

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. APPELL

Mémoire sur les équations différentielles linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 10 (1881), p. 391-424

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1881_2_10__391_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE ⁽¹⁾

SUR LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES,

PAR M. P. APPELL,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE.

INTRODUCTION.

Les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques ont été depuis longtemps signalées. Aussi Lagrange a démontré que, si l'on connaît une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire, on peut abaisser d'une unité l'ordre de cette équation, de même que l'on peut diminuer d'une unité le degré d'une équation algébrique dont on connaît une racine. La théorie du plus grand commun diviseur de deux polynômes et celle de l'élimination ont conduit MM. Libri, Liouville, Brassinne à des théories analogues sur les équations différentielles linéaires; et ces questions ont été récemment reprises et complétées par MM. Thomé et Frobenius (*Journal de Crelle*, t. 74 et suivants); M. Frobenius a introduit la notion de l'irréductibilité des équations différentielles linéaires (*Journal de Crelle*, t. 76) et a démontré à ce sujet plusieurs théorèmes importants suggérés, sans doute, par les théorèmes analogues de la théorie des équations algébriques. La décomposition des polynômes en facteurs a été l'origine de la théorie de la décomposition du premier membre d'une équation différentielle linéaire en facteurs premiers symboliques (voir FLOQUET, *Annales de l'École Normale supérieure*, année 1879. Supplément). Le Mémoire fondamental de M. Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 66), qui depuis a été exposé et complété par M. Tannery (*Annales de l'École*

(1) Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 26 octobre 1880.

Normale supérieure, année 1874), et qui a pour objet l'étude des fonctions définies par une équation différentielle linéaire, présente plus d'une analogie avec le Mémoire célèbre de M. Puiseux *Sur les fonctions algébriques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XV); et cette analogie a été poussée à un point inattendu dans un Mémoire récent de M. Fuchs (*Comptes rendus*, t. XC, p. 678 et 735, et *Journal de Crelle*, t. 89), *Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales des solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles*. Enfin, dans un autre ordre d'idées, la théorie des invariants des formes algébriques a été étendue aux équations différentielles linéaires dans deux Notes présentées par M. Laguerre à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 116 et 224).

Mais il restait une partie des plus importantes de la théorie des équations algébriques qui n'avait pas encore son analogue dans la théorie des équations différentielles linéaires : je veux dire la partie qui traite des fonctions symétriques des racines d'une équation et de la transformation des équations. C'est l'étude des propriétés analogues des équations différentielles qui fait l'objet du présent Mémoire.

J'ai eu d'abord à m'occuper de chercher quelles sont les fonctions des intégrales d'une équation différentielle linéaire qui sont analogues aux fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique. Soient $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre n ; les fonctions en question sont des fonctions algébriques entières de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ et de leurs dérivées qui se reproduisent multipliées par un facteur constant différent de zéro quand on remplace $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ par les éléments z_1, z_2, \dots, z_n d'un autre système fondamental, c'est-à-dire quand on fait une substitution linéaire de la forme

$$(A) \quad \gamma_i = C_{i1} z_1 + C_{i2} z_2 + \dots + C_{in} z_n,$$

où $i = 1, 2, \dots, n$.

Je me suis permis d'appeler ces fonctions des *fonctions invariantes*, à cause de la propriété qu'elles ont, en commun avec les invariants, de se reproduire multipliées par un facteur constant (qui n'est autre qu'une puissance du déterminant de la substitution) quand on fait sur les

variables une substitution linéaire telle que (A). L'étude de ces fonctions invariantes et la recherche de leur expression la plus généralement forment l'objet d'un premier Chapitre.

Dans le deuxième Chapitre, je démontre le théorème fondamental analogue au théorème sur les fonctions symétriques des racines des équations algébriques, et j'applique ce théorème à quelques exemples.

Le troisième Chapitre contient les applications du théorème fondamental à la théorie de la transformation des équations différentielles linéaires, avec quelques exemples.

Enfin, dans un quatrième et dernier Chapitre, je m'occupe plus spécialement des équations différentielles linéaires entre les intégrales desquelles il existe une relation algébrique à coefficients constants. J'indique le moyen de reconnaître sur l'équation différentielle l'existence d'une pareille relation, et je montre comment à cette question se rattache une classe d'invariants des équations différentielles linéaires. Puis j'applique cette théorie à l'équation différentielle linéaire du second ordre, et je ramène à des quadratures abéliennes l'intégration de toute équation différentielle linéaire du second ordre entre les intégrales de laquelle il existe une relation algébrique à coefficients constants.

J'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences, dans la séance du 21 juin 1880, le théorème fondamental qui est la base de toute cette théorie.

CHAPITRE I.

DES FONCTIONS INVARIANTES.

I. Soient np variables, disposées en tableau rectangulaire

$$(1) \quad \begin{cases} x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p}, \\ x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2p}, \\ \dots, \dots, \dots, \dots \\ x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np}, \end{cases}$$

soit différent de zéro. On pourra toujours déterminer les coefficients C de la substitution (4), de façon que les valeurs numériques des variables x soient des nombres quelconques donnés d'avance. Ainsi la fonction R garde la même valeur, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux variables x , pourvu que ces valeurs n'annulent pas le déterminant Δ . On conclut de là que le rapport R est indépendant des variables x ; car, laissant par exemple toutes les variables x constantes, sauf une, x_{ik} , on a une fonction rationnelle R de la variable x_{ik} qui garde la même valeur, quelle que soit la valeur numérique attribuée à x_{ik} , à l'exception de la seule valeur de x_{ik} qui annule Δ ; donc R est indépendant de x_{ik} et par suite de toutes les variables x ; et l'on a

$$I(x_{ik})_{nn} = R \cdot \Delta^m;$$

ce qui démontre le théorème (III).

IV. Si, dans une fonction invariante $I(x_{ik})_{np}$, on remplace les variables d'une colonne par une même fonction linéaire des autres variables de la même ligne, respectivement, à savoir, par exemple,

$$(5) \quad x_{ip} = \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \dots + \alpha_{p-1} x_{i, p-1},$$

où $i = 1, 2, \dots, n$, la fonction devient une fonction invariante de même degré que la proposée des variables restantes $x_{ik} \begin{pmatrix} k=1, 2, \dots, p-1 \\ i=1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$.

