine de l'observateur est placée la boîte de résistances qui forme les côtés 2, 3, 4 du pont. C'est une boîte construite par MM. Elliott (n° 434), qui appartient au laboratoire de Physique du Collège de France; elle est divisée en trois parties : deux (I, II) qui ne contiennent que les bobines de 10, 100, 1000 et 10000 ohms; et la troisième (III) qui permet de former toutes les résistances exprimées par un nombre entier d'ohms compris entre 1 et 11110. De nombreuses vérifications faites au cours des expériences ont montré que le rapport réel des résistances ne diffère pas de $\frac{1}{2000}$ du rapport indiqué. Pour plusieurs des bobines, les rapports d'égalité sont même exacts à moins de $\frac{1}{10000}$ près. Tant qu'on ne voudra connaître le rapport k qu'à $\frac{1}{2000}$ près, les erreurs de la boîte sont absolument négligeables.

Cette boîte est construite en alliage platine-argent; les fils sont ployés en double avant d'être enroulés, et isolés par de la soie et de la paraffine. Leurs dimensions, telles qu'elles m'ont été fournies par MM. Elliott, sont les suivantes :

Résistances en ohms.	1	10	100	1000	10000
Diamètre du fil en millimètres. . .	0,609	0,305	0,177	0,106	0,063
Longueur du fil en mètres.	0,914	2,54	9,29	24,4	107,4

(¹) En réalité, la vitesse employée était souvent plus grande, double ou triple.

Ce sont les seules résistances qui entrent dans la construction des



Les lettres et les numéros communs à la figure actuelle et au diagramme correspondant (*fig. 3*, Ch. II) ont la même signification.

A, B, C, D, 1, 2, 3, 4, sommets et côtés du pont de Wheatstone.

R, rhéostat de Pouillet, sur le côté 3.

F, clef AB, pour le réglage de l'état permanent. On la maintient constamment fermée pour le réglage de l'état variable.

Δ , dérivation employée seulement pendant l'état variable.

K, commutateur placé sur le trajet de la bobine inductrice M, seule; il permet de changer le sens du courant dans cette bobine, sans le changer dans le pont. On le place de telle sorte que les impulsions de fermeture soient de signes contraires pour Δ nul et pour Δ infini.

T_1 , T_2 , les deux parties de l'interrupteur tournant, dans la position où on l'arrête pour régler l'état permanent.

T_1 est sur le trajet direct de la pile.

T_2 est en dérivation sur le galvanomètre. En tournant dans le sens des flèches, au moment de l'ouverture du circuit, T_2 forme un shunt de résistance nulle sur le galvanomètre.

G, S, galvanomètre et son shunt.

L, lunette et échelle divisée.

trois parties (I, II, III). Toutes sont enroulées sur des bobines de buis, de mêmes dimensions :

Diamètre intérieur	8 ^{mm} à 9 ^{mm}
Longueur	19 ^{mm}

Les bobines de 1, 10, 100 ohms ne semblent avoir qu'une seule épaisseur de fil; celles de 1000 ohms, deux, et celles de 10000, un plus grand nombre.

55. Comme le galvanomètre, employé avec toute sa sensibilité, devait rester aussi rigoureusement que possible au zéro (n^{os} 50-52), les divisions discontinues de la boîte III ne suffisaient pas. Je lui ai ajouté un rhéostat continu de Pouillet.

Sur une planche sont tendus parallèlement deux fils de maillechort. Une extrémité de chacun d'eux est isolée, l'autre communique avec le reste du circuit par une large lame de cuivre plongeant dans des godets pleins de mercure. Dans un bouchon est creusée une rigole remplie de mercure, qui réunit les deux fils, à une distance variable de leur point d'attache avec le reste du circuit. Une division collée le long de la planchette fait connaître cette distance.

Avec des fils de 0^m,005 de diamètre et de 0^m,20 de longueur, on peut faire varier la résistance de 0 à 0,5 ohm, par le déplacement du bouchon. Une longueur du même fil, ayant environ 0,5 ohm de résistance et ployée en double, pouvait aussi être ajoutée à la boîte III. On pouvait donc graduer la résistance de l'une des branches du pont par millièmes d'ohm; cela a toujours été suffisant, mais souvent nécessaire. Des expériences de comparaison ont donné la valeur de ces fils auxiliaires; mais, à cause des variations de température, on a toujours mesuré les résistances r_1 et Δ en choisissant les autres côtés du pont, de manière à utiliser toute la boîte III, quelles que soient d'ailleurs les résistances des côtés du pont employées dans la mesure du phénomène d'induction. Le rôle du rhéostat a été réduit à maintenir exactement le galvanomètre au zéro pendant les expériences.

56. La boîte qui forme la dérivation Δ est placée soit sur la même table que la boîte qui constitue le pont, quand elle est peu encombrante,

soit sur une table différente. J'ai d'abord employé une très bonne boîte d'Elliott (n° 339), appartenant au laboratoire de recherches de la Sorbonne⁽¹⁾. Cette boîte, très bien graduée, est construite en maillechort; elle a été étalonnée à une température différente de celle qui forme le pont. Pour ces deux raisons, les résistances qu'elle indique sont rapportées à une unité différente de celle du pont, et variable. J'ai donc dû, dans chaque expérience, faire suivre le réglage de Δ de sa mesure. Les communications permettent de substituer rapidement la résistance Δ au côté 1 du pont. Aussitôt après, on vérifie que cette valeur de Δ est bien celle qui convient à l'expérience d'induction.

J'ai employé plus tard un simple rhéostat médical de Gaiffe⁽²⁾; la nécessité de mesurer Δ en fonction des résistances du pont rend inutile la précision de la boîte d'Elliott (339). Le fil de ce rhéostat n'est pas doublé, mais ce n'est qu'un défaut secondaire pour cette partie du circuit, dont le coefficient d'induction propre n'intervient pas dans la méthode. Il suffit de l'éloigner assez de tout le reste du circuit pour qu'aucun coefficient d'induction mutuelle n'apparaisse; il n'y a même à s'occuper que du galvanomètre et du côté 1 du pont, car, les trois autres côtés du pont étant formés de fils ployés en double, une distance de quelques centimètres est suffisante. Tous les fils de jonction sont bien isolés et tordus ensemble.

57. *État permanent.* — L'état permanent a été établi au moyen d'une clef qui ferme d'abord la pile, et, quelques centièmes de seconde plus tard, le galvanomètre, comme la clef de l'Association britannique; seulement les contacts sont obtenus par de gros fils de cuivre nickelés plongeant dans du mercure propre. Les contacts platine-platine par simple pression sont souvent irréguliers, par suite des moindres poussières. Le contact à mercure, dont j'avais craint les variations, s'est montré excellent; commençant toujours par lui attribuer les difficultés que j'ai rencontrées, je l'ai très fréquemment contrôlé.

(1) Cette boîte a été mise à ma disposition par M. Bouty pendant près de trois semaines, avec une complaisance dont je suis heureux de lui témoigner ici ma reconnaissance.

(2) Comme ils sont construits actuellement avec des bobines de fil, et non avec le mélange kaolin-charbon, dont les contacts sont très insuffisants.

État variable. — Le pont étant réglé le mieux possible, un commutateur à mercure établit les communications avec l'interrupteur tournant, qui est placé sur une table éloignée. Cet interrupteur (n° 31) est entraîné par une grande roue mue à la main (1); au besoin, le mouvement est réglé sur un métronome.

Les communications sont établies avec la diagonale de la pile et avec celle du galvanomètre, comme l'indiquent les figures 6 (n° 31) et 7 (n° 54).

58. La clef de l'Association britannique, ou toute clef analogue, par un arrangement convenable des fils, permet d'opérer une seule fois la même série de communications que l'interrupteur répète à chaque tour (n° 31). Cela suffit, avec le galvanomètre du Collège de France, pour faire les mesures à plus de $\frac{1}{100}$. On peut alors reconnaître toute l'efficacité de la méthode qui consiste à shunter le galvanomètre presque aussitôt le courant fermé. On constate qu'on peut dérégler les quatre côtés du pont au point de faire sortir l'image de l'échelle pendant l'état permanent et conserver néanmoins la même impulsion pour l'état variable :

r_3 .	2100.	2150.	2200.	2250.
Déviatiou permanente....	+ 12000	+ 7000	+ 2050	— 2600
Impulsion.....	+ 23,5	+ 22,3	+ 23,0	+ 23,3

Il suffit pour cela d'abaisser la clef par un coup très sec. Un centième de seconde suffit pour l'établissement du courant; et l'extra-

1) C'est une roue en fonte, qui fait partie d'une sirène de Seebeck. A la distance de 1^m,5 du galvanomètre, elle exerçait encore une très faible action sur l'aiguille aimantée, $\pm 0^{\text{mm}},2$. Pour en tenir compte, on a constaté que la position d'équilibre de l'aiguille quand on fait tourner rapidement la roue est la même que quand la roue est très éloignée. Puis on a cherché la position d'arrêt pour laquelle l'aiguille marque la même division que quand la roue tourne, et l'on a eu soin de toujours arrêter la roue dans cette position. On a reconnu que le déplacement maximum du zéro se produisait pour une position de la manivelle à angle droit avec la précédente, et n'atteignait guère que $\pm 0^{\text{mm}},2$. Les lectures les plus précises ne se faisant qu'à $0^{\text{mm}},1$ près, on voit que cette cause d'erreur n'aurait pu devenir sensible que dans les derniers réglages. La roue était, d'ailleurs, assez éloignée de tout le circuit pour n'avoir aucune aimantation variable.

courant dû à la fermeture du galvanomètre sur lui-même (n° 52 compense presque exactement l'effet dû à ce courant lui-même pendant un temps d'environ $\frac{1}{100}$ de seconde ($\frac{G}{g} = 0,01$ environ)).

