ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DÉSIRÉ ANDRÉ

Sur le développement de la fonction elliptique $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes du module

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 151-168
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__151_0>

SUR LE

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION ELLIPTIQUE

$\lambda(x)$

SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES DU MODULE,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

INTRODUCTION.

1. La fonction elliptique $\lambda(x)$ est une fonction de x définie par l'équation différentielle du premier ordre

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = 1 - (1 + k^2)\lambda^2 + k^2\lambda^4 \tag{1}$$

et par la condition de s'annuler en même temps que la variable x.

Il suit de cette définition que $\lambda(x)$ est une fonction impaire de x, développable suivant les puissances croissantes de cette variable et telle que, dans ce développement, chaque puissance de x a pour coefficient un polynôme entier en k^2, cette quantité k étant justement ce qu'on appelle le *module* de la fonction.

Supposons que, dans ce développement de $\lambda(x)$, on réunisse tous les termes indépendants de k, tous ceux qui contiennent k^2 en facteur, tous ceux qui contiennent k^4, et ainsi de suite ; on obtiendra pour $\lambda(x)$ un développement nouveau, ordonné suivant les puissances croissantes du module, et dans lequel chaque puissance de k sera multipliée par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

On n'a encore, du moins à notre connaissance, rien publié sur ce développement de $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes du module.

L'étude que nous en faisons constitue l'objet principal et comme le fondement du présent Mémoire.

2. Nous prenons pour point de départ l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = -(1+k^2)\lambda + 2k^2\lambda^3, \tag{2}$$

qui se déduit de l'équation (1) à l'aide d'une simple dérivation par rapport à x; nous supposons la fonction $\lambda(x)$, ainsi que son cube $\lambda^3(x)$, ordonnée suivant les puissances croissantes de k^2; nous indiquons la manière de calculer de proche en proche, d'une façon récurrente, fort régulière et fort simple, les coefficients des puissances successives de k^2 dans le développement de $\lambda(x)$: tout cela constitue pour l'équation (2), et par suite pour l'équation (1), une véritable méthode d'intégration.

A l'aide de cette méthode, nous calculons, dans le développement de $\lambda(x)$ suivant les puissances de k^2, le terme indépendant de k, le coefficient de k^2 et celui de k^4. L'examen des trois expressions que nous obtenons ainsi nous conduit à admettre que, dans ce développement, le coefficient d'une puissance quelconque de k^2 est simplement une somme algébrique de sinus et de cosinus de x et de multiples impairs de x multipliés respectivement d'abord par des facteurs numériques, ensuite les sinus par des puissances paires de x et les cosinus par des puissances impaires. Cette forme générale des coefficients n'est obtenue que par induction; mais, après l'avoir obtenue, nous établissons en toute rigueur son exactitude et sa généralité.

Nous avons le premier fait connaître ([1]) la forme générale des coefficients des différentes puissances de k^2 dans les polynômes entiers en k^2 qui multiplient les différentes puissances de x dans les développements, suivant les puissances croissantes de x, soit des trois fonctions elliptiques, soit des puissances de ces trois fonctions. Nous avons exposé en détail ([2]) la méthode qui nous a conduit à ces résultats: c'est une méthode combinatoire, assez difficile à suivre, mais qui est une

---

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 10 juillet 1876.
([2]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 265.

méthode d'invention réellement féconde. Grâce à ce qui précède sur le développement de $\lambda(x)$ suivant les puissances du module, nous retrouvons, d'une manière relativement très-simple, et pour le cas particulier du développement de $\lambda(x)$, la plupart de nos résultats.

Enfin, généralisant toute la partie précédente de ce travail, nous montrons que nous pouvons appliquer les mêmes procédés non-seulement à la fonction elliptique $\mu(x)$, mais encore à une infinité de fonctions nouvelles, définies par des équations différentielles plus compliquées, dont nous écrivons le type. Nous faisons voir comment on peut intégrer de proche en proche ces nouvelles équations différentielles; nous donnons, pour les fonctions qu'elles définissent, la forme générale des coefficients de leurs développements suivant les puissances ascendantes, soit d'une quantité analogue au module, soit de la variable indépendante elle-même, et nous faisons remarquer que cette forme des coefficients subsiste pour les développements de toutes les puissances de ces fonctions dont l'exposant est positif et entier.

