JULES TANNERY

Sur une équation différentielle linéaire du second ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 169-194

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__169_0>

SUR UNE

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE

DU SECOND ORDRE,

PAR M. J. TANNERY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

1. L'équation linéaire du second ordre

$$(k - k^3)\frac{d^2K}{dk^2} + (1 - 3k^2)\frac{dK}{dk} - kK = 0,$$

qui relie au module k la fonction complète de première espèce

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

offre, par cela même qu'elle touche à la théorie des fonctions elliptiques, assez d'intérêt pour être étudiée avec quelques détails; cette étude met d'ailleurs en évidence, sur un exemple simple, le mode d'existence des solutions des équations différentielles linéaires et la façon dont elles se transforment les unes dans les autres quand on fait décrire tel ou tel chemin au point qui figure la variable. Dans un important Mémoire [*Die Periodicitäts-moduln der hyperrelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefast* (*Journal de Borchardt*, t. LXXI, p. 91)], M. Fuchs a, en passant, traité de cette équation particulière; toutefois, les résultats qu'il a obtenus et qui équivalent en partie à ceux qui suivent en diffèrent tant par leur forme que par la façon dont ils sont établis. C'est uniquement au point de vue de l'étude des solutions de l'équation, indépendamment de leur sens dans la théorie des fonctions elliptiques, que je me placerai désormais.

2. Si dans cette équation on remplace K par y et k par $\sqrt{x}$, elle devient

$$(1) \qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-(1-2x)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4}y=0;$$

c'est sous cette forme, qui est un cas particulier de l'équation différentielle à laquelle satisfait la série hypergéométrique, que je l'étudierai, en supposant que la variable indépendante x puisse prendre toutes les valeurs possibles réelles ou imaginaires, et en la représentant, suivant l'habitude, par un point mobile sur un plan. Sur ce plan il existe trois points critiques, à savoir les points zéro, 1, ∞ ([1]). Si l'on considère un point quelconque a du plan, ou, si l'on veut, une valeur a de la variable indépendante, et si l'on se donne pour ce point les valeurs de y et de sa dérivée, il existe une fonction continue uniforme de la variable x dans l'intérieur du cercle ayant a pour centre et passant par le plus rapproché des points zéro et 1, pouvant, dans l'intérieur de ce cercle (dans le *domaine* du point a), se représenter par une série convergente procédant suivant les puissances ascendantes de $x-a$, et se réduisant pour $x=a$, elle et sa dérivée, aux deux valeurs assignées; cette fonction est d'ailleurs unique. Si d'après cela on trace un chemin continu quelconque joignant le point a au point b, assujetti toutefois à ne passer par aucun des points zéro et 1, et si l'on suppose que la variable décrive ce chemin; si, enfin, on part du point a avec une solution de l'équation différentielle qui ait, en ce point et aux environs, les mêmes valeurs que la fonction précédemment définie, on arrivera au point b, par des variations continues, avec une solution déterminée de l'équation différentielle.

A chacun des points critiques zéro, 1, ∞ correspond une forme spéciale de l'intégrale générale de cette équation; chacune de ces formes convient pour le domaine C_0, C_1, C_∞ du point correspondant. Si du point zéro comme centre on décrit un cercle avec le rayon 1, la partie du plan intérieure à ce cercle sera le domaine C_0, la partie extérieure le domaine C_∞; enfin le domaine C_1 est la portion de plan comprise

(1) *Voir*, dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, le travail où j'ai exposé, d'après M. Fuchs, les premiers principes de la théorie des équations différentielles linéaires (2e série, t. IV, p. 113).

dans le cercle de rayon 1 décrit du point 1 comme centre. Les domaines C_0 et C_1 ont une partie commune $C_{0,1}$ dans laquelle conviennent les deux premières formes de l'intégrale générale; de même les deux domaines C_1, C_∞ ont une partie commune $C_{1,\infty}$. On pourra, par la considération de ces parties communes, passer d'une forme de l'intégrale générale à l'autre; c'est ce mode de passage que j'étudierai spécialement.

3. Occupons-nous d'abord du domaine C_0. On reconnaît sans difficulté ([1]) que l'équation

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}-(1-2x)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4}y=0$$

admet les deux solutions

$$P=\varphi(x),\quad Q=4\psi(x)+\varphi(x)\log x, \tag{2}$$

en faisant

$$\varphi(x)=\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}a_\mu x^\mu,\quad \psi(x)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty}a_\mu b_\mu x^\mu, \tag{3}$$

où

$$a_\mu=\left[\frac{1.3.5\ldots(2\mu-1)}{2.4.6\ldots2\mu}\right]^2,\quad a_0=1$$

$$b_\mu=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2\mu-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2\mu}.$$

Les deux séries $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont convergentes dans le domaine C_0 et y définissent deux fonctions continues et uniformes; au point 1 elles deviennent divergentes; on prouvera plus tard qu'elles demeurent convergentes pour les autres points du contour.

Il importe particulièrement, pour ce qui suivra, de déterminer comment ces fonctions deviennent infinies quand x s'approche de 1.

D'après la formule de Wallis, on a toujours, pour $\mu>1$,

$$\frac{2}{(2\mu+1)\pi}<a_\mu<\frac{2}{2\mu\pi}; \tag{4}$$

([1]) *Voir* le Mémoire cité, p. 180.

si donc on suppose x réel, compris entre zéro et 1, on aura

$$(5)\qquad 1+\sum_1^\infty \frac{2x^\mu}{(2\mu+1)\pi} < \varphi(x) < 1+\sum_1^\infty \frac{2x^\mu}{2\mu\pi}.$$

La différence entre les deux séries extrêmes est égale à

$$\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\left(\frac{1}{2\mu}-\frac{1}{2\mu+1}\right)x^\mu,$$

quantité positive qui augmente avec x et qui, pour $x=1$, se réduit à

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots\right)=\frac{2}{\pi}(1-\log 2);$$

on peut donc poser

$$(6)\qquad \varphi(x)=\varepsilon(x)+\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\frac{x^\mu}{\mu}=\varepsilon(x)-\frac{1}{\pi}\log(1-x),$$

où $\varepsilon(x)$ est une quantité positive, comprise entre $1-\frac{2}{\pi}(1-\log 2)$ et 1; ainsi la différence entre $\varphi(x)$ et $-\frac{1}{\pi}\log(1-x)$ reste finie pour $x=1$.

