ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

WEIERSTRASS

Mémoire sur les fonctions analytiques uniformes. Traduit par E. Picard

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 111-150
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__111_0>

MÉMOIRE

SUR LES

FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES,

PAR M. WEIERSTRASS [1].

(Traduit par M. E. PICARD.)

CHAPITRE PREMIER.

INTRODUCTION.

Parmi les fonctions uniformes d'une seule variable, les fonctions rationnelles forment une classe à part que nous définirons par leur propriété caractéristique.

Nous dirons qu'une fonction uniforme $f(x)$ de la variable complexe x est régulière dans le voisinage d'un point a si, pour toutes les valeurs de x comprises à l'intérieur d'un cercle ayant le point a pour centre et un rayon suffisamment petit, la fonction est développable en une série de la forme

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots,$$

les coefficients A_0, A_1, ... étant des constantes.

Dans le cas où le point a serait à l'infini, on devrait remplacer $x - \infty$ par $\frac{1}{x}$.

---

[1] Le Mémoire de M. Weierstrass a paru dans les *Abhandlungen* (1876) de l'Académie des Sciences de Berlin. Il a semblé qu'il y aurait un grand intérêt à répandre les résultats importants contenus dans le travail du grand analyste. Je suis heureux d'ajouter que cette traduction a été revue par M. Weierstrass, qui a même, en quelques points, modifié le texte primitif de son Mémoire. E. P.

Tout point a' dans le voisinage duquel la fonction $f(x)$ n'est pas régulière sera dit *point singulier de* $f(x)$, et nous distinguerons deux espèces de points singuliers : si l'on peut trouver une puissance entière et positive m de $(x-a')$ telle que le produit $(x-a')^m f(x)$ soit régulier dans le voisinage de a' et ne s'annule pas pour $x=a'$, ce point sera dit un *pôle de la fonction;* dans le cas contraire, nous dirons que a' est un *point essentiellement singulier.*

D'après ce qui précède, on pourra dire que la fonction $f(x)$ a une valeur déterminée pour $x=a$, non-seulement lorsqu'elle est régulière dans le voisinage de ce point, mais même dans le cas où a est un pôle, car, dans l'un et l'autre cas, on aura, pour des valeurs de x suffisamment voisines de a,

$$f(x)=(x-a)^{-m}[A_0+A_1(x-a)+\ldots],$$

m étant un nombre entier et A_0 n'étant pas nul. Si $m>0$, la fonction sera donc infiniment grande pour une valeur infiniment petite quelconque de $(x-a)$, condition indispensable pour que l'on puisse écrire $f(a)=\infty$.

De plus, dans le cercle de convergence de la série ci-dessus, la fonction n'a que le point singulier a si m est positif et elle n'en a pas si m est négatif ou nul. Par suite, si l'on peut démontrer que dans le voisinage d'un point donné x_0, et à une distance moindre qu'une quantité donnée quelconque, il existe des points singuliers de $f(x)$ différents de x_0, on pourra affirmer que x_0 est un point essentiellement singulier de $f(x)$.

Ceci posé, la classe des fonctions rationnelles d'une variable x peut être définie comme comprenant l'ensemble des fonctions uniformes de x n'ayant que des pôles.

Je me dispense de démontrer qu'une fonction rationnelle, dans le sens habituel du mot, n'a que des pôles, et je passe à la démonstration du théorème inverse. Nous supposons donc que $f(x)$ soit une fonction uniforme n'ayant dans toute l'étendue du plan que des pôles. Dans le voisinage d'un point quelconque a, la fonction peut, par suite, se mettre sous la forme

$$(x-a)^{-m}[A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots].$$

Soit d'abord $a = \infty$; dans l'intérieur du cercle de convergence de la série précédente, il n'y aura d'autre point singulier que $x = \infty$ si m est positif, et il n'y en aura aucun si m est nul ou négatif. Tous les points singuliers de $f(x)$, à l'exception de $x = \infty$, sont donc renfermés dans un espace fini. Mais il ne peut en exister qu'un nombre fini, car, dans l'hypothèse contraire, il y aurait certainement au moins un point singulier ayant dans son voisinage d'autres points singuliers à une distance moindre qu'une quantité donnée quelconque, et ce point ne pourrait être, comme on l'a vu plus haut, un pôle de $f(x)$.