En effet, la fonction

$$I \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{vmatrix}$$

devient

$$I \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1, p-1} & \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \dots + \alpha_{p-1} x_{1, p-1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2, p-1} & \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + \dots + \alpha_{p-1} x_{2, p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{n, p-1} & \alpha_1 x_{n1} + \alpha_2 x_{n2} + \dots + \alpha_{p-1} x_{n, p-1} \end{vmatrix},$$

et, si l'on fait sur les variables x qui restent dans cette fonction une

substitution telle que (2), en laissant de côté la dernière des équations (2), on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I} \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,p-1} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{n,p-1} \end{array} \right. \\ \\ = \mathbf{D}^m \cdot \mathbf{I} \left| \begin{array}{cccc} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1,p-1} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2,p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{n,p-1} \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \dots + \alpha_{p-1} x_{1,p-1} \\ \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + \dots + \alpha_{p-1} x_{2,p-1} \\ \dots \\ \alpha_1 x_{n1} + \alpha_2 x_{n2} + \dots + \alpha_{p-1} x_{n,p-1} \\ \\ \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{12} + \dots + \alpha_{p-1} y_{1,p-1} \\ \alpha_1 y_{21} + \alpha_2 y_{22} + \dots + \alpha_{p-1} y_{2,p-1} \\ \dots \\ \alpha_1 y_{n1} + \alpha_2 y_{n2} + \dots + \alpha_{p-1} y_{n,p-1} \end{array} \right. ;$$

car en posant, pour un instant,

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} + \dots + \alpha_{p-1} x_{i,p-1} &= x_{ip}, \\ \alpha_1 y_{i1} + \alpha_2 y_{i2} + \dots + \alpha_{p-1} y_{i,p-1} &= y_{ip}, \end{aligned}$$

où $i = 1, 2, \dots, n$; on a

$$x_{ip} = C_{i1} y_{1p} + C_{i2} y_{2p} + \dots + C_{in} y_{np},$$

où $i = 1, 2, \dots, n$, de sorte que l'identité (6) résulte immédiatement de l'identité (3). La proposition est ainsi démontrée.

En appliquant plusieurs fois de suite le théorème qui vient d'être établi, on voit que si, dans une fonction invariante $I(x_{ik})_{np}$, on remplace les variables de plusieurs colonnes par les mêmes fonctions linéaires des autres variables de la même ligne, respectivement, à savoir, par exemple,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{ip} = a_{11} x_{i1} + a_{12} x_{i2} + \dots + a_{1q} x_{iq}, \\ x_{i,p-1} = a_{21} x_{i1} + a_{22} x_{i2} + \dots + a_{2q} x_{iq}, \\ \dots \\ x_{i,q+1} = a_{p-q,1} x_{i1} + a_{p-q,2} x_{i2} + \dots + a_{p-q,q} x_{iq}, \end{array} \right.$$

où $i = 1, 2, \dots, n$, la fonction devient une fonction invariante de même degré que la proposée des variables restantes $x_{ik} \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, q \\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right)$.

Si, en particulier, on a $q = n$, la fonction invariante considérée devient, en vertu du théorème (III), égale au produit de Δ^m par une constante qui est une fonction rationnelle entière des coefficients a_{ik} .

stante qui ne pourra être qu'une fonction entière des coefficients $\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}$. En effectuant ce produit, on obtiendra la fonction $I(x_{ik})_{np}$ sous forme d'une *fonction entière homogène de degré m des $n(p - n) + 1$ déterminants $\Delta, \Delta_{ip}, \Delta_{i,p-1}, \dots, \Delta_{i,n+1}$, où $i = 1, 2, \dots, n$.*

Telle est donc la forme générale d'une fonction invariante de degré m des np variables (1).

CHAPITRE II.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

VI. Soient

$$(9) \quad \frac{d^n \gamma}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \gamma}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} \gamma}{dx^{n-2}} + \dots + a_n \gamma = 0$$

une équation différentielle linéaire sans second membre, et $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ un système fondamental d'intégrales; je vais démontrer le théorème suivant :

Toute fonction algébrique entière F de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ et des dérivées de ces fonctions, qui se reproduit multipliée par un facteur constant différent de zéro quand on remplace $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ par les éléments d'un autre système fondamental d'intégrales, est égale à une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées multipliée par une puissance de $e^{-\int a_1 dx}$.

La fonction supposée F doit, en particulier, se reproduire, à un facteur constant près, quand on permute entre elles les fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Il résulte de là que cette fonction contient les dérivées de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ jusqu'au même ordre de dérivation. Soit p cet ordre; je vais d'abord montrer que la fonction F est une fonction invariante des

$n(p + 1)$ variables

$$(10) \quad \begin{cases} y_1, & \frac{dy_1}{dx}, & \frac{d^2y_1}{dx^2}, & \dots, & \frac{d^p y_1}{dx^p}, \\ y_2, & \frac{dy_2}{dx}, & \frac{d^2y_2}{dx^2}, & \dots, & \frac{d^p y_2}{dx^p}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ y_n, & \frac{dy_n}{dx}, & \frac{d^2y_n}{dx^2}, & \dots, & \frac{d^p y_n}{dx^p}. \end{cases}$$

En effet, cette fonction F est supposée telle que, si l'on passe du système fondamental y_1, y_2, \dots, y_n à un autre z_1, z_2, \dots, z_n , c'est-à-dire si l'on fait

$$(11) \quad \begin{cases} y_i = C_{i1} z_1 + C_{i2} z_2 + \dots + C_{in} z_n, \\ \frac{dy_i}{dx} = C_{i1} \frac{dz_1}{dx} + C_{i2} \frac{dz_2}{dx} + \dots + C_{in} \frac{dz_n}{dx}, \\ \dots, \\ \frac{d^p y_i}{dx^p} = C_{i1} \frac{d^p z_1}{dx^p} + C_{i2} \frac{d^p z_2}{dx^p} + \dots + C_{in} \frac{d^p z_n}{dx^p}, \end{cases}$$

où $i = 1, 2, \dots, n$, on ait identiquement

$$\begin{aligned} & F\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^p y_1}{dx^p}; y_2, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{d^p y_2}{dx^p}; \dots; y_n, \frac{dy_n}{dx}, \dots, \frac{d^p y_n}{dx^p}\right) \\ &= H \cdot F\left(z_1, \frac{dz_1}{dx}, \dots, \frac{d^p z_1}{dx^p}; z_2, \frac{dz_2}{dx}, \dots, \frac{d^p z_2}{dx^p}; \dots; z_n, \frac{dz_n}{dx}, \dots, \frac{d^p z_n}{dx^p}\right), \end{aligned}$$

le facteur H étant une fonction des seuls coefficients C de la substitution (11). Ce facteur H est supposé différent de zéro tant que le nouveau système z_1, z_2, \dots, z_n est fondamental, c'est-à-dire tant que le déterminant D de la substitution est différent de zéro. Il résulte de là que H ne peut différer que par un facteur numérique k d'une puissance de D

$$H = k D^m.$$

On voit immédiatement que $k = 1$, en supposant

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2, \quad \dots, \quad y_n = z_n.$$

La fonction supposée F se reproduit donc multipliée par D^m quand

on fait sur les variables (10) une substitution telle que (11). Il en résulte que F est une fonction invariante des $n(p+1)$ variables (10), ainsi que nous l'avions annoncé.