Les inégalités (4) montrent de même que l'on a, x étant toujours réel, compris entre zéro et 1,

$$(7)\qquad \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\frac{b_\mu x^\mu}{2\mu+1} < \psi(x) < \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\frac{b_\mu x^\mu}{2\mu};$$

la différence entre les deux séries extrêmes est

$$\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty b_\mu\left(\frac{1}{2\mu}-\frac{1}{2\mu+1}\right)x^\mu,$$

quantité positive croissant avec x et qui, puisque l'on a toujours

$$b_\mu < \log 2,$$

reste elle-même plus petite que

$$\frac{2}{\pi}\log 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots\right)=\frac{2}{\pi}\log 2(1-\log 2);$$

on peut donc poser

$$\psi(x)=\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\frac{b_\mu x^\mu}{2\mu}-\varepsilon'(x),$$

$\varepsilon'(x)$ étant une quantité comprise entre zéro et $\frac{2}{\pi}\log 2(1-\log 2)$: mais on a

$$\sum_1^\infty \frac{b_\mu x^\mu}{\mu} < \log 2 \sum_1^\infty \frac{x^\mu}{\mu}.$$

La différence entre ces deux séries est

$$\sum_1^\infty \frac{\log 2 - b_\mu}{\mu} x^\mu,$$

quantité positive croissant avec x et qui, puisque l'on a

$$\log 2 - b_\mu = \frac{1}{2\mu+1} - \left(\frac{1}{2\mu+2} - \frac{1}{2\mu+3}\right) - \ldots < \frac{1}{2\mu+1},$$

reste inférieure à

$$2\sum_1^\infty \frac{1}{2\mu(2\mu+1)} = 2\sum_1^\infty \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{2\mu+1}\right) = 2(1-\log 2);$$

on peut donc poser

$$\sum_1^\infty \frac{b_\mu x^\mu}{\mu} = \log 2 \sum_1^\infty \frac{x^\mu}{\mu} - \varepsilon''(x),$$

$\varepsilon''(x)$ étant une quantité positive plus petite que $2(1-\log 2)$. Finalement, on a

$$\psi(x) = -\frac{\log 2}{\pi}\log(1-x) - \varepsilon_1(x), \tag{8}$$

$\varepsilon_1(x)$ étant une quantité positive égale à $\varepsilon'(x) + \frac{1}{\pi}\varepsilon''(x)$, et par conséquent plus petite que

$$\frac{2}{\pi}\log 2(1-\log 2) + \frac{2}{\pi}(1-\log 2) = \frac{2}{\pi}(1-\log^2 2):$$

ainsi la différence entre $\psi(x)$ et $-\frac{\log 2}{\pi}\log(1-x)$ reste finie pour $x=1$.

4. Considérons maintenant le domaine C_1 du point 1 ; l'équation différentielle (1) ne changeant pas quand on y remplace x par $1-x$,

elle admet les deux solutions

$$(9)\qquad \begin{cases} P' = \varphi(1-x), \\ Q' = 4\psi(1-x) + \varphi(1-x)\log(1-x). \end{cases}$$

Les deux séries $\varphi(1-x)$ et $\psi(1-x)$ sont convergentes dans l'espace C_1; elles deviennent infinies au point zéro.

Dans l'espace C_{01}, les solutions P, P', Q, Q' conviennent également bien ; pour toutes les valeurs de x qui correspondent aux points contenus dans cet espace, on doit donc avoir

$$\begin{aligned} P' &= AP + BQ, \\ Q' &= A'P + B'Q, \end{aligned}$$

A, A', B, B' étant des constantes que je me propose de calculer. En remplaçant dans la première égalité P et Q par les valeurs qui résultent des égalités (6) et (8), il vient

$$\begin{aligned} \varphi(1-x) = A\varepsilon(x) - B\left[4\varepsilon_1(x) - \varepsilon(x)\log x + \frac{1}{\pi}\log x\log(1-x)\right] \\ - \frac{A + 4B\log 2}{\pi}\log(1-x); \end{aligned}$$

or, pour $x = 1$, $\varphi(1-x) = \varphi(0) = 1$; les premiers termes du second membre restent finis; par suite, le coefficient de $\log(1-x)$ doit être nul: donc

$$A + 4B\log 2 = 0.$$

D'ailleurs, en vertu de la même équation (6),

$$\varphi(1-x) = \varepsilon(1-x) - \frac{1}{\pi}\log x = A\varphi(x) + B[4\psi(x) + \varphi(x)\log x];$$

pour $x = 0$, tous les termes dans les deux membres, sauf les termes en $\log x$, restent finis; les coefficients de ces deux termes doivent donc être égaux pour $x = 0$, et l'on a

$$B = -\frac{1}{\pi}.$$

De même,

$$
\begin{aligned}
Q' &= 4\psi(1-x) + \log(1-x)\,\varphi(1-x) \\
&= A'\varepsilon(x) - B'\left[4\varepsilon_1(x) - \varepsilon(x)\log x - \frac{1}{\pi}\log x \log(1-x)\right] \\
&\quad - \frac{A' + 4B'\log 2}{\pi}\log(1-x);
\end{aligned}
$$

les coefficients de $\log(1-x)$ doivent être égaux dans les deux membres pour $x = 1$; par suite,

$$A' + 4B'\log 2 = -\pi;$$

en outre, en vertu de l'équation (8), on a

$$\psi(1-x) = -\frac{\log 2}{\pi}\log x - \varepsilon_1(1-x);$$

donc

$$
\begin{aligned}
Q' &= -4\varepsilon_1(1-x) - \frac{4\log 2}{\pi}\log x + \varphi(1-x)\log(1-x) \\
&= A'\varphi(x) + B'[4\psi(x) + \varphi(x)\log x];
\end{aligned}
$$

pour $x = 0$, les termes en $\log x$ deviennent seuls infinis, et l'égalité précédente entraîne

$$B' = -\frac{4\log 2}{\pi}.$$

En réunissant les résultats précédents, on a

$$A = \frac{4\log 2}{\pi}, \quad B = -\frac{1}{\pi}, \quad A' = \frac{16\log^2 2 - \pi^2}{\pi}, \quad B' = -\frac{4\log 2}{\pi},$$

$$AB' - A'B = 1,$$

et, par suite,

$$
(10) \qquad \left\{
\begin{aligned}
P' &= \frac{4\log 2}{\pi}P - \frac{1}{\pi}Q, \\
Q' &= \frac{16\log^2 2 - \pi^2}{\pi}P - \frac{4\log 2}{\pi}Q, \\
P &= \frac{4\log 2}{\pi}P' - \frac{1}{\pi}Q', \\
Q &= \frac{16\log^2 2 - \pi^2}{\pi}P' - \frac{4\log 2}{\pi}Q'.
\end{aligned}
\right.
$$