3. La plupart des résultats obtenus dans le présent travail, ainsi que la méthode que nous y avons suivie, ont été indiqués par nous dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, dans la séance du 29 octobre 1877.

CHAPITRE I.

MÉTHODE D'INTÉGRATION.

4. Reprenons l'équation différentielle

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = -(1+k^2)\lambda + 2k^2\lambda^3, \tag{2}$$

que nous pouvons écrire sous cette nouvelle forme

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \lambda = k^2(2\lambda^3 - \lambda), \tag{3}$$

et supposons les deux fonctions $\lambda(x)$ et $\lambda^3(x)$ ordonnées suivant les puissances croissantes de k^2.

Si nous désignons par $u_0, u_1, u_2, \ldots, U_0, U_1, U_2, \ldots$ les coefficients des termes successifs de ces deux développements, nous avons

$$\lambda(x) = u_0 + u_1 k^2 + u_2 k^4 + u_3 k^6 + \ldots$$

et

$$\lambda^3(x) = \Lambda(x) = U_0 + U_1 k^2 + U_2 k^4 + U_3 k^6 + \ldots .$$

Cela posé, identifions les deux membres de l'équation (3) en y égalant les coefficients des mêmes puissances de k^2; nous trouvons l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u_t}{dx^2} + u_t = 2\,U_{t-1} - u_{t-1}, \tag{4}$$

qui subsiste pour toutes les valeurs entières et non négatives de l'indice t si l'on convient de regarder comme nulles les quantités U_{-1} et u_{-1}.

5. Cette dernière équation permet de calculer de proche en proche, d'une façon très-régulière et très-simple, les quantités $u_0, u_1, u_2, \ldots$, c'est-à-dire les coefficients du développement considéré de $\lambda(x)$.

Supposons, en effet, que nous connaissions $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{t-1}$. Nous en pouvons déduire U_{t-1}, car cette quantité ne dépend évidemment que de celles que, à cet instant même, nous supposons connues; et, U_{t-1} étant ainsi déterminé, l'intégration de l'équation (4) nous donnera u_t.

Nous allons expliquer en détail, dans l'hypothèse où nous venons de nous placer, d'abord comment nous calculons U_{t-1}, ensuite par quel procédé nous intégrons l'équation (4).

6. De l'égalité

$$\Lambda = \lambda^3$$

nous déduisons immédiatement, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à k,

$$\lambda \frac{d\Lambda}{dk} = 3\Lambda \frac{d\lambda}{dk},$$

c'est-à-dire, après simplification,

$$\begin{aligned}(u_0 + u_1 k^2 + u_2 k^4 + \ldots)&(U_1 + 2\,U_2 k^2 + 3\,U_3 k^4 + \ldots)\\ &= 3(U_0 + U_1 k^2 + U_2 k^4 + \ldots)(u_1 + 2u_2 k^2 + 3u_3 k^4 + \ldots).\end{aligned}$$

En égalant aux deux membres de cette dernière égalité les coefficients des mêmes puissances de k^2, nous obtenons la relation

$$(5)\qquad \begin{cases} t\,\mathrm{U}_t u_0 + (t-1)\,\mathrm{U}_{t-1}u_1 + (t-2)\,\mathrm{U}_{t-2}u_2 + \ldots + 1\,\mathrm{U}_1 u_{t-1} \\ \quad = 3\,[t u_t \mathrm{U}_0 + (t-1)\,u_{t-1}\mathrm{U}_1 + (t-2)\,u_{t-2}\mathrm{U}_2 + \ldots + 1\,u_1\mathrm{U}_{t-1}], \end{cases}$$

qui nous permet de calculer un U d'indice quelconque dès que nous connaissons tous les U d'indices inférieurs et tous les u d'indices non supérieurs.

