ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 43 fascicule 2 mars-avril 2010

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Jérémy BLANC

Groupes de Cremona, connexité et simplicité

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4[e] série, t. 43, 2010, p. 357 à 364

GROUPES DE CREMONA, CONNEXITÉ ET SIMPLICITÉ

PAR JÉRÉMY BLANC

RÉSUMÉ. – Le groupe de Cremona est connexe en toute dimension et, muni de sa topologie, il est simple en dimension 2.

ABSTRACT. – The Cremona group is connected in any dimension and, endowed with its topology, it is simple in dimension 2.

1. Questions et résultats

Soit k un corps algébriquement clos. On note $\mathrm{Cr}_n(k)$ le groupe de Cremona de dimension n, groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^n_k$, anti-isomorphe via l'action sur le corps des fractions rationnelles à $\mathrm{Aut}_k(k(x_1, \dots, x_n))$. Ce groupe est muni d'une topologie naturelle (décrite à la section 2).

En 1974, dans un rapport sur les questions ouvertes importantes en géométrie algébrique [5], D. Mumford consacre un paragraphe au groupe $\mathrm{Cr}_2(k)$. Il parle de mettre une topologie sur le groupe, et pose alors la question : ce groupe est-il simple ? Le théorème 4.2 démontré plus bas permet de répondre par l'affirmative.

La technique utilisée pour cela est élémentaire. Elle permet également de prouver que le groupe $\mathrm{Cr}_n(k)$ est connexe pour tout n (Théorème 5.1). Ceci répond à une question posée par J-P. Serre lors du 1000e exposé Bourbaki [8], concernant la dimension $n \geq 3$, le cas $n \leq 2$ étant déjà bien connu.

Cet article est articulé ainsi : la section 2 donne des rappels sur la topologie de Zariski de $\mathrm{Cr}_n(k)$, la section 3 présente un lemme de déformation, qui permet de montrer la simplicité de $\mathrm{Cr}_2(k)$ (section 4) et la connexité de $\mathrm{Cr}_n(k)$ (section 5).

Je tiens à remercier J.-P. Furter pour des discussions intéressantes sur cet article, et tout spécialement J-P. Serre pour ses relectures attentives de cet article et ses précieuses corrections.

2. La topologie de Zariski de $\mathrm{Cr}_n(k)$

Soit X une k-variété (k est toujours le corps algébriquement clos fixé au départ). On note $\mathrm{Bir}(X)$ l'ensemble des applications birationnelles $X \dashrightarrow X$, et $\mathrm{Aut}(X) \subset \mathrm{Bir}(X)$ le groupe des automorphismes de X.

Afin de décrire la topologie de $\mathrm{Bir}(X)$, décrivons tout d'abord les morphismes $A \to \mathrm{Bir}(X)$:

Définition 2.1. – Une *famille algébrique* d'éléments de $\mathrm{Bir}(X)$ est la donnée d'une application rationnelle $f : A \times X \dashrightarrow X$ où A est une k-variété, définie sur un ouvert dense U tel que, pour tout $a \in A$, $U_a := U \cap (\{a\} \times X)$ soit un ouvert dense de $\{a\} \times X$ et que la restriction de $\mathrm{id} \times f$ à U soit un isomorphisme de U sur un ouvert dense de $A \times X$.

Pour tout $a \in A$, l'application birationnelle $x \dashrightarrow f(a,x)$ représente alors un élément $f_a \in \mathrm{Bir}(X)$. La famille f_a ($a \in A$) représente une application $A \to \mathrm{Bir}(X)$, que l'on appellera *morphisme* de A vers $\mathrm{Bir}(X)$.

Cette définition correspond à celle de [8] et [2, §1] ; un morphisme $A \to \mathrm{Bir}(X)$ correspond alors à un pseudo-automorphisme du A-schéma $A \times X$. On définit la topologie de Zariski sur $\mathrm{Bir}(X)$ de la manière suivante (voir [8, §1.6]) :

Définition 2.2. – On dit qu'un ensemble $R \subset \mathrm{Bir}(X)$ est *fermé* si, pour toute k-variété A et tout morphisme $A \to \mathrm{Bir}(X)$, la préimage de R dans A est fermée.