A ces formules on peut joindre les suivantes, qui en sont une conséquence et qui expriment $\varphi(1-x)$ et $\psi(1-x)$ au moyen de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(1-x) &= \frac{4\log 2 - \log x}{\pi}\varphi(x) - \frac{4}{\pi}\psi(x),\\ \psi(1-x) &= \frac{[4\log 2 - \log x][4\log 2 - \log(1-x)] - \pi^2}{4\pi}\varphi(x)\\ &\quad - \frac{4\log 2 - \log(1-x)}{\pi}\psi(x). \end{aligned}\right.$$

On aura $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ exprimés au moyen de $\varphi(1-x)$ et de $\psi(1-x)$, soit en résolvant ces deux équations par rapport à $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, soit en y changeant x en $1-x$.

Les formules (10) et (11), qui établissent en quelque sorte le passage de l'un des domaines C_0, C_1 à l'autre et qui sont valables dans tout l'espace C_{01} ont été établies en regardant x comme réel, compris entre zéro et 1, et les quantités $\log x$, $\log(1-x)$ comme réelles; si x est imaginaire, le point x étant, bien entendu, contenu dans l'espace C_{01}, on prendra pour $\log x$ et $\log(1-x)$ leurs déterminations principales, en regardant comme arguments de x et de $1-x$ les angles aigus dont un rayon vecteur couché sur la direction qui va du point zéro au point 1, ou sur la direction qui va du point 1 au point zéro, doit tourner autour du point zéro ou du point 1 pour rencontrer le point x. Si, la première rotation s'effectuant dans le sens direct, le premier angle doit être regardé comme positif, le second devra être regardé comme négatif, et inversement; de cette façon, en effet, les deux arguments deviennent nuls à la fois, et les deux fonctions $\log x$ et $\log(1-x)$ deviennent réelles pour un point de l'axe des x réels.

5. On peut sur les formules (10) et (11) faire les remarques suivantes.

Elles montrent d'abord que les séries $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont convergentes pour tous les points du contour de C_0 qui sont situés dans l'intérieur de C_1, sauf pour le point 1; pour tous ces points, en effet, les fonctions $\varphi(1-x)$ et $\psi(1-x)$ ont des valeurs finies, ainsi que $\log x$ et $\log(1-x)$; cette dernière fonction seule est infinie pour $x=1$. On tirera donc des formules (11), pour $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, des valeurs finies en tous les autres points que le point 1.

Pour ce qui concerne les valeurs réelles, on voit que, pour obtenir toutes les valeurs des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ entre zéro et 1, il suffira de calculer ces valeurs entre zéro et $\frac{1}{2}$; pour $x = \frac{1}{2}$, les deux formules (11) conduisent à l'identité numérique

$$(12) \qquad \frac{\psi\left(\frac{1}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{5\log 2 - \pi}{4}.$$

D'après les formules (10) la fonction

$$(13) \qquad (4\log 2 + \pi)\,P - Q = \pi(P + P') = \frac{\pi}{4\log 2 - \pi}(Q + Q')$$

ne change pas quand on y remplace x par $1 - x$; c'est donc une fonction paire de $\xi = x - \frac{1}{2}$; cette fonction de ξ est uniforme et continue dans l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{2}$, décrit du point $\xi = 0$, ou $x = \frac{1}{2}$, comme centre; elle est développable en série procédant suivant les puissances paires de ξ, convergente tant que le module de ξ sera inférieur à $\frac{1}{2}$. Or, l'équation différentielle (1), lorsqu'on y remplace x par $\xi + \frac{1}{2}$, devient

$$(14) \qquad \left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\xi\frac{dy}{d\xi} + y = 0;$$

elle admet la solution paire

$$y = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} c_\mu \xi^{2\mu},$$

où l'on suppose

$$c_0 = 1, \quad c_\mu = \frac{[1.5.9\ldots(4\mu - 3)]^2}{1.2.3\ldots 2\mu}:$$

par conséquent, la série

$$\sum_0^\infty c_\mu\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2\mu},$$

convergente dans le cercle dont j'ai parlé, ne doit différer que par un facteur constant de la fonction $P + P'$. Or, pour $x = \frac{1}{2}$, la série se réduit à 1 et $P + P'$ à $2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$; on a donc

$$(15) \qquad P + P' = 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\sum_0^\infty c_\mu \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2\mu}.$$

L'identité (13) montre que la fonction

$$P - \frac{Q}{4\log 2 - \pi} = -\left(P' - \frac{Q'}{4\log 2 - \pi}\right)$$

change de signe quand on remplace x par $1 - x$; c'est donc une fonction impaire de ξ; l'identité (12) peut d'ailleurs servir à vérifier qu'elle est nulle pour $\xi = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$. Cette fonction est développable en série dans le même cercle que $P + P'$; or, l'équation (14) admet comme solution impaire la série convergente dans ce cercle

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} k_\mu \xi^{2\mu+1},$$

où

$$k_0 = 1, \quad k_\mu = \frac{[3.7.11\ldots(4\mu - 1)]^2}{2.3.4\ldots(2\mu + 1)}:$$

la série

$$\sum_0^\infty k_\mu \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2\mu+1}$$

ne doit donc différer que par un facteur constant de la fonction $(\pi - 4\log 2)P + Q = -[(\pi - 4\log 2)P' + Q']$.