VII. En appliquant à la fonction F les propositions précédemment démontrées à l'égard des fonctions invariantes, on voit qu'il y a lieu de distinguer trois cas :

1° Si l'ordre p des plus hautes dérivées de y_1, y_2, \dots, y_n qui figurent dans F est moindre que $n-1$, la fonction F ne contient ni y_1, y_2, \dots, y_n ni les dérivées de ces fonctions.

2° Si $p = n-1$, la fonction F est, à un facteur près indépendant de y_1, y_2, \dots, y_n , une puissance du déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1 & \frac{dy_1}{dx} & \frac{d^2y_1}{dx^2} & \dots & \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} \\ y_2 & \frac{dy_2}{dx} & \frac{d^2y_2}{dx^2} & \dots & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & \frac{dy_n}{dx} & \frac{d^2y_n}{dx^2} & \dots & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire, d'après un théorème de M. Liouville, une puissance de $e^{-\int a_1 dx}$. L'indice de cette puissance est égal au degré de la fonction invariante.

3° Si p est plus grand que $n-1$, on peut toujours, à l'aide de l'équation différentielle (9), remplacer dans F toutes les dérivées de y_1, y_2, \dots, y_n d'ordre supérieur à $n-1$ en fonction des autres. Cette opération n'introduit évidemment dans F que des fonctions entières des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées. On transforme ainsi la fonction F en une autre de même nature qui ne contient plus que les dérivées de y_1, y_2, \dots, y_n jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement; par suite, d'après le deuxième cas, cette fonction est une puissance de $e^{-\int a_1 dx}$ multipliée par un facteur qui ne peut être qu'une fonction algébrique entière des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées; ce qui démontre le théorème énoncé dans le § VI.

VIII. On voit que les fonctions qui, dans cette théorie, jouent le

soit nul. En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations aient une intégrale commune est que l'on ait

$$\varphi(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) = 0,$$

C_1, C_2, \dots, C_n étant des constantes; or cette condition peut s'écrire

$$C_1 \varphi(y_1) + C_2 \varphi(y_2) + \dots + C_n \varphi(y_n) = 0,$$

et l'on sait que la condition $\delta = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une relation linéaire homogène et à coefficients constants entre les n fonctions $\varphi(y_1), \varphi(y_2), \dots, \varphi(y_n)$.

Le déterminant δ est une fonction invariante du premier degré de

$$\begin{matrix} y_1, & \frac{dy_1}{dx}, & \dots, & \frac{d^{m+n-1} y_1}{dx^{m+n-1}}, \\ y_2, & \frac{dy_2}{dx}, & \dots, & \frac{d^{m+n-1} y_2}{dx^{m+n-1}}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ y_n, & \frac{dy_n}{dx}, & \dots, & \frac{d^{m+n-1} y_n}{dx^{m+n-1}}; \end{matrix}$$

par conséquent ce déterminant est égal à une fonction rationnelle entière des coefficients de la première des équations (15) et de leurs dérivées multipliée par $e^{-\int a_1 dx}$. En calculant cette fonction entière de la façon indiquée dans le § VII, on obtient la condition cherchée, $\delta = 0$, en fonction entière des coefficients des deux équations et des dérivées de ces coefficients. Cette même condition s'obtiendrait aussi en égalant à zéro le déterminant

$$d = \begin{vmatrix} f(z_1) & \frac{d f(z_1)}{dx} & \frac{d^2 f(z_1)}{dx^2} & \dots & \frac{d^{m-1} f(z_1)}{dx^{m-1}} \\ f(z_2) & \frac{d f(z_2)}{dx} & \frac{d^2 f(z_2)}{dx^2} & \dots & \frac{d^{m-1} f(z_2)}{dx^{m-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(z_m) & \frac{d f(z_m)}{dx} & \frac{d^2 f(z_m)}{dx^2} & \dots & \frac{d^{m-1} f(z_m)}{dx^{m-1}} \end{vmatrix}.$$

Entre ces deux déterminants δ et d a lieu la relation

$$e^{-\int b_1 dx} \delta = e^{-\int a_1 dx} d.$$

XI. Pour donner une autre application générale du théorème fondamental VI, proposons-nous de former l'équation différentielle linéaire qui admette à la fois les intégrales de deux équations différentielles données (15). Adoptant les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, on voit que l'équation cherchée, qui est évidemment d'ordre $m + n$, est la suivante :

$$6) \begin{vmatrix} \frac{d^{m+n} y}{dx^{m+n}} & \frac{d^{m+n} y_1}{dx^{m+n}} & \frac{d^{m+n} y_2}{dx^{m+n}} & \dots & \frac{d^{m+n} y_n}{dx^{m+n}} & \frac{d^{m+n} z_1}{dx^{m+n}} & \dots & \frac{d^{m+n} z_m}{dx^{m+n}} \\ \frac{d^{m+n-1} y}{dx^{m+n-1}} & \frac{d^{m+n-1} y_1}{dx^{m+n-1}} & \frac{d^{m+n-1} y_2}{dx^{m+n-1}} & \dots & \frac{d^{m+n-1} y_n}{dx^{m+n-1}} & \frac{d^{m+n-1} z_1}{dx^{m+n-1}} & \dots & \frac{d^{m+n-1} z_m}{dx^{m+n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y_1 & y_2 & \dots & y_n & z_1 & \dots & z_m \end{vmatrix} = 0$$

Le premier membre de cette équation est une fonction invariante de

$$y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m+n} y_1}{dx^{m+n}},$$

$$\dots, \dots, \dots, \dots, \dots$$

$$y_n, \frac{dy_n}{dx}, \frac{d^2 y_n}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m+n} y_n}{dx^{m+n}},$$

et de

$$z_1, \frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m+n} z_1}{dx^{m+n}},$$

$$\dots, \dots, \dots, \dots, \dots$$

$$z_m, \frac{dz_m}{dx}, \frac{d^2 z_m}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m+n} z_m}{dx^{m+n}}.$$

On peut donc l'exprimer en fonction des coefficients des deux équations (15), et l'on obtient ainsi l'équation cherchée

La même méthode sert à former l'équation différentielle linéaire admettant les intégrales de trois ou plusieurs équations différentielles linéaires données.

Il est à remarquer que l'équation (16) ne répond pas à la question si les deux équations (15) ont une ou plusieurs intégrales communes; car, alors, le déterminant (16) est nul identiquement comme ayant deux ou plusieurs colonnes identiques.