59. Les appareils étant ainsi disposés, on s'est attaché d'abord à obtenir un bon état permanent. Or, dans les premières expériences, même avec la clef de l'Association britannique, l'état d'équilibre n'était pas atteint instantanément; quand le pont était réglé, l'aiguille commençait par dévier un peu (1^{mm},5 dans le cas du maximum de sensibilité, par exemple), puis revenait lentement au zéro, au bout de plusieurs secondes; même effet à l'ouverture du circuit, mais en sens inverse. Après plusieurs essais, j'ai reconnu que cet effet provenait de la bobine 1 (appareil B); elle se comportait comme une résistance qui croît graduellement de $\frac{1}{25000}$ de sa valeur environ. Dans cette bobine, le fil est couvert par de la soie, et l'isolement, de spire à spire, est insuffisant quand le temps est humide. Une partie du courant se dérive à travers la soie, jusqu'à ce que la polarisation du liquide rende l'isolement parfait (1). En employant des bobines dans lesquelles la soie a été séchée et paraffinée, aucun effet semblable n'a été observé; l'aiguille ne quitte pas le zéro quand le réglage du pont est fait. On peut donc procéder au réglage de l'état variable sans craindre aucune perturbation.

(1) Une bobine dans laquelle deux fils distincts a , b , recouverts de soie, avaient été enroulés côte à côte, met très bien cet effet en évidence. La résistance à l'isolement entre les deux fils est de même ordre que celle des fils eux-mêmes : 162 ohms au début; moins d'une minute après, 185 ohms, et elle continue à croître. On enlève alors la pile : le galvanomètre est dévié de 55 divisions. On met sur le côté 1 le fil a seul, le fil b ayant ses deux extrémités libres; les mêmes effets se produisent. On enlève la pile; on met rapidement sur le côté 1, non plus le fil a , mais l'isolement entre les deux fils a , b ; sans rétablir la pile, le galvanomètre est dévié, et, pour ramener l'image sur l'échelle, à 17 divisions du zéro, il faut mettre sur le galvanomètre le shunt de $\frac{1}{59}$.

Il s'agit donc bien d'une force électromotrice considérable et durable, produite par le passage du courant.

J'ai fait refaire la bobine, en couvrant les fils de paraffine, et séparant les couches successives par du papier paraffiné. La résistance à l'isolement a aussitôt atteint 100 mégohms. Désormais, la résistance des fils prend instantanément sa valeur finale, sans irrégularités.

60. Cet effet éliminé, les expériences sont devenues très régulières.

Dans les premières mesures faites au Collège de France, j'ai essayé de me passer de l'interrupteur tournant. Le circuit était ouvert et fermé à chaque demi-oscillation de l'aiguille, au moyen de la clef de l'Association britannique, disposée pour que les communications s'établissent dans l'ordre indiqué (n° 58). J'ai obtenu avec l'appareil B, fixé dans une position invariable, les résultats suivants, extraits de deux séries d'expériences faites à des températures un peu différentes :

TABLEAU VI.

r_2 , I.	r_3 , II.	r_3 , III.	Δ .	k .
100	100	970	153,2 \pm 0,4	23,35 \pm 0,05
100	1000	9727	849 \pm 2	23,33 \pm 0,02
100	1000	9725	852 \pm 2	23,27 \pm 0,02
1000	1000	967	90,3 \pm 0,3	23,37 \pm 0,08
10000	10000	967	86,9 \pm 0,2	23,39 \pm 0,06
1000	10000	9724	501,5 \pm 0,5	23,17 \pm 0,02
1000	10000	9673	501 \pm 1	23,20 \pm 0,04

Dans les mêmes conditions, l'appareil C (n° 42) a donné :

TABLEAU VII.

r_2 , I.	r_3 , II.	r_3 , III.	Δ .	k .
1000	10000	1173,9	367 \pm 0,5	4,636 \pm 0,005
»	»	1168	364,5 \pm 0,5	4,642 \pm 0,005
»	»	1174	366,7 \pm 0,2	4,639 \pm 0,003

On voit que, dans de bonnes conditions de sensibilité du pont, les mesures peuvent être concordantes à près de $\frac{1}{1000}$. Mais, quand les côtés du pont changent, le désaccord s'accroît, en restant compris dans les limites des erreurs expérimentales possibles. Il faut cependant remarquer dans le premier tableau l'influence d'une bobine de 10000 ohms, qui semble certaine.

61. Pour faire une étude sérieuse de la méthode, il faut pouvoir s'écartier beaucoup du maximum de sensibilité du pont et conserver néanmoins une sensibilité de $\frac{1}{1000}$ à $\frac{1}{2000}$. J'ai été forcé de recourir à

l'interrupteur tournant. En même temps, il faut rendre la température stationnaire pendant chaque série d'observations, sans qu'il soit nécessaire de la connaître.

Voici les résultats de ces expériences :

TABLEAU VIII (Appareil B).

r_2 , I.	r_1 , II.	r_3 , III.	Δ .	k .
100	100	972,6	50,33	23,306
200	200	972,2	55,03	23,302
1000	1000	973,8	92,60	23,315
10000	10000	973,8	514,86	23,314
100	1000	9736,8	48,39	23,288 \pm 0,04
100	1000	9702,5	48,15	23,329 \pm 0,02
100	1000	9702,5	48,20	23,307 \pm 0,02
1000	10000	9704	89,15	23,202 \pm 0,02

TABLEAU IX (Appareil C).

r_2 , I.	r_1 , II.	r_3 , III.	Δ .	k .
100	100	117,72	81,886	4,659 \pm 0,002
200	200	117,65	119,40 \pm 0,06	4,660 \pm 0,002
1000	1000	117,72	420,0 \pm 0,3	4,661 \pm 0,002
10000	10000	117,73	3806 \pm 10	4,658 \pm 0,005
100	200	235,0	68,85 \pm 0,05	4,661 \pm 0,002
200	1000	587,4	91,79 \pm 0,04	4,659 \pm 0,002
100	1000	1175,5	61,13 \pm 0,03	4,659 \pm 0,002
1000	10000	1176,3	315,8	4,639
1000	10000	1176,3	316,2	4,642
1000	10000	1165	315,4 \pm 0,2	4,640 \pm 0,003
1000	10000	1164,8	315,6 \pm 0,2	4,638 \pm 0,003
10000	10000	116,57	3805,5 \pm 10	4,659 \pm 0,005

Tant que la bobine de 10000 ohms ne forme pas un des côtés du pont, les valeurs de k sont égales, aux erreurs expérimentales près, bien que les côtés du pont et Δ changent considérablement. Dans le tableau VIII, la moyenne des sept premiers nombres est 23,309; les plus grandes différences n'atteignent pas $\frac{1}{1000}$ pour les nombres mal déterminés et, pour ceux qui proviennent de bonnes expériences, la différence avec la moyenne tombe à $\frac{1}{4000}$. Dans le tableau IX, les sept premiers nombres et le dernier ont comme moyenne 4,6595; pour aucun d'eux la différence ne dépasse $\frac{1}{3000}$. Les quatre autres, qui cor-

respondent au rapport $\frac{1000}{10000}$ pour les côtés 2 et 4, ont comme moyenne 4,6397, et l'accord subsiste au même degré entre eux. Mais, comme on le voit, ces deux moyennes diffèrent considérablement.

62. Les valeurs de k ne représentent donc pas le rapport $\frac{L}{M}$, et les coefficients d'induction des côtés 2, 3, 4 du pont ne sont pas négligeables, au moins dans le cas de la bobine de 10 000 ohms. Il faut alors examiner quelle conclusion ces tableaux fournissent, et trouver un moyen d'éliminer les coefficients d'induction inconnus.

Prenant la formule complète (1) (n° 21)

$$\frac{L + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} + \frac{L_4}{r_4} = 0,$$

les premières expériences, où k a la même valeur, montrent que l'ensemble des termes $\left(\frac{L_2}{r_2} + \frac{L_3}{r_3} - \frac{L_4}{r_4}\right)$ ne change pas d'une manière appréciable tant que l'on n'introduit pas une des bobines de 10 000 ohms seule. Or les trois parties de la boîte de résistances ne contiennent que des bobines de 1, 10, 100, 1000 et 10 000 ohms. Si l'on en tient compte en écrivant l'équation que fournit chaque expérience, et qu'on discute l'ensemble de ces équations, on reconnaît que le rapport $\frac{L}{r}$ a sensiblement la même valeur pour les bobines de 1, 10, 100 et 1000 ohms, et, par conséquent, est indépendant de la résistance dans la partie III de la boîte, laquelle ne contient pas de bobine de 10 000 ohms; du moins, les variations ne sont pas appréciables dans les conditions de l'expérience.

63. Cette conclusion, déduite de mesures indirectes, où le résultat ne pouvait aucunement être prévu, me semble ainsi très bien établie. Je n'ai pourtant pas négligé les vérifications directes que me permettait la boîte de résistances. On peut former avec la partie III de cette boîte deux côtés du pont, qui est ainsi complètement constitué par la boîte du Collège de France. Si le rapport $\frac{L}{r}$ est indépendant de la résistance, l'équilibre une fois établi pour l'état permanent, grâce au rhéostat de Pouillet, doit subsister pour l'état variable, tant qu'une bobine de

10000 ohms n'intervient pas seule. On jugera, par le Tableau suivant, qu'il en est bien ainsi.

TABLEAU X.

r_1 , III.	r_2 , I.	r_3 , III.	r_4 , II.	Déviaton pour l'état variable.	Vitesse du commutateur
10×100	1000	1000	1000	- 0,2	Grande.
10×100	10000	1000	10000	< 0,1	Très grande.
10×100	1000	10×1000	10000	+ 2,3	Ordinaire.
100	1000	1000	10000	+ 1,5	Id.
100	100	1000	1000	+ 0,1	Très grande.
100	10	1000	100	- 0,1	Id.
100	10	2×1000	2×100	- 0,1	Id.
5×10	10	1000	2×100	- 0,1	Id.
10	10	2×100	2×100	0,0	Id.
5×1	10	100	2×100	- 0,1	Id.