En écrivant que pour $x = \frac{1}{2}$ les dérivées des deux fonctions sont égales et en observant que pour $x = \frac{1}{2}$ la dérivée de la série se réduit à 1, on trouve que ce facteur constant est égal à

$$(\pi - 4\log 2)\,\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) + 4\,\psi'\left(\frac{1}{2}\right) - \log 2\,\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) + 2\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right),$$

où $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)$, $\psi'\left(\frac{1}{2}\right)$ représentent les valeurs, pour $x = \frac{1}{2}$, des dérivées $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ de $\varphi(x)$, $\psi(x)$; or cette quantité, ainsi que cela résulte immédiatement d'identités numériques que je vais établir, se réduit à $\frac{4}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}$; on a donc

$$(16)\qquad (\pi - 4\log 2)\mathrm{P} + \mathrm{Q} = \frac{4}{\varphi\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_0^\infty k_\mu \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2\mu+1}.$$

Les formules (15) et (16) permettraient d'exprimer P, Q, P′, Q′, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(1-x)$, $\psi(1-x)$ au moyen des deux séries

$$\sum_0^\infty c_\mu \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2\mu}, \quad \sum_0^\infty k_\mu \left(x - \frac{1}{2}\right)^{2\mu+1}.$$

En différentiant l'une ou l'autre des formules (11) et faisant ensuite $x = \frac{1}{2}$, on trouvera

$$(17)\qquad (\pi + 5\log 2)\,\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + 4\,\psi'\left(\frac{1}{2}\right).$$

D'un autre côté, en vertu d'une propriété bien connue, on a

$$\mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx} - \mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} = e^{\int \frac{1-2x}{x^2-x}dx} = \frac{c}{x^2 - x},$$

c étant une constante; en multipliant les deux membres par x et en calculant les valeurs des deux membres pour $x = 0$, on trouve aisément que cette constante est égale à -1, en sorte que l'on a

$$(18)\qquad \mathrm{P}\frac{d\mathrm{Q}}{dx} - \mathrm{Q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} + \frac{1}{x^2 - x} = 0$$

ou

$$4[\psi'(x)\,\varphi(x) - \psi(x)\,\varphi'(x)] + \varphi(x)\,\varphi'(x)\log x + \frac{1}{2}[\varphi(x)]^2 + \frac{1}{x^2 - x} = 0.$$

En faisant $x = \frac{1}{2}$ et combinant l'égalité résultante avec l'égalité (17), on trouve aisément

$$(19)\qquad \varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Les égalités (17) et (19) suffisent pour effectuer la réduction que nous avons mentionnée.

On peut encore remarquer que l'égalité (18), qui peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\frac{Q}{P} + \frac{1}{P^2(x^2-x)} = 0,$$

montre que le rapport $\frac{Q}{P}$ augmente constamment quand x varie de zéro à 1 : la fonction Q est d'abord négative et part de $-\infty$ pour $x=0$, elle augmente ensuite constamment; pour $x=\frac{1}{2}$, sa valeur $(4\log 2 - \pi)\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$ est encore négative; elle admet une racine unique, comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, pour laquelle elle change de signe; le rapport $\frac{Q}{P}$, devenu positif après cette racine, tend vers $4\log 2$ quand x tend vers 1, ainsi qu'il résulte des formules (10). La même égalité (18), mise sous la forme

$$4\frac{d}{dx}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{1-[\varphi(x)]^2(1-x)}{x(1-x)[\varphi(x)]^2},$$

montre de même que, lorsque x varie de zéro à 1, le rapport $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ va en augmentant constamment depuis la valeur initiale zéro jusqu'à la valeur finale $\log 2$; en effet, le dénominateur du second membre est, entre ces limites, essentiellement positif; il en est de même du numérateur, car l'inégalité

$$\frac{1.3.5\ldots 2\mu-1}{2.4.6\ldots 2\mu} < 1$$

entraîne l'inégalité

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^2 + \ldots < 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \ldots$$

ou

$$\varphi(x) < \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

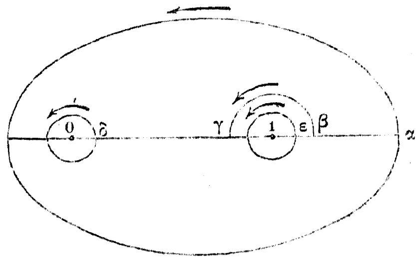
Ces remarques permettent de reconnaître si une solution quelconque $\alpha P + \beta Q$ de l'équation différentielle s'annule ou non quand x varie de zéro à 1; on peut même décider, au moyen de l'égalité (12), si cette racine, quand elle existe, est plus grande ou plus petite que $\frac{1}{2}$.

6. On peut tirer des formules (10) d'autres conséquences plus importantes.

Étant donnés deux points A et B situés dans les domaines C_0 ou C_1 et reliés par un chemin continu qui ne passe ni par le point zéro ni par le point 1, si l'on part du point A avec une solution déterminée de l'équation différentielle, on pourra trouver facilement, au moyen de ces formules, avec quelle solution on arrive au point B en suivant le chemin qui relie les deux points. Pour cela on commencera par ramener ce chemin à un autre équivalent, ayant mêmes extrémités et n'ayant pas de points situés en dehors des deux domaines; il suffira pour cela de le déformer convenablement, d'une manière continue, en ayant soin de ne jamais le faire passer par les points zéro et 1. Cela fait, supposons, pour fixer le langage, que le point A soit dans le domaine C_0, le point B dans le domaine C_1; la solution de l'équation différentielle avec laquelle on part du point A pourra être mise sous la forme $\alpha P + \beta Q$, α et β étant des constantes que l'on peut regarder comme connues, qui, si l'on donne, par exemple, les valeurs au point A de la fonction qui satisfait à l'équation différentielle et de sa dérivée, s'exprimeront sans difficulté au moyen de ces valeurs et des valeurs que prennent au point A les fonctions P, Q, $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dQ}{dx}$; tant que le chemin qui part du point A reste dans le domaine C_0, on conservera la même forme $\alpha P + \beta Q$, en suivant le long du chemin les variations de l'argument de x, variations qui déterminent les valeurs que prend la fonction multiforme $\log x$ qui figure dans Q; si le chemin passe dans le domaine C_1, il faudra nécessairement pour cela qu'il entre dans l'espace C_{01}; là on appliquera les formules (10), et la solution de l'équation se trouvera mise sous la forme $\alpha_1 P' + \beta_1 Q'$, α_1, β_1 étant des constantes connues, et, dès lors, on suivra la fonction sans difficulté tant que le chemin reste dans C_1; s'il faut ensuite revenir dans le domaine C_0, on appliquera encore, au passage par C_{01}, les formules (10), etc., jusqu'à ce qu'on soit arrivé au point B, et l'on y arrivera avec une solution déterminée $\alpha' P' + \beta' Q'$, les valeurs numériques des constantes α', β' étant connues ainsi que le sens de la fonction $\log(1-x)$ qui figure dans Q'. Je vais faire de cette méthode une application qui l'éclaircira et qui nous sera utile plus tard.

