ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 42 fascicule 2 mars-avril 2009

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Pascal AUTISSIER

Géométrie, points entiers et courbes entières

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^e série, t. 42, 2009, p. 221 à 239

GÉOMÉTRIE, POINTS ENTIERS ET COURBES ENTIÈRES

PAR PASCAL AUTISSIER

RÉSUMÉ. – Soit X une variété projective sur un corps de nombres K (resp. sur $\mathbb{C}$). Soit H la somme de « suffisamment de diviseurs positifs » sur X. On montre que tout ensemble de points quasi-entiers (resp. toute courbe entière) dans $X - H$ est non Zariski-dense.

ABSTRACT. – Let X be a projective variety over a number field K (resp. over $\mathbb{C}$). Let H be the sum of "sufficiently many positive divisors" on X. We show that any set of quasi-integral points (resp. any integral curve) in $X - H$ is not Zariski dense.

1. Introduction

Soient K un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K. On note $O_{K;S}$ l'anneau des S-entiers de K. On s'intéresse dans cet article aux solutions dans $O_{K;S}^r$ de systèmes d'équations du type

$$\forall i \in \{1; \ldots; n\} \quad F_i(x_1; \ldots; x_r) = 0, \qquad (*)$$

où les F_i sont des polynômes à r variables et à coefficients dans $O_{K;S}$. Pour formaliser cette étude, on utilise le langage de la géométrie algébrique :

Désignons par Y la « variété algébrique » sur K définie par $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$. Tout ensemble de solutions de $(*)$ dans $O_{K;S}^r$ définit alors un ensemble (de points) S-entier sur Y.

Le problème est de donner des conditions géométriques suffisantes sur Y pour que tout ensemble S-entier soit non Zariski-dense dans Y.

Dans la suite, on se donne Y sous la forme $Y = X - D$, où X est une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$ et D un diviseur effectif sur X. L'esprit de la conjecture de Lang et Vojta (cf. conjecture 4.2 de [9] p. 223) est qu'une telle condition suffisante s'exprime en termes de « positivité » de D :

CONJECTURE (Lang, Vojta). – *Soit X une variété projective lisse sur K de diviseur canonique $\mathcal{K}_X$. Soit D un diviseur effectif sur X, à croisements normaux. Posons $Y = X - D$. On suppose $\mathcal{K}_X + D$ gros (par exemple ample) sur X. Alors tout ensemble S-entier sur Y est non Zariski-dense dans Y.*

Les théorèmes de Siegel et de Faltings [5] montrent cette conjecture lorsque X est une courbe. Plus généralement, cet énoncé est connu de Faltings [6] lorsque X est une sous-variété de variété abélienne. Par ailleurs, c'est un corollaire direct du théorème du sous-espace lorsque $X = \mathbb{P}^d_K$ et D égale la somme de $d+2$ hyperplans en position générale.

Notons cependant que la conjecture est encore largement ouverte : le cas où $X = \mathbb{P}^2_K$ n'est par exemple pas connu.

Dans cet article, on démontre des cas particuliers de cette conjecture, lorsque D a « suffisamment » de composantes irréductibles. Plus précisément, disons qu'une variété Y sur K est *arithmétiquement quasi-hyperbolique* lorsqu'il existe un fermé $Z \neq Y$ tel que pour toute extension finie K' de K et tout ensemble quasi-entier $\mathcal{E} \subset Y(K')$ sur Y, l'ensemble $\mathcal{E} - Z(K')$ soit fini (cf. section 2 pour les autres définitions). On prouve le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. – *Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 2$. Soient δ un entier ≥ 2 et $D_1; \dots; D_{d\delta}$ des diviseurs effectifs presque amples sur X qui se coupent proprement deux à deux. On suppose que toute intersection de $\delta+1$ quelconques d'entre eux est vide. Posons $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_{d\delta}$. Alors Y est arithmétiquement quasi-hyperbolique. En particulier, tout ensemble $\mathcal{E} \subset Y(K)$ S-entier sur Y est non Zariski-dense dans Y.*

Cet énoncé améliore un résultat récent de Levin (cf. théorème 10.4A de [11]). En fait, Levin a besoin de $2\left\lfloor \frac{\delta+1}{2} \right\rfloor d+1$ diviseurs au lieu de $d\delta$ (cf. aussi remarque 2.4 pour une comparaison des travaux).

On démontre en outre l'énoncé suivant (où $\lambda'_d = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{d+1}\right]^{-1}\left(1 + \frac{1}{d}\right)$ est une constante $\leq \frac{12}{7}$ ne dépendant que de d, cf. remarque 2.3) :

THÉORÈME 1.2. – *Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 2$. Soient $D_1; \dots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls et nefs sur X qui se coupent proprement (avec $r > \lambda'_d d$). Posons $L = \sum_{i=1}^r D_i$ et $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_r$. On suppose que le $\mathbb{Q}$-diviseur $L - \lambda'_d d D_i$ est ample pour tout $i \in \{1; \dots; r\}$. Alors Y est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

L'hypothèse sur les $L - \lambda'_d d D_i$ est vérifiée lorsque les D_i vivent dans un cône « suffisamment étroit » du groupe de Néron-Severi de X. L'intérêt de ce résultat réside dans le nombre (potentiellement linéaire en d) de diviseurs à considérer.

Appliquons, à titre d'exemple, le théorème 1.2 au cas où $X = (\mathbb{P}^1_K)^d$ (avec $d \geq 2$) :

Soit r un entier $> \lambda'_d d$. Pour $i \in \{1; \dots; r\}$, soit D_i un diviseur effectif non nul sur $(\mathbb{P}^1_K)^d$, de d-degré $(e_{i1}; \dots; e_{id})$.

COROLLAIRE. – *Supposons que les diviseurs $D_1; \dots; D_r$ se coupent proprement et que l'on a $\lambda'_d d \max_i e_{ij} < \sum_{i=1}^r e_{ij}$ pour tout $j \in \{1; \dots; d\}$. Alors $(\mathbb{P}^1_K)^d - D_1 \cup \cdots \cup D_r$ est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

On observe qu'une application directe du corollaire 0.3 de Vojta [16] ne donne ce résultat que pour $r \geq 2d + 1$.

Remarquons que les théorèmes 1.1 et 1.2 s'inscrivent bien dans le cadre de la conjecture de Lang et Vojta, puisque si X est lisse sur K de diviseur canonique $\mathcal{K}_X$ et les D_i sont amples sur X, alors $\mathcal{K}_X + D_1 + \cdots + D_r$ est ample sur X dès que $r \geq d + 2$ (c'est une conséquence du théorème du cône de Mori, cf. exemple 1.5.35 de [10] p. 87).

Les démonstrations reposent sur une extension (théorème 3.3) de travaux de Corvaja-Zannier [3] et de Levin [11], qui donne des conditions géométriques de non-Zariski-densité des points S-entiers, et sur un bon choix (théorème 4.4) de multiplicités associées aux diviseurs D_i.

L'ingrédient arithmétique principal est la version de Vojta [15] du théorème du sous-espace de Schmidt [13] et Schlickewei [12] (c'est un énoncé d'approximation diophantienne qui généralise le théorème de Roth).

Par ailleurs, Vojta [14] a développé un « dictionnaire » entre la géométrie diophantienne et la théorie de Nevanlinna : l'étude des points S-entiers sur les variétés sur K est mise en analogie avec l'étude des courbes entières sur les variétés complexes.

Pour étayer ce dictionnaire, on montre aussi les énoncés qui « correspondent » aux théorèmes 1.1 et 1.2 :

THÉORÈME 1.3. – *Soit X une variété complexe projective de dimension $d \geq 2$. Soient $D_1; \ldots; D_{d\delta}$ des diviseurs effectifs presque amples sur X qui se coupent proprement deux à deux (avec $\delta \geq 2$). On suppose que toute intersection de $\delta + 1$ quelconques d'entre eux est vide. Posons $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_{d\delta}$. Alors Y est Brody quasi-hyperbolique. En particulier, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to Y(\mathbb{C})$ est d'image non Zariski-dense dans Y.*

THÉORÈME 1.4. – *Soit X une variété complexe projective de dimension $d \geq 2$. Soient $D_1; \ldots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls et nefs sur X qui se coupent proprement (avec $r > \lambda'_d d$). Posons $L = \sum_{i=1}^{r} D_i$ et $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_r$. On suppose que le $\mathbb{Q}$-diviseur $L - \lambda'_d d D_i$ est ample pour tout $i \in \{1; \ldots; r\}$. Alors Y est Brody quasi-hyperbolique.*

La section 2.1 décrit les résultats purement géométriques utilisés, qui sont prouvés aux sections 4 et 5. La section 2.2 donne les critères de quasi-hyperbolicité, qui sont démontrés à la section 3.

Je remercie Antoine Chambert-Loir et Christophe Mourougane pour de fructueuses discussions. Je remercie également le rapporteur pour ses suggestions pertinentes.