On voit, en outre, que la bobine 10000 donne une déviation très notable. Il ne suffit donc pas qu'un fil ait été ployé en double, avant d'être embobiné, pour qu'il soit sans influence sensible sur la période variable (*voir* Chap. VI, nos 81, 88).

Examinons l'importance de l'erreur qui peut en résulter : ce qui entre dans la formule, c'est le rapport de ce coefficient de self-induction à la résistance ; pour deux bobines identiques, mais construites avec différents métaux, ce rapport varie comme la conductibilité. Il faut donc construire la bobine en cuivre pur, pour mettre en évidence l'influence du coefficient de self-induction ; en maillechort ou en platine pour l'éliminer autant que possible.

64. Quand un fil est ployé en double, puis embobiné, il est très rapproché non seulement du fil de retour, mais de tous les autres doubles fils ; aussi est-il difficile de décider quel est l'effet total. Il n'y a qu'un moyen d'avoir un coefficient d'induction très faible et d'un ordre de grandeur connu, c'est de prendre un fil court ployé en double et de le tendre en ligne droite, ou de l'enrouler sur un cadre de grandes dimensions, suivant une hélice dont le pas soit très grand par rapport à la distance des deux fils voisins. C'est ce que j'ai fait avec un fil de maillechort de 0^{mm},05 de diamètre, ayant une résistance d'environ 120 ohms par mètre. Une longueur $2l$, de 2^m, 20, a été ployée en double, la distance b

des deux fils étant environ $0^m,001$. Ces deux fils ont été enroulés sur un cadre rectangulaire, dont les côtés ont $0^m,10$ et $0^m,50$, formé par des tiges de verre encastrées à leurs deux extrémités dans deux planchettes. Le fil est assujéti sur les tiges de verre par quelques gouttes de paraffine, et ainsi parfaitement isolé. Il forme à peu près une spire et demie; les deux spires sont à plus de $0^m,02$ de distance.

Le coefficient d'induction, calculé comme si le fil double était rectiligne, est donné par la formule (MAXWELL, t. II, p. 289) (1)

$$2l \left(\log \frac{4b^2}{l^2} + \frac{1}{2} \right) = 220 \left(\log \frac{4}{0,0025} + \frac{1}{2} \right) = 1738 \text{ C.G.S.}$$

La résistance est environ 242 ohms; le rapport $\frac{L}{r}$ est donc de l'ordre de $\frac{1738}{242 \times 10^9}$ ou 7×10^{-9} C.G.S., c'est-à-dire négligeable quand on le compare aux rapports correspondants relatifs à une bobine sur elle-même ou à deux bobines très voisines : 0,0005 ou 0,001 au moins quand le fil des bobines est en cuivre. Si les deux bobines à étudier étaient éloignées, ce rapport $7 \cdot 10^{-9}$ C.G.S. pourrait, tout en restant petit, n'être plus tout à fait négligeable.

65. Nous voilà désormais capables de changer considérablement la résistance d'un des côtés du pont, sans apporter de modification appréciable à son coefficient d'induction. Cela rend possible, dans certains cas, l'élimination des coefficients d'induction des trois autres côtés du pont.

Lorsque la boîte de résistances, qui forme les côtés 2, 3, 4 du pont, est quelconque au point de vue de l'induction, il m'a été impossible de trouver un procédé général d'élimination au moyen d'un jeu restreint de résistances, construites comme je viens de l'indiquer. Tous les essais que j'ai tentés exigeaient, en fin de compte, la construction complète des trois boîtes I, II et III, sans coefficient d'induction sur elles-mêmes.

L'élimination est possible, comme on va le voir, au moyen d'une seule résistance, sans induction, quelles que soient les boîtes I, II, pourvu que le rapport $\frac{L}{r}$ de la boîte III soit indépendant de r ; c'est ce

(1) Il me semble que le dernier terme $\frac{1}{2}$ doit être remplacé par 1; mais cela n'a pas d'influence sur mes conclusions.

qui avait lieu dans la boîte d'Elliott (n° 434) du Collège de France (nos 62 et 63). Mais il n'est pas nécessaire que ce coefficient soit très petit; le rapport $\frac{L}{r}$ serait constant si, toutes les bobines ayant des dimensions identiques, le diamètre et la longueur du fil changeaient seuls, sans altérer la résistance spécifique, et si, de plus, les bobines étaient assez éloignées les unes des autres pour n'avoir pas de coefficient d'induction mutuelle sensible.

66. Une première expérience, faite comme celles que j'ai décrites, donne

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_4}, \quad \frac{L + kM}{r_1} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3}{r_3} - \frac{L_4}{r_4} = 0,$$

$$k = 1 + \frac{r_2}{r_4} + \frac{r_2}{r_4} \frac{r_3 + r_4}{\Delta}.$$

Dans une seconde expérience, on ajoute à r_1 la résistance ρ dont le coefficient d'induction est négligeable, et on modifie r_3 de manière à rétablir l'équilibre sans changer r_2 et r_4 , puis on choisit convenablement Δ' ; on a alors

$$\frac{r_1 + \rho}{r_3'} = \frac{r_2}{r_4}, \quad \frac{L + k'M}{r_1 + \rho} - \frac{L_2}{r_2} - \frac{L_3'}{r_3'} - \frac{L_4}{r_4}$$

$$k' = 1 + \frac{r_2}{r_4} + \frac{r_2}{r_4} \frac{r_3' + r_4}{\Delta'}.$$

Comme $\frac{L_3'}{r_3'}$ ne diffère pas de $\frac{L_3}{r_3}$, le côté 3 étant formé par la partie III de la boîte, une simple soustraction donne

$$\frac{L + kM}{r_1} - \frac{L + k'M}{r_1 + \rho} = 0,$$

d'où

$$L + M \left[k + (k - k') \frac{r_1}{\rho} \right] = 0.$$

Deux expériences déterminent alors le rapport $\frac{L}{M}$.

TABLEAU XI (appareil C).

r_1	$r_2, \text{II.}$	$r_3, \text{III.}$	$\Delta.$	$k'.$	$\frac{L}{M}.$
1000	10000	3785	394,5 \pm 0,5	4,594 \pm 0,004	4,660 \pm 0,005
1000	1000	379,6	518,2 \pm 0,5	4,662 \pm 0,004	4,661 \pm 0,003

Les valeurs de k , introduites ici, sont les moyennes du n° 61, tableau IX.

67. Une autre résistance ρ' a été construite avec 5^m du même fil de maillechort, doublé, enroulé sur une petite bobine et bien paraffiné. Elle a d'abord été comparée seule à la boîte d'Elliott, on a trouvé ainsi :

TABLEAU XII.

$r_1.$	$r_2, \text{I.}$	$r_3, \text{III.}$	$r_4, \text{II.}$	Déviations pour l'état variable.	Vitesse du commutateur.
ρ'	1000	591,7	1000	< 0,1	Très grande.
»	10000	591,7	10000	< 0,1	Id.
»	1000	5922	10000	2,8 à 3,0	Ordinaire.
»	100	5920	1000	< — 0,1	Très grande.

Comme on devait le prévoir, d'après sa forme et ses dimensions, cette bobine a la même influence que la boîte III sur l'état variable. La bobine de 10000 ohms est toujours la seule importante. Cette résistance, employée comme la résistance ρ , a donné les résultats suivants :

TABLEAU XIII (appareil C).

$r_2, \text{I.}$	$r_4, \text{II.}$	$r_3, \text{III.}$	$\Delta.$	$k'.$	$\frac{L}{M}.$
1000	10000	7087,3	497,1 \pm 0,5	4,537 \pm 0,005	4,660 \pm 0,005
1000	10000	7089	496,6 \pm 0,5	4,541 \pm 0,004	4,660 \pm 0,005
1000	1000	707	642	4,661	4,661
1000	1000	707,8	641,7 \pm 0,5	4,661 \pm 0,002	4,661 \pm 0,002
1000	10000	7085	496,2 \pm 0,5	4,543 \pm 0,004	4,659 \pm 0,005

68. Enfin j'ai encore essayé une troisième bobine ρ'' à deux fils de cuivre (n° 59, note).

TABLEAU XIV. — *Comparaison avec la bobine Elliott.*

r_1 .	r_2 , I.	r_3 , III.	r_4 , II.	Déviatiou.	Vitesse du commutateur.
ρ''	10000	175	10000	0,0	Très grande.
»	1000	175	1000	+ 0,1 à 0,2	Ordinaire.
»	100	1760,7	1000	+ 0,5 à 0,7	Id.

Sans être absolument négligeable, l'effet est encore petit. Employée comme les deux précédentes, cette bobine donne les résultats suivants :

TABLEAU XV (appareil C).

r_2 , I.	r_3 , II.	r_3 , III.	k' .	Δ .	$\frac{L}{M}$.
1000	10000	2913,4	368,5 \pm 0,5	4,604 \pm 0,005	4,664 \pm 0,005
1000	10000	2911	368,0 \pm 0,3	4,608 \pm 0,003	4,661 \pm 0,004
1000	1000	291	484,5	4,664	4,663

Les valeurs obtenues pour $\frac{L}{M}$ sont peu différentes de celles des Tableaux XI et XIII, mais ont une tendance marquée vers une valeur plus grande.

69. De la comparaison des nombres des tableaux XI, XIII et XV, il résulte que la valeur du rapport $\frac{L}{M}$ pour l'appareil C est 4,660. La concordance des nombres indique une erreur probable inférieure à $\frac{1}{3000}$. La somme de toutes les erreurs possibles évaluées par excès atteint au plus $\frac{1}{10000}$. Ce nombre est précisément celui que donnent toutes les expériences où une bobine de 10000 ohms n'entre pas (n° 61). Une seule expérience suffit donc dans ce cas.