Cette formule est, à la vérité, illusoire lorsque t est égal à zéro; mais, dans ce cas, on a évidemment

$$\mathrm{U}_0 = u_0^3.$$

7. Revenons maintenant, pour en indiquer le mode d'intégration, à notre équation différentielle

$$(4)\qquad \frac{d^2 u_t}{dx^2} + u_t = 2\,\mathrm{U}_{t-1} - u_{t-1}.$$

C'est une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, sans second membre dans le cas où t est nul, avec second membre dans tous les autres cas.

Lorsque t est égal à zéro, notre équation se réduit à

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + u_0 = 0,$$

qu'on intègre immédiatement, et de l'intégrale générale de laquelle on détermine les deux constantes par ces conditions que, lorsque x s'annule, u_0 devienne égal à zéro et sa dérivée première égale à l'unité. On trouve ainsi

$$u_0 = \sin x.$$

Pour toutes les autres valeurs de t, notre équation conserve sa forme générale

$$\frac{d^2 u_t}{dx^2} + u_t = 2\,\mathrm{U}_{t-1} - u_{t-1}.$$

Si l'on suppose, pour un moment, cette équation privée de son second membre, on trouve immédiatement pour son intégrale générale l'expression

$$D_t \sin x + E_t \cos x.$$

La méthode de la variation des constantes nous donne, après le rétablissement du second membre, les deux relations

$$\frac{dD_t}{dx}\sin x + \frac{dE_t}{dx}\cos x = 0,$$

$$\frac{dD_t}{dx}\cos x - \frac{dE_t}{dx}\sin x = 2\,U_{t-1} - u_{t-1},$$

d'où nous tirons

$$\frac{dD_t}{dx} = \quad (2\,U_{t-1} - u_{t-1})\cos x,$$

$$\frac{dE_t}{dx} = -(2\,U_{t-1} - u_{t-1})\sin x,$$

et, par suite,

$$D_t = d_t + \int_0^x (2\,U_{t-1} - u_{t-1})\cos x\,dx,$$

$$E_t = e_t - \int_0^x (2\,U_{t-1} - u_{t-1})\sin x\,dx.$$

Il en résulte immédiatement que l'intégrale générale de l'équation (4), prise avec son second membre, est représentée par l'expression

$$d_t \sin x + e_t \cos x$$
$$+ \sin x \int_0^x (2\,U_{t-1} - u_{t-1})\cos x\,dx - \cos x \int_0^x (2\,U_{t-1} - u_{t-1})\sin x\,dx.$$

Nous savons d'ailleurs que, l'indice t étant supérieur à zéro, u_t, ainsi que sa dérivée première, s'annule en même temps que x, et nous concluons de là que les constantes d_t et e_t sont nulles. Donc u_t est donné par la formule

$$(6)\quad u_t = \sin x \int_0^x (2\,U_{t-1} - u_{t-1})\cos x\,dx - \cos x \int_0^x (2\,U_{t-1} - u_{t-1})\sin x\,dx,$$

qui permet, on le voit, grâce au procédé donné plus haut pour le calcul de U_{t-1}, de calculer de proche en proche les valeurs successives de u_t, c'est-à-dire les coefficients des puissances successives de k^2 dans le développement considéré de $\lambda(x)$.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT SUIVANT LES PUISSANCES DE k.

8. Pour parvenir à la forme des coefficients dans le développement de $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes de k^2, rappelons d'abord l'égalité déjà trouvée

$$u_0 = \sin x,$$

puis appliquons les procédés que nous venons d'indiquer au calcul des quantités U_0, u_1, U_1 et u_2. Nous obtenons successivement ces quatre résultats :

$$U_0 = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x),$$

$$u_1 = \frac{1}{16}(\sin x + \sin 3x) - \frac{x}{4}\cos x,$$

$$U_1 = \frac{1}{64}(2\sin x + \sin 3x - \sin 5x) - \frac{x}{16}(\cos x - \cos 3x),$$

$$u_2 = \frac{1}{256}(7\sin x + 8\sin 3x + \sin 5x) - \frac{x}{64}(6\cos x + 3\cos 3x) - \frac{x^2}{64} 2\sin x.$$

Cela étant, sans pousser plus loin le calcul des quantités u et U, et rien qu'à l'examen des expressions que nous venons d'écrire, nous sommes conduit à attribuer à u_t et à U_t certaines formes générales.