2. Définitions et énoncés

2.1. Géométrie

Soit K un corps de caractéristique nulle.

Conventions. – On appelle variété sur K tout schéma quasi-projectif et géométriquement intègre sur K. Le mot « diviseur » sous-entend « diviseur de Cartier ».

Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. Lorsque L est un diviseur sur X tel que $h^0(X; L) \geq 1$, on désigne par $\mathbf{B}_L$ le lieu de base de $\Gamma(X; L)$ et par $\Phi_L : X - \mathbf{B}_L \to \mathbb{P}(\Gamma(X; L))$ le morphisme défini par $\Gamma(X; L)$. Pour tout diviseur effectif D sur X, on note 1_D la section globale de $\mathcal{O}_X(D)$ qu'il définit.

Définition. – Un diviseur L sur X est dit *libre* lorsque $\mathbf{B}_L$ est vide.

Définition. – Un diviseur L sur X est dit *gros* lorsque $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n^d} h^0(X; nL) > 0$.

Définition. – Soit L un diviseur gros sur X. On dit que L est *presque ample* lorsqu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que nL soit libre.

Définition. – Un $\mathbb{R}$-diviseur L sur X est dit *nef* lorsque pour tout 1-cycle effectif C sur X, on a $\langle L.C \rangle \geq 0$ (où $\langle L.C \rangle$ désigne le nombre d'intersection).

Définition. – Soient D_1 et D_2 deux diviseurs effectifs sur X. On dit que D_1 et D_2 *se coupent proprement* lorsque $\mathcal{O}_X(-D_1 - D_2) = \mathcal{O}_X(-D_1) \cap \mathcal{O}_X(-D_2)$.

Définition. – Plus généralement, soient $D_1; \ldots; D_r$ des diviseurs effectifs sur X. On dit que $D_1; \ldots; D_r$ *se coupent proprement* lorsque, pour toute partie I non vide de $\{1; \ldots; r\}$, la section globale $(1_{D_i})_{i\in I}$ de $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{O}_X(D_i)$ est régulière (autrement dit, pour tout $x \in \bigcap_{i\in I} D_i$, en notant φ_i une équation locale de D_i en x, les $(\varphi_i)_{i\in I}$ forment une suite régulière de l'anneau local $\mathcal{O}_{X;x}$).

Remarque. – Supposons X de Cohen-Macaulay (par exemple lisse sur K) ; alors d'après le lemme A.7.1 de [7] p. 418, les diviseurs $D_1; \ldots; D_r$ se coupent proprement si et seulement si, pour toute partie I non vide de $\{1; \ldots; r\}$, le fermé $\bigcap_{i\in I} D_i$ est purement de codimension $\#I$ dans X (éventuellement vide).

Soit L un diviseur sur X tel que $h^0(X; L) \geq 1$. Soient $D_1; \ldots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X (avec $r \geq 1$). Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties I non vides de $\{1; \ldots; r\}$ telles que $\bigcap_{i\in I} D_i$ soit non vide. Pour $I \in \mathcal{P}$, $\underline{a} = (a_i)_i \in \mathbb{N}^I$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit le sous-espace vectoriel $V_{I;\underline{a};k}$ de $\Gamma(X; L)$ par

$$V_{I;\underline{a};k} = \sum_{\underline{b}} \Gamma\Big(X; L - \sum_{i\in I} b_i D_i\Big) \text{ où la somme porte sur les } \underline{b} \in \mathbb{N}^I \text{ tels que } \sum_{i\in I} a_i b_i \geq k\,.$$

Définition. – On pose

$$\nu(L; D_1; \ldots; D_r) = \inf_{I\in\mathcal{P}} \inf_{\underline{a}\in\mathbb{N}^I-\{0\}} \frac{\sum_{k\geq 1} \dim V_{I;\underline{a};k}}{h^0(X; L) \sum_{i\in I} a_i}.$$

On démontre à la section 4 le résultat suivant :

Théorème 2.1. – *On suppose $d \geq 2$. Soient $D_1; \ldots; D_r$ des diviseurs effectifs presque amples sur X qui se coupent proprement deux à deux ; supposons que toute intersection de $\delta+1$ quelconques d'entre eux est vide (avec $2 \leq \delta \leq r$). Il existe alors $(m_1; \ldots; m_r) \in \mathbb{N}^{*r}$ tel qu'en posant $L = \sum_{i=1}^r m_i D_i$, on ait* $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \nu(nL; m_1 D_1; \ldots; m_r D_r) > \frac{r}{d\delta}$.

Posons $\lambda_d = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{d}\right)^{d+1}\right] \frac{d}{d+1}$ et $\lambda'_d = \frac{1}{\lambda_d}$. On prouve à la section 5.2 l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2.2. – *Soient $D_1; \dots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls et nefs sur X qui se coupent proprement. On suppose que $L = \sum_{i=1}^r D_i$ est ample. Soit $\theta > 1$ un réel tel que le $\mathbb{R}$-diviseur $L - d\theta D_i$ soit nef pour tout $i \in \{1; \dots; r\}$. On a alors la minoration*

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \nu(nL; D_1; \dots; D_r) \geq \lambda_d \theta.$$

REMARQUE 2.3. – La suite $(\lambda'_d)_{d \geq 2}$ est décroissante (on le voit en écrivant la relation $\lambda_d = \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{d}\right)^d \mathrm{d}t$). En outre, λ_d converge vers $1 - e^{-1}$ lorsque d tend vers $+\infty$.

2.2. Hyperbolicité

Lorsque K est un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K, on note $O_{K;S}$ l'anneau des S-entiers de K, *i.e.* l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x|_v \leq 1$ pour toute place finie $v \notin S$.

Soit K un corps de nombres.

DÉFINITION. – Soient Y une variété sur K, K' une extension finie de K et S un ensemble fini de places de K'. Un ensemble $\mathcal{E} \subset Y(K')$ est dit S-*entier* sur Y lorsqu'il existe un $O_{K';S}$-schéma intègre et quasi-projectif $\mathcal{Y}$ de fibre générique $Y_{K'}$ tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{Y}(O_{K';S})$.

DÉFINITION. – Soient Y une variété sur K et K' une extension finie de K. Un ensemble $\mathcal{E} \subset Y(K')$ est dit *quasi-entier* sur Y lorsqu'il existe un ensemble fini S de places de K' tel que $\mathcal{E}$ soit S-entier sur Y.

DÉFINITION. – Soit Y une variété sur K. On dit que Y est *arithmétiquement quasi-hyperbolique* lorsqu'il existe un fermé $Z \neq Y$ tel que, pour toute extension finie K' de K et tout ensemble quasi-entier $\mathcal{E} \subset Y(K')$ sur Y, l'ensemble $\mathcal{E} - Z(K')$ soit fini.

DÉFINITION. – Soit Y une variété complexe. Une *courbe entière* sur Y est une application holomorphe $f : \mathbb{C} \to Y(\mathbb{C})$ non constante.

DÉFINITION. – Soit Y une variété complexe. On dit que Y est *Brody quasi-hyperbolique* lorsqu'il existe un fermé $Z \neq Y$ tel que pour toute courbe entière f sur Y, on ait $f(\mathbb{C}) \subset Z(\mathbb{C})$.

L'intérêt de la définition de ν réside dans les critères suivants :

THÉORÈME (3.3). – *Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. Soient $D_1; \dots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement deux à deux. Posons $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$. Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose que le diviseur $L = n \sum_{i=1}^r D_i$ est libre et gros sur X et que $\nu(L; D_1; \dots; D_r) > n$. Alors Y est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

THÉORÈME (3.5). – *Soit X une variété complexe projective de dimension $d \geq 1$. Soient $D_1; \ldots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement deux à deux. Posons $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_r$. Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose que le diviseur $L = n \sum_{i=1}^r D_i$ est libre et gros sur X et que $\nu(L; D_1; \ldots; D_r) > n$. Alors Y est Brody quasi-hyperbolique.*

On en déduit le théorème 1.1 — respectivement 1.3 — en appliquant le théorème 2.1 (avec $r = d\delta$) puis le théorème 3.3 — respectivement 3.5 —.

On en déduit de même les théorèmes 1.2 et 1.4 en appliquant le théorème 2.2.

REMARQUE 2.4. – Notons ici $\mathcal{L}$ l'ensemble des bases de $\Gamma(X; L)$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties I non vides de $\{1; \ldots; r\}$ telles que $\bigcap_{i \in I} D_i$ soit non vide, et posons

$$\nu'(L; D_1; \ldots; D_r) = \frac{1}{h^0(X; L)} \inf_{I \in \mathcal{P}} \sup_{\mathcal{B} \in \mathcal{L}} \inf_{i \in I} \sum_{s \in \mathcal{B}} \mu_i(s),$$

où $\mu_i(s)$ désigne le plus grand entier μ tel que le diviseur $\mathrm{div}(s) - \mu D_i$ soit effectif (i.e. « l'ordre d'annulation de s en D_i »). Levin (cf. section 8 de [11]) donne ces résultats de quasi-hyperbolicité lorsque X est lisse et $\nu'(L; D_1; \ldots; D_r) > n$. Les énoncés ci-dessus sont plus généraux, puisqu'un peu d'algèbre linéaire montre que $\nu(L; D_1; \ldots; D_r) \geq \nu'(L; D_1; \ldots; D_r)$ (et X n'est pas supposée lisse).