Ce nombre se rapporte aux deux bobines dont les dimensions sont connues (42), lorsqu'elles sont centrées. On peut donc le comparer à la valeur théorique. J'ai fait le calcul par la formule (MAXWELL, t. II, p. 282)

$$L = 4\pi^2 R_1^2 \frac{n_1^2}{l_1^2} (l_1 - 2R_1 \varepsilon),$$

$$\varepsilon = 0,500 + 0,0625 + 0,0065 + \dots + \frac{l_1 - \sqrt{l_1^2 + R_1^2}}{2R_1},$$

qui tient compte des extrémités de la bobine, mais la suppose réduite à une seule couche sans épaisseur.

J'ai trouvé ainsi

$$L = 2,273 \cdot 10^8 \text{ C. G. S.}$$

Or, on a trouvé (42)

$$M = 4,79 \cdot 10^7 \text{ C. G. S.}$$

Le rapport est donc théoriquement

$$\frac{L}{M} = \frac{22,73}{4,79} = 4,74,$$

valeur très supérieure à 4,660 que donne l'expérience.

Pour obtenir la concordance, il faudrait donc tenir compte dans le calcul :

- 1° De l'épaisseur des quatre couches de fil;
- 2° De ce que les fils conducteurs sont séparés les uns des autres.

Il est facile de reconnaître que cette influence est très petite sur M, mais importante pour L; elle a pour effet une diminution du coefficient de self-induction, puisqu'elle éloigne les parties agissantes. Elle tend donc à rapprocher la valeur théorique de la valeur observée.

CHAPITRE V.

COMPARAISON DE DEUX COEFFICIENTS DE SELF-INDUCTION.

70. Je ne dirai que peu de mots de cette méthode. Je l'ai étudiée dans un seul cas, où les lois de la similitude des bobines permettaient de prévoir à très peu près les résistances à donner aux quatre côtés du pont pour obtenir à la fois l'équilibre pendant l'état permanent et pendant l'état variable. C'est donc la méthode même indiquée par Maxwell, laquelle ne sépare pas les deux réglages.

Cette méthode exige *deux* boîtes de résistances à division continue et sans induction propre. C'est pour ces expériences que la boîte d'Elliott (n° 339), qui m'a été prêtée par le laboratoire de la Sorbonne, était indispensable. J'ai admis que son coefficient d'induction propre était négligeable, ces expériences ayant été faites avant les dernières du Chapitre IV. Quand j'ai eu trouvé le moyen de faire l'élimination, j'avais déjà rendu cette boîte, et, d'ailleurs, les circonstances ne me laissaient pas le temps de recommencer ces expériences.

Les données de construction fournies par MM. Elliott sont les suivantes :

Nature de l'alliage : maillechort.

Résistances en ohms.....	1	10	100	1000
Diamètre du fil en millimètres...	1,219	0,66	0,406	0,228
Longueur du fil en mètres.....	4,00	10,97	40,23	129,89

Le fil est ployé en double, mais sa longueur est plus grande que dans la boîte du Collège de France, et les bobines sont de dimensions beaucoup plus considérables. Il est très possible que l'influence de la bobine de 1000 ohms sur la période variable ne soit pas négligeable; mais, en tout cas, elle est faible.

71. J'ai fait construire chez M. Carpentier les bobines suivantes :

	Poids du fil.	Diamètre du fil en millimètres.	Diamètre extérieur de la bobine en centimètres.	Diamètre intérieur de la bobine en centimètres.	Longueur de la bobine en centimètres.
2.....	ρ	0,25	5	2	5
3.....	ρ	0,50	5	2	5
7.....	8 ρ	0,50	10	4	10

Il est facile de démontrer que, dans des bobines de même métal et de forme extérieure identique, le rapport $\frac{L}{r}$ est constant, quel que soit le diamètre du fil. Dans des bobines de forme extérieure semblable, le rapport $\frac{L}{r}$ varie comme le carré du coefficient de similitude.

Ce sont ces propositions que j'ai voulu vérifier.

TABLEAU XVI. — Comparaison de z , β .

r_1 .	r_2 .	r_3 (III).	r_4 (II).	$\frac{L_\beta}{L_\alpha}$.
$\beta + \varepsilon$	z	700,0	10000	0,0700
$\beta + \varepsilon'$	z	70,0	1000	0,070

TABLEAU XVII. — Comparaison de z , γ .

r_1 .	r_2 .	r_3 (III).	r_4 (I, II).	$\frac{L_\gamma}{L_\alpha}$.
γ augmenté d'environ 258 ohms de la boîte 339.	z	203,80	100	2,038
	z	815,5	400	2,039
	z	2039,3	1000	2,0393
	z	4076,0	2000	2,038

L'accord de ces différents nombres, quand on change le rapport de r_2 à r_1 , est très bon, et montre bien la précision des expériences.

72. Une mesure directe a donné, pour le rapport des résistances de z et β sans fil additionnel,

$$\frac{r_\beta}{r_\alpha} = 0,06815.$$

On a donc

$$\frac{L_\beta}{r_\beta} : \frac{L_\alpha}{r_\alpha} = \frac{700}{681,5} = 1,027,$$

au lieu de 1,000. Pour α et γ , on a eu

$$\frac{r_\gamma}{r_\alpha} = \frac{1}{2,014},$$

d'où

$$\frac{L_\gamma}{r_\gamma} : \frac{L_\alpha}{r_\alpha} = 2,039 \times 2,014 = 4,106,$$

au lieu de 4,000. Mais, de ces deux mesures, nous pouvons déduire la comparaison des deux bobines β , γ qui sont construites avec le même fil de 0^{mm},50 de diamètre, et nous trouvons

$$\frac{L_\gamma}{r_\gamma} : \frac{L_\beta}{r_\beta} = \frac{4,106}{1,027} = 3,998,$$

c'est-à-dire exactement 4. La vérification de cette deuxième proposition est donc excellente.

Plusieurs causes rendent la première proposition plus difficile à vérifier : d'abord, la différence de diamètre du fil de cuivre qui rend très peu probable l'identité de la matière, et, par suite, de sa conductibilité spécifique; puis, la difficulté de satisfaire aux conditions de similitude pour l'épaisseur de l'isolant.

Une vérification plus rigoureuse exigerait que les bobines soient construites avec tous les soins que l'on donne aux bobines étalons, et que l'on détermine directement, pour chaque fil employé, sa résistance spécifique.

Les deux propositions s'appliquent, en effet, à ce qu'on peut appeler *la résistance géométrique du fil*.

CHAPITRE VI.

INFLUENCE DE LA CAPACITÉ.

73. Dans ce qui précède, nous avons laissé de côté toute influence de la capacité des fils, supposant, comme on le fait ordinairement, que cette influence est absolument négligeable dans les circuits fermés. C'est ce qu'il importe d'examiner. Pour cela, nous admettrons la proportionnalité du flux d'électricité statique et de l'intensité électromagnétique intégrale, sans nous arrêter aux difficultés générales qui peuvent en résulter, car elles sont sans influence sensible dans le cas qui nous occupe (n° 8).

Lorsqu'un point d'un des fils communique avec une armature d'une capacité, il faut regarder ce point comme un sommet dans les équations II (n° 15). La première équation s'applique encore pourvu que l'on compte parmi les fils qui aboutissent au sommet considéré celui qui le réunit à la capacité (n° 8). Nous admettrons que la seconde équation s'applique encore, à condition de séparer chaque fil en autant de tronçons que l'exigent les nouveaux sommets.

74. On obtient l'effet total en superposant aux quantités d'électricité calculées sans tenir compte des capacités, dans chaque fil ou tronçon de fil, les quantités d'électricité provenant de la charge des capacités. Ces dernières quantités se partagent en raison des résistances seules. Considérons, en effet, les équations complètes, telles qu'elles résultent du numéro précédent :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Sommets anciens.....} \quad \Sigma q = 0, \\ \text{» nouveaux ou modifiés.} \quad \Sigma q = Q, \\ \text{Circuits fermés.....} \quad S(rq + L \Delta i + M \Delta I + \dots) = 0, \end{array} \right.$$

Q désignant le changement total de la charge de chaque capacité.

Regardons chaque quantité q comme la somme de deux autres q' et q'' , dont l'une, q' , est déterminée par les phénomènes d'induction seuls; celle-ci satisfait aux équations suivantes :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Sommets anciens et nouveaux.} \quad \Sigma q' = 0, \\ \text{Circuits fermés.....} \quad S(rq' + L \Delta i + M \Delta I + \dots) = 0. \end{array} \right.$$

Les quantités q'' , déterminées par différence, satisfont aux équations suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Sommets anciens.....} \quad \Sigma q'' = 0, \\ \text{» nouveaux ou modifiés.....} \quad \Sigma q'' = Q, \\ \text{Circuits fermés.....} \quad S(rq'') = 0. \end{array} \right.$$

Elles ne dépendent donc que des capacités et des résistances.

D'ailleurs, les capacités ne changent rien aux intensités initiales et finales, et le système (2) est identique au système directement obtenu par l'induction seule. On peut le montrer facilement au moyen des équations des sommets nouveaux et des lois d'addition des coefficients d'induction. Il est presque évident que les équations définitives de l'induction ne peuvent être modifiées, parce que l'on traite comme un sommet un point quelconque de l'un des fils; et c'est à cela que se réduit la différence entre les équations (2) et les équations directes.

75. *Comparaison des coefficients d'induction mutuelle.* — Pour se rendre compte de l'influence possible de la capacité des fils, on peut simplifier le problème en supposant cette capacité concentrée en certains points, et traitant le reste comme dépourvu de capacité.