Supposons que la valeur initiale de x soit réelle, comprise entre 1 et 2, et se confonde avec la valeur finale; en d'autres termes, les deux points A et B dont il était question précédemment se confondent en un point α (*fig.* 1) situé sur l'axe des x réels, dans la portion du do-

Fig. 1.



maine C_1 extérieure au domaine C_0. Le chemin parcouru par la variable est le contour décrit dans le sens direct d'une aire simplement connexe, contenant les deux points zéro et 1; ce chemin équivaut à deux lacets ayant leurs origines en α et décrits successivement autour des points zéro et 1. Le premier de ces deux lacets peut être constitué comme il suit : on décrit d'abord, sur l'axe des x réels, le chemin rectiligne $\alpha\beta$ qui aboutit en un point β voisin du point 1; pour éviter ce dernier, on décrit, en passant au-dessus de lui, une demi-circonférence $\beta\gamma$; on suit ensuite le chemin rectiligne $\gamma\delta$, le long de l'axe des x réels, dans l'espace C_{01}; arrivé en δ, près du point zéro, on décrit autour de ce point, dans le sens direct, un petit cercle; revenu en δ, on retourne au point α par le chemin $\delta\gamma\beta\alpha$. Le second lacet est formé du chemin rectiligne $\alpha\varepsilon$ et d'une petite circonférence décrite autour du point 1; ce second lacet est, comme le premier, décrit dans le sens direct

Partons d'abord du point α avec la solution $P' = \varphi(1-x)$, uniforme dans le domaine C_1; cette fonction varie d'une façon continue le long du chemin $\alpha\beta\gamma$; en γ elle redevient réelle, et, puisque ce point est situé entre zéro et 1, on peut, à l'aide des formules (10), l'exprimer au moyen des fonctions P et Q; on a

$$P' = \frac{4\log 2}{\pi} P - \frac{1}{\pi} Q$$

Sur le chemin $\gamma\delta$, l'argument de x doit être regardé comme nul et $\log x$ comme réel. Cet argument augmente de 2π quand on décrit la petite circonférence autour du point zéro et que l'on revient en δ, en sorte que $\log x$ devient $\log x + 2\pi i$. Je désignerai, en général, par $[y]_0$ ce que devient la solution y de l'équation différentielle (1) quand parti du point x avec cette solution, on revient au même point après avoir décrit dans le sens direct un petit contour enfermant le point zéro. La série $\varphi(1-x)$, qui définit la fonction P' dans l'intérieur du domaine C_1, n'a plus de sens en dehors de ce domaine; mais, tant que l'on ne sort pas du domaine C_0, cette fonction peut être définie par l'égalité

$$P' = \frac{4\log 2}{\pi} P - \frac{1}{\pi} Q = \frac{4\log 2}{\pi} \varphi(x) - \frac{1}{\pi} [4\psi(x) + \varphi(x)\log x].$$

On aura donc, d'après ces conventions, quand on sera revenu en δ,

$$[P']_0 = \frac{4\log 2}{\pi} [P]_0 - \frac{1}{\pi} [Q]_0;$$

or

$$\begin{aligned} [P]_0 &= P, \\ [Q]_0 &= 4\psi(x) + \varphi(x)\log x + 2\pi i\varphi(x), \end{aligned}$$

en sorte que

$$[P']_0 = \frac{4\log 2}{\pi} P - \frac{1}{\pi}(Q + 2\pi i P),$$

ou, en vertu des formules (10),

$$[P']_0 = \frac{\pi - 8i\log 2}{\pi} P' + \frac{2i}{\pi} Q'.$$

Dans cette formule, $\log(1-x)$ qui figure dans Q' est réel tant qu'on reste sur la droite $\delta\gamma$; la formule qui figure dans le second membre convient dans la portion du chemin qu'il reste à parcourir; toutefois, en décrivant la demi-circonférence $\gamma\beta$, l'argument de $1-x$, d'abord nul, prend des valeurs négatives et en β devient égal à $-\pi$, valeur qu'il garde le long du chemin $\beta\alpha$, en sorte que l'on arrive en α, après avoir parcouru le premier lacet, avec la fonction

$$[P']_0 = \frac{\pi - 8i\log 2}{\pi} P' + \frac{2i}{\pi} Q',$$

en entendant que, dans Q', $\log(1-x)$ doit être remplacé par $\log(x-1)-\pi i$, $\log(x-1)$ désignant une quantité réelle. Il faut maintenant décrire le second lacet, en partant à nouveau du point α avec cette solution $[P']_0$; en employant des notations analogues à celles qui précèdent et, en désignant par $[P']_{01}$ la valeur finale cherchée, on aura

$$[P']_1 = P', \quad [Q']_1 = Q' + 2\pi i P',$$

$$[P']_{01} = \frac{\pi - 8i\log 2}{\pi}[P']_1 + \frac{2i}{\pi}[Q']_1,$$

ou, finalement,

$$(20) \qquad [P']_{01} = \frac{-3\pi - 8i\log 2}{\pi}P' + \frac{2i}{\pi}Q'.$$

Dans cette dernière formule, $\log(1-x)$ qui figure dans Q' a toujours le même sens, c'est $\log(x-1)-\pi i$.

Conservant toujours la même signification pour ce logarithme et regardant ainsi, au point initial α, l'argument de $1-x$ comme étant égal à $-\pi$, faisons les mêmes calculs en partant du point α avec la fonction Q'. Quand on arrivera en γ, l'argument de $1-x$ sera nul et $\log(1-x)$ réel; en vertu des formules (10), on aura dans l'espace C_{01}

$$Q' = \frac{16\log^2 2 - \pi^2}{\pi}P - \frac{4\log 2}{\pi}Q,$$

d'où, en conservant le même système de notations,

$$\begin{aligned}[Q']_0 &= \frac{16\log^2 2 - \pi^2}{\pi}P - \frac{4\log 2}{\pi}(Q + 2\pi i P) \\ &= -\frac{32 i\log^2 2}{\pi}P' + \frac{\pi + 8i\log 2}{\pi}Q',\end{aligned}$$

$$[Q']_{01} = -\frac{32 i\log^2 2}{\pi}P' + \frac{\pi + 8i\log 2}{\pi}(Q' + 2\pi i P'),$$

ou, finalement,

$$(21) \qquad [Q']_{01} = \frac{2i(\pi + 4i\log 2)^2}{\pi}P' + \frac{\pi + 8i\log 2}{\pi}Q',$$

le sens de $\log(1-x)$ qui figure dans Q' étant le même que pour la valeur initiale.