3. Démonstration des critères

3.1. Rappels

Soit X une variété complexe projective. Soit L un faisceau inversible sur X. On munit L d'une métrique (continue) $\| \;\|$ et on pose $\hat{L} = (L; \| \;\|)$.

Soit f une courbe entière sur X. On définit la *fonction caractéristique* $\mathrm{T}_{\hat{L};f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de f relativement à $\hat{L}$ de la manière suivante :

On choisit une section rationnelle s de L définie et non nulle en $f(0)$. Pour tout réel $r \geq 0$, on pose

$$\mathrm{T}_{\hat{L};f}(r) = \sum_{|z| \leq r} \mu_z(f^* s) \ln \frac{r}{|z|} - \int_0^{2\pi} \ln \|s(f(re^{i\theta}))\| \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} + \ln \|s(f(0))\|,$$

où $\mu_z(f^* s)$ désigne l'ordre de $f^* s$ en $z \in \mathbb{C}$. Cela ne dépend pas du choix de s.

Soient K un corps de nombres et X' une variété projective sur K. Soit L' un faisceau inversible sur X'. On munit L' d'une métrique adélique $(\| \;\|_v)_v$ et on pose $\hat{L}' = (L'; (\| \;\|_v)_v)$ (pour des précisions sur les métriques adéliques, on pourra consulter le paragraphe 1.2 de [18]).

Soient K' une extension finie de K et $P \in X'(K')$. On définit la *hauteur* (normalisée) $\mathrm{h}_{\hat{L}'}(P)$ de P relativement à $\hat{L}'$ de la façon suivante :

On choisit une section rationnelle s' de L' définie et non nulle en P. On pose

$$\mathrm{h}_{\hat{L}'}(P) = -\frac{1}{[K' : \mathbb{Q}]} \sum_v \ln \|s'(P)\|_v,$$

où v parcourt l'ensemble des places de K'. Ce réel ne dépend pas du choix de s'.

3.2. Cas arithmétique

Commençons par un résultat facile d'algèbre linéaire :

LEMME 3.1. – *Soient K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante de parties de V telle que $\mathcal{F}_k = \{0\}$ pour tout k assez grand. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ de V adaptée à la suite $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$, i.e. $\mathcal{B} \cap \mathcal{F}_k$ est une base de* $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_k)$ *pour tout $k \geq 1$.*

Démonstration. – Soit $m \geq 1$ un entier tel que $\mathcal{F}_k = \{0\}$. On pose $\mathcal{B}_m = \varnothing$. On construit par récurrence une suite $(\mathcal{B}_m; \dots; \mathcal{B}_1)$ de parties de V de la manière suivante :

Pour $k \in \{1; \dots; m-1\}$, on complète la partie libre $\mathcal{B}_{k+1}$ en une base $\mathcal{B}_k$ de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_k)$ contenue dans $\mathcal{F}_k$.

Pour finir, on complète $\mathcal{B}_1$ en une base $\mathcal{B}$ de V. □

Soient K un corps de nombres et X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. On va utiliser la version suivante du théorème du sous-espace de Schmidt, Schlickewei et Vojta :

PROPOSITION 3.2. – *Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$ libre et gros. Notons $q = h^0(X; L)$. On munit L d'une métrique adélique $(\|\ \|_v)_v$. Soient $s_1; \dots; s_N$ des sections non nulles engendrant $\Gamma(X; L)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un fermé $Z \neq X$ tel que pour toute extension finie K' de K et tout ensemble fini S de places de K', l'ensemble des points $P \in (X - Z)(K')$ vérifiant*

$$\sum_{v\in S} \max_{J\in\mathcal{L}} \sum_{j\in J} \ln \|s_j(P)\|_v^{-1} \geq (q + q\varepsilon)[K' : \mathbb{Q}]\mathrm{h}_{\hat{L}}(P) \tag{1}$$

est fini, où $\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des parties J de $\{1; \dots; N\}$ telles que $(s_j)_{j\in J}$ soit une base de $\Gamma(X; L)$.

Démonstration. – En posant $V = \Gamma(X; L)$, on a un morphisme $\Phi_L : X \to \mathbb{P}(V)$ génériquement fini. Il existe donc un fermé $Z_1 \neq X$ tel que $\Phi_{L|X-Z_1}$ soit à fibres finies. On applique alors la version de Vojta (cf. théorème 0.3 et reformulation 3.4 de [15]) du théorème du sous-espace :

Il existe une réunion finie H de K-hyperplans de $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_K^{q-1}$ telle que pour toute extension finie K' de K et tout ensemble fini S de places de K', l'ensemble des points $P \in (X - Z_1 \cup \Phi_L^{-1}(H))(K')$ vérifiant (1) est fini. □

REMARQUE. – *Vojta a en fait montré que l'on peut trouver un Z indépendant de ε, mais on n'en aura pas besoin dans la suite.*

On montre ci-dessous une extension d'un résultat de Levin (cf. théorème 8.3A de [11]), lui-même inspiré de travaux de Corvaja et Zannier (cf. théorème principal de [3] p. 707-708) :

THÉORÈME 3.3. – *Soient $D_1; \dots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement deux à deux. Posons $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$. Soit $m \geq 1$ un entier. On suppose que le diviseur $L = m\sum_{i=1}^{r} D_i$ est libre et gros sur X et que $\nu(L; D_1; \dots; D_r) > m$. Alors Y est arithmétiquement quasi-hyperbolique.*

Démonstration. – On procède en deux étapes : dans la première, on construit un fermé $Z \neq X$ candidat à contenir « presque tous les points entiers » ; dans la seconde, on prouve que Y est arithmétiquement quasi-hyperbolique.

Étape 1. – On pose $\varepsilon = \frac{1}{4m}(\nu(L;D_1;\ldots;D_r)-m)$ et $q=h^0(X;L)$, on choisit un entier $c\geq 1$ tel que $h^0(X;L-cD_i)=0$ pour tout $i\in\{1;\ldots;r\}$, et on fixe un entier $b\geq\frac{cr}{m\varepsilon}$. Choisissons aussi une base $\mathcal{B}_0$ de $\Gamma(X;L)$.

Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties I non vides de $\{1;\ldots;r\}$ telles que $\bigcap_{i\in I}D_i$ soit non vide. Soit $I\in\mathcal{P}$. On note Δ_I l'ensemble des $\underline{a}=(a_i)_i\in\mathbb{N}^I$ tels que $\sum_{i\in I}a_i=b$. Soit $\underline{a}\in\Delta_I$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{F}_k=\bigcup_{\underline{b}}\Gamma\Big(X;L-\sum_{i\in I}b_iD_i\Big)$ où la réunion porte sur les $\underline{b}\in\mathbb{N}^I$ tels que $\sum_{i\in I}a_ib_i\geq k$, et on note $V_{I;\underline{a};k}=\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_k)$. Le lemme 3.1 fournit une base $\mathcal{B}_{I;\underline{a}}$ de $\Gamma(X;L)$ adaptée à la suite $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$.

On munit chaque faisceau $\mathcal{O}_X(D_i)$ d'une métrique adélique. Appliquons le théorème du sous-espace (proposition 3.2) avec $\{s_1;\ldots;s_N\}=\mathcal{B}_0\cup\bigcup_{I;\underline{a}}\mathcal{B}_{I;\underline{a}}$ (remarquons que cette réunion est finie puisque $\mathcal{P}$ et les Δ_I le sont) :

Il existe un fermé $Z\neq X$ tel que pour toute extension finie K' de K et tout ensemble fini S de places de K', l'ensemble des points $P\in(X-Z)(K')$ vérifiant l'inégalité (1) est fini.

Étape 2. – Soient K' une extension finie de K et S un ensemble fini de places de K' contenant les places archimédiennes. Soit $\mathcal{E}\subset Y(K')$ un ensemble S-entier sur Y. Raisonnons par l'absurde en supposant $\mathcal{E}-Z(K')$ infini. On choisit une suite injective $(P_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{E}-Z(K')$.

Quitte à extraire, on peut supposer (par compacité) que pour tout $v\in S$, la suite $(P_{nv})_{n\geq 0}$ converge dans $X(K'_v)$ vers un $y_v\in X(K'_v)$.

Pour tout $v\in S$, on note I_v l'ensemble des $i\in\{1;\ldots;r\}$ tels que $y_v\in D_i$. Quitte à extraire de nouveau, on peut supposer que pour tout $v\in S$ tel que I_v soit non vide et tout $i\in I_v$, la suite $\left(\frac{\ln\|1_{D_i}(P_n)\|_v}{\sum_{j\in I_v}\ln\|1_{D_j}(P_n)\|_v}\right)_{n\geq 0}$ converge vers un $t_{vi}\in[0;1]$. Remarquons que l'on a $\sum_{i\in I_v}t_{vi}=1$.