1° Une capacité en dérivation sur le circuit inducteur ne change pas l'intensité finale I du courant qui le parcourt. Son effet total est donc nul, quand on emploie un galvanomètre bien réglé (nos 37-38).

2° Une capacité en dérivation sur le circuit induit ne change ni l'état initial, ni l'état final; comme ses deux armatures sont au même potentiel, leur charge est nulle. L'intensité intégrale, de part et d'autre du point d'attache, est donc la même, et rien ne distingue ce point d'un autre quelconque du reste du fil. L'effet total est nul.

3° Une capacité dont une armature A communique avec le circuit inducteur, l'autre A' avec le circuit induit, ne change pas l'intensité permanente I dans le circuit inducteur.

Si les deux circuits sont distincts et isolés l'un de l'autre, le circuit induit est élevé tout entier, sans aucune charge, au potentiel final V de l'armature qui communique avec le circuit inducteur. Rien n'est donc modifié dans les équations de l'induction totale.

Mais il n'en est plus de même si les deux circuits communiquent par un point B . Alors tout le circuit induit est, à la fin de la période variable, au potentiel V_B du point B dans le circuit inducteur. Une quantité d'électricité $-C(V_A - V_B)$ est transportée de l'armature A à celle A' , en passant par le point B , et se partageant entre les fils du circuit induit suivant leurs résistances.

Deux capacités en deux points différents des circuits inducteur et induit produisent un effet analogue (1).

(1) Voici les résultats du calcul pour la méthode de Maxwell (n° 17, fig. 1) :

1° Les deux capacités sont sur le même fil (2); soit ρ la résistance qui les sépare. En appelant V, V' les potentiels des armatures de C et C' qui communiquent avec le circuit inducteur, les équations (3) du n° 74 donnent facilement la quantité d'électricité q'' qu'il faut ajouter à celle qui traverse déjà le galvanomètre par suite de l'induction :

$$q'' = \frac{CC'}{C + C'} (V' - V) \frac{\rho r_1}{g(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

2° Les deux capacités C_1, C_2 sont sur les fils 1, 2. Désignons par ρ_1, ρ_2 les résistances qui les séparent du même point d'attache au galvanomètre, et par V_1, V_2 les potentiels des armatures qui sont liées au circuit inducteur; on trouvera de même pour la quantité q'' :

$$q'' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2) \frac{r_1 \rho_2 - r_2 \rho_1}{g(r_1 + r_2) + r_1 r_2}.$$

Dans ce second cas, le terme $r_1 \rho_2 - r_2 \rho_1$ permet une compensation des deux capacités.

76. Si une seule des deux paires de bobines a une capacité notable, il faut, pour que la méthode soit rigoureuse, que les deux circuits soient parfaitement isolés.

Si les deux paires de bobines avaient une capacité notable, il faudrait régler les résistances de manière à obtenir une compensation.

La capacité ne peut être notable que si un des appareils est formé de deux bobines emboîtées l'une dans l'autre. Il faut donc que l'appareil étalon soit formé de deux parties éloignées l'une de l'autre; cette condition doit être imposée, pour cette cause, aux reproductions de l'appareil étalon, comme elle est imposée à cet appareil lui-même pour la simplicité du calcul théorique.

77. *Comparaison des coefficients de self-induction.* — Le circuit induit n'est plus différent du circuit inducteur; les circonstances dans lesquelles la capacité des fils a une influence en sont modifiées. Occupons-nous d'abord de la comparaison d'un coefficient d'induction mutuelle à un coefficient de self-induction. Dans ce cas, la capacité de la paire de bobines unique peut modifier les résultats. Supposons qu'elle se réduise à un condensateur dont une armature est liée à un point du circuit de la pile, et l'autre à un point du côté 1 du pont (*fig. 3*) (n° 21). Soient ρ et ρ_1 les résistances qui séparent ces points du sommet A. Lorsque le pont est réglé pour l'état permanent, la quantité d'électricité, due à la capacité, qui traverse le galvanomètre, outre celle due à l'induction, se calcule facilement, grâce à la remarque du n° 74. Sa valeur est

$$q'' = \frac{r_2 \rho_1 G (\rho I + \rho_1 i_1)}{g(r_1 + r_2) + r_1(r_2 + r_4)}$$

et, d'après la valeur de I en fonction de i_1 (n° 21),

$$q'' = \frac{r_2 \rho_1 G (\rho_1 + k\rho) i_1}{g(r_1 + r_2) + r_1(r_2 + r_4)},$$

avec

$$k = 1 + \frac{r_2}{r_4} + \frac{r_2}{r_4} \frac{r_3 + r_4}{\Delta},$$

ou enfin, d'après la valeur de i_1 en fonction de J (n° 45),

$$q'' = \frac{r_2 r_3}{g(r_1 + r_2) + r_1(r_2 + r_4)} \frac{\rho_1 + k\rho}{r_1 + r_3} G \rho_1 J.$$

Or la partie principale de la quantité q' due à l'induction est (n° 49)

$$q' = -\frac{r_1 r_2}{D} J \left(\frac{L_1 + kM}{r_1} \right).$$

78. Le rapport de q' à q'' est de l'ordre du rapport de la parenthèse $\frac{L_1 + kM}{r_1}$ à $C\rho_1$. Si l'on connaît k à $\frac{1}{2000}$ près, et que $\frac{M}{r_1}$ soit, comme dans les expériences (nos 42, 43), égal à 0,0005 environ, le terme $\frac{L_1 + kM}{r_1}$ est de l'ordre de $0,25 \times 10^{-6}$. La résistance ρ_1 étant environ la moitié de r_1 , ou 50 ohms, pour que la capacité ne produise aucune erreur, il faut que, exprimée en microfarads, elle satisfasse à l'inégalité

$$C \times 10^{-15} \times 50 \times 10^9 < 0,25 \times 10^{-6},$$

ou

$$C < 0,005 \text{ microfarad.}$$

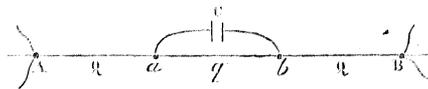
Or, la capacité mutuelle de ces deux bobines C , traitées comme un condensateur cylindrique, peut être évaluée, d'après leurs dimensions (n° 42). Elle est environ $0,6 \times 10^{-19}$ C.G.S; c'est-à-dire 0,00006 microfarad. Avec cet écart considérable des deux bobines ($0^m,025$), leur capacité mutuelle est négligeable.

Pour l'appareil A, dont la résistance est dix fois plus grande, et dont les bobines ne sont séparées que par un demi-centimètre d'épaisseur, je n'oserais pas affirmer que la capacité serait encore négligeable.

79. Lorsque le circuit induit est différent du circuit inducteur, une capacité placée sur l'un des fils en dérivation n'avait aucune influence; il n'en est plus de même lorsque l'intensité finale diffère de l'intensité initiale.

Considérons un fil AB (*fig. 8*), qui fait partie d'un circuit fermé,

Fig. 8.



et entre les deux points a, b duquel est une capacité C en dérivation.

Dans l'équation du circuit fermé dont il fait partie, j'écris seulement les termes qui se rapportent au fil AB, le reste n'étant pas altéré par la capacité C (n° 74),

$$(R - r)Q + rq + L \Delta i + \dots + (\dots) = 0.$$

R est la résistance totale du fil; r la résistance de la partie ab ; $Q - q$ est la quantité d'électricité nécessaire pour modifier la charge de la capacité

$$Q - q = C r \Delta t.$$

L'équation du circuit fermé est donc

$$RQ + (L - Cr^2) \Delta i + \dots + (\dots) = 0.$$

La forme de l'équation du circuit fermé n'est donc pas changée; il suffit de retrancher du coefficient de self-induction le produit de la capacité par le carré de la résistance qui sépare ses armatures.

80. Une expérience montrera l'importance de cette influence.

On a trouvé (n° 71), pour le rapport $\frac{L_\beta}{L_\alpha}$, la valeur 0,0700. On a refait la mesure en mettant en dérivation sur la bobine α une capacité de 0,75 microfarad.

r_1 .	r_2 .	r_3 (III).	r_4 (II).	$\frac{L_\beta}{L_\alpha - Cr_\alpha^2}$.
$\beta + 1 + \varepsilon$	α	759,5	10000	0,0759

Cette capacité suffit à accroître la rapport de près de $\frac{1}{11}$.

De la comparaison des deux expériences, on peut déduire grossièrement la valeur absolue de ces coefficients d'induction, L_α , L_β ; on trouve ainsi

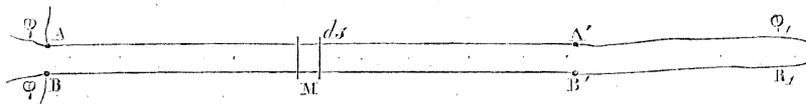
$$L_\beta = 1,9 \cdot 10^7, \quad L_\alpha = 2,7 \cdot 10^8 \text{ C.G.S.}$$

81. Lorsqu'un fil est ployé en double, les parties voisines sont à des potentiels très différents; leur capacité, quoique faible, peut avoir une influence notable.

Supposons que deux fils AA', BB', d'égale longueur l (fig. 9), soient tendus parallèlement, et communiquent par les points A, B avec le

reste du circuit; les points A', B' sont réunis soit directement, soit par un fil de grande résistance R₁, dont le coefficient d'induction et la capacité sont négligeables.

Fig. 9.



Comptons les arcs à partir des points A et B. La capacité mutuelle est uniforme; je désigne par c sa valeur rapportée à l'unité de longueur; la capacité mutuelle totale C est égale à cl . La résistance des fils par unité de longueur est r ; la résistance totale R des deux fils AA', BB' est égale à $2rl$.