Nous attribuons à u_t la forme donnée par l'égalité

$$u_t = \Sigma\, p_{i,j}\, x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma q_{i,j}\, x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

dans laquelle nous désignons par $p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ des coefficients numériques, par i et j des entiers soit positifs, soit nuls, et où les Σ s'étendent, le premier à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers i et j qui satisfont à la condition

$$2i+j \leqq t,$$

et le second à tous les systèmes satisfaisant à la condition

$$2i+1+j \leqq t.$$

Nous attribuons à U_t la forme donnée par l'égalité

$$U_t = \Sigma P_{i,j}\, x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma Q_{i,j}\, x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

dans laquelle nous désignons par $P_{i,j}$ et $Q_{i,j}$ des coefficients numériques, par i et j des entiers soit positifs, soit nuls, et où les Σ s'étendent, le premier à tous les systèmes possibles de valeurs des nombres i et j qui satisfont aux deux relations

$$2i \leqq t, \quad 2i+j \leqq t+1,$$

et le second à tous les systèmes possibles satisfaisant aux deux relations

$$2i+1 \leqq t, \quad 2i+1+j \leqq t+1.$$

9. Ce que nous cherchons présentement, c'est la forme de u_t. Nous ne nous occupons que subsidiairement de celle de U_t. Les deux formes d'ailleurs que nous venons d'indiquer pour u_t et U_t sont les résultats de simples inductions. Afin de montrer qu'elles sont à la fois exactes et générales, nous prouverons successivement :

D'abord que, si la forme trouvée pour les u est vraie pour tous les u dont l'indice ne dépasse pas t, la forme trouvée pour U_t est exacte;

Ensuite que, si la forme trouvée pour les u est vraie pour tous les u dont l'indice est inférieur à t, elle est encore vraie pour u_t.

10. Dans le Chapitre précédent, nous avons exposé (6) un procédé rapide pour calculer U_t. Maintenant qu'il s'agit, non plus de calculer U_t, mais de déterminer sa forme, il est bon de connaître l'expression de U_t en fonction des u dont l'indice ne dépasse pas t.

Partant de la définition même des quantités U et u, nous trouvons facilement, pour toute valeur de t, la formule

$$U_t = 6\Sigma u_l u_m u_n + 3\Sigma u_l^2 u_m + \Sigma u_l,$$

dans laquelle les indices des quantités u sont des entiers distincts, positifs ou nuls, satisfaisant de toutes les manières possibles, suivant que l'on considère le premier, le second ou le troisième Σ, à la première, à la deuxième ou à la troisième des conditions

$$l+m+n=t, \quad 2l+m=t, \quad 3l=t.$$

Cela étant, supposons la forme attribuée aux u vraie pour tous ceux dont l'indice ne dépasse pas le nombre t.

La relation que nous venons d'écrire nous montre immédiatement que U_t n'est autre chose qu'un polynôme dont chaque terme présente un coefficient numérique, une puissance de x d'exposant entier, positif ou nul, et un sinus ou cosinus d'un multiple de x.

Mais ces premières remarques ne suffiraient point à établir que U_t est de la forme annoncée. Nous allons les compléter.

D'abord, dans aucun terme, l'exposant de x ne dépasse t, car, dans chaque u, le plus haut exposant de x est égal à l'indice de ce u, et les trois u dont le produit se trouve dans un terme quelconque ont des indices dont la somme est égale à t.

Tout sinus ou cosinus figurant dans U_t porte sur un multiple impair de x, car le produit de trois lignes trigonométriques, sinus ou cosinus, portant chacune sur un multiple impair de x, est une somme de sinus ou cosinus portant aussi chacun sur un multiple impair. Pour le démontrer, il suffit de faire observer que, dans la transformation en un polynôme linéaire d'un produit de plusieurs sinus ou cosinus, on n'opère jamais sur les arcs primitifs que par addition ou soustraction. Dans la question qui nous occupe, nous avons, à chaque fois, trois arcs primitifs qui sont des multiples impairs de x : les additions et soustractions ne donneront que des multiples impairs.