Comme l'explique [8], ceci donne une topologie sur $\mathrm{Bir}(X)$, qui est la topologie la plus fine qui rende les morphismes vers $\mathrm{Bir}(X)$ continus. De plus, en définissant de manière analogue la topologie de Zariski sur $\mathrm{Bir}(X) \times \mathrm{Bir}(X)$, la composition donne une application continue $\mathrm{Bir}(X) \times \mathrm{Bir}(X) \to \mathrm{Bir}(X)$.

En particulier, on peut restreindre ceci à $\mathrm{Aut}(X)$ et mettre ainsi une topologie sur ce groupe. Lorsque $X = \mathbb{P}^n_k$, on peut démontrer que l'on retrouve la topologie de Zariski habituelle du groupe algébrique $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{PGL}(n+1,k)$ et qu'en fait $\mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Cr}_n(X)$ est une immersion fermée [7].

Les groupes qui nous intéressent le plus sont ceux où la k-variété X est rationnelle. On rappelle que si X est rationnelle, de dimension n, alors $\mathrm{Bir}(X)$ s'identifie naturellement à $\mathrm{Cr}_n(k) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ via une application birationnelle choisie $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k$; le choix de celle-ci fait juste varier l'homéomorphisme $\mathrm{Bir}(X) \to \mathrm{Cr}_n(k)$. Dans la suite, on prendra le plus souvent $X = \mathbb{A}^n_k$ ou $X = \mathbb{P}^n_k$, suivant les besoins.

3. Préliminaires techniques

3.1. Le groupe de de Jonquières

Pour $n \geq 2$, notons ϕ la projection

$$(x_0 : \cdots : x_n) \dashrightarrow (x_1 : \cdots : x_n)$$

de $\mathbb{P}^n_k$ dans $\mathbb{P}^{n-1}_k$. On appelle *groupe de de Jonquières* J_n le sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ qui préserve l'ensemble des fibres de ϕ. On note J_n^0 le sous-groupe de J_n constitué des éléments qui préservent une fibre générale de ϕ.

De manière affine, on peut restreindre ϕ à la projection $k^n \to k^{n-1}$, et ainsi voir que J_n est naturellement isomorphe à $J_n^0 \rtimes \mathrm{Bir}(k^{n-1})$, où

$$J_n^0 \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_K) \simeq \mathrm{PGL}(2,K), \text{ avec } K = k(x_1,\dots,x_{n-1}).$$

L'homomorphisme déterminant $\mathrm{GL}(2,K) \to K^*$ induit un homomorphisme surjectif

$$\det\colon \mathrm{PGL}(2,K) \to K^*/(K^*)^2,$$

où $(K^*)^2$ désigne l'ensemble des carrés de K^*. On notera $J_n^1 \subset J_n^0$ le sous-groupe normal correspondant au noyau de det. Alors, l'homomorphisme précédent nous donne

$$J_n^1 \simeq \mathrm{PSL}(2,K).$$

Le groupe J_n^1 est simple [3, Chapitre II, §2]. De plus, comme tout élément $f \in J_n^0$ satisfait $\det(f^2) = 1$, le quotient J_n^0/J_n^1 est un groupe abélien de type $(2,\dots,2,\dots)$. Les classes de $J_n^0 \pmod{J_n^1}$ sont représentées par les involutions de de Jonquières $f_h\colon (x_1,\dots,x_n) \dashrightarrow (x_1,\dots,x_{n-1},h/x_n)$, où $h \in k(x_1,\dots,x_{n-1})^* = K^*$. Puisque $\det(f_h) = -h$, deux involutions f_h et $f_{h'}$ représentent la même classe si et seulement si h/h' est un carré dans K^*.

3.2. Dérivée normale

Dans cette section, on se donne la situation suivante :

Partons d'une k-variété lisse X. Soit Y la droite affine sur k et soit $Z = X \times Y$; le morphisme $x \mapsto (x,0)$ identifie X à une sous-variété de Z. Soit U un ouvert dense de Z tel que $U_X := U \cap X$ soit dense dans X et soit $f\colon U \to Z$ un morphisme qui envoie U_X dans X ; notons $f_X\colon U \to X$ et $f_Y\colon U \to Y$ les deux composantes de f.