La quantité d'électricité qui traverse, en sens inverse, deux sections contiguës des fils AA', BB', est évidemment la même q_s ; et les termes relatifs au fil AA'B'B, dans l'équation d'un circuit fermé dont il fait partie, sont (n° 74)

$$(1) \quad R_1 Q_1 + \int_0^l 2rq_s ds + L \Delta i + \dots$$

L'équation de la capacité donne, pour un élément de longueur ds ,

$$-\frac{\partial q_s}{\partial s} = c \Delta i (R_1 + R - 2rs),$$

d'où

$$q_s = Q - c \Delta i [(R_1 + R)s - rs^2],$$

et

$$\int_0^l q_s ds = Ql - c \Delta i \left[(R_1 + R) \frac{l^2}{2} - r \frac{l^3}{3} \right].$$

Cette valeur, portée dans l'expression (1), lui donne, après quelques transformations, la forme suivante :

$$(2) \quad (R_1 + R)Q + \Delta i [L - C(R_1^2 + R_1 R + \frac{1}{3}R^2)] + \dots$$

C'est la forme qu'elle aurait si le fil, dénué de capacité, avait pour coefficient d'induction

$$L - C(R_1^2 + R_1 R + \frac{1}{3}R^2) = L - C[R_1(R_1 + R) + \frac{1}{3}R^2].$$

Le fil étant ployé en double, L est petit, et, si R est très grand, l'influence de la capacité peut être notable ou même considérable.

82. Occupons-nous d'abord du cas où le fil est tout simplement ployé en double; R_1 est nul. Dans les équations des nos 19, 21, 22, 46-49, 62, 66, à la place des rapports $\frac{L}{r}$, il faut introduire des termes $\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}\right)$ un peu moins simples, mais qui forment un tout inséparable. La méthode d'élimination du n° 66 est donc toujours exacte, et la comparaison des deux valeurs de k (n° 61) nous permet une évaluation du terme $\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}\right)$ pour la bobine de 10 000 ohms de la boîte Elliott (n° 434), qui a seule une influence notable.

Expérience avec la bobine de 10 000 ohms :

$$\frac{L_1 + kM}{r_1} + \left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}\right)_4 = 0.$$

Expérience sans cette bobine :

$$\frac{L_1 + k_0 M}{r_1} = 0.$$

De là, on tire

$$\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}\right)_4 = -(k_0 - k) \left(-\frac{M}{r_1}\right),$$

et l'on doit remarquer que, L_1 et k_0 étant positifs, $(-M)$ est une quantité positive.

Or, les expériences ont toujours donné k_0 supérieur à k (n° 61) :

Appareil B.....	$k_0 = 23,31$	$k = 23,20$,
Appareil C.....	$k_0 = 4,660$	$k = 4,640$.

Donc $\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}$ est *négligeable*, et l'influence de la bobine de 10 000 ohms est due, non à son coefficient d'induction, mais à sa *capacité*.

83. Ce signe n'est pas douteux; on en verra d'ailleurs plus loin la confirmation. Mais voyons dès maintenant quelques conséquences numériques de ce résultat inattendu.

On a :

$$\text{Appareil C.} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} -M = 4,8.10^7 \text{ C. G. S.} \quad (\text{n}^\circ 42), \\ r_1 = 108,10^9 \text{ C. G. S.} \quad (\text{n}^\circ 43). \end{array} \right.$$

Done

$$\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3} \right) = -0,0000089.$$

Les expériences faites sur l'appareil B (nos 82, 43, 39) fournissent, pour la même quantité, la valeur $-0,0000073$, qui, à cause de la petitesse des différences $k_0 - k$, est identique à la précédente. Adoptons, pour les calculs suivants, la valeur intermédiaire $-0,8.10^{-5}$.

Nous pouvons en tirer une valeur de C, en supposant que $\frac{L}{r}$ soit négligeable, et voir si elle est compatible avec les dimensions du fil employé (n° 54).

On trouve ainsi 0,003 microfarad pour la capacité mutuelle des deux moitiés du fil considérées comme armatures d'un condensateur. Cherchons quelle épaisseur, e , il faudrait laisser entre une moitié du fil et une enveloppe cylindrique concentrique pour avoir la même capacité :

$$\begin{array}{ll} \text{Longueur du fil} \dots \dots & 10740^{\text{cm}} \\ \text{Diamètre du fil} \dots \dots & 0^{\text{cm}},006 \quad (\text{n}^\circ 34). \end{array}$$

L'équation de condition est, en unités électrostatiques C. G. S.,

$$\frac{10740}{2} 3,14 \times \frac{0,006}{e} = 0,003 \times 10^{-13} \times 9 \times 10^{20},$$

d'où l'on tire

$$e = 0^{\text{cm}},037,$$

c'est-à-dire $\frac{4}{10}$ de millimètre pour une enveloppe cylindrique complète. La valeur numérique elle-même est donc en parfait accord avec les dimensions du fil ployé en double.

Si l'on calcule le coefficient de self-induction pour ce fil ployé en deux moitiés, dont la distance est $0^{\text{cm}},04$, et tendu en ligne droite, on trouve environ (n° 64)

$$10740 \left[\log 4 \left(\frac{0,04}{0,006} \right)^2 + \frac{1}{2} \right] = 10740 \times 5,7 = 0,6.10^{-5},$$

et, pour $\frac{L}{r}$, environ

$$+ 0,6. 10^{-8} \text{ C. G. S.},$$

c'est-à-dire une valeur absolument négligeable en comparaison de l'influence réelle de cette bobine, $\sim 10^{-5}$.

84. Pour contrôler le signe, j'ai encore fait les observations suivantes : Le pont formé par la boîte d'Elliott seule (n° 434) est réglé avec le plus grand soin pour l'état permanent. On met l'interrupteur en mouvement, et l'on observe la déviation moyenne (n° 63). Toutes les bobines autres que la bobine de 10000 ohms étant sans influence (nos 62, 63), la quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre (courant induit de fermeture) est liée au coefficient d'induction de cette bobine par la formule

$$q = -N \frac{r_1 r_3}{D} J \left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3} \right)_4 \quad (\text{n° 53}).$$

On arrête l'interrupteur et on dérègle le pont; la déviation du galvanomètre est liée aux résistances par la formule

$$j = + \frac{r_1 r_3}{D} J \left(\frac{r'_2 r'_3}{r'_1 r'_4} - 1 \right) \quad (\text{n° 53}).$$

Dans deux expériences, on a dérèglé la résistance r_1 seule, et l'on a trouvé :

q .	r .	$\frac{r'_1}{r_1}$.	$\frac{r'_2 r'_3}{r'_1 r'_4} - 1$.	$\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3} \right)_4$.
+ 2,3	- 11	1 + 0,001	- 0,001	< 0
+ 1,5	- 105	1 + 0,01	- 0,01	< 0

85. La bobine à deux fils de cuivre δ (n° 59, Note) a été essayée de la même manière; elle était placée sur le côté 3 du pont, et les autres côtés formés par la boîte d'Elliott (n° 434) sans intervention des bobines de 10000 ohms. La déviation pendant l'état variable est liée au coefficient d'induction par la formule

$$q = + N \frac{r_1 r_3}{D} J \left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3} \right)_3 \quad (\text{n° 53}).$$

On a trouvé :

$q.$	$j.$	$\frac{r'_1}{r_1}$	$\frac{r'_2 r'_3}{r'_1 r'_4} - 1.$	$\left(\frac{L}{r} - \frac{Cr}{3}\right)_3.$
- 0,6	- 12	$1 + \frac{1}{1749}$	$-\frac{1}{1750}$	< 0
- 0,2	- 87	$1 + \frac{1}{175}$	$-\frac{1}{176}$	< 0
- 0,4	- 106	$1 + \frac{1}{175}$	$-\frac{1}{176}$	< 0

C'est encore la capacité de cette bobine qui influe, et non le coefficient d'induction.

Cela peut même être établi par une expérience directe, sans discussion. Laissons de côté les bobines de 10 000 ohms, qui, seules, ont une influence sensible, et équilibrons le pont avec la bobine δ à deux fils de cuivre sur le côté 1. L'équilibre permanent étant atteint, mettons l'interrupteur en mouvement, nous constatons une déviation $+ 0^{\text{div}},6$; elle est due à la bobine δ seule.

Mettons ensuite en dérivation sur cette même bobine δ une capacité de 0,1 microfarad, la déviation devient $+ 6,5$ quand l'interrupteur est mis en mouvement; elle est de même signe que celle due à la bobine δ seule.

Enlevons la capacité et réunissons les deux fils de la bobine δ bout à bout, de manière à rendre l'induction prédominante; l'image sort de l'échelle, du côté *négalif*.

Donc, quand le fil est doublé, l'effet produit est de signe contraire à celui que produit un coefficient d'induction, de même signe que celui qui est dû à une capacité en dérivation. Aucun doute ne peut subsister après cette expérience.

86. Tout étant disposé comme dans la dernière expérience décrite, et le fil de la bobine δ étant doublé, l'équilibre permanent est obtenu avec les résistances suivantes :

$r_1.$	r_2 (I).	r_3 (III).	r_4 (II).
δ	1000	176,5	1000

Quand on prend, pour r'_3 , 175,5 ohms, l'image est déviée de $- 156^{\text{div}},5$.

L'intensité j_0 , qui correspond à une division, est donnée (n° 53) par

$$-156,5j_0 = \frac{Jr_1r_2}{D} \times \frac{-1}{176,5} \text{ C.G.S.}$$

On rétablit l'équilibre permanent du pont; on place en dérivation sur δ des capacités variées; on fait tourner l'interrupteur avec une vitesse constante, et on lit les déviations correspondantes de l'image du galvanomètre.