7. Considérons maintenant le domaine C_∞ formé par la portion du plan extérieure au cercle C_0. En remplaçant dans l'équation différentielle (1) x par $\frac{1}{t}$, y par $u\sqrt{t}$, on obtient l'équation

$$t(t-1)\frac{d^2u}{dt^2} - (1-2t)\frac{du}{dt} + \frac{1}{4}u = 0,$$

qui est de même forme que l'équation (1): on en conclut que cette dernière admet les deux solutions

$$(22)\quad \begin{cases} P'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right), \\ Q'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left[4\psi\left(\dfrac{1}{x}\right) + \log\dfrac{1}{x}\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]. \end{cases}$$

Dans ces formules, les séries qui définissent $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ sont convergentes dans tout le domaine C_∞; quant à $\log\frac{1}{x} = -\log x$, je le supposerai remplacé par sa détermination principale; l'argument de x sera facilement connu si l'on se donne la valeur initiale de la variable, y compris son argument et le chemin qu'elle a suivi; de même, si le module de x est ρ et son argument θ, je conviendrai de regarder $\sqrt{x}$ comme étant égal à $+\sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$.

Les deux domaines C_1 et C_∞ empiètent l'un sur l'autre : il doit donc exister des constantes A, A', B, B', telles que, dans l'espace commun $C_{1\infty}$, on ait identiquement

$$P'' = A\,P' + B\,Q',$$
$$Q'' = A'P' + B'Q'.$$

Les coefficients B, B' se déterminent par un procédé qui a déjà été employé. Supposons x réel, compris entre 1 et 2, et, dans les égalités

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = A\varphi(1-x) + B[4\psi(1-x) + \log(1-x)\varphi(1-x)],$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left[4\psi\left(\frac{1}{x}\right) + \log\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$= A'\varphi(1-x) + B'[4\psi(1-x) + \log(1-x)\varphi(1-x)],$$

faisons tendre x vers 1; d'après les formules (7) et (8), $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ et $\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ diffèrent respectivement de

$$-\frac{1}{\pi}\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

et de

$$-\frac{\log 2}{\pi}\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

de quantités qui restent finies pour $x = 1$; on en conclut aisément que, pour que les deux égalités précédentes puissent subsister dans le voisinage de cette limite, il faut que l'on ait

$$\text{(23)}\qquad B = -\frac{1}{\pi},\quad B' = -\frac{4\log 2}{\pi}.$$

Le même procédé ne permettrait pas de trouver A et A'; en faisant tendre x vers 2, on introduirait en effet des séries dont on ne connaît pas la somme; mais, en se servant des résultats établis à la fin du dernier paragraphe, on pourra calculer ces deux constantes.

Supposons en effet que l'on parte du point α, situé, comme il a été expliqué, sur l'axe des x réels dans le domaine $C_{1\infty}$ avec la solution P'', et qu'on décrive dans le sens direct le contour d'une aire simplement connexe, enfermant les points zéro, 1, contour que l'on peut supposer entièrement situé dans le domaine C_{∞}; la fonction uniforme dans ce domaine, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ variera d'une façon continue le long de ce contour, et l'on reviendra évidemment au point de départ avec la fonction

$$-\frac{1}{\sqrt{x}}\varphi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Mais ce contour équivaut à l'ensemble des deux lacets qui ont été définis dans le précédent paragraphe, et, puisque l'on est parti du point α avec la fonction

$$P'' = AP' + BQ',$$

on a dû y revenir avec la fonction

$$A[P']_{01} + B[Q']_{01};$$

on doit donc avoir

$$A[P']_{01} + B[Q']_{01} = -AP' - BQ',$$

ou, en remplaçant $[P']_{01}$ et $[Q']_{01}$ par les valeurs (20) et (21), et égalant dans les deux membres les coefficients de P' et de Q',

$$A\,\frac{-3\pi - 8i\log 2}{\pi} + B\,\frac{2i(\pi + 4i\log 2)^2}{\pi} = -A,$$

$$A\,\frac{2i}{\pi} + B\,\frac{\pi + 8i\log 2}{\pi} = -B.$$

Ces deux équations rentrent l'une dans l'autre et donnent

$$A = (-4\log 2 + i\pi)B. \tag{24}$$

On raisonnera de la même façon sur la seconde solution

$$Q'' = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[4\psi\left(\frac{1}{x}\right) - \log x\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right] = A'P' + B'Q';$$

en partant du point α avec la solution Q'' et parcourant le même chemin que précédemment, on reviendra avec la solution

$$-\frac{1}{\sqrt{x}}\left[4\psi\left(\frac{1}{x}\right) - (\log x + 2\pi i)\,\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -Q'' + 2\pi i P''.$$

On devra donc avoir

$$-Q'' + 2\pi i P'' = A'[P']_{01} + B'[Q']_{01} = -A'P' - B'Q' + 2\pi i(AP' + BQ'),$$

ou, en remplaçant encore $[P']_{01}$ et $[Q']_{01}$ par les valeurs (20) et (21), et égalant dans les deux membres les coefficients de P' et de Q', on trouvera les deux équations

$$A'\,\frac{-3\pi - 8i\log 2}{\pi} + B'\,\frac{2i(\pi + 4i\log 2)^2}{\pi} = \frac{8\pi i\log 2 + 2\pi^2 - \pi}{\pi}\,A',$$

$$A'\,\frac{2i}{\pi} + B'\,\frac{\pi + 8i\log 2}{\pi} = \frac{-2\pi i - \pi}{\pi}\,B'.$$

Ces deux équations rentrent l'une dans l'autre et donnent, en simplifiant,

$$-A' + B'i(\pi + 4i\log 2) = \pi. \tag{25}$$

En réunissant les formules (23), (24) et (25), on voit que

$$A = \frac{4\log 2 - i\pi}{\pi}, \quad B = -\frac{1}{\pi},$$

$$A' = \frac{16\log^2 2 - 4\pi i \log 2 - \pi^2}{\pi}, \quad B' = -\frac{4\log 2}{\pi},$$

$$AB' - A'B = -1,$$

et, par suite,

$$(26) \quad \begin{cases} P'' = \dfrac{4\log 2 - i\pi}{\pi} P' - \dfrac{1}{\pi} Q', \\[2mm] Q'' = \dfrac{16\log^2 2 - 4\pi i \log 2 - \pi^2}{\pi} P' - \dfrac{4\log 2}{\pi} Q', \\[2mm] P' = \dfrac{4\log 2}{\pi} P'' - \dfrac{1}{\pi} Q'', \\[2mm] Q' = \dfrac{16\log^2 2 - 4\pi i \log 2 - \pi^2}{\pi} P'' - \dfrac{4\log 2 - i\pi}{\pi} Q''. \end{cases}$$