À partir de cette donnée, on va définir la dérivée normale de f, qui est une application rationnelle $f_0\colon Z \dashrightarrow Z$, et montrer qu'il s'agit d'une limite de conjugués de f.

La fonction f_Y a la propriété que $f_Y(x,y) = 0$ si $y = 0$; on en déduit que f_Y est divisible par la fonction « y », ce qui veut dire que $f_Y(x,y) = y \cdot g_Y(x,y)$ pour une certaine fonction g_Y sur U. Ceci nous permet de définir la *dérivée normale de f le long de X*, qui est le morphisme

$$f_0\colon U_X \times Y \to Z,$$

donné par la formule $f_0(x,y) = (f_X(x,0), y \cdot g_Y(x,0))$.

On remarque que f_0 ne dépend que du comportement de f dans un voisinage infinitésimal de X et est une sorte de linéarisation de f ; en fait f_0 ne dépend pas du choix de l'ouvert U mais seulement de f vue comme application rationnelle de Z dans lui-même. De plus $(x,0) \mapsto f_X(x,0)$ est la restriction de f à X, ce qui implique que f_0 est compatible avec la projection $Z \to X$; on a les diagrammes commutatifs

(1)
$$\begin{tikzcd} U_X \times Y \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ U_X \arrow[r, "f|_{U_X}"] & X \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "f_0"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X \arrow[r, dashed, "f|_X"] & X. \end{tikzcd}$$

De plus, f_0 est une homothétie sur chaque fibre.

Montrons maintenant que f_0 est une limite de conjugués de f. Soit T un autre exemplaire de la droite affine sur k ; pour tout $t \in T$, soit U_t l'ouvert de Z formé des (x,y) tels que (x,ty)

appartienne à U. Remarquons que $U_0 = U_X \times Y$. La réunion U_T des $\{t\} \times U_t$ est un ouvert de $T \times Z$ contenant $T \times U_X$. Si $t \neq 0$, soit s_t l'automorphisme $(x,y) \mapsto (x,ty)$ de Z et posons $f_t = s_t^{-1} \circ f \circ s_t$, ce qui a un sens sur U_t ; si $t = 0$, définissons $f_t = f_0$ comme ci-dessus ; c'est un morphisme défini sur $U_0 = U_X \times Y$.

LEMME 3.1. – *Avec les notations précédentes, la famille des f_t ($t \in T$) définit un morphisme $F\colon U_T \to Z$.*

Démonstration. – On a $F(t,x,y) = (f_X(x,ty), y \cdot g_Y(x,ty))$: lorsque $t \neq 0$, cela résulte de $t^{-1} f_Y(x,ty) = y \cdot g_Y(x,ty)$ et lorsque $t = 0$, c'est la définition de f_0. Le lemme suit alors du fait que $(t,x,y) \mapsto f_X(x,ty)$ et $(t,x,y) \mapsto g_Y(x,ty)$ sont des morphismes définis sur U_T. □

LEMME 3.2. – *Avec les mêmes notations qu'avant, supposons de plus que X est irréductible, que f est un isomorphisme de U sur un ouvert V de Z et que f se restreint à un isomorphisme de $U_X = U \cap X$ vers $V_X = V \cap X$ (ce qui implique que $f \in \mathrm{Bir}(Z)$ et $f|_X \in \mathrm{Bir}(X)$).*

Alors, la famille f_t ($t \in T$) définit un morphisme $T \to \mathrm{Bir}(Z)$ (au sens de la définition 2.1).

Démonstration. – Le lemme 3.1 montre que $F\colon U_T \to Z$ est un morphisme, qui induit donc une application rationnelle $T \times Z \dashrightarrow Z$. Pour tout $t \in T$, $U_T \cap (\{t\} \times Z)$ n'est rien d'autre que $\{t\} \times U_t$, ouvert dense de $\{t\} \times Z$ par construction, et la restriction de F à cet ouvert correspond à f_t.

Notons $r\colon V \to U$ l'inverse de f, qui applique $V_X = V \cap X$ dans X par construction, et utilisons la construction précédente pour $r = (r_X, r_Y)$. On a $V_t = \{(x,y) \in Z \mid (x,ty) \in V\}$ et le lemme 3.1 nous donne un morphisme $R\colon V_T \to Z$, dont la restriction à $\{t\} \times V_t$ correspond à r_t.