Dans ce cas, l'on formera l'équation différentielle linéaire $\psi(z) = 0$ donnant les intégrales communes aux deux équations (15); cette équation

tion $\psi(z) = 0$ peut être formée, comme il est connu, par une méthode analogue à celle de la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes. (Voir, par exemple, un Mémoire de M. Floquet, *Annales de l'École Normale*, année 1879; Supplément, p. 44). Les équations (15) peuvent alors se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} f(z) &\equiv f_1[\psi(z)] = 0, \\ \varphi(z) &\equiv \varphi_1[\psi(z)] = 0, \end{aligned}$$

les équations différentielles linéaires

$$(15') \quad f_1(u) = 0, \quad \varphi_1(u) = 0$$

n'ayant plus d'intégrale commune. On formera ensuite, par la méthode précédente, l'équation $\mathcal{F}(u) = 0$, admettant les intégrales des deux équations (15'), et l'équation cherchée, admettant les intégrales des équations (15), sera

$$\mathcal{F}[\psi(z)] = 0.$$

CHAPITRE III.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

XII. Le théorème du § VI fournit une méthode générale pour la transformation des équations différentielles linéaires. Mais, avant d'aborder cette théorie, il convient de définir d'une façon précise ce que nous entendons par équation différentielle linéaire *irréductible*.

Soit une équation différentielle

$$(9) \quad \frac{d^n \gamma}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \gamma}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} \gamma}{dx^{n-2}} + \dots + a_n \gamma = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de certaines fonctions de x considérées comme connues et des dérivées de ces fonctions : on dit que l'équation (9) est irréductible s'il n'existe aucune autre équation différentielle d'ordre moindre que n , dont les coefficients

soient des fonctions rationnelles des fonctions de x considérées comme connues et de leurs dérivées, et dont les intégrales appartiennent toutes à l'équation (9).

Dans le cas de l'équation générale (9), dont les coefficients sont indéterminés, les fonctions connues ne sont autres que les coefficients eux-mêmes; l'équation est nécessairement irréductible.

XIII. Soient, comme précédemment, y_1, y_2, \dots, y_n un système fondamental d'intégrales de l'équation (9) et

$$(17) \quad \eta = f\left(y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}}; y_2, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{d^{m_2}y_2}{dx^{m_2}}; \dots; y_n, \frac{dy_n}{dx}, \frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}\right)$$

une fonction algébrique entière des intégrales y_1, y_2, \dots, y_n et de leurs dérivées, les coefficients qui figurent dans cette fonction étant des fonctions données de x . Le problème général de la transformation des équations différentielles linéaires est de *former l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la fonction η* .

Tout d'abord, pour voir quel est l'ordre de l'équation différentielle en η , on remplacera y_1, y_2, \dots, y_n par les éléments d'un autre système fondamental, en faisant

$$\begin{aligned} y_i &= C_{i1}z_1 + C_{i2}z_2 + \dots + C_{in}z_n, \\ \frac{dy_i}{dx} &= C_{i1}\frac{dz_1}{dx} + C_{i2}\frac{dz_2}{dx} + \dots + C_{in}\frac{dz_n}{dx}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

où $i = 1, 2, \dots, n$; l'ordre de l'équation différentielle en η est égal au nombre de termes linéairement indépendants qui entrent dans l'expression de η en fonction de z_1, z_2, \dots, z_n et des dérivées de ces fonctions. Soit p ce nombre et soient

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$$

les p termes en question linéairement indépendants; l'équation en η sera

$$(18) \quad \begin{vmatrix} \frac{d^p \eta}{dx^p} & \frac{d^p \varphi_1}{dx^p} & \frac{d^p \varphi_2}{dx^p} & \dots & \frac{d^p \varphi_p}{dx^p} \\ \frac{d^{p-1} \eta}{dx^{p-1}} & \frac{d^{p-1} \varphi_1}{dx^{p-1}} & \frac{d^{p-1} \varphi_2}{dx^{p-1}} & \dots & \frac{d^{p-1} \varphi_p}{dx^{p-1}} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \eta & \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_p \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction invariante de z_1, z_2, \dots, z_n et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. En effet, si l'on fait sur z_1, z_2, \dots, z_n une substitution linéaire en remplaçant, par exemple, z_i par

$$k_{i1} z_1 + k_{i2} z_2 + \dots + k_{in} z_n,$$

où $i = 1, 2, \dots, n$, la fonction φ_i sera remplacée par

$$K_{i1} \varphi_1 + K_{i2} \varphi_2 + \dots + K_{ip} \varphi_p,$$

où $i = 1, 2, \dots, p$, les coefficients K_{ij} étant des fonctions algébriques entières des k_{ij} , et le déterminant (18) se reproduira multiplié par le déterminant

$$Q = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1p} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{p1} & K_{p2} & \dots & K_{pp} \end{vmatrix},$$

qui est différent de zéro tant que le déterminant

$$q = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

est lui-même différent de zéro; de sorte que, d'après un raisonnement fait précédemment § VI, on a

$$Q = q^m,$$

et le déterminant (18) est bien une fonction invariante de z_1, z_2, \dots, z_n et de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. On peut donc exprimer ce déterminant en fonction des seuls coefficients de l'équation (9), et l'on a ainsi l'équation cherchée en η .

XIV. La transformation la plus simple consiste à poser

$$(19) \quad \eta = A_0 \frac{d^m \gamma_1}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} \gamma_1}{dx^{m-1}} + A_2 \frac{d^{m-2} \gamma_1}{dx^{m-2}} + \dots + A_m \gamma_1,$$

A_0, A_1, \dots, A_m étant des fonctions données de x , et γ_1 une intégrale de l'équation (9). On voit immédiatement que l'équation en η est du même

grales de l'équation (9) contient n termes linéairement indépendants, à moins que l'équation

$$A_0 \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + A_m y = 0$$

n'eût des intégrales communes avec la proposée (9), auquel cas l'ordre de l'équation en η subirait une réduction évidente.

XV. Soit maintenant, pour donner un autre exemple,

$$(20) \quad \eta = y_1^m$$

m étant un entier positif. (Voir à ce sujet un Mémoire de M. Liouville, *Journal de Liouville*, t. IV, p. 430.) Pour obtenir l'ordre de l'équation différentielle en η , faisons, d'après la méthode générale,

$$y_1 = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n;$$

alors on a

$$(20') \quad \eta = (C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n)^m.$$

Cette dernière expression développée contient

$$N = \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{1 \cdot 2 \dots m}$$

termes linéairement indépendants; l'équation en η est donc d'ordre N , et ses intégrales sont les différents termes linéairement indépendants de l'expression (20').