Lorsque, dans un terme quelconque, l'exposant de x est pair, cette puissance de x est multipliée par un sinus; lorsque l'exposant est impair, la puissance est multipliée par un cosinus. En effet, si l'exposant de x est pair, le terme considéré provient d'un produit où se trouvaient soit un sinus avec deux cosinus, soit trois sinus en même temps, et un pareil produit transformé en somme ne donne que des sinus; si l'exposant de x est impair, le terme considéré provient, au contraire, d'un produit où figuraient soit un cosinus avec deux sinus, soit trois cosinus en même temps, et un pareil produit, transformé en somme, ne donne que des cosinus.

Enfin, l'exposant de x, joint à la partie entière de la moitié du nombre impair qui figure dans le sinus ou cosinus correspondant, ne dépasse pas $t+1$. Pour le démontrer, soient l, m, n les indices des trois u figurant dans un terme quelconque de l'expression de U_t. Considérons dans ces trois u respectivement, les termes quelconques

$$Lx^{l'}\psi[(2l''+1)x], \quad Mx^{m'}\psi[(2m''+1)x], \quad Nx^{n'}\psi[(2n''+1)x],$$

dans lesquels ψ désigne à volonté un sinus ou un cosinus. Dans le produit de ces trois termes, supposé transformé en somme, le terme le plus désavantageux pour nous sera

$$Rx^{l'+m'+n'}\psi[(2l''+2m''+2n''+3)x],$$

dans lequel la somme considérée est égale à

$$l'+m'+n'+l''+m''+n''+1.$$

Or, par hypothèse, les binômes

$$l'+l'', \quad m'+m'', \quad n'+n''$$

ne dépassent point respectivement les indices l, m, n. Donc la somme considérée ne dépasse point

$$l+m+n+1,$$

c'est-à-dire

$$t+1.$$

Il suit clairement de toutes ces remarques que, si $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_t$ sont de la forme annoncée pour les u, la quantité U_t est bien de la forme que nous avons été conduit à lui attribuer.

11. Pour étudier la forme de u_t, revenons à notre formule fondamentale

$$(6) \qquad u_t = \sin x\int_0^x (2U_{t-1}-u_{t-1})\cos x\,dx - \cos x\int_0^x (2U_{t-1}-u_{t-1})\sin x\,dx,$$

et supposons que tous les u d'indice inférieur à t soient de la forme attribuée aux quantités u.

D'après le paragraphe précédent (10), U_{t-1} sera de la forme qu'on a attribuée aux U, et il s'ensuit immédiatement que le binôme $2U_{t-1} - u_{t-1}$ sera de la même forme que U_{t-1}.

Abstraction faite des coefficients numériques, ce binôme $2U_{t-1} - u_{t-1}$ ne contiendra donc que deux sortes de termes : des termes de la forme

$$x^{2i}\sin(2j+1)x,$$

et des termes de la forme

$$x^{2i+1}\cos(2j+1)x.$$

Il suffit donc, pour obtenir la forme de u_t, de voir ce que fournit dans l'expression générale (6) de u_t un terme de chacune de ces deux sortes.

Considérons d'abord le terme $x^{2i}\sin(2j+1)x$. Il ne fournit dans u_t que des termes formés chacun, sans compter le coefficient numérique, d'une puissance de x dont l'exposant, entier et positif ou nul, ne dépasse pas $2i$, multipliée, si cet exposant est pair, par $\sin(2j+1)x$, et, s'il est impair, par $\cos(2j+1)x$. Comme on a, par hypothèse,

$$2i + j \leqq t,$$

on voit que tous ces termes rentrent bien dans la forme attribuée à u_t.

Dans le cas particulier où j serait nul, il faudrait, aux termes que nous venons d'indiquer, ajouter x^{2i+1} multiplié par un facteur numérique et par $\cos x$; et comme nous avons, par hypothèse,

$$2i \leqq t - 1,$$

et, par suite,

$$2i + 1 \leqq t,$$

ce nouveau terme rentre encore dans la forme indiquée.