Fait. – *Soit $v\in S$. Il existe une base $(s_{1v};\ldots;s_{qv})$ de $\Gamma(X;L)$ contenue dans $\{s_1;\ldots;s_N\}$ telle que l'on ait la minoration suivante pour tout $n\geq 0$:*

$$-\sum_{k=1}^{q}\ln\|s_{kv}(P_n)\|_v\geq -(q+2q\varepsilon)\ln\|1_L(P_n)\|_v - O(1),\tag{2}$$

où le $O(1)$ est indépendant de n.

Prouvons ce fait. Si I_v est vide, on prend $\{s_{1v};\ldots;s_{qv}\}=\mathcal{B}_0$ et on obtient la minoration (2) en remarquant que $\ln\|1_L(P_n)\|_v=O(1)$ (puisque $y_v\notin L$).

On suppose maintenant I_v non vide. On a donc $I_v\in\mathcal{P}$. Choisissons un $\underline{a}_v=(a_{vi})_i\in\Delta_{I_v}$ tel que $|bt_{vi}-a_{vi}|\leq 1$ pour tout $i\in I_v$. On prend alors $\{s_{1v};\ldots;s_{qv}\}=\mathcal{B}_{I_v;\underline{a}_v}$. Vérifions que ce choix convient.

Soit $s\in\Gamma(X;L)-\{0\}$. Pour tout $i\in\{1;\ldots;r\}$, notons $\mu_i(s)$ le plus grand entier μ tel que le diviseur $\mathrm{div}(s)-\mu D_i$ soit effectif. Puisque les diviseurs D_i se coupent proprement deux à deux, le diviseur $\mathrm{div}(s)-\sum_{i\in I_v}\mu_i(s)D_i$ est encore effectif. Ceci implique

$$-\ln\|s(P_n)\|_v\geq -\sum_{i\in I_v}\mu_i(s)\ln\|1_{D_i}(P_n)\|_v - O(1).$$

En remarquant que $t_{vi} > \frac{a_{vi}}{b} - \frac{2m\varepsilon}{cr}$ et que $\mu_i(s) \leq c$ pour tout $i \in I_v$, on a, par définition des t_{vi} :

$$-\mu_i(s) \ln \|1_{D_i}(P_n)\|_v \geq -\Big(\frac{a_{vi}}{b}\mu_i(s) - \frac{2m\varepsilon}{r}\Big) \sum_{j \in I_v} \ln \|1_{D_j}(P_n)\|_v$$

pour tout n assez grand et tout $i \in I_v$.

On en déduit l'inégalité (pour tout $n \geq 0$)

$$-\ln \|s(P_n)\|_v \geq -\Big(\frac{1}{b}\sum_{i \in I_v} a_{vi}\mu_i(s) - 2m\varepsilon\Big) \sum_{j \in I_v} \ln \|1_{D_j}(P_n)\|_v - O(1).$$

On écrit cette inégalité pour $s = s_{kv}$, puis on somme sur k. En observant que, pour $i \in I_v$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{q} \sum_{i \in I_v} a_{vi}\mu_i(s_{kv}) &= \sum_{\mu \geq 1} \#\Big\{k \in \{1;\ldots;q\} \;\Big|\; \sum_{i \in I_v} a_{vi}\mu_i(s_{kv}) \geq \mu\Big\} \\ &= \sum_{\mu \geq 1} \dim V_{I_v;\underline{a}_v;\mu} \geq \nu(L; D_1;\ldots;D_r)qb = (1+4\varepsilon)qbm,\end{aligned}$$

on trouve alors

$$-\sum_{k=1}^{q} \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq -(q+2q\varepsilon)m \sum_{j \in I_v} \ln \|1_{D_j}(P_n)\|_v - O(1).$$

Le fait énoncé (2) s'en déduit en remarquant que $\ln \|1_{D_j}(P_n)\|_v = O(1)$ pour tout $j \notin I_v$.

Maintenant, l'ensemble $\mathcal{E}$ est S-entier sur Y, donc pour tout $n \geq 0$, on a

$$[K' : \mathbb{Q}]\mathrm{h}_{\hat{L}}(P_n) = -\sum_{v \in S} \ln \|1_L(P_n)\|_v + O(1).$$

En utilisant la minoration (2), on obtient (pour tout $n \geq 0$)

$$-\sum_{v \in S} \sum_{k=1}^{q} \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq (q+2q\varepsilon)[K' : \mathbb{Q}]\mathrm{h}_{\hat{L}}(P_n) - O(1).$$

D'où une contradiction avec (1). □

3.3. Cas analytique

Soit X une variété complexe projective de dimension $d \geq 1$.

PROPOSITION 3.4. – *Soit $L \in \mathrm{Pic}(X)$ libre et gros. Notons $q = h^0(X; L)$. On munit L d'une métrique $\|\ \|$. Soient $s_1;\ldots;s_N$ des sections non nulles engendrant $\Gamma(X; L)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors un fermé $Z \neq X$ tel que pour toute courbe entière f sur X d'image non contenue dans $Z(\mathbb{C})$, l'ensemble des réels $r \geq 0$ vérifiant*

$$(1') \qquad \int_0^{2\pi} \max_{J \in \mathcal{L}} \sum_{j \in J} \ln \|s_j(f(re^{i\theta}))\|^{-1} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \geq (q+q\varepsilon)\mathrm{T}_{\hat{L};f}(r)$$

est de mesure de Lebesgue finie, où $\mathcal{L}$ désigne l'ensemble des parties J de $\{1;\ldots;N\}$ telles que $(s_j)_{j \in J}$ soit une base de $\Gamma(X; L)$.

Démonstration. – En posant $V = \Gamma(X; L)$, on a un morphisme $\Phi_L : X \to \mathbb{P}(V)$ génériquement fini. Il existe donc un fermé $Z_1 \neq X$ tel que $\Phi_{L|X-Z_1}$ soit à fibres finies. On applique alors la version de Vojta (cf. théorème 2 de [17]) du théorème de Cartan :

Il existe une réunion finie H d'hyperplans de $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{q-1}$ telle que pour toute courbe entière d'image non contenue dans $Z_1 \cup \Phi_L^{-1}(H)$, l'ensemble des réels $r \geq 0$ vérifiant $(1')$ est de mesure de Lebesgue finie. □

THÉORÈME 3.5. – *Soient $D_1; \ldots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement deux à deux. Posons $Y = X - D_1 \cup \cdots \cup D_r$. Soit $m \geq 1$ un entier. On suppose que le diviseur $L = m \sum_{i=1}^{r} D_i$ est libre et gros sur X et que $\nu(L; D_1; \ldots; D_r) > m$. Alors Y est Brody quasi-hyperbolique.*

Démonstration. – On procède en deux étapes : dans la première, on construit un fermé $Z \neq X$ candidat à contenir toutes les courbes entières ; dans la seconde, on prouve que Y est Brody quasi-hyperbolique.

Étape 1. – On reprend la démonstration du théorème 3.3, jusqu'à la construction des bases $\mathcal{B}_{I;\underline{a}}$. On munit chaque faisceau $\mathcal{O}_X(D_i)$ d'une métrique $\| \; \|$. Appliquons le théorème de Cartan et Vojta (proposition 3.4) avec $\{s_1; \ldots; s_N\} = \mathcal{B}_0 \cup \bigcup_{I;\underline{a}} \mathcal{B}_{I;\underline{a}}$:

Il existe un fermé $Z \neq X$ tel que pour toute courbe entière f sur X d'image non contenue dans $Z(\mathbb{C})$, l'ensemble des réels $r \geq 0$ vérifiant l'inégalité $(1')$ est de mesure de Lebesgue finie.

Étape 2. – Soit f une courbe entière sur Y. Raisonnons par l'absurde en supposant $f(\mathbb{C}) \not\subset Z(\mathbb{C})$.

Par compacité de $X(\mathbb{C})$, il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $y \in X(\mathbb{C})$, l'ensemble d'indices $I_y = \{i \in \{1; \ldots; r\} \mid -\ln \|1_{D_i}(y)\| \geq M\}$ appartienne à $\mathcal{P} \cup \{\varnothing\}$ (il suffit d'extraire du recouvrement ouvert $\left(\left\{y \in X(\mathbb{C}) \,\middle|\, \exists I \in \mathcal{P} \cup \{\varnothing\} \; \forall i \notin I \; -\ln \|1_{D_i}(y)\| < M\right\}\right)_{M>0}$ un recouvrement fini).