Comme application de cette transformation, considérons l'équation générale du second ordre

$$(21) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = a \frac{dy}{dx} + b y,$$

et proposons-nous d'abord de former l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale

$$\eta = y_1^2,$$

y_1 étant une intégrale de (21). Faisant d'abord

$$y_1 = C_1 z_1 + C_2 z_2,$$

on a

$$\eta = C_1^2 z_1^2 + 2C_1 C_2 z_1 z_2 + C_2^2 z_2^2;$$

η contient trois termes linéairement indépendants

$$z_1^2, \quad z_1 z_2, \quad z_2^2.$$

Par suite, l'équation en η sera de troisième ordre; cette équation est, d'après la méthode générale,

$$(22) \quad \begin{vmatrix} \frac{d^3 \eta}{dx^3} & \frac{d^3(z_1^2)}{dx^3} & \frac{d^3(z_1 z_2)}{dx^3} & \frac{d^3(z_2^2)}{dx^3} \\ \frac{d^2 \eta}{dx^2} & \frac{d^2(z_1^2)}{dx^2} & \frac{d^2(z_1 z_2)}{dx^2} & \frac{d^2(z_2^2)}{dx^2} \\ \frac{d\eta}{dx} & \frac{d(z_1^2)}{dx} & \frac{d(z_1 z_2)}{dx} & \frac{d(z_2^2)}{dx} \\ \eta & z_1^2 & z_1 z_2 & z_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

z_1 et z_2 désignant deux intégrales de l'équation (21). Le premier membre de cette équation (22) est une fonction invariante du troisième degré de

$$\begin{aligned} z_1, \quad \frac{dz_1}{dx}, \quad \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \quad \frac{d^3 z_1}{dx^3}, \\ z_2, \quad \frac{dz_2}{dx}, \quad \frac{d^2 z_2}{dx^2}, \quad \frac{d^3 z_2}{dx^3}. \end{aligned}$$

Pour l'exprimer en fonction des coefficients de l'équation différentielle (22), effectuons les différentiations indiquées et éliminons les dérivées d'ordre supérieur au premier, à l'aide des relations

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = a \frac{dz}{dx} + bz, \quad \frac{d^3 z}{dx^3} = \left(a^2 + b + \frac{da}{dx} \right) \frac{dz}{dx} + \left(ab + \frac{db}{dx} \right) z.$$

Le déterminant (22) prend alors la forme

$$(22) \quad \begin{vmatrix} \frac{d^3 \eta}{dx^3} \lambda z_1^2 + 2\mu z_1 \frac{dz_1}{dx} + \nu \left(\frac{dz_1}{dx} \right)^2 & \lambda z_1 z_2 + \mu \left(z_1 \frac{dz_2}{dx} + z_2 \frac{dz_1}{dx} \right) + \nu \frac{dz_1}{dx} \cdot \frac{dz_2}{dx} & \lambda z_2^2 + 2\mu z_2 \frac{dz_2}{dx} + \nu \left(\frac{dz_2}{dx} \right)^2 \\ \frac{d^2 \eta}{dx^2} \lambda_1 z_1^2 + 2\mu_1 z_1 \frac{dz_1}{dx} + \nu_1 \left(\frac{dz_1}{dx} \right)^2 & \lambda_1 z_1 z_2 + \mu_1 \left(z_1 \frac{dz_2}{dx} + z_2 \frac{dz_1}{dx} \right) + \nu_1 \frac{dz_1}{dx} \cdot \frac{dz_2}{dx} & \lambda_1 z_2^2 + 2\mu_1 z_2 \frac{dz_2}{dx} + \nu_1 \left(\frac{dz_2}{dx} \right)^2 \\ \frac{d\eta}{dx} & 2z_1 \frac{dz_1}{dx} & z_1 \frac{dz_2}{dx} + z_2 \frac{dz_1}{dx} & 2z_2 \frac{dz_2}{dx} \\ \eta & z_1^2 & z_1 z_2 & z_2^2 \end{vmatrix},$$

où l'on fait

$$\begin{aligned} \nu &= 6a, & \mu &= 4b + a^2 + \frac{da}{dx}, & \lambda &= 2 \left(ab + \frac{db}{dx} \right) \\ \nu_1 &= 2, & \mu_1 &= a, & \lambda_1 &= 2b. \end{aligned}$$

Or ce déterminant (22') doit, d'après les théorèmes généraux, contenir en facteur le cube du déterminant

$$\theta = \begin{vmatrix} z_1 & \frac{dz_1}{dx} \\ z_2 & \frac{dz_2}{dx} \end{vmatrix}.$$

Effectivement le déterminant (22') est le produit du déterminant

$$\Theta = \begin{vmatrix} \frac{d^3\eta}{dx^3} & \lambda & \mu & \nu \\ \frac{d^2\eta}{dx^2} & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \frac{d\eta}{dx} & 0 & 1 & 0 \\ \eta & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1^2 & 2z_1 \frac{dz_1}{dx} & \left(\frac{dz_1}{dx} \right)^2 \\ 0 & z_1 z_2 & z_1 \frac{dz_2}{dx} + z_2 \frac{dz_1}{dx} & \frac{dz_1}{dx} \cdot \frac{dz_2}{dx} \\ 0 & z_2^2 & 2z_2 \frac{dz_2}{dx} & \left(\frac{dz_2}{dx} \right)^2 \end{vmatrix},$$

qui est égal à θ^3 . L'équation cherchée est donc $\Theta = 0$, c'est-à-dire, en développant,

$$(23) \quad \frac{d^3\eta}{dx^3} - 3a \frac{d^2\eta}{dx^2} - \left(4b - 2a^2 + \frac{da}{dx} \right) \frac{d\eta}{dx} - 2 \left(\frac{db}{dx} - 2ab \right) \eta = 0.$$

Étant donnée une équation différentielle linéaire du troisième ordre

$$(24) \quad \frac{d^3\eta}{dx^3} + 3B \frac{d^2\eta}{dx^2} + 3C \frac{d\eta}{dx} + D\eta = 0,$$

il est évident qu'on ne peut pas, en général, l'identifier avec l'équation (23). Pour que cette identification soit possible, il faut que

$$B = -a, \quad 3C = 2a^2 - 4b - \frac{da}{dx}, \quad D = 2\left(2ab - \frac{db}{dx}\right);$$

l'élimination de a et b entre ces trois équations donne une équation de condition qui, en adoptant les notations de M. Laguerre (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 116 et 224), exprime que l'invariant I est nul. Si cette condition est remplie, il suffit, pour intégrer l'équation différentielle du troisième ordre (24), d'intégrer l'équation du deuxième ordre (21) dans laquelle

$$a = -B, \quad b = \frac{1}{4}\left(2B^2 - 3C + \frac{dB}{dx}\right).$$

On trouve, par un calcul semblable au précédent, que l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre, qui admet pour intégrales $y_1^3, y_1^2 y_2, y_1 y_2^2, y_2^3$ [y_1 et y_2 étant deux intégrales distinctes de l'équation (21)], est la suivante :

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{d^4 \eta}{dx^4} - 6a \frac{d^3 \eta}{dx^3} + \left(11a^2 - 10b - 4 \frac{da}{dx}\right) \frac{d^2 \eta}{dx^2} \\ - \left(6a^3 - 30ab - 7a \frac{da}{dx} + 10 \frac{db}{dx} + \frac{d^2 a}{dx^2}\right) \frac{d\eta}{dx} \\ - 3\left(6a^2 b - 3b^2 - 2b \frac{da}{dx} - 5a \frac{db}{dx} + \frac{d^2 b}{dx^2}\right) \eta = 0. \end{cases}$$

L'on a ainsi un type d'équations du quatrième ordre dont l'intégration se ramène immédiatement à celle d'une équation du second ordre.