Passons maintenant au terme $x^{2i+1}\cos(2j+1)x$ qui sert de type à la seconde sorte. Les termes qu'il apporte dans u_t sont encore formés chacun, sans compter le coefficient numérique, d'une puissance de x dont l'exposant, entier et positif ou nul, ne dépasse pas $2i+1$, multipliée, si cet exposant est pair, par $\sin(2j+1)x$, et, s'il est impair, par $\cos(2j+1)x$. Comme, dans le cas actuel, nous avons, par hypothèse,

$$2i + 1 + j \leqq t,$$

on voit que tous ces termes rentrent bien dans la forme attribuée à u_t.

Dans le cas particulier où j est nul, il faut encore ajouter, aux termes que l'on vient d'indiquer, un terme contenant x^{2i+2} multiplié par un facteur numérique et par $\sin x$; et comme nous avons actuellement, par hypothèse,

$$2i+1 \leqq t-1,$$

et, par suite,

$$2i+2 \leqq t,$$

ce nouveau terme rentre aussi dans la forme annoncée.

Dès lors donc que $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{t-1}$ sont de la forme attribuée aux quantités u, la quantité u_t est aussi de cette forme. Donc cette forme est absolument exacte et générale.

CHAPITRE III.

DÉVELOPPEMENT SUIVANT LES PUISSANCES DE x.

12. Considérons maintenant le développement de la fonction elliptique $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes de la variable x, et posons

$$\lambda(x) = \mathrm{A}_0 \frac{x}{1!} - \mathrm{A}_1 \frac{x^3}{3!} + \mathrm{A}_2 \frac{x^5}{5!} - \mathrm{A}_3 \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

Les coefficients $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ de ce développement sont, comme on le sait, des polynômes entiers en k^2, de façon que nous pouvons poser, en général,

$$\mathrm{A}_r = \alpha_{r,0} + \alpha_{r,1} k^2 + \alpha_{r,2} k^4 + \alpha_{r,3} k^6 + \ldots.$$

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, de déduire des résultats obtenus dans le précédent la forme générale de la quantité $\alpha_{r,t}$, regardée comme une fonction de r, l'indice t étant supposé constant. Or, cette recherche de la forme de $\alpha_{r,t}$ revient simplement à l'étude du développement suivant les puissances croissantes de x de la quantité u_t qui sert de coefficient à k^{2t} dans le développement de $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes du module, puisque $\alpha_{r,t}$ n'est, au signe près, que le coefficient de $\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}$ dans ce développement de u_t. Nous sommes donc conduit à former ce dernier développement.

13. Reprenons la formule

$$u_t = \Sigma p_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma q_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

trouvée précédemment (8), et rappelons-nous les conditions dont nous l'avons fait suivre. Nous voyons sans peine :

Que $\sin(2j+1)x$ y est, quelle que soit la constante j, multiplié par un polynôme entier en x, ne contenant que des puissances paires de x, et dont le degré est le plus grand nombre pair qui, ajouté à j, ne donne point une somme supérieure à t;

Que $\cos(2j+1)x$ y est, quelle que soit la constante j, multiplié par un polynôme entier en x, ne contenant que des puissances impaires de x, et dont le degré est le plus grand nombre impair qui, ajouté à j, ne donne point une somme supérieure à t.

Cela posé, dans le produit de $\sin(2j+1)x$ par le polynôme correspondant, le coefficient de $\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}$ est évidemment la somme des quantités

$$(2j+1)^{2r+1},\quad (2r+1)(2r)(2j+1)^{2r-1},\quad (2r+1)(2r)(2r-1)(2r-2)(2j+1)^{2r-3},\quad \ldots,$$

multipliées respectivement par des constantes, et l'on peut voir facilement que ce résultat se ramène au produit de $(2j+1)^{2r}$ par un polynôme entier en r d'un degré égal à celui du polynôme en x qui multiplie $\sin(2j+1)x$.

De même, dans le produit de $\cos(2j+1)x$ par le polynôme correspondant, le coefficient de $\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}$ est évidemment la somme des quantités

$$(2r+1)(2j+1)^{2r},\quad (2r+1)(2r)(2r-1)(2j+1)^{2r-2},$$
$$(2r+1)(2r)(2r-1)(2r-2)(2r-3)(2j+1)^{2r-4}\ldots,$$

multipliées respectivement par des constantes, et ici encore on peut voir facilement que ce résultat se ramène au produit de $(2j+1)^{2r}$ par un polynôme entier en r d'un degré égal à celui du polynôme en x qui multiplie $\cos(2j+1)x$.