Il suffit alors de voir que $\mathrm{id} \times f$ est un isomorphisme de U_T vers V_T, dont l'inverse est $\mathrm{id} \times r$, ce qui peut par exemple se déduire de la forme explicite de $F(t,x,y)$ et $R(t,x,y)$ donnée dans la preuve du lemme 3.1. □

3.3. Le lemme de déformation appliqué au groupe de Cremona

Rappelons que si Z est une k-variété irréductible lisse, si $f \in \mathrm{Bir}(Z)$ et $H, H' \subset Z$ sont deux hypersurfaces irréductibles, on dit que f *se restreint à une application birationnelle* $f|_H\colon H \dashrightarrow H'$ si f est définie sur un ouvert U tel que $U \cap H$ soit un ouvert dense de H et tel que $f|_{U\cap H}\colon U \cap H \to H'$ soit une immersion ouverte. On peut également présenter cette notion de la façon suivante : les hypersurfaces H et H' définissent des valuations discrètes v et v' du corps des fonctions de Z, et l'on demande que f transforme v en v'.

En appliquant les résultats de la section 3.2 au cas d'une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^n_k$, nous allons démontrer le résultat suivant.

LEMME 3.3. – *Pour $n \geq 2$, notons $H_0 \subset \mathbb{P}^n_k$ l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$. Soit $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ un élément qui se restreint à une application birationnelle $f|_{H_0}\colon H_0 \dashrightarrow H_0$.*

Notons $Z \subset \mathbb{P}^n_k$ le complémentaire de l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ et $X = Z \cap H_0$, de telle sorte que $Z = X \times Y$ avec $Y \cong \mathbb{A}^1_k$.

Alors, en reprenant les notations de la section 3.2, la dérivée normale f_0 de f le long de X est un élément de J_n tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n_k \arrow[r, dashed, "f_0"] \arrow[d, dashed] & \mathbb{P}^n_k \arrow[d, dashed] \\ H_0 \arrow[r, dashed, "f|_{H_0}"] & H_0, \end{tikzcd} \tag{2}$$

où les flèches verticales correspondent à la projection $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \dashrightarrow (0 : x_1 : \cdots : x_n)$. *Le morphisme donné par le lemme 3.2*

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^1_k \cong T &\to \mathrm{Bir}(Z) \cong \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k) \\ t &\mapsto f_t \end{aligned}$$

envoie 0 *sur* f_0, 1 *sur* $f_1 = f$ *et* $t \neq 0$ *sur* $f_t = s_t^{-1} \circ f \circ s_t$ *où* s_t *correspond ici à l'automorphisme* $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto (tx_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ *de* $\mathbb{P}^n_k$.

Démonstration. – On a $X \cong \mathbb{A}^{n-1}_k$ et $Z = X \times Y \cong \mathbb{A}^n_k$ est un ouvert dense de $\mathbb{P}^n_k$. On se donne deux ouverts $U, V \subset Z \subset \mathbb{P}^n$ tels que f se restreigne à un isomorphisme $U \to V$ et également à un isomorphisme $U_X = U \cap X \to V_X = V \cap X$, où U_X et V_X sont denses dans X. On peut alors utiliser tous les résultats de la section 3.2. La projection $Z \to X$ correspond à $\phi\colon \mathbb{P}^n_k \dashrightarrow H_0$ donné par $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \dashrightarrow (0 : x_1 : \cdots : x_n)$. La commutativité du diagramme (1) entraîne donc celle de (2) et implique que $f_0 \in J_n$. Le morphisme $t \mapsto f_t$ est donné par le lemme 3.2 et sa description ici résulte de celle donnée précédemment. $\square$

4. Simplicité de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$

Proposition 4.1. – *Supposons* $n \geq 2$. *Soit* $N \subset \mathrm{Cr}_n(k)$ *un sous-groupe non trivial qui soit à la fois normal et fermé. Alors,* N *contient* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathrm{PGL}(n+1, k)$ *et* $J^1_n \simeq \mathrm{PSL}(2, k(x_1, \ldots, x_{n-1}))$.