XVI. Considérons l'équation générale (9) et proposons-nous de former une équation qui admette pour intégrale la fonction

$$(26) \quad \eta = \varphi_{k_1}(y_1, y_2, \dots, y_n) + \varphi_{k_2}(y_1, y_2, \dots, y_n) + \dots + \varphi_{k_m}(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

les φ étant des fonctions homogènes entières à coefficients constants de y_1, y_2, \dots, y_n d'un degré marqué par l'indice. L'équation en η sera d'un degré égal à

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{n(n+1)\dots(n+h_i-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot h_i},$$

car tel est le nombre des termes linéairement indépendants qui figurent dans le second membre de (26). Mais il est à remarquer que l'équation en η ainsi obtenue n'est pas irréductible. Cette équation en η admet en effet comme intégrales les fonctions

$$\eta_1 = \varphi_{k_1}(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \eta_2 = \varphi_{k_2}(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \dots, \quad \eta_m = \varphi_{k_m}(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

ou plus simplement

$$\eta_1 = y_1^{k_1}, \quad \eta_2 = y_1^{k_2}, \quad \dots, \quad \eta_m = y_1^{k_m},$$

qui satisfont respectivement à des équations différentielles d'ordres

$$\frac{n(n+1)\dots(n+k_1-1)}{1.2\dots k_1}, \quad \frac{n(n+1)\dots(n+k_2-1)}{1.2\dots k_2}, \quad \dots, \quad \frac{n(n+1)\dots(n+k_m-1)}{1.2\dots k_m},$$

XVII. Soit encore l'équation du quatrième ordre

$$(27) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = A \frac{d^3 y}{dx^3} + B \frac{d^2 y}{dx^2} + C \frac{dy}{dx} + Dy,$$

ayant pour intégrales y_1, y_2, y_3, y_4 ; et proposons-nous de former l'équation différentielle admettant pour intégrale la fonction

$$(28) \quad \eta = y_1 y_2' - y_1' y_2,$$

y_i' désignant la dérivée de y_i . Si l'on applique la méthode générale, on reconnaît que l'équation en η est du *sixième* ordre et admet les six intégrales

$$y_1 y_2' - y_2 y_1', \quad y_1 y_3' - y_3 y_1', \quad y_1 y_4' - y_4 y_1', \\ y_2 y_3' - y_3 y_2', \quad y_2 y_4' - y_4 y_2', \quad y_3 y_4' - y_4 y_3'.$$

Pour former cette équation, on peut employer le procédé suivant, qui est plus rapide que la méthode générale. Posons, pour simplifier,

$$\frac{d^i y_1}{dx^i} \frac{d^k y_2}{dx^k} - \frac{d^i y_2}{dx^i} \frac{d^k y_1}{dx^k} = (i, k);$$

on tire de (28) par des différentiations successives

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = (0, 1), \\ \frac{d\eta}{dx} = (0, 2), \\ \frac{d^2\eta}{dx^2} = (0, 3) + (1, 2), \\ \frac{d^3\eta}{dx^3} = (0, 4) + 2(1, 3), \\ \frac{d^4\eta}{dx^4} = (0, 5) + 3(1, 4) + 2(2, 3), \\ \frac{d^5\eta}{dx^5} = (0, 6) + 4(1, 5) + 5(2, 4), \\ \frac{d^6\eta}{dx^6} = (0, 7) + 5(1, 6) + 9(2, 5) + 5(3, 4). \end{array} \right.$$

Mais l'équation différentielle (27) donne pour chacune des intégrales γ_1, γ_2 les relations

$$\begin{aligned} \frac{d^5\gamma}{dx^5} &= A_1 \frac{d^3\gamma}{dx^3} + B_1 \frac{d^2\gamma}{dx^2} + C_1 \frac{d\gamma}{dx} + D_1 \gamma, \\ \frac{d^6\gamma}{dx^6} &= A_2 \frac{d^3\gamma}{dx^3} + B_2 \frac{d^2\gamma}{dx^2} + C_2 \frac{d\gamma}{dx} + D_2 \gamma, \\ \frac{d^7\gamma}{dx^7} &= A_3 \frac{d^3\gamma}{dx^3} + B_3 \frac{d^2\gamma}{dx^2} + C_3 \frac{d\gamma}{dx} + D_3 \gamma, \end{aligned}$$

dont les coefficients A_i, B_i, C_i, D_i sont faciles à calculer de proche en proche en fonction de A, B, C, D . Or on tire des relations précédentes, où l'on a remplacé γ successivement par γ_1 et γ_2 :

$$\begin{aligned} (0, 5) &= A_1(0, 3) + B_1(0, 2) + C_1(0, 1), \\ (1, 5) &= A_1(1, 3) + B_1(1, 2) - D_1(0, 1), \\ (2, 5) &= A_1(2, 3) - C_1(1, 2) - D_1(0, 2), \\ (0, 6) &= A_2(0, 3) + B_2(0, 2) + C_2(0, 1), \\ (1, 6) &= A_2(1, 3) + B_2(1, 2) - D_2(0, 1), \\ (0, 7) &= A_3(0, 3) + B_3(0, 2) + C_3(0, 1); \end{aligned}$$

et l'équation proposée (27) donne de même

$$\begin{aligned}(0,4) &= A(0,3) + B(0,2) + C(0,1), \\(1,4) &= A(1,3) + B(1,2) - D(0,1), \\(2,4) &= A(2,3) - C(1,2) - D(0,2), \\(3,4) &= -B(2,3) - C(1,3) - D(0,3).\end{aligned}$$

En substituant dans les relations (29), on voit que les seconds membres de ces sept relations deviennent des fonctions linéaires des six quantités

$$(0,1), (0,2), (0,3), (1,2), (1,3), (2,3).$$

L'élimination de ces six quantités entre les sept équations (29) fournit l'équation cherchée en η .

Remarque. — Les méthodes développées dans ce Chapitre peuvent également être employées pour former l'équation différentielle qui admet pour intégrale une fonction entière donnée des intégrales de *deux* ou *plusieurs* équations différentielles données et des dérivées de ces intégrales.

CHAPITRE IV.