Or, en tenant compte de toutes les circonstances (n°s 53, 79, 81), on a, pour la quantité d'électricité qui traverse le galvanomètre en une seconde,

$$q = -N \frac{Jr_1r_2}{D} \left(\frac{L_1}{r_1} - \frac{1}{3} C_1 r_1 - Cr_1 \right),$$

en appelant C_1 la capacité mutuelle des deux moitiés du fil de la bobine δ , et C la capacité mise en dérivation. Si q_0 correspond au cas où C est nul, on a

$$q - q_0 = +N \frac{Jr_1r_2}{D} r_1 C,$$

et l'on peut, par la simple condition de proportionnalité, déduire de chaque expérience la déviation qu'aurait donné 1 microfarad. C'est ainsi qu'ont été déterminés les nombres de la dernière colonne; on voit qu'ils sont sensiblement égaux.

TABLEAU XVIII.

Capacité C en microfarads.	Déviations.	Effet calculé de 1 microfarad
0,5	+ 30,0	59,0
0,3	+ 18,0	58,0
0,1	+ 6,5	59,0
0,0	+ 0,6	

De l'effet produit par un microfarad on déduit, pour la bobine δ seule,

$$\frac{L_1}{r_1} + \frac{1}{3} C_1 r_1 = \frac{0,6}{59} \times r_1 10^{-15} = 0,0010 r_1 10^{-15} \text{ C.G.S.},$$

et, en regardant le premier terme comme négligeable,

$$C_1 = 0,030 \text{ microfarad.}$$

Enfin, en comparant $q - q_0$ à j_0 , on a

$$59j_0 = +N \frac{Jr_1r_2}{D} \cdot 1 \cdot 10^{-15} \cdot 176,5 \cdot 10^9 \text{ C.G.S.},$$

et, d'autre part,

$$156,5j_0 = \frac{Jr_1r_2}{D} \frac{1}{176,5} \text{ C.G.S.};$$

d'où, par division,

$$N = \frac{59}{156,5} \frac{10^6}{(176,5)^2} = 12,0,$$

ce qui est précisément le nombre de tours de l'interrupteur en une seconde.

87. On a recommencé les mêmes expériences, en réunissant l'un à l'autre les deux fils de la bobine δ , non plus directement, mais par l'intermédiaire de la résistance ρ de 260 ohms (n° 64), comme cela est indiqué au n° 81.

Équilibre permanent du pont :

$r_1.$	r_2 (I).	r_3 (III).	r_4 (II).
$\delta + \rho$	1000	436	1000

Déviations pour $r_3' = 435$:

$$- 105^{\text{div}}, 0,$$

d'où

$$105,0j_0 = \frac{Jr_1r_2}{D} \frac{1}{436} \text{ C.G.S.}$$

L'équilibre permanent du pont étant rétabli, quand on met une capacité C entre les sommets A, C (fig. 2, n° 19) en dérivation sur le côté 1, et qu'on fait tourner l'interrupteur, on a

$$q = -N \frac{Jr_1r_2}{D} \left[\frac{L_1}{r_1} - C_1 \frac{r_1(r_1 - \rho) + \frac{1}{3}(r_1 - \rho)^2}{r_1} - Cr_1 \right].$$

TABLEAU XIX.

Capacité C en microfarads.	Déviaton.	Effet calculé de 1 microfarad.
0,7	+ 163,0	+ 240
0,5	+ 120,0	+ 235
0,3	+ 75,0	+ 231
0,1	+ 28,5	+ 226
0,0	+ 1,5	

Les nombres de la dernière colonne sont encore peu différents. Leur comparaison avec la déviation obtenue pour $C = 0$ donne

$$-\frac{L_1}{r_1} + C_1 \frac{r_1(r_1 - \rho) + \frac{1}{3}(r_1 - \rho)^2}{r_1} = \frac{4,5}{230} \times r_1 10^{-15} \text{ C. G. S.}$$

Négligeant, comme au numéro précédent, le premier terme, et tirant C_1 de cette équation, on a

$$C_1 \frac{436 \cdot 176 + \frac{1}{3}(176)^2}{436} = \frac{4,5}{230} \times 436 10^{-15} \text{ C. G. S.},$$

ou

$$C_1 = 0,029 \text{ microfarad,}$$

c'est-à-dire identiquement la même valeur qu'au numéro précédent.

Nous en concluons :

1° Que le terme $\frac{L_1}{r_1}$ est bien réellement négligeable ;

2° Que la formule trouvée au n° 81 pour exprimer l'influence de la capacité d'un fil ployé en double est exacte.

On avait eu soin de tourner l'interrupteur avec la même vitesse que dans l'expérience du n° 86. On trouve, en effet, par un calcul tout semblable,

$$N = 11,6.$$

Il serait facile de s'assurer aussi que le fil sans induction ρ a un effet très différent quand il est placé non plus entre les deux fils de la bobine ϑ , mais en dehors; si l'induction existait seule, la position de ce fil ρ serait indifférente.

88. Je crois donc qu'il est hors de doute que, dans un fil long ployé en double, l'influence de la capacité est prédominante sur celle de l'induc-

tion. Le signe, l'ordre de grandeur de l'effet observé sont parfaitement d'accord pour justifier cette manière de voir.

Pour deux bobines de même forme, l'effet dû à l'induction est d'autant plus grand que le métal est plus conducteur et que les dimensions absolues sont plus grandes. Si l'effet de l'induction existait seul, on ne comprendrait pas que la bobine à deux fils de cuivre, dont les dimensions sont quadruples de la bobine de 10000 ohms, et dont le fil est en cuivre, ne produise qu'un effet moindre ($3 \cdot 10^{-6}$ au lieu de $8 \cdot 10^{-6}$, nos 85, 83), malgré une longueur de fil 40 fois plus grande. Ce résultat est, au contraire, naturel s'il s'agit de la capacité. Dans la bobine de cuivre, les deux fils sont séparés par une grande épaisseur de paraffine. Pour des formes identiques, l'effet produit par la capacité est d'autant moindre que le métal est plus conducteur; et la diminution d'effet due à la nature et à la distance du fil peut bien compenser l'augmentation produite par sa longueur.

D'une manière générale, toutes les fois qu'on allonge les fils doublés, on ne change pas le rapport $\frac{L}{r}$, et on augmente le produit Cr proportionnellement au carré de la longueur. On finit donc toujours par le rendre prédominant. On comprend pourquoi les dix bobines de 1000 ohms n'ont qu'un effet insensible, bien que la bobine de 10000 ohms soit très gênante; pour chacune d'elles le produit Cr n'est environ que le centième de ce qu'il vaut pour la bobine de 10000 ohms; et pour elles toutes, environ le dixième, ce qui suffit à le rendre presque insensible (n° 63).

Le procédé tout indiqué, pour rendre négligeable l'influence de la bobine de 10000 ohms, est donc de séparer les 107^m du fil qui la forme en dix ou vingt parties à peu près égales; de ployer chacune d'elles en double, avant de l'embobiner, et, au besoin, d'embobiner une partie du fil sans la doubler, pour que son coefficient d'induction neutralise une partie de l'influence de sa capacité.

RÉSUMÉ.

J'ai entrepris l'étude des méthodes de mesure des coefficients d'induction. J'ai établi la théorie de ces méthodes, dans le Chapitre II, après avoir rappelé au Chapitre I les lois expérimentales des courants instantanés.

Dans les Chapitres suivants, III, IV, V, j'ai étudié ces méthodes en détail, tant au point de vue expérimental qu'au point de vue théorique. J'ai cherché les meilleures conditions de sensibilité et de précision, et j'ai indiqué les moyens d'éliminer les principales causes d'erreur. J'ai réussi à obtenir des résultats dont la plus grande erreur possible n'atteint pas $\frac{1}{1000}$, et qui concordent, en effet, à moins de $\frac{1}{3000}$, malgré la variété des conditions expérimentales.

La comparaison avec les valeurs absolues calculées approximativement montre la difficulté du calcul théorique d'un coefficient de self-induction.

Dans un dernier Chapitre, j'ai examiné l'influence possible de la capacité des bobines; et, tant par la discussion des résultats du Chapitre IV que par de nouvelles expériences, je crois avoir mis hors de doute que l'erreur qu'on commet en négligeant l'influence d'un fil long ployé en double est due à la capacité de ce fil.

J'ai contrôlé la graduation théorique des coefficients d'induction mutuelle de deux appareils simples (Ch. III), et vérifié les lois de similitude des bobines (Ch. V).

Toutes les expériences précises citées dans cette thèse ont été exécutées au Laboratoire de Physique du Collège de France, dont les meilleurs appareils électriques ont été mis à ma disposition par M. Mascart. Qu'il me soit permis de lui témoigner ici toute ma reconnaissance pour la bienveillante attention avec laquelle il a suivi les progrès de ce travail.

NOTES AU CHAPITRE I.

N° 10. *Équation* (1).

Il m'a été impossible de découvrir, dans les deux premières séries d'expériences de Faraday (traduites dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. L, 1832, p. 5 et 113), la démonstration expérimentale, ni même l'énoncé précis que l'effet produit par l'induction est une force électromotrice instantanée. Cette loi n'est soupçonnée que dans le § 214, mais sans netteté. Ce que ces deux Mémoires démontrent, c'est l'analogie complète des effets observés avec les aimants et les courants (1).

Le Mémoire fondamental de Lenz (1833) (*Pogg. Ann.*, t. XXXIV, p. 385; 1835) est relatif à l'induction magnéto-électrique. Pour un changement d'aimantation toujours le même, la quantité d'électricité induite dans un circuit quelconque de forme constante est proportionnelle à la conductibilité du circuit, quelles que soient la nature, la longueur, l'épaisseur du fil. L'effet produit est donc bien une force électromotrice instantanée. Cette force électromotrice est proportionnelle au nombre des tours de fil induit, pourvu que chaque tour pris isolément donne le même effet. Donc les forces électromotrices produites dans les diverses parties du circuit s'ajoutent.