Démonstration. – Soit h un élément non trivial de N, qui se restreint à un isomorphisme $h|_U : U \to V$, où U, V sont des ouverts denses de $\mathbb{P}^n_k$. Soit p un point de U et notons $q = h(p) \in V$ son image ; on peut supposer que q et p sont différents. Il existe un élément $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k)$ qui fixe à la fois q et p. Par conséquent, $g = (\alpha h^{-1} \alpha^{-1}) h \in N$ fixe p (et q).

Notons T_p l'espace tangent à p et $\mathbb{P}(T_p) \simeq \mathbb{P}^{n-1}_k$ son projectivisé. Alors, g induit un automorphisme $g_p \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(T_p))$. Montrons maintenant que, pour un choix convenable de α, l'automorphisme g_p est non trivial. Comme h envoie p sur q via un isomorphisme local, il induit un isomorphisme (linéaire) $l : \mathbb{P}(T_p) \to \mathbb{P}(T_q)$. En notant $\alpha_p \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(T_p))$ et $\alpha_q \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(T_q))$ les automorphismes induits par les actions respectives de α sur $\mathbb{P}(T_p)$ et $\mathbb{P}(T_q)$, on a $g_p = \alpha_p l^{-1} (\alpha_q)^{-1} l$. Pour que g_p soit non trivial, il suffit par exemple de choisir $\alpha = (x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto (\lambda x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$, avec $\lambda \in k \backslash \{0, 1\}$, si $p = (1 : 0 : \cdots : 0)$ et $q = (0 : 1 : 0 : \cdots : 0)$.

Soit $\sigma\colon (x_0 : \cdots : x_n) \dashrightarrow (\frac{1}{x_0} : \cdots : \frac{1}{x_n})$ la transformation standard de $\mathbb{P}^n_k$ (de degré n), alors σ est une involution qui contracte l'hyperplan H_0 d'équation $x_0 = 0$ sur le point $(1 : 0 : \cdots : 0)$, et qui envoie la valuation associée à H_0 sur celle associée au diviseur exceptionnel obtenu en éclatant $(1 : 0 : \cdots : 0)$. En choisissant $p = (1 : 0 :$

$\cdots : 0)$ (quitte à conjuguer g par un automorphisme de $\mathbb{P}^n_k$), $f = \sigma^{-1} g \sigma \in N$ induit une application birégulière non triviale de l'hyperplan H_0 dans lui-même, correspondant à $g_p \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(T_p))$. D'après le lemme 3.3, il existe dans N un élément $f_0 \in J_n$, qui préserve la fibration rationnelle $\phi : \mathbb{P}^n_k \dashrightarrow H_0$ donnée par $(x_0 : \cdots : x_n) \dashrightarrow (0 : x_1 : \cdots : x_n)$ et agit sur la base du pinceau comme $f_{|H_0}$, donc de manière non triviale.

Montrons maintenant qu'il existe $\beta \in J^0_n$ tel que $r = \beta^{-1} f_0 \beta (f_0)^{-1}$ soit un élément non trivial de $N \cap J^0_n$. Rappelons que J_n est isomorphe au produit semi-direct $J^0_n \rtimes \mathrm{Bir}(k^{n-1})$, et écrivons $f_0 = (a, b)$ dans ce produit, avec $a \in J^0_n$ et $b \in \mathrm{Bir}(k^{n-1})$ non trivial par construction. Alors, r s'écrit

$$(\beta^{-1}, 1) \circ (a, b) \circ (\beta, 1) \circ (b^{-1}(a^{-1}), b^{-1}) = (\beta^{-1} \cdot a \cdot b(\beta) \cdot a^{-1}, 1).$$

Par conséquent, r est un élément de $N \cap J^0_n$, qui est de plus non trivial si et seulement si $\beta \neq a \cdot b(\beta) \cdot a^{-1}$. Si a est l'identité, il suffit de choisir $\beta \in J^0_n$ non fixé par b (par exemple un élément diagonal donné par une fonction de $k(x_1, \ldots, x_{n-1})$ qui n'est pas invariante par b). Si a n'est pas l'identité, on peut choisir pour β un élément de $\mathrm{PGL}(2, k) \subset \mathrm{PGL}(2, k(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ ne commutant pas avec a.