Il suit immédiatement de tout cela que, si dans u_t l'on réunit les termes en $\sin(2j+1)x$ et les termes en $\cos(2j+1)x$, le coefficient de $\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!}$ dans tout cet ensemble est de la forme

$$\xi_j(r)(2j+1)^{2r},$$

$\xi_j(r)$ étant un polynôme entier en r du degré $t-j$.

Or, d'après ce que nous avons vu précédemment (8), j peut prendre toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots, t$. Donc nous pouvons écrire

$$\alpha_{r,t} = \sum_{0}^{t}{}_j \xi_j(r)(2j+1)^{2r}.$$

Telle est la forme de $\alpha_{r,t}$ regardé comme fonction de r. C'est justement la forme même que nous avons déjà signalée ([1]), restreinte au cas particulier du développement de $\lambda(x)$.

14. Cette forme de $\alpha_{r,t}$ n'est autre que celle du terme général d'une série récurrente proprement dite, définie par l'équation génératrice

$$(z-1^2)^{t+1}(z-3^2)^t(z-5^2)^{t-1}\ldots[z-(2t+1)^2]^1 = 0.$$

C'est encore un résultat déjà obtenu par nous ([2]).

15. On voit que nous retrouvons ainsi, pour le cas particulier de $\lambda(x)$, les résultats que nous avons obtenus le premier pour les développements suivant les puissances croissantes de x des trois fonctions elliptiques et de leurs puissances. Seulement, comme nous l'avons fait observer déjà dans l'Introduction du présent Mémoire, la méthode actuelle est très-simple et semble presque élémentaire lorsqu'on la compare à la méthode combinatoire que nous avons précédemment exposée.

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 10 juillet 1876.
([2]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 265.

CHAPITRE IV.

GÉNÉRALISATION.

16. Les méthodes qui précèdent nous ont permis, comme on vient de le voir, d'abord d'intégrer de proche en proche l'équation du second ordre qui nous a servi de point de départ, ensuite de déterminer la forme des coefficients du développement de $\lambda(x)$, suivant les puissances ascendantes soit du module k, soit de la variable x.

Il est bien évident que ces méthodes s'appliqueraient avec le même succès à l'étude de la fonction elliptique représentée par $\mu(x)$. C'est une première généralisation.

Mais on peut généraliser encore davantage, car ces méthodes s'appliquent également à l'étude d'une fonction quelconque $\varphi(x)$ définie par l'équation très-générale

$$\sum_s \mathrm{C}_s \frac{d^s\varphi}{dx^s} = k\Phi,$$

dont le premier membre est celui d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, et au second membre de laquelle Φ représente un polynôme quelconque, entier par rapport à la fonction φ, à la variable x, à l'indéterminée k, qui est analogue au module, et à des exponentielles de la forme $e^{\sigma x}$.

Nous allons nous occuper de cette fonction $\varphi(x)$, que nous supposerons développable suivant les puissances ascendantes soit de l'indéterminée k, soit de la variable indépendante x.

17. Supposons qu'on ait effectué le développement de $\varphi(x)$ suivant les puissances ascendantes de k, et soit

$$\varphi(x) = v_0 + v_1 k + v_2 k^2 + v_3 k^3 + \ldots.$$

Supposons de même qu'après avoir remplacé dans Φ la fonction $\varphi(x)$ par le développement précédent on ait développé le résultat obtenu suivant les puissances ascendantes de k; et soit

$$\Phi = \mathrm{V}_0 + \mathrm{V}_1 k + \mathrm{V}_2 k^2 + \mathrm{V}_3 k^3 \ldots.$$

Si nous regardons comme nulle la quantité V_{-1}, nous avons, pour toute valeur entière et non négative de t,

$$\sum_s C_s \frac{d^s v_t}{dx_s} = V_{t-1}.$$

Évidemment, la quantité V_{t-1} ne dépend que des v d'indices non supérieurs à $t-1$. A l'aide de tous ces v, on peut, en s'appuyant sur la définition même de V_{t-1}, arriver à son expression. Si donc on connaît les quantités $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{t-1}$, on peut intégrer l'équation qu'on vient d'écrire, c'est-à-dire calculer v_t.