A cause de l'analogie établie par Faraday, il est naturel d'admettre qu'il en est de même dans l'induction produite par les courants électriques.

(1) Le Mémoire de Faraday ne permet de décider que si la question a été posée à peu près en ces termes : Dans les phénomènes d'induction, quelle est la quantité indépendante de la nature du conducteur ? Est-ce l'intensité du courant produit ? Est-ce une force électromotrice qui engendre le courant conformément aux lois de Ohm, supposées applicables ? Cette seconde hypothèse est seule conforme aux expériences (§ 193-212). Mais il ne semble pas que Faraday ait jamais posé la question en des termes aussi nets. On trouve, en effet, dans la 29^e série des *Recherches expérimentales* (1851) des essais infructueux pour reconnaître l'influence des dimensions des conducteurs ; il espère obtenir des intensités égales en conservant la même masse à la portion du fil directement soumise à l'induction (§ 3206-3213). Il semble donc qu'il n'ait pas connu les lois d'Ohm, qui s'appliquent immédiatement à l'une de ses expériences de cette série (§ 3207), ni même les travaux exécutés dix-huit ans auparavant par Lenz, sur l'induction magnéto-électrique. C'est pourtant dans cette série (29^e) et dans la précédente (28^e) qu'il résume d'une manière absolument nette les lois qui lient l'intensité induite dans un circuit de forme variable, mais toujours constitué par le même fil, au nombre de lignes de force coupées par le circuit induit.

Quant à l'influence de l'intensité du champ magnétique, le Mémoire de Lenz ne contient rien. Nous ne pouvons donc rien en tirer par voie d'analogie pour la forme du premier terme de l'équation (1), $M\Delta I$. Dans le cas de l'extracourant, cette forme a été justifiée par les expériences d'Edlund (1849) (*Pogg. Ann.*, t. LXXVII, p. 161, et *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LIII, p. 51).

N^o 11. *Expériences de Felici* (1).

Felici admet que l'effet produit est une force électromotrice instantanée; ses expériences ont pour but de déterminer comment elle dépend de la forme, des dimensions et de la nature des circuits.

Je citerai d'abord l'expérience suivante, que Matteucci, dans son Cours sur l'induction, attribue à Felici, mais que je n'ai pas trouvée dans les extraits de ses Mémoires publiés aux *Annales de Chimie et de Physique*.

Deux bobines inductrices sont parcourues par le courant d'une même pile. Deux bobines induites communiquent chacune à l'un des fils d'un bon galvanomètre différentiel. Une roue de Masson établit et supprime alternativement la communication de la pile avec les bobines inductrices, et envoie dans le galvanomètre les courants induits de fermeture seuls. Un rhéostat permet de modifier la résistance d'un des circuits induits, et, pour ramener l'aiguille du galvanomètre au zéro, on change le nombre de tours induits de l'autre circuit. On trouve que le changement relatif du nombre de tours induits est égal au changement relatif de la résistance.

Donc la force électromotrice est proportionnelle au nombre de tours induits; les forces électromotrices produites dans les diverses parties de l'induit s'ajoutent. C'est le résultat que Lenz avait déjà obtenu pour l'induction magnéto-électrique.

Passons maintenant aux expériences décrites dans les *Annales de Chimie et de Physique*.

Les deux bobines induites, au lieu de former deux circuits distincts, sont réunies en un seul circuit qui contient le galvanomètre à fil unique.

1^o Quand les deux paires de bobines sont identiques (et attachées dans un sens convenable), le galvanomètre reste au zéro. Il en est de même quand on change l'épaisseur ou la nature d'un des fils inducteurs, ou d'un des fils induits, la forme des bobines restant la même.

La force électromotrice d'induction est donc indépendante de la nature des circuits; elle ne dépend que de leur forme géométrique.

2^o Le galvanomètre est mis au zéro, quand chacune des bobines n'a qu'un seul tour de fil. On fait ensuite, pour l'une des paires de bobines, m tours

(1) *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. XXXIV; 1852.

de fil inducteur, n tours de fil induit; pour l'autre paire, m' et n' . L'équilibre subsiste si l'on a

$$mn = m'n'.$$

La force électromotrice ne dépend donc que du produit mn . Comme, d'après l'expérience citée par Matteucci, pour m constant, elle est proportionnelle à n , nous devons en conclure : la force électromotrice est proportionnelle au produit du nombre des tours de fil induit et inducteur, tant que ces tours sont identiques.

Traduisant en langage ordinaire, on en déduit, par une généralisation naturelle, que la force électromotrice totale est la somme des forces électromotrices correspondant à tous les éléments des deux circuits pris deux à deux de toutes les manières possibles :

$$\mathcal{E} = \int \int e_{ss'} ds ds'.$$

Cela suffit aussi à justifier la forme générale de l'équation (3) du n° 11, relative aux circuits fermés.

3° L'équilibre existant entre les deux paires de circuits, chacun à un seul tour de fil, on remplace dans l'une des bobines inductrices le fil unique par m fils égaux placés côte à côte, en dérivation. L'équilibre subsiste. Or chaque fil est parcouru par un courant $\frac{I}{m}$; la force électromotrice due aux m fils est m fois celle due à chacun d'eux (exp. 2), et elle équivaut à celle d'un seul fil parcouru par le courant I .

Donc la force électromotrice est proportionnelle à la variation de l'intensité de l'inducteur quand il passe d'un état permanent à un autre état permanent; ce qui justifie la forme adoptée dans les équations (1), (3) des nos 10 et 11.

Avant de terminer les expériences de Felici, j'en rappellerai quelques-unes de Gaugain. Dans un Mémoire présenté à l'Institut, et qui n'est connu que par des extraits (*Comptes rendus*, t. XXXIX, p. 909-1023; 1859), Gaugain a établi par des mesures directes ce que nous avons pu conclure des expériences de Lenz et de celles de Felici citées jusqu'ici.

L'intensité du courant induit est en raison directe de la somme des forces électromotrices mises en jeu, et en raison inverse de la somme des résistances du circuit. Elle est proportionnelle à l'intensité du courant inducteur.

L'intensité du courant inducteur est mesurée à la boussole des tangentes; celle du courant induit par l'impulsion de l'aiguille d'un galvanomètre Nobili.

L'addition des forces électromotrices est démontrée très simplement par l'expérience suivante : Le fil inducteur et le fil induit bien isolés sont légèrement tordus ensemble sur une très grande longueur. On en fait successivement, en utilisant toute la longueur, un cercle de grand diamètre, et d'un seul tour; un cercle de diamètre moitié moindre formé de deux tours côte à

côte, etc. Tant que le diamètre des cercles est grand par rapport à la distance mutuelle des deux fils, les impulsions sont sensiblement proportionnelles aux nombres de tours.

N° 13. *Suite des expériences de Felici.*

5° Le principe des courants sinueux peut être exprimé ainsi : Si, dans l'une des paires de bobines, les fils sont bien tendus, et que, dans l'autre paire, l'inducteur ou l'induit soient rendus sinueux (avec les restrictions habituelles), l'équilibre subsiste.

On peut donc remplacer un élément par ses projections, quand les deux circuits sont fermés, seul cas où l'expérience puisse être réalisée. On en déduit, par une analyse calquée sur celle d'Ampère pour l'électrodynamique,

$$\mathcal{E} = \mathbf{I} \iint [\varphi(r) \cos \theta \cos \theta' + \psi(r) \cos \omega] ds ds',$$

et, par suite d'une équivalence connue dans le cas des circuits fermés,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathbf{I} \iint f(r) \cos \theta \cos \theta' ds ds' = \mathbf{I} \iint f(r) \cos \omega ds ds', \\ f(r) &= \varphi(r) + \psi(r). \end{aligned}$$

θ et θ' sont les angles des deux éléments ds, ds' avec leur distance r ; et ω l'angle de ces deux éléments entre eux; $f(r)$ est une fonction de la distance à déterminer.

6° Les deux paires de bobines sont de formes semblables. Leur rapport de similitude est k . Pour que l'équilibre existe, il faut que le nombre des tours de fil de l'inducteur soit dans le rapport inverse $\frac{1}{k}$, le nombre de tours de l'induit étant le même.

Par exemple, l'une des paires de bobines est formée de polygones plans égaux, parallèles, à distance déterminée. Pour l'autre paire, les polygones sont semblables, et le rapport de leur distance aux côtés homologues est le même.

Pour un tour du fil inducteur et un tour du fil induit, on a

$$\begin{aligned} \text{Première paire.....} & \quad \mathcal{E}_1 = \mathbf{I} \iint f(r) \cos \omega ds ds' \\ \text{Deuxième paire.....} & \quad \mathcal{E}_2 = \mathbf{I} \iint f(kr) \cos \omega k ds k ds' \end{aligned}$$

et l'expérience montre qu'on a

$$\mathcal{E}_2 = k \mathcal{E}_1;$$

d'où

$$k \int \int f(r) \cos \omega \, ds \, ds' = \int \int k^2 f(kr) \cos \omega \, ds \, ds'$$

ou

$$\int \int [f(r) - k f(kr)] \cos \omega \, ds \, ds' = 0.$$

Et comme cette relation subsiste quelle que soit la forme du circuit, on en déduit

$$f(r) - k f(kr) = 0, \quad f(r) = \frac{C}{r}.$$

On a donc, pour deux circuits fermés, la force électromotrice d'induction au moyen de l'intégrale double

$$\mathcal{E} = \mathbf{I} \int \int \frac{C}{r} \cos \omega \, ds \, ds',$$

C étant une constante numérique dont la valeur dépend des unités adoptées.

Je ne suivrai pas Felici dans les essais qu'il a faits pour déterminer la forme de la fonction dans le cas des circuits ouverts géométriquement, mais physiquement fermés, parcourus par un courant uniforme. Je n'en ai pas besoin ici, et je ne les trouve pas démonstratifs.