FAIT. – *Soit $y \in Y(\mathbb{C})$. Il existe une base $(s_{1y}; \ldots; s_{qy})$ de $\Gamma(X; L)$ contenue dans $\{s_1; \ldots; s_N\}$ telle que l'on ait la minoration suivante :*

$$(2') \qquad -\sum_{k=1}^{q} \ln \|s_{ky}(y)\| \geq -(q + 3q\varepsilon) \ln \|1_L(y)\| - O(1),$$

où le $O(1)$ est indépendant de y.

Prouvons ce fait. Si I_y est vide, on prend $\{s_{1y}; \ldots; s_{qy}\} = \mathcal{B}_0$ et on obtient la minoration $(2')$ en remarquant que $-\ln \|1_L(y)\| < Mr$.

On suppose maintenant I_y non vide. On a donc $I_y \in \mathcal{P}$. Pour tout $i \in I_y$, on pose $t_{yi} = \frac{\ln \|1_{D_i}(y)\|}{\sum_{j \in I_y} \ln \|1_{D_j}(y)\|}$. Remarquons que l'on a $\sum_{i \in I_y} t_{yi} = 1$. Choisissons un $\underline{a}_y = (a_{yi})_i \in \Delta_{I_y}$ tel que $|bt_{yi} - a_{yi}| \leq 1$ pour tout $i \in I_y$. On prend alors $\{s_{1y}; \ldots; s_{qy}\} = \mathcal{B}_{I_y;\underline{a}_y}$. Vérifions que ce choix convient.

Soit $s \in \Gamma(X;L) - \{0\}$. Puisque les diviseurs D_i se coupent proprement deux à deux, le diviseur $\operatorname{div}(s) - \sum_{i\in I_y} \mu_i(s) D_i$ est effectif. Ceci implique

$$-\ln \|s(y)\| \geq -\sum_{i\in I_y} \mu_i(s) \ln \|1_{D_i}(y)\| - O(1).$$

En remarquant que $t_{yi} \geq \frac{a_{yi}}{b} - \frac{m\varepsilon}{cr}$ et que $\mu_i(s) \leq c$ pour tout $i \in I_y$, on a, par définition des t_{yi} :

$$-\mu_i(s) \ln \|1_{D_i}(y)\| \geq -\Big(\frac{a_{yi}}{b}\mu_i(s) - \frac{m\varepsilon}{r}\Big) \sum_{j\in I_y} \ln \|1_{D_j}(y)\|$$

pour tout $i \in I_y$.

On en déduit l'inégalité

$$-\ln \|s(y)\| \geq -\Big(\frac{1}{b}\sum_{i\in I_y} a_{yi}\mu_i(s) - m\varepsilon\Big) \sum_{j\in I_y} \ln \|1_{D_j}(y)\| - O(1).$$

On écrit cette inégalité pour $s = s_{ky}$, puis on somme sur k. En observant que pour $i \in I_y$, on a

$$\sum_{k=1}^{q}\sum_{i\in I_y} a_{yi}\mu_i(s_{ky}) \geq \nu(L; D_1; \ldots; D_r) qb = (1+4\varepsilon) qbm$$

comme dans la démonstration du théorème 3.3, on trouve alors

$$-\sum_{k=1}^{q} \ln \|s_{ky}(y)\| \geq -(q+3q\varepsilon)m \sum_{j\in I_y} \ln \|1_{D_j}(y)\| - O(1).$$

Le fait énoncé $(2')$ s'en déduit en remarquant que $-\ln \|1_{D_j}(y)\| < M$ pour tout $j \notin I_y$.

Maintenant f est une courbe entière sur Y, donc pour tout $r \geq 0$, on a

$$\mathrm{T}_{\hat{L};f}(r) = -\int_0^{2\pi} \ln \|1_L(f(re^{i\theta}))\| \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} + O(1).$$

En utilisant la minoration $(2')$, on obtient (pour tout $r \geq 0$)

$$\int_0^{2\pi} \max_{J\in\mathcal{L}} \sum_{k\in J} \ln \|s_k(f(re^{i\theta}))\|^{-1} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} \geq (q+3q\varepsilon)\mathrm{T}_{\hat{L};f}(r) - O(1).$$

D'où une contradiction avec $(1')$ (puisque $\mathrm{T}_{\hat{L};f}(r)$ tend vers $+\infty$ lorsque r tend vers $+\infty$). □

4. Démonstration du théorème 2.1

Soient K un corps de caractéristique nulle et X une variété projective sur K de dimension $d \geq 2$. Pour tous diviseurs $L_1; \ldots; L_d$ sur X, on désigne par $\langle L_1 \cdots L_d \rangle$ leur nombre d'intersection. Lorsque L est un diviseur sur X tel que $q = h^0(X;L) \geq 1$ et E un diviseur effectif non nul sur X, on pose $\alpha(L;E) = \frac{1}{q}\sum_{k\geq 1} h^0(X; L - kE)$.

Proposition 4.1. – *Soit L un diviseur sur X tel que $q = h^0(X;L) \geq 1$. Soient $D_1;\ldots;D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement deux à deux ; supposons que toute intersection de $\delta+1$ quelconques d'entre eux est vide (avec $2 \leq \delta \leq r$). On a alors*

$$\nu(L;D_1;\ldots;D_r) \geq \frac{2}{\delta}\inf_i \alpha(L;D_i).$$

Démonstration. – On utilise les notations de la section 2.1. Lorsque x est un réel, on désigne par $\lceil x \rceil$ le plus petit entier $\geq x$. Soient $I \in \mathcal{P}$ et $\underline{a} \in \mathbb{N}^I - \{0\}$. Quitte à réduire I, on peut supposer que $a_i \geq 1$ pour tout $i \in I$. Observons que $\#I \leq \delta$.

Si I est un singleton $\{i\}$, alors $V_{I;\underline{a};k} = \Gamma\Big(X; L - \Big\lceil \frac{k}{a_i} \Big\rceil D_i\Big)$, donc on a bien

$$\sum_{k\geq 1} V_{I;\underline{a};k} = a_i \sum_{k\geq 1} h^0(X; L - kD_i) \geq a_i q \frac{2}{\delta}\inf_j \alpha(L;D_j).$$

On suppose maintenant $\#I \geq 2$. On choisit deux indices $j < l$ dans I tels que $a_l \geq a_j \geq a_i$ pour tout $i \in I - \{j;l\}$. Pour $(b_1;b_2) \in \mathbb{N}^2$, on pose $W(b_1;b_2) = \Gamma(X; L - b_1 D_j - b_2 D_l)$.

Soit k un entier ≥ 1. L'espace vectoriel $V_{I;\underline{a};k}$ contient alors le sous-espace

$$V'_k = W\Big(0; \Big\lceil \frac{k}{a_l} \Big\rceil\Big) + \sum_{b=0}^{\lceil k/a_l \rceil - 1} W\Big(\Big\lceil \frac{k - a_l b}{a_j} \Big\rceil; b\Big).$$

Puisque les diviseurs D_j et D_l se coupent proprement, on a l'égalité suivante pour tout $b' \in \{0;\ldots;\lceil k/a_l \rceil - 1\}$:

$$W\Big(\Big\lceil \frac{k - a_l b'}{a_j} \Big\rceil; b'\Big) \bigcap \Big[W\Big(0; \Big\lceil \frac{k}{a_l} \Big\rceil\Big) + \sum_{b=b'+1}^{\lceil k/a_l \rceil - 1} W\Big(\Big\lceil \frac{k - a_l b}{a_j} \Big\rceil; b\Big)\Big] = W\Big(\Big\lceil \frac{k - a_l b'}{a_j} \Big\rceil; b'+1\Big).$$

En utilisant $\lceil k/a_l \rceil$ fois la formule $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$, on obtient que la dimension de V'_k vaut

$$\dim W\Big(0; \Big\lceil \frac{k}{a_l} \Big\rceil\Big) + \sum_{b=0}^{\lceil k/a_l \rceil - 1} \Big[\dim W\Big(\Big\lceil \frac{k - a_l b}{a_j} \Big\rceil; b\Big) - \dim W\Big(\Big\lceil \frac{k - a_l b}{a_j} \Big\rceil; b+1\Big)\Big].$$

Maintenant, on somme sur k l'égalité précédente. Après simplifications, on trouve

$$\sum_{k\geq 1} \dim V'_k = a_l \sum_{k\geq 1} h^0(X; L - kD_l) + a_j \sum_{k\geq 1} h^0(X; L - kD_j).$$

On en conclut la minoration

$$\sum_{k\geq 1} \dim V_{I;\underline{a};k} \geq \sum_{k\geq 1} \dim V'_k \geq (a_j + a_l) q \inf_i \alpha(L;D_i) \geq \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big) q \frac{2}{\delta} \inf_j \alpha(L;D_j).$$

D'où le résultat. □

On aura besoin dans la suite d'une variante des « inégalités de Morse holomorphes » (cf. [4] §12 et [1]) :

LEMME 4.2. – *Soient E un diviseur libre et gros sur X et L un diviseur sur X tel que $L-E$ soit nef. Soit β un réel >0. Pour tout couple d'entiers $(n;k)$ vérifiant $1\leq k\leq \beta n$, on a alors la minoration*

$$h^0(X;nL-kE)\geq \frac{\langle L^d\rangle}{d!}n^d-\frac{\langle L^{d-1}E\rangle}{(d-1)!}n^{d-1}k+\frac{d-1}{d!}\langle L^{d-2}E^2\rangle n^{d-2}\min(k^2;n^2)-O(n^{d-1}),$$

où le O ne dépend pas de $(n;k)$.