SUR LES CAS OU IL EXISTE DES RELATIONS ALGÈBRIQUES ENTRE LES INTÉGRALES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE.

XVIII. Étant donnée l'équation différentielle linéaire la plus générale

$$(9) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_n y = 0,$$

qui admet pour intégrales y_1, y_2, \dots, y_n , cherchons quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait, entre ces intégrales, une

relation algébrique entière à coefficients constants, de la forme

$$(30) \quad \varphi_{k_1}(y_1, y_2, \dots, y_n) + \varphi_{k_2}(y_1, y_2, \dots, y_n) + \dots + \varphi_{k_m}(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0,$$

où les φ sont des fonctions homogènes d'un degré marqué par l'indice.

Cette relation (30) ne change évidemment pas de forme si l'on remplace y_1, y_2, \dots, y_n par leurs expressions en fonction des éléments d'un autre système fondamental d'intégrales; elle contient un nombre

$$N = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{n(n+1)\dots(n+h_i-1)}{1.2\dots k_i}$$

de coefficients constants. Si l'on différentie $N - 1$ fois l'équation (30) par rapport à x , on obtient un système de N équations homogènes et du premier degré, par rapport aux N coefficients constants. Le résultat de l'élimination de ces constantes est un certain déterminant ω , égal à zéro. L'équation ainsi obtenue

$$(31) \quad \omega = 0$$

est la condition cherchée. En effet, cette condition (31) est évidemment nécessaire, et elle est suffisante, car l'équation (31), dans laquelle on considère y_2, y_3, \dots, y_n comme des fonctions connues, et y_1 comme une fonction inconnue, est une équation différentielle d'ordre $N - 1$ par rapport à y_1 , dont l'intégrale générale est précisément l'équation (30) avec $N - 1$ constantes arbitraires qui sont les rapports de $N - 1$ des constantes qui figurent dans l'équation (30) à la $N^{\text{ième}}$.

La condition cherchée $\omega = 0$ est ainsi exprimée en fonction de y_1, y_2, \dots, y_n . Pour l'exprimer en fonction des coefficients de l'équation différentielle (9), il suffit de remarquer que le déterminant ω est une fonction invariante de

$$\begin{array}{cccc} y_1, & \frac{dy_1}{dx}, & \dots, & \frac{d^{N-1}y_1}{dx^{N-1}}, \\ y_2, & \frac{dy_2}{dx}, & \dots, & \frac{d^{N-1}y_2}{dx^{N-1}}, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ y_n, & \frac{dy_n}{dx}, & \dots, & \frac{d^{N-1}y_n}{dx^{N-1}}. \end{array}$$

En effet, soit, pour mettre les variables en évidence,

$$\mathfrak{D}(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

le déterminant (31). Supposons qu'on remplace le système y_1, y_2, \dots, y_n par un autre système fondamental z_1, z_2, \dots, z_n , en faisant

$$y_i = C_{i1} z_1 + C_{i2} z_2 + \dots + C_{in} z_n,$$

où $i = 1, 2, \dots, n$; si, entre les fonctions y_1, y_2, \dots, y_n , a lieu une relation de la forme (30), une relation de la même forme a lieu entre les fonctions z_1, z_2, \dots, z_n , et réciproquement; en d'autres termes, si le déterminant $\mathfrak{D}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ est nul, le déterminant $\mathfrak{D}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ est nul, et réciproquement. On a donc identiquement

$$\mathfrak{D}(y_1, y_2, \dots, y_n) = H \mathfrak{D}(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

H étant un facteur constant différent de zéro, tant que le système z_1, z_2, \dots, z_n est fondamental. Cette fonction $\mathfrak{D}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ remplit donc les conditions imposées à la fonction F dans l'énoncé du théorème fondamental du § VI; et par suite on peut, en suivant la méthode indiquée dans ce paragraphe, exprimer la condition cherchée $\mathfrak{D} = 0$ en fonction des coefficients de l'équation différentielle et de leurs dérivées.

L'expression de \mathfrak{D} en fonction des coefficients est un *semi-invariant* par rapport au changement de variable indépendante, car la relation (30) subsiste quelle que soit cette variable. Cette même fonction \mathfrak{D} est un *invariant complet* si la relation (30) est homogène par rapport à y_1, y_2, \dots, y_n , car alors la relation (30) subsiste encore si l'on remplace y_i par $u y_i$, u étant une fonction quelconque de x .

XIX. Supposons maintenant que les coefficients d'une équation différentielle donnée telle que (9) remplissent la condition $\mathfrak{D} = 0$. Alors les intégrales de l'équation différentielle vérifient une relation telle que (30); et, pour obtenir cette relation, il reste à déterminer les N coefficients constants qui y entrent. A cet effet, on considère un système fondamental d'intégrales y_1, y_2, \dots, y_n , et pour $x = x_0$ on suppose les fonctions

$$y_i, \frac{dy_i}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_i}{dx^{n-1}}$$

égales à des constantes quelconques

$$A_{0i}, A_{1i}, \dots, A_{n-1,i}$$

assujetties à cette seule condition que le déterminant formé par ces constantes soit différent de zéro. Les valeurs de $\frac{d^n \gamma_i}{dx^n}, \frac{d^{n+1} \gamma_i}{dx^{n+1}}, \dots, \frac{d^{N-2} \gamma_i}{dx^{N-2}}$ pour $x = x_0$ se déduiront des précédentes à l'aide de l'équation différentielle. Cela posé, en différentiant $N - 2$ fois la relation (30), et remplaçant les fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ et leurs dérivées par les valeurs qu'elles prennent pour $x = x_0$, on obtient $N - 1$ équations homogènes par rapport aux N coefficients cherchés; ce qui permet de déterminer ces coefficients en fonction des n^2 constantes A_{ik} .

Il peut arriver que les valeurs de certains des coefficients soient nulles et que, dans la relation (30), certains termes tels que $\varphi_{ki}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ disparaissent tout entiers. Du reste, il est évident que la condition qui exprime qu'il y a entre les intégrales une relation de la forme (30) est vérifiée, s'il y a entre ces intégrales une relation de la forme

$$(30') \quad \varphi_{k_\alpha}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) + \varphi_{k_\beta}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) + \dots + \varphi_{k_\lambda}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = 0,$$

où $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont quelques-uns des nombres $1, 2, \dots, m$; de sorte que l'équation de condition qui exprime qu'il y a entre les intégrales une relation de la forme (30) est une conséquence de celle qui exprime qu'il y a entre elles une relation de la forme (30').