On trouve donc que $N \cap J^0_n$ est un sous-groupe normal non trivial de $J^0_n \simeq \mathrm{PGL}(2, k(x_1, \ldots, x_{n-1}))$, ce qui implique que N contient $J^1_n \simeq \mathrm{PSL}(2, k(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ (voir par exemple [3, Chapitre II, §2]). De plus, comme $J^1_n \cap \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k)$ est non trivial et $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathrm{PGL}(n+1, k)$ est simple, N contient $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k)$. □

THÉORÈME 4.2. – *Muni de sa topologie, le groupe* $\mathrm{Cr}_2(k) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$ *est simple.*

Démonstration. – Suit de la proposition précédente et du fait que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$ est engendré par $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_k)$ et $J^1_2 \simeq \mathrm{PSL}(2, k(x_1))$. Démontrons cette dernière partie. On note $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ les éléments de $\mathrm{Cr}_2(k) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$ suivants (vus ici sur la carte affine $(x_1, x_2) \mapsto (1 : x_1 : x_2)$) :

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 : & (x_1, x_2) \dashrightarrow (x_1, -\frac{1}{x_2}) & \beta_1 : & (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1); \\ \alpha_2 : & (x_1, x_2) \dashrightarrow (-\frac{1}{x_1}, x_2) & \beta_2 : & (x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2). \end{array}$$

Alors, α_1 est un élément de J^1_2 et β_1, β_2 sont deux éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_k)$. De plus, $\alpha_2 = \beta_1 \alpha_1 \beta_1$ et $\alpha_1 \alpha_2 \beta_2$ est la transformation quadratique standard. Le résultat se déduit alors du théorème de Noether-Castelnuovo : le groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$ est engendré par $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_k)$ et la transformation quadratique standard $(x_1, x_2) \dashrightarrow (\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2})$ (voir [9, Chapter V, §5, Theorem 2, p. 100] pour une preuve valable en toute caractéristique). □

REMARQUE 4.3. – La simplicité de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$, en tant que groupe abstrait, est toujours ouverte. Pour de plus amples résultats dans cette direction, voir [1] et [4].

5. Connexité de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$

Comme $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$ est engendré par $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_k)$ et J^0_2, le groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_k)$ est connexe. En dimension supérieure, il n'existe pas d'analogue au théorème de Noether-Castelnuovo (voir [6]) et il ne paraît pas évident *a priori* de trouver un ensemble adéquat de générateurs. Toutefois, nous pouvons prouver le résultat suivant :

THÉORÈME 5.1. – *Pour tout* $n \geq 1$, *le groupe* $\mathrm{Cr}_n(k) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ *est* linéairement connexe *au sens suivant : pour tous* $f, g \in \mathrm{Cr}_n(k)$, *il existe un ouvert* U *de la droite affine sur* k *contenant* 0 *et* 1, *et un morphisme* $\theta \colon U \to \mathrm{Cr}_n(k)$ *tel que* $\theta(0) = f$ *et* $\theta(1) = g$.

En particulier, le groupe $\mathrm{Cr}_n(k)$ *est connexe.*

Démonstration. – Si $U \subset \mathbb{A}^1_k$ est un ouvert contenant 0 et 1 et que le morphisme $\theta \colon U \to \mathrm{Cr}_n(k)$ satisfait $\theta(0) = f$ et $\theta(1) = g$, on dira que θ *joint* f *à* g ; en notant U' l'ouvert qui est l'image de U par $t \mapsto 1 - t$, le morphisme $U' \to \mathrm{Cr}_n(k)$ défini par $t \mapsto \theta(1-t)$ joint g à f. De plus, si $\nu \colon V \to \mathrm{Cr}_n(k)$ joint g à h, le morphisme $U \cap V \to \mathrm{Cr}_n(k)$ défini par $t \mapsto \theta(t) \circ g^{-1} \circ \nu(t)$ joint f à h. On en déduit que la relation « f et g sont joignables » est une relation d'équivalence.