On reconnaît aisément que, dans ces formules, on doit, lorsque x est réel, regarder $\sqrt{x}$ comme positif et $\log\frac{1}{x} = -\log x$ comme réel, l'argument de x étant nul; au contraire, l'argument de $1 - x$ est égal à $-\pi$, en sorte que $\log(1-x)$ représente $\log(x-1) - \pi i$. Ces formules conviennent pour les points de l'espace $C_{1\infty}$, l'argument de x variant dans cet espace depuis $-\frac{\pi}{3}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{3}$ et celui de $1-x$ depuis $-\pi - \frac{\pi}{3}$ jusqu'à $-\pi + \frac{\pi}{3}$, en sorte qu'il ne peut y avoir de difficulté sur le sens qu'il faut attribuer aux fonctions multiformes $\sqrt{x}$, $\log x$, $\log(1-x)$. Au surplus, on peut remplacer les formules (26) par les suivantes, où ne figurent plus que des quantités réelles quand x est réel, et où $\sqrt{x}$ doit être regardé comme positif :

$$(27) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{4\log 2}{\pi} \varphi(1-x) - \dfrac{1}{\pi}[4\psi(1-x) + \log(x-1)\varphi(1-x)], \\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left[4\psi\left(\dfrac{1}{x}\right) - \log x\, \varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] \\[2mm] \quad = \dfrac{16\log^2 2 - \pi^2}{\pi} \varphi(1-x) - \dfrac{4\log 2}{\pi}[4\psi(1-x) + \log(x-1)\varphi(1-x)], \end{cases}$$

ou, en résolvant,

$$(27\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(1-x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left\{\frac{4\log 2}{\pi}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\pi}\left[4\psi\left(\frac{1}{x}\right)+\log\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\},\\ &4\psi(1-x)+\log(x-1)\varphi(1-x)\\ &\quad=\frac{1}{\sqrt{x}}\left\{\frac{16\log^2 2-\pi^2}{\pi}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{4\log 2}{\pi}\left[4\psi\left(\frac{1}{x}\right)+\log\frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Lorsque le point x se déplace dans l'espace $C_{1\infty}$, le point $1-x$ se déplace dans la portion de l'espace C_0 qui n'est point recouverte par l'espace C_{01} et le point $\frac{1}{x}$ dans la portion du domaine C_0 qui s'étend à droite de la corde commune aux deux cercles C_0, C_1; dans cet espace, les séries φ et ψ sont convergentes, sauf au point 1. En combinant ces conclusions avec celles qui résultent des équations (11), on voit que les séries $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont convergentes sur tous les points du contour du domaine C_0, sauf au point 1; on voit de plus que pour avoir les valeurs de ces deux séries pour tous les points du domaine C_0, il suffit de calculer ces valeurs pour les points contenus dans la moitié de l'espace C_{01}, par exemple dans la moitié qui s'étend à gauche de la corde commune aux deux cercles C_0, C_1, les formules (26) permettant de déduire de ces valeurs les valeurs relatives aux points situés dans l'autre moitié, et les formules (27 *bis*), ou celles qu'on en déduit en remplaçant x par $1-x$, permettant ensuite d'obtenir les valeurs relatives aux autres points; en particulier, pour ce qui concerne les valeurs réelles de la variable, il suffira de calculer $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ pour les valeurs comprises entre zéro et $\frac{1}{2}$.

Au surplus, en comparant les formules (27 *bis*) aux formules (10), on en déduit

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(1-x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\varphi\left(\frac{x-1}{x}\right),\\ &4\psi(1-x)+\log(x-1)\varphi(1-x)\\ &\quad=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[4\psi\left(\frac{x-1}{x}\right)+\log\frac{x-1}{x}\varphi\left(\frac{x-1}{x}\right)\right],\end{aligned}\right.$$

la dernière équation pouvant être remplacée par la suivante :

$$\psi(1-x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\psi\left(\frac{x-1}{x}\right)-\frac{1}{4}\log x\,\varphi\,\frac{x-1}{x}\right].$$

Ces formules, il est vrai, ne sont établies que pour les points x contenus dans l'espace $C_{1\infty}$; mais, d'après leur forme, elles doivent évidemment subsister pour tous les points pour lesquels les séries qui y figurent sont convergentes. Or les séries $\varphi\left(\frac{x-1}{x}\right)$, $\psi\left(\frac{x-1}{x}\right)$ sont convergentes pour tous les points du plan qui s'étendent à droite de la corde commune aux deux cercles C_0, C_1; les formules (28) subsistent donc pour tous les points du domaine C_1 qui sont situés à droite de cette corde commune. En changeant x en $1-x$, on obtiendra les formules

$$(29)\qquad \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\,\varphi\left(\dfrac{x}{x-1}\right), \\ \psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\left[\psi\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - \dfrac{1}{4}\log(1-x)\,\varphi\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right], \end{cases}$$

qui conviennent dans la portion du domaine C_0 qui s'étend à gauche de la corde commune; en particulier, pour $x=-1$, on trouvera, en tenant compte de l'identité (12),

$$(30)\qquad \begin{cases} \varphi(-1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right), \\ \psi(-1) = \dfrac{4\log 2 - \pi}{\sqrt{2}}\,\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$

La première équation (28) et la première équation (29) montrent que dans les portions du plan, limitées comme il a été expliqué, les fonctions

$$(31)\qquad \mathfrak{P}' = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\varphi\left(\frac{x-1}{x}\right), \quad \mathfrak{P} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

sont des solutions de l'équation différentielle linéaire; ces fonctions doivent évidemment continuer à satisfaire à l'équation différentielle tant que les séries qui les représentent sont convergentes, c'est-à-dire tant que le point x reste, pour la première série, à droite de la corde commune aux deux cercles C_0, C_1, et, pour la seconde série, à gauche.

Dans les mêmes régions respectives, les fonctions

$$(32)\quad \begin{cases} \mathfrak{Q}' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left[4\psi\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \log\dfrac{1-x}{x}\,\varphi\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\right], \\ \mathfrak{Q} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\left[4\psi\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + \log\dfrac{x}{1-x}\,\varphi\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right] \end{cases}$$

satisfont à la même équation différentielle. Dans les portions du plan où les membres des diverses équations ont un sens, on aura

$$\mathfrak{P} = \mathrm{P},\quad \mathfrak{Q} = \mathrm{Q},\quad \mathfrak{P}' = \mathrm{P}',\quad \mathfrak{Q}' = \mathrm{Q}';$$

on parviendrait d'ailleurs sans difficulté à établir directement ces équations en s'appuyant sur ce que l'équation différentielle (1), lorsqu'on y remplace x par $\dfrac{x}{x-1}$ et y par $y\sqrt{1-x}$, reprend la même forme.