XX. Par exemple, considérons l'équation du second ordre (21), et cherchons la condition qui exprime que, entre deux intégrales distinctes de cette équation, il y a une relation de la forme

$$(32) \quad A\gamma_1^2 + 2B\gamma_1\gamma_2 + C\gamma_2^2 + D = 0,$$

A, B, C, D étant des constantes. On trouve que cette condition est fournie par l'équation

$$(33) \quad \frac{db}{dx} - 2ab = 0,$$

que l'on obtient en égalant à zéro le coefficient de η dans l'équa-

tion (23), qui a pour intégrales

$$y_1^2, y_1 y_2, y_2^2.$$

On vérifie facilement que le premier membre de l'équation (33) est un *semi-invariant* par rapport au changement de variable indépendante. Supposons, en effet, qu'on change cette variable en posant $x = \varphi(\xi)$, et que l'équation (21) devienne

$$(21') \quad \frac{d^2 y}{d\xi^2} = a_1 \frac{dy}{d\xi} + b_1 y,$$

on a

$$a_1 = a \frac{dx}{d\xi} + \frac{d^2 x}{d\xi^2} \frac{1}{\frac{dx}{d\xi}}, \quad b_1 = b \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2,$$

d'où

$$\frac{db_1}{d\xi} - 2a_1 b_1 = \left(\frac{db}{dx} - 2ab \right) \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^3;$$

ce qui démontre que $\left(\frac{db}{dx} - 2ab \right)$ est un semi-invariant.

Si l'on applique cette condition (33) à l'équation différentielle de la série hypergéométrique de Gauss

$$(34) \quad (x - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] \frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

on trouve

$$2x - 1 - 2(\alpha + \beta + 1)x + 2\gamma = 0,$$

ce qui exige

$$(35) \quad \alpha + \beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Effectivement, si ces conditions (35) sont remplies, l'équation (34) admet les intégrales

$$y_1^2 = \cos 2\alpha(\arcsin \sqrt{x}), \quad y_2 = \sin 2\alpha(\arcsin \sqrt{x})$$

entre lesquelles a lieu la relation

$$y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

XXI. Si la condition (33) est remplie, l'intégration de l'équation du deuxième ordre (21) se ramène aux quadratures. En effet, en changeant la variable indépendante, et posant, comme dans le § XX, $x = \varphi(\xi)$, on peut toujours, à l'aide de quadratures, déterminer la fonction φ de façon que, dans la nouvelle équation (21'), le coefficient a_1 soit nul. Alors la condition

$$\frac{db_1}{d\xi} - 2a_1 b_1 = 0$$

donne $b_1 = \text{const.}$ et l'équation différentielle prend la forme

$$\frac{d^2 \gamma}{d\xi^2} = C\gamma,$$

équation qui s'intègre immédiatement.

XXII. Si l'on cherche la condition nécessaire et suffisante pour que, entre deux intégrales de l'équation (21), il y ait une relation de la forme

$$(35) \quad Ay^3 + 3By_1^2 y_2 + 3Cy_1 y_2^2 + Dy_2^3 + E = 0,$$

A, B, C, D, E étant des constantes, on trouve que cette condition est fournie par l'équation

$$(36) \quad 6a^2 b - 3b^2 - 2b \frac{da}{dx} - 5a \frac{db}{dx} + \frac{d^2 b}{dx^2} = 0,$$

obtenue en égalant à zéro le coefficient de η dans l'équation (25). Le premier membre de l'équation (36) est un semi-invariant par rapport au changement de variable indépendante; et, si l'on fait comme précédemment $x = \varphi(\xi)$ de façon que l'équation (21) devienne (21'), on a

$$\begin{aligned} & 6a_1^2 b_1 - 3b_1^2 - 2b_1 \frac{da_1}{d\xi} - 5a_1 \frac{db_1}{d\xi} + \frac{d^2 b_1}{d\xi^2} \\ &= \left(6a^2 b - 3b^2 - 2b \frac{da}{dx} - 5a \frac{db}{dx} + \frac{d^2 b}{dx^2} \right) \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^4. \end{aligned}$$

Si la condition (36) est remplie, l'intégration de l'équation (21) se ramène aux quadratures. En effet, en faisant le changement de variable

$x = \varphi(\xi)$, et déterminant φ de façon que a_1 soit nul, la condition (36) devient

$$3b_1^2 - \frac{d^2b_1}{d\xi^2} = 0,$$

d'où

$$b_1 = \lambda^2 \left[2k^2 \sin^2 \operatorname{am}(\lambda\xi + \mu) - \frac{2}{3}(1 + k^2) \right],$$

le module k de la fonction elliptique étant convenablement déterminé, et λ, μ désignant des constantes arbitraires. En substituant cette valeur de b_1 dans l'équation (21'), et faisant $\lambda\xi + \mu = t$, on a l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[2k^2 \sin^2 \operatorname{am} t - \frac{2}{3}(1 + k^2) \right] y,$$

qui est un cas particulier de l'équation de Lamé, et que l'on sait intégrer d'après les recherches de M. Hermite (*Comptes rendus*, t. LXXXV).

XXIII. Dans les deux exemples précédents, l'intégration de l'équation différentielle (21) se ramène à des quadratures, et la nouvelle équation (21'), dans laquelle $a_1 = 0$, s'intègre dans le premier exemple à l'aide des fonctions circulaires, et, dans le deuxième, à l'aide des fonctions elliptiques.

D'une manière générale, supposons que l'on ait vérifié que, entre les intégrales y_1 et y_2 de l'équation (21), il existe une relation algébrique entière de la forme

$$(37) \quad \varphi_{k_1}(y_1, y_2) + \varphi_{k_2}(y_1, y_2) + \dots + \varphi_{k_m}(y_1, y_2) = 0$$

(voir § XVIII), et que l'on ait déterminé les constantes qui figurent dans cette relation par la méthode du § XIX. Alors on posera $x = \varphi(\xi)$ et, comme précédemment, on déterminera φ par des quadratures, de façon à annuler le coefficient a_1 de la nouvelle équation (21'). L'intégration de cette équation

$$(21') \quad \frac{d^2y}{d\xi^2} = b_1 y$$

se ramène alors à des intégrales abéliennes dont le genre est précisé-

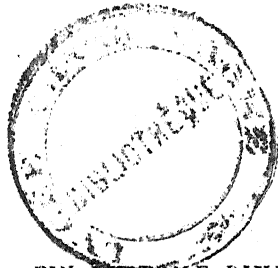
ment le genre de la courbe algébrique représentée par l'équation (37), lorsqu'on considère y_1 et y_2 comme les coordonnées rectilignes d'un point. En effet, les deux intégrales y_1 et y_2 de l'équation (21') satisfont à l'équation (37) et à l'équation

$$(38) \quad y_1 dy_2 - y_2 dy_1 = C d\xi,$$

C étant une constante; d'où l'on tire immédiatement

$$C\xi = \int y_1 dy_2 - \int y_2 dy_1 = y_1 y_2 - 2 \int y_2 dy_1,$$

équation qui conduit à une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique (37).



FIN DU TOME DIXIÈME.