Notons $\mathcal{U}_0 \subset \mathrm{Cr}_n(k)$ l'ensemble des éléments joignables à l'identité. On observe que $\mathcal{U}_0$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Cr}_n(k)$. En effet, si θ joint 1 à f, alors $t \mapsto \theta(1-t) \circ f^{-1}$ joint 1 à f^{-1} et si ν joint 1 à g, alors $t \mapsto \theta(t) \circ \nu(t)$ joint 1 à $f \circ g$; de plus, si $h \in \mathrm{Cr}_n(k)$, $t \mapsto h \circ \theta(t) \circ h^{-1}$ joint 1 à $h \circ f \circ h^{-1}$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathrm{PGL}(n+1, k)$ est contenu dans $\mathcal{U}_0$ (c'est-à-dire qu'il est linéairement connexe). Les éléments de la forme

$$(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_{0,i} x_i : x_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{1,i} x_i : \cdots : x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n : x_n)$$

sont joignables à l'identité (remplacer tous les $a_{i,j}$ par $t \cdot a_{i,j}$ donne le morphisme souhaité). De même, un élément diagonal

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (a_0 x_0 : \cdots : a_n x_n)$$

est joignable à l'identité (remplacer a_i par $(a_i - 1)t + 1$ donne le morphisme souhaité). Comme ces éléments et leurs conjugués engendrent $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k)$, on en déduit que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \subset \mathcal{U}_0$.

Le même argument montre que $J^0_n \simeq \mathrm{PGL}(2, k(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ est contenu dans $\mathcal{U}_0$.

Pour $n = 1$, $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1_k) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_k)$, qui est linéairement connexe. On va alors supposer que $n \geq 2$ et que $\mathrm{Cr}_{n-1}(k)$ est linéairement connexe (en procédant par induction sur n). Alors le groupe J_n, engendré par J^0_n et $\mathrm{Cr}_{n-1}(k)$, est contenu dans $\mathcal{U}_0$.

Montrons maintenant que tout élément $g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ appartient à $\mathcal{U}_0$, ce qui donnera le résultat souhaité. Quitte à multiplier g par un élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \subset \mathcal{U}_0$, on peut supposer que g ait un point fixe p, et que g et son inverse soient régulières en p ; on supposera de plus après conjugaison que $p = (1 : 0 : \cdots : 0)$.

Soit $\sigma : (x_0 : \cdots : x_n) \dashrightarrow (\frac{1}{x_0} : \cdots : \frac{1}{x_n})$ la transformation standard de $\mathbb{P}^n_k$ (de degré n), alors σ est une involution qui contracte l'hyperplan H_0 d'équation $x_0 = 0$ sur le point p. L'élément $f = \sigma^{-1} g \sigma$ induit une application birégulière de H_0 dans lui-même. Le lemme 3.3 nous donne un élément $f_0 \in J_n$ (la dérivée normale de f le long de H_0) tel que f et f_0 sont joignables ; par conséquent $f \in \mathcal{U}_0$. Le groupe $\mathcal{U}_0$ étant normal dans $\mathrm{Cr}_n(k)$, g appartient également à $\mathcal{U}_0$. □

RÉFÉRENCES

[1] V. I. DANILOV, Non-simplicity of the group of unimodular automorphisms of an affine plane, *Mat. Zametki* **15** (1974), 289–293.

[2] M. DEMAZURE, Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1970), 507–588.

[3] J. A. DIEUDONNÉ, *La géométrie des groupes classiques*, Ergebn. der Math. und ihrer Grenzg. **5**, Springer, 1971.

[4] M. H. GIZATULLIN, The decomposition, inertia and ramification groups in birational geometry, in *Algebraic geometry and its applications (Yaroslavl′, 1992)*, Aspects Math. E **25**, Vieweg, 1994, 39–45.

[5] D. MUMFORD, Algebraic geometry, in *Mathematical developments arising from Hilbert problems. Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society held at Northern Illinois University*, De Kalb, 1974, 44–45.

[6] I. PAN, Une remarque sur la génération du groupe de Cremona, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **30** (1999), 95–98.

[7] J-P. SERRE, Communication personnelle.

[8] J-P. SERRE, Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis, Séminaire Bourbaki, vol. 2008/09, exposé n° 1000, à paraître dans *Astérisque*.

[9] I. R. SHAFAREVICH, Algebraic surfaces, Proc. Steklov Inst. Math. **75**, 1967.

(Manuscrit reçu le 25 juin 2009 ;
accepté, après révision, le 19 octobre 2009.)

Jérémy BLANC
Université de Genève
Section de mathématiques
2-4 rue du Lièvre, Case postale 64
1211 Genève 4, Suisse
E-mail: Jeremy.Blanc@unige.ch