Démonstration. – Les O apparaissant dans cette preuve dépendent de $(K;X;E;L;\beta)$ mais pas de $(n;k)$. On a deux cas.

Cas $k\leq n$. – La formule de Hirzebruch-Riemann-Roch donne que $\chi(X;nL-kE)$ est une fonction polynomiale en $(n;k)$ dont on peut expliciter la composante homogène dominante :

Pour tout $(n;k)$ tel que $1\leq k\leq n$, on a $\chi(X;nL-kE)=\frac{1}{d!}\langle (nL-kE)^d\rangle+O(n^{d-1})$.

Par ailleurs, d'après le théorème 1.4.40 de [10] p. 69 (ou plutôt d'après sa démonstration), on a $h^i(X;nL-kE)=O(n^{d-i})$ pour tout $i\geq 1$, puisque L et $L-E$ sont nefs. On a en particulier $h^0(X;nL-kE)=\frac{1}{d!}\langle (nL-kE)^d\rangle+O(n^{d-1})$.

Or un calcul montre (par multilinéarité) la formule

$$\langle (nL-kE)^d\rangle=\langle L^d\rangle n^d-d\langle L^{d-1}E\rangle n^{d-1}k+\sum_{i=2}^{d}(i-1)\langle L^{i-2}(nL-kE)^{d-i}E^2\rangle n^{i-2}k^2$$

(en effet, on l'obtient en écrivant la relation

$$\langle L^{d-1}E\rangle n^{d-1}k-\langle L^{j-1}(nL-kE)^{d-j}E\rangle n^{j-1}k=\sum_{i=j+1}^{d}\langle L^{i-2}(nL-kE)^{d-i}E^2\rangle n^{i-2}k^2$$

et en la sommant sur j).

L'inégalité de l'énoncé s'en déduit facilement : les diviseurs L, $nL-kE$ et E sont nefs, donc on a $\langle L^{i-2}(nL-kE)^{d-i}E^2\rangle\geq 0$ pour tout $i\in\{2;\dots;d-1\}$.

Cas $k>n$. – D'après le théorème de Bertini (cf. corollaire 6.11 de [8] p. 89), il existe $s\in\Gamma(X;E)-\{0\}$ tel que $Z=\mathrm{div}(s)$ soit géométriquement intègre sur K.

Soit i un entier tel que $n\leq i\leq\beta n$. On a la suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules suivante :

$$0\to\mathcal{O}_X(nL-(i+1)E)\to\mathcal{O}_X(nL-iE)\to\mathcal{O}_X(nL-iE)_{|Z}\to 0.$$

On en déduit une suite exacte en cohomologie qui fournit l'inégalité

$$h^0(X;nL-(i+1)E)\geq h^0(X;nL-iE)-h^0(Z;(nL-iE)_{|Z}).$$

En utilisant la majoration

$$h^0(Z;(nL-iE)_{|Z})\leq h^0(Z;nL_{|Z})=\frac{\langle L^{d-1}E\rangle}{(d-1)!}n^{d-1}+O(n^{d-2})$$

(obtenue par Hirzebruch-Riemann-Roch), on trouve

$$\begin{aligned}h^0(X;nL-kE)&\geq h^0(X;nL-nE)-\sum_{i=n}^{k-1}h^0(Z;(nL-iE)_{|Z})\\&\geq \tfrac{\langle L^d\rangle}{d!}n^d-\tfrac{\langle L^{d-1}E\rangle}{(d-1)!}n^{d-1}k+\tfrac{d-1}{d!}\langle L^{d-2}E^2\rangle n^d-O(n^{d-1})\end{aligned}$$

(la minoration de $h^0(X;nL-nE)$ est donnée par le premier cas). D'où le résultat. □

REMARQUE. – *La démonstration fournit en fait une minoration de $h^0(X; nL - kE) - h^1(X; nL - kE)$.*

On note ici $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ l'application continue définie par $g(\beta) = \frac{\beta^3}{3}$ si $\beta \leq 1$ et $g(\beta) = \beta - \frac{2}{3}$ si $\beta \geq 1$.

COROLLAIRE 4.3. – *Soient E un diviseur effectif libre et gros sur X et L un diviseur sur X tel que $L - E$ soit nef. On a alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\alpha(nL; E) \geq \frac{\langle L^d\rangle}{2d\langle L^{d-1}E\rangle} + (d-1)\frac{\langle L^{d-2}E^2\rangle}{\langle L^d\rangle} g\Big(\frac{\langle L^d\rangle}{d\langle L^{d-1}E\rangle}\Big).$$

Démonstration. – On pose $\beta = \frac{\langle L^d\rangle}{d\langle L^{d-1}E\rangle}$ et $M = (d-1)\langle L^{d-2}E^2\rangle$. Grâce au lemme 4.2, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1} h^0(X; nL - kE) &\geq \sum_{k=1}^{\lfloor \beta n\rfloor}\Big(\frac{\langle L^d\rangle}{d!}n^d - \frac{\langle L^{d-1}E\rangle}{(d-1)!}n^{d-1}k + \frac{M}{d!}n^{d-2}\min(k^2; n^2)\Big) - O(n^d)\\ &= \Big(\tfrac{\langle L^d\rangle}{d!}\beta - \tfrac{\langle L^{d-1}E\rangle}{(d-1)!}\tfrac{\beta^2}{2} + \tfrac{M}{d!}g(\beta)\Big)n^{d+1} - O(n^d).\end{aligned}$$

D'où la minoration $\alpha(nL; E) \geq \Big(\frac{\beta}{2} + \frac{M}{\langle L^d\rangle}g(\beta)\Big)n - O(1)$. □

Montrons maintenant le résultat principal de cette section :

THÉORÈME 4.4. – *Soient $D_1; \ldots; D_r$ des diviseurs effectifs presque amples sur X. Il existe alors des entiers $m_1; \ldots; m_r$ tels qu'en posant $L = \sum_{i=1}^r m_i D_i$, on ait*

$$m_i \geq 1 \textit{ et } \liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\alpha(nL; m_iD_i) > \frac{r}{2d} \textit{ pour tout } i \in \{1; \ldots; r\}.$$

Démonstration. – On pose ici $\Delta = \{(t_1; \ldots; t_r) \in \mathbb{R}_+^r \mid t_1 + \cdots + t_r = 1\}$. Pour tout $t = (t_1; \ldots; t_r) \in \Delta$, on désigne par L_t le $\mathbb{R}$-diviseur $L_t = \sum_{j=1}^r t_j D_j$ et on pose $\phi(t) = \Big(\sum_{i=1}^r \frac{1}{\langle L_t^{d-1}D_i\rangle}\Big)^{-1}$.

On note $f : \Delta \to \Delta$ l'application continue définie par $f(t) = \Big(\frac{\phi(t)}{\langle L_t^{d-1}D_1\rangle}; \ldots; \frac{\phi(t)}{\langle L_t^{d-1}D_r\rangle}\Big)$ pour tout $t \in \Delta$. D'après le théorème de Brouwer, f admet un point fixe $x = (x_1; \ldots; x_r)$. On a alors $\phi(x) = \langle L_x^{d-1}D_i\rangle x_i$ pour tout $i \in \{1; \ldots; r\}$, donc $\phi(x)r = \langle L_x^d\rangle$.

On en déduit l'inégalité

$$\frac{\langle L_x^d\rangle}{2d\langle L_x^{d-1}D_i\rangle x_i} + (d-1)\frac{\langle L_x^{d-2}D_i^2\rangle x_i^2}{\langle L_x^d\rangle} g\Big(\frac{\langle L_x^d\rangle}{d\langle L_x^{d-1}D_i\rangle x_i}\Big) > \frac{r}{2d} \text{ pour tout } i \in \{1; \ldots; r\}.$$

On approche x par un $y \in \mathbb{Q}_+^{*r} \cap \Delta$ de la forme $y = \Big(\frac{m_1}{m}; \ldots; \frac{m_r}{m}\Big)$ de telle sorte que l'inégalité précédente soit encore valable avec y au lieu de x, et on conclut en appliquant le corollaire 4.3. □

On en déduit le théorème 2.1 en appliquant la proposition 4.1.

5. Géométrie bis

5.1. Préliminaires

Soient r et m des entiers ≥ 1. On pose $\Delta = \{0; \dots; m\}^r$. On munit Δ de l'ordre lexicographique. Notons $\underline{m} = (m; \dots; m)$ le plus grand élément de Δ. Pour tout $\underline{b} = (b_1; \dots; b_r) \in \Delta$, on désigne par $J_{\underline{b}}$ l'ensemble des $i \in \{1; \dots; r\}$ tels que $b_i < m$.