On remarquera encore que les fonctions

$$(33)\quad \begin{cases} \mathrm{P}''' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\,\varphi\left(\dfrac{1}{1-x}\right), \\ \mathrm{Q}''' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\left[4\psi\left(\dfrac{1}{1-x}\right) + \log\dfrac{1}{1-x}\,\varphi\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\right] \end{cases}$$

satisfont aussi à l'équation différentielle; elles conviennent dans la portion du plan située en dehors du cercle C_1. En changeant dans les formules (26) x en $1-x$, on obtiendra des relations analogues entre P''', Q''', P, Q qui seront valables dans la portion du domaine C_0 extérieure au domaine C_1. Dans toute la portion du plan extérieure à l'ensemble des deux domaines C_0, C_1, on doit pouvoir passer des solutions P''', Q''' aux solutions P'', Q''; les relations entre les fonctions

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right),\quad \psi\left(\frac{1}{x}\right),\quad \varphi\left(\frac{1}{1-x}\right);\quad \psi\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

qui permettent d'effectuer ce passage se déduisent immédiatement des formules (29) en y remplaçant x par $\frac{1}{x}$. Enfin les formules (26) donnent le passage des solutions P'', Q'' aux solutions $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ ou des solutions P''', Q''' aux solutions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$; en y changeant x en $\dfrac{x-1}{x}$, on obtiendra les formules de passage entre les solutions P'', Q'' et $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, puis, si l'on veut, les formules de passage entre les solutions P''', Q''' et $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$. Je crois inutile d'insister davantage sur ces diverses formules, non plus que sur la délimitation des portions du plan où elles s'appliquent. Les formules de passage qui ont été établies, celles que je viens d'indiquer permettent dans tous les cas de résoudre sans aucune difficulté la question suivante, qui a été l'objet principal de mes recherches :

Étant donnés deux points quelconques A, B *du plan reliés entre eux par un chemin continu quelconque, assujetti seulement à ne passer par aucun des points* 0, 1, *supposant que l'on parte du point* A *avec une solution de l'équation différentielle* (1) *formée linéairement avec deux des fonctions* P, Q, P' Q', P'', Q'', P''', Q'', $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$ *qui ont, au point* A, *une valeur finie, et que l'on suive le chemin* AB, *on demande d'exprimer au moyen de deux de ces fonctions qui conviennent pour la portion du plan où se trouve le point* B *la solution avec laquelle on arrive en ce point.*

J'ajouterai, en terminant, quelques mots relativement aux valeurs réelles de la variable.

La première équation (29) met en évidence l'existence d'une solution de l'équation différentielle qui demeure réelle, positive, continue, sauf pour $x = 1$ quand x varie de $-\infty$ à 1 ; elle peut être représentée par la fonction $\varphi(x)$ quand x est compris entre -1 et $+1$, et par la fonction $\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)$ quand x est compris entre $-\infty$ et $+\frac{1}{2}$; il est aisé de voir que, lorsque x augmente de $-\infty$ à 1, cette fonction augmente constamment depuis zéro jusqu'à $+\infty$: d'une part, la fonction $\varphi(x)$ augmente constamment depuis 1 jusqu'à $+\infty$ quand x varie de 0 à 1; d'autre part, la dérivée

$$\frac{(1-x)\,\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right) - 2\,\varphi'\left(\frac{x}{x-1}\right)}{2(1-x)^2\sqrt{1-x}}$$

de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)$ est constamment positive pour les valeurs négatives de x : en effet, à cause de l'inégalité (4)

$$a_\mu < \frac{1}{\mu\pi},$$

on voit que, pour des valeurs positives de x, on a

$$\varphi'(x) = \sum_1^\infty \mu a_\mu x^{\mu-1} < \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty x^{\mu-1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\pi(1-x)};$$

or, lorsque x est négatif, la quantité $\frac{x}{x-1}$ étant positive, on a

$$\varphi'\left(\frac{x}{x-1}\right) < \frac{1-x}{\pi};$$

le numérateur de la dérivée est donc supérieur à

$$(1-x)\left[\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{2}{\pi}\right],$$

quantité essentiellement positive, puisque, pour des valeurs positives de x, $\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)$ est toujours supérieur à 1. D'ailleurs $\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)$, pour $x = -\infty$, devient infini comme un logarithme, et, par suite,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

a pour limite zéro.

Quant à la seconde égalité (29) et à la fonction qui figure dans le second membre et qui continue en quelque sorte la fonction $\psi(x)$ quand x varie en deçà de -1, on peut remarquer qu'elle est constamment négative pour x négatif et que le rapport $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, où, quand x est plus petit que -1, on entend par $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ les seconds membres des égalités (29), augmente constamment depuis $-\infty$ jusqu'à $\log 2$ lorsque x augmente de $-\infty$ à 1. Une partie de cette proposition a déjà été démontrée, et, pour la compléter, il suffit d'examiner le cas des valeurs négatives. Le rapport en question peut se mettre sous la forme

$$\frac{\psi\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)} - \frac{1}{4}\log(1-x),$$

et, en faisant

$$\xi = \frac{x}{x-1}, \quad x = \frac{\xi}{\xi-1},$$

il devient

$$\frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)} + \frac{1}{4}\log(1-\xi),$$

dont la dérivée par rapport à ξ,

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)} - \frac{1}{4(1-\xi)},$$

peut, en vertu d'une égalité précédemment établie, être mise sous la forme

$$\frac{1-[\varphi(\xi)]^2(1-\xi)}{4\xi(1-\xi)[\varphi(\xi)]^2} - \frac{1}{4(1-\xi)} = \frac{1-[\varphi(\xi)]^2}{4\xi(1-\xi)[\varphi(\xi)]^2}.$$

Or, lorsque x augmente de $-\infty$ à 0, ξ diminue de 1 à 0, et la fonction précédente est évidemment négative; par suite, la quantité

$$\frac{\psi\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)} - \frac{1}{4}\log(1-x)$$

augmente constamment depuis $-\infty$ jusqu'à 0 : c'est ce qui avait été annoncé.