Ainsi on peut calculer de proche en proche tous les coefficients du développement de $\varphi(x)$ suivant les puissances ascendantes de k.

18. La quantité v_0, qui est l'intégrale d'une équation différentielle linéaire, à coefficients constants et sans second membre, consiste, comme on le sait, en une fonction de x de la forme

$$\Sigma G_{i,j} e^{g_i x} x^j,$$

dans laquelle on désigne par $G_{i,j}$ un coefficient constant, et par i et j des nombres entiers non négatifs.

Si l'on suppose $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{t-1}$ de cette forme, V_{t-1} en sera aussi, d'après sa définition. Quant à v_t, puisque, d'après la méthode de la variation des constantes, cette quantité v_t n'est autre chose que la somme algébrique d'un nombre déterminé de termes analogues à

$$H e^{hx} x^j \int V_{t-1} x^\eta e^{\omega x} dx,$$

on voit que cette quantité v_t est aussi de la forme

$$\Sigma G_{i,j} e^{g_i x} x^j.$$

Telle est donc la forme générale des coefficients du développement de la fonction $\varphi(x)$ suivant les puissances croissantes de k.

19. Passons maintenant au développement de $\varphi(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, et posons

$$\varphi(x) = F_0 - F_1 \frac{x}{1!} + F_2 \frac{x^2}{2!} - F_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Pour obtenir ce développement, il suffit évidemment de développer les exponentielles qui se trouvent dans le développement précédent, puis d'effectuer les calculs, et enfin d'ordonner suivant les puissances croissantes de x.

On trouve ainsi que les coefficients F_0, F_1, F_2, ... sont des polynômes entiers en k et que, par conséquent, on peut écrire

$$F_r = \theta_{r,0} + \theta_{r,1} k + \theta_{r,2} k^2 + \theta_{r,3} k^3 + \ldots$$

Cela étant, proposons-nous de déterminer la forme générale de la quantité $\theta_{r,t}$ regardée comme une fonction de r, l'indice t étant supposé constant. Or, ce coefficient $\theta_{r,t}$ n'est, au signe près, que le coefficient de $\frac{x^r}{r!}$ dans le développement de φ_t. Mais φ_t est, comme on l'a vu, de la forme

$$\Sigma G_{i,j} e^{g_i x} x^j.$$

Donc le coefficient $\theta_{r,t}$ est de la forme

$$\Sigma G_{i,j} \frac{r!}{(r-j)!} g_i^{r-j}.$$

On voit ainsi que $\theta_{r,t}$, considéré comme une fonction de r, est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice a pour racines, simples ou multiples, les quantités analogues à g_i.

20. Dans chaque cas particulier, on pourra, comme on l'a fait pour $\lambda(x)$, déterminer les limites du Σ qui donne la forme de φ_t et les racines de l'équation génératrice de la série récurrente, double opération impossible lorsqu'on laisse à la fonction $\varphi(x)$ sa pleine généralité.

21. En résumé, la fonction si générale $\varphi(x)$ jouit, quant aux coefficients de ses développements, des mêmes propriétés que les fonctions particulières $\lambda(x)$ et $\mu(x)$: quand on la développe suivant les puissances croissantes de k, le coefficient φ_t est de la forme

$$\Sigma G_{i,j} e^{g_i x} x^j;$$

quand on la développe suivant les puissances croissantes de x, le coefficient $\theta_{r,t}$, regardé comme une fonction de r, est le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Il y a plus : cette propriété de $\theta_{r,t}$ et cette forme de φ_t se retrouvent dans les développements de $\varphi^\pi(x)$, quel que soit l'exposant entier et positif π. En effet, cette propriété de $\theta_{r,t}$ n'est qu'une conséquence de la forme de φ_t, et celle-ci, évidemment, subsiste quand on passe du développement de $\varphi(x)$ à celui de $\varphi^\pi(x)$.