Commençons par la variante suivante du lemme 2.2 de [2] :

LEMME 5.1. – *Soit A un anneau local. Soit $(\varphi_1; \dots; \varphi_r)$ une suite régulière de A. Pour tout $\underline{b} \in \Delta$, on a alors l'inclusion d'idéaux*

$$(\varphi_1^{b_1} \cdots \varphi_r^{b_r} A) \cap \Big(\sum_{\underline{c} > \underline{b}} \varphi_1^{c_1} \cdots \varphi_r^{c_r} A\Big) \subset \sum_{j \in J_{\underline{b}}} \varphi_1^{b_1} \cdots \varphi_r^{b_r} \varphi_j A.$$

Démonstration. – On raisonne par récurrence sur r. Si $r = 1$, alors l'inclusion est évidente. Supposons $r \geq 2$ et le résultat au cran $r-1$. Posons $\Delta' = \{0; \dots; m\}^{r-1}$ et $\underline{b}' = (b_2; \dots; b_r)$. Soit $x \in (\varphi_1^{b_1} \cdots \varphi_r^{b_r} A) \cap \Big(\sum_{\underline{c} > \underline{b}} \varphi_1^{c_1} \cdots \varphi_r^{c_r} A\Big)$. On a deux cas.

Cas $b_1 = m$. – L'élément x s'écrit $x = \varphi_1^m y = \sum_{\underline{c}' > \underline{b}'} \varphi_1^m a_{\underline{c}'}$ avec un $y \in \varphi_2^{b_2} \cdots \varphi_r^{b_r} A$ et des $a_{\underline{c}'} \in \varphi_2^{c_2} \cdots \varphi_r^{c_r} A$. En simplifiant par φ_1^m, on obtient que y appartient à $\sum_{\underline{c}' > \underline{b}'} \varphi_2^{c_2} \cdots \varphi_r^{c_r} A$. Or $(\varphi_2; \dots; \varphi_r)$ est une suite régulière de A, donc y est un élément de $\sum_{j \in J_{\underline{b}}} \varphi_2^{b_2} \cdots \varphi_r^{b_r} \varphi_j A$ par hypothèse de récurrence.

Cas $b_1 < m$. – L'élément x s'écrit $x = \varphi_1^{b_1} y = \varphi_1^{b_1+1} z + \sum_{\underline{c}' > \underline{b}'} \varphi_1^{b_1} a_{\underline{c}'}$ avec un $y \in \varphi_2^{b_2} \cdots \varphi_r^{b_r} A$, un $z \in A$ et des $a_{\underline{c}'} \in \varphi_2^{c_2} \cdots \varphi_r^{c_r} A$. On écrit $y = \varphi_2^{b_2} \cdots \varphi_r^{b_r} w$ avec $w \in A$. On simplifie par $\varphi_1^{b_1}$ puis on réduit modulo φ_1 ; on trouve ainsi dans $A' = A/\varphi_1 A$ l'égalité $\bar{y} = \sum_{\underline{c}' > \underline{b}'} \bar{a_{\underline{c}'}}$.

On en déduit que $\bar{y}$ appartient à $(\bar{\varphi_2}^{b_2} \cdots \bar{\varphi_r}^{b_r} A') \cap \Big(\sum_{\underline{c}' > \underline{b}'} \bar{\varphi_2}^{c_2} \cdots \bar{\varphi_r}^{c_r} A'\Big)$. Or $(\bar{\varphi_2}; \dots; \bar{\varphi_r})$ est une suite régulière de A', donc $\bar{y}$ est un élément de $\sum_{j \in J_{\underline{b}} - \{1\}} \bar{\varphi_2}^{b_2} \cdots \bar{\varphi_r}^{b_r} \bar{\varphi_j} A'$ par hypothèse de récurrence. En simplifiant par $\bar{\varphi_2}^{b_2} \cdots \bar{\varphi_r}^{b_r}$, on obtient que $\bar{w}$ est dans $\sum_{j \in J_{\underline{b}} - \{1\}} \bar{\varphi_j} A'$. On en conclut que w appartient à $\sum_{j \in J_{\underline{b}}} \varphi_j A$.

D'où le résultat. □

Soient K un corps de caractéristique nulle et X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$.

DÉFINITION. – *Un $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{C}$ sur X est dit* acyclique *lorsque $h^i(X; \mathcal{C}) = 0$ pour tout $i \geq 1$.*

Soit L un diviseur sur X tel que $q = h^0(X; L) \geq 1$. Soient $D_1; \dots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement.

Pour tout $\underline{b} \in \Delta$, on pose $\mathcal{L}_{\underline{b}} = \mathcal{O}_X\Big(L - \sum_{i=1}^r b_i D_i\Big)$. Pour $\underline{b} \in \Delta$, on définit le sous-module $\mathcal{C}_{\underline{b}}$ de $\mathcal{L}_{\underline{b}}$ par

$$\mathcal{C}_{\underline{b}} = \sum_{j \in J_{\underline{b}}} \mathcal{O}_X\Big(L - D_j - \sum_{i=1}^r b_i D_i\Big).$$

Soit $(a_1;\dots;a_r)\in\mathbb{N}^r$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on note V_k le sous-espace de $\Gamma(X;L)$ défini par

$$V_k=\sum_{\underline{b}}\Gamma(X;\mathcal{L}_{\underline{b}})\text{ où la somme porte sur les }\underline{b}\in\mathbb{N}^r\text{ tels que }\sum_{i=1}^r a_ib_i\geq k\,.$$

LEMME 5.2. – *Avec ces notations, on a la minoration suivante :*

$$\sum_{k\geq 1}\dim V_k\geq\sum_{i=1}^r a_i\sum_{\underline{b}\in\Delta}\Big[h^0(X;\mathcal{L}_{\underline{b}})-h^0(X;\mathcal{C}_{\underline{b}})\Big]b_i.$$

Démonstration. – Soit k un entier tel que $1\leq k\leq\sum_{i=1}^r a_im$. Notons $\mathcal{D}_k$ l'ensemble des $\underline{b}\in\Delta$ tels que $\sum_{i=1}^r a_ib_i\geq k$. L'espace vectoriel V_k contient alors le sous-espace $V_k'=\sum_{\underline{b}\in\mathcal{D}_k}\Gamma(X;\mathcal{L}_{\underline{b}})$.

Soit $\underline{b}\in\mathcal{D}_k-\{\underline{m}\}$. Le lemme 5.1 fournit l'inclusion de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{L}_{\underline{b}}\cap\sum_{\underline{c}>\underline{b}}\mathcal{L}_{\underline{c}}\subset\mathcal{C}_{\underline{b}}$, puisque les diviseurs $D_1;\dots;D_r$ se coupent proprement. On a en particulier l'inclusion d'espaces vectoriels

$$\Gamma(X;\mathcal{L}_{\underline{b}})\cap\sum_{\underline{c}>\underline{b}}\Gamma(X;\mathcal{L}_{\underline{c}})\subset\Gamma(X;\mathcal{C}_{\underline{b}}).$$

En utilisant $\#\mathcal{D}_k-1$ fois la formule $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim W_1\cap W_2$, on trouve l'inégalité

$$\dim V_k'\geq h^0(X;\mathcal{L}_{\underline{m}})+\sum_{\underline{b}\in\mathcal{D}_k-\{\underline{m}\}}\Big[h^0(X;\mathcal{L}_{\underline{b}})-h^0(X;\mathcal{C}_{\underline{b}})\Big].$$

On obtient le résultat en sommant sur k cette inégalité. □

PROPOSITION 5.3. – *On suppose de plus que $\mathcal{L}_{\underline{b}}$ est acyclique pour tout $\underline{b}\in\Delta$. On a alors*

$$\sum_{k\geq 1}\dim V_k\geq\sum_{i=1}^r a_i\sum_{k=1}^m h^0(X;L-kD_i).$$

On a en particulier $\nu(L;D_1;\dots;D_r)\geq\frac{1}{q}\inf_i\sum_{k=1}^m h^0(X;L-kD_i)$.

Démonstration. – Soit $\underline{b}\in\Delta-\{\underline{m}\}$. Pour toute partie I de $J_{\underline{b}}$, posons ici

$$\mathcal{L}_{\underline{b};I}=\mathcal{O}_X\Big(L-\sum_{j\in J_{\underline{b}}}D_j-\sum_{i=1}^r b_iD_i\Big).$$

On pose aussi $p=\#J_{\underline{b}}$ et $\mathcal{E}_{\underline{b}}=\bigoplus_{j\in J_{\underline{b}}}\mathcal{L}_{\underline{b};\{j\}}$.

Les diviseurs $(D_j)_{j\in J_{\underline{b}}}$ se coupent proprement, donc on a la suite exacte de Koszul suivante (cf. [7] p. 431) :

$$0\to\Lambda^p\mathcal{E}_{\underline{b}}\to\cdots\to\Lambda^1\mathcal{E}_{\underline{b}}\to\mathcal{C}_{\underline{b}}\to 0.$$

On remarque que $\Lambda^j\mathcal{E}_{\underline{b}}=\bigoplus_{\#I=j}\mathcal{L}_{\underline{b};I}$ (qui est en particulier acyclique) pour tout $j\in\{1;\dots;p\}$. La suite de Koszul précédente induit donc par acyclicité une suite exacte en image directe :

$$0\to\Gamma(X;\Lambda^p\mathcal{E}_{\underline{b}})\to\cdots\to\Gamma(X;\Lambda^1\mathcal{E}_{\underline{b}})\to\Gamma(X;\mathcal{C}_{\underline{b}})\to 0.$$

On en déduit la relation

$$h^0(X;\mathcal{L}_{\underline{b}})-h^0(X;\mathcal{C}_{\underline{b}})=\sum_{I\subset J_{\underline{b}}}(-1)^{\#I}h^0(X;\mathcal{L}_{\underline{b};I}).$$

Maintenant, on fixe $i \in \{1; \ldots; r\}$ et $c \in \{0; \ldots; m\}$, et on somme sur l'ensemble Δ'_c des $\underline{b} \in \Delta$ tels que $b_i = c$. Un réarrangement des termes permet de simplifier et montre que :

$$\sum_{\underline{b} \in \Delta'_c} \sum_{I \subset J_{\underline{b}}} (-1)^{\# I} h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{b};I}) = \begin{cases} h^0(X; L - cD_i) - h^0(X; L - (c+1)D_i) & \text{si } c < m; \\ h^0(X; L - mD_i) & \text{si } c = m. \end{cases}$$

(En effet, si $p' = \#\{j \neq i \mid b_j \geq 1\} \geq 1$, alors le terme $h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{b}})$ apparaît $2^{p'-1}$ fois avec le signe plus et $2^{p'-1}$ fois avec le signe moins ; de même avec le terme $h^0(X; \mathcal{L}_{\underline{b};\{i\}})$ dans le cas $c < m$).

On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{b} \in \Delta} \Big[h^0(\mathcal{L}_{\underline{b}}) - h^0(\mathcal{C}_{\underline{b}}) \Big] b_i &= h^0(L - mD_i) m + \sum_{c=0}^{m-1} \Big[h^0(L - cD_i) - h^0(L - (c+1)D_i) \Big] c \\ &= \sum_{k=1}^{m} h^0(X; L - kD_i). \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le lemme 5.2. □

5.2. Démonstration du théorème 2.2

Soient K un corps de caractéristique nulle et X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. Soient $D_1; \ldots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement (avec $r \geq 1$). Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties I non vides de $\{1; \ldots; r\}$ telles que $\bigcap_{i \in I} D_i$ soit non vide.

Théorème 5.4. – *Soit L un diviseur ample sur X. On suppose que D_i est nef pour tout $i \in \{1; \ldots; r\}$. Soit $\theta > 1$ un réel tel que le $\mathbb{R}$-diviseur $L - \theta \sum_{i \in I} D_i$ soit nef pour tout $I \in \mathcal{P}$. On a alors l'inégalité*

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \nu(nL; D_1; \ldots; D_r) \geq \frac{\theta}{(d+1)\langle L^d \rangle} \inf_i \sum_{j=0}^{d} \langle L^{d-j}(L - \theta D_i)^j \rangle.$$

Démonstration. – D'après le théorème d'annulation de Fujita (cf. théorème 1.4.35 de [10] p. 66), il existe $n_0 \geq 1$ tel que $n_0 L + N$ soit acyclique pour tout $N \in \mathrm{Pic}(X)$ nef.

On pose $n' = \lfloor (n - n_0)\theta \rfloor$ pour tout $n > n_0$. En appliquant la proposition 5.3 (avec $m = n'$), on obtient (pour tout $n > n_0$)

$$\nu(nL; D_1; \ldots; D_r) \geq \frac{1}{h^0(X; nL)} \inf_i \sum_{k=1}^{n'} h^0(X; nL - kD_i).$$

Soit $i \in \{1; \ldots; r\}$. Grâce à la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n'} h^0(X; nL - kD_i) &= \frac{1}{d!}\sum_{k=1}^{n'}\Big[\big\langle (nL-kD_i)^d\big\rangle + O(n^{d-1})\Big]\\ &= \frac{1}{d!}\sum_{j=0}^{d}\sum_{k=1}^{n'} \mathrm{C}_d^j \big\langle L^{d-j}D_i^j\big\rangle n^{d-j}(-k)^j + O(n^d)\\ &= \frac{1}{d!}\sum_{j=0}^{d} \mathrm{C}_d^j \big\langle L^{d-j}D_i^j\big\rangle \frac{(-1)^j}{j+1}\theta^{j+1}n^{d+1} + O(n^d).\end{aligned}$$

Or un calcul montre la formule

$$\sum_{j=0}^{d} \mathrm{C}_d^j \big\langle L^{d-j}D_i^j\big\rangle \frac{(-1)^j}{j+1}\theta^{j+1} = \frac{\theta}{d+1}\sum_{j=0}^{d}\big\langle L^{d-j}(L-\theta D_i)^j\big\rangle.$$

D'où l'inégalité de l'énoncé. □

Corollaire 5.5. – *Soit L un diviseur ample sur X. On suppose que D_i est nef pour tout $i \in \{1; \ldots; r\}$. Soit $\theta > 1$ un réel tel que le $\mathbb{R}$-diviseur $L - d\theta D_i$ soit nef pour tout $i \in \{1; \ldots; r\}$. On a alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\nu(nL; D_1; \ldots; D_r) \geq \lambda_d\theta.$$

Démonstration. – Pour tout $I \in \mathcal{P}$, le $\mathbb{R}$-diviseur $L - \theta\sum_{i\in I} D_i$ est nef puisque $\#I \leq d$. Soit $i \in \{1; \ldots; r\}$. Les $\mathbb{R}$-diviseurs $L - \theta D_i - \left(1 - \frac{1}{d}\right)L$ et L sont nefs, donc on a

$$\big\langle L^{d-j}(L-\theta D_i)^j\big\rangle \geq \left(1-\frac{1}{d}\right)^j \big\langle L^d\big\rangle \text{ pour tout } j \in \{1; \ldots; d\}\,.$$

En appliquant le théorème 5.4, on trouve ainsi

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\nu(nL; D_1; \ldots; D_r) \geq \frac{\theta}{d+1}\sum_{j=0}^{d}\left(1-\frac{1}{d}\right)^j = \lambda_d\theta.$$

D'où le résultat. □

RÉFÉRENCES

[1] F. Angelini, An algebraic version of Demailly's asymptotic Morse inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), 3265–3269.

[2] P. Corvaja, U. Zannier, On a general Thue's equation, *Amer. J. Math.* **126** (2004), 1033–1055.

[3] P. Corvaja, U. Zannier, On integral points on surfaces, *Ann. of Math.* **160** (2004), 705–726.

[4] J.-P. Demailly, L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory, in *Transcendental methods in algebraic geometry (Cetraro, 1994)*, Lecture Notes in Math. **1646**, Springer, 1996, 1–97.

[5] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.* **73** (1983), 349–366.

[6] G. Faltings, Diophantine approximation on abelian varieties, *Ann. of Math.* **133** (1991), 549–576.

[7] W. Fulton, *Intersection theory*, 2e éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **2**, Springer, 1998.

[8] J.-P. Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Progress in Mathematics **42**, Birkhäuser, 1983.

[9] S. Lang, *Number theory. III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **60**, Springer, 1991.

[10] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics **48**, Springer, 2004.

[11] A. Levin, Generalizations of Siegel's and Picard's theorems, à paraître dans *Annals of Math.* arXiv:math.NT/0503699.

[12] H. P. Schlickewei, The $\mathfrak{p}$-adic Thue-Siegel-Roth-Schmidt theorem, *Arch. Math. (Basel)* **29** (1977), 267–270.

[13] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math. **785**, Springer, 1980.

[14] P. Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory*, Lecture Notes in Math. **1239**, Springer, 1987.

[15] P. Vojta, A refinement of Schmidt's subspace theorem, *Amer. J. Math.* **111** (1989), 489–518.

[16] P. Vojta, Integral points on subvarieties of semiabelian varieties. I, *Invent. Math.* **126** (1996), 133–181.

[17] P. Vojta, On Cartan's theorem and Cartan's conjecture, *Amer. J. Math.* **119** (1997), 1–17.

[18] S. Zhang, Small points and adelic metrics, *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), 281–300.

(Manuscrit reçu le 8 novembre 2007 ;
accepté, après révision, le 29 septembre 2008.)

Pascal Autissier
I.R.M.A.R.
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex, France
E-mail: `pascal.autissier@univ-rennes1.fr`