Considérons en premier lieu le cas où $f(x)$ a seulement un pôle à l'infini; la fonction pour une valeur finie quelconque de x peut être représentée par une série convergente de la forme

$$(\alpha) \qquad A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots;$$

d'autre part, il existera un nombre m, positif ou nul, tel que la valeur de $\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1} f(x)$ soit infiniment petite pour une valeur infinie quelconque de x, puisque le point à l'infini est un pôle de $f(x)$.

Mais, d'après un théorème connu, cela ne peut avoir lieu que si tous les coefficients de la série (α) dont l'indice est supérieur à m sont nuls. Donc la fonction $f(x)$ est une fonction entière de x.

Considérons en second lieu le cas où la fonction aurait un nombre r de pôles $a_1, a_2, \ldots, a_r$, tous situés à distance finie

Soit m_k le plus petit nombre tel que le produit $(x - a_k)^{m_k} f(x)$ soit régulier dans le voisinage de a_k. La fonction

$$(x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \ldots (x - a_r)^{m_r} f(x)$$

est donc régulière dans le voisinage d'une valeur finie quelconque de x; c'est donc, d'après ce qui précède, un polynôme $G(x)$, et l'on aura

$$f(x) = \frac{G(x)}{(x - a_1)^{m_1} \ldots (x - a_r)^{m_r}},$$

ce qui démontre le théorème.

Les considérations précédentes nous font pressentir le rôle important que joueront, dans l'étude et la classification des fonctions uniformes transcendantes, leurs points singuliers essentiels.

Sans entrer dans une discussion sur les cas différents et très-variés que l'on peut rencontrer relativement à ces points singuliers, je me contenterai de considérer, dans ce Mémoire, les fonctions ayant un nombre fini de points singuliers essentiels, fonctions que l'on doit considérer comme se rapprochant le plus des fonctions rationnelles.

On s'assure aisément qu'il existe des fonctions ayant un nombre quelconque de points singuliers essentiels. Mais le problème que je me propose de résoudre est de trouver et de présenter sous les formes les plus simples le type général d'une fonction uniforme ayant n points singuliers essentiels donnés.

Parmi les fonctions qui nous occupent, les plus simples sont celles qui n'ont dans tout le plan qu'un point singulier. Si ce point est à l'infini, on peut, comme on sait, représenter la fonction par la série

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots;$$

d'autre part, toute série de cette forme, convergente pour toute valeur de x, représente une fonction ayant un seul point singulier, le point ∞. Nous donnerons à une telle fonction le nom de *fonction uniforme entière*, ou, plus simplement, s'il n'y a aucune ambiguïté à craindre, de *fonction entière*, de sorte que l'on aura à distinguer entre les fonctions rationnelles entières pour lesquelles le point ∞ est un pôle, la série se composant d'un nombre fini de termes, et les fonctions transcendantes entières pour lesquelles le point ∞ est un point singulier essentiel, la série se composant d'un nombre infini de termes.

Nous désignerons dans la suite par la lettre G une fonction entière, et, s'il y en a plusieurs à considérer simultanément, nous affecterons cette lettre d'indices différents.

La question précédemment posée trouve sa réponse dans les théorèmes suivants :

A. *L'expression générale d'une fonction uniforme de x ayant un seul point singulier (pôle ou point singulier essentiel) est*

$$G\left(\frac{1}{x-c}\right);$$

si $c = \infty$, $\frac{1}{x-c}$ doit être remplacé par x.

Le point c sera un pôle ou un point singulier essentiel selon que G *sera une fonction entière, rationnelle ou transcendante.*

B. *L'expression générale d'une fonction uniforme ayant n points singuliers (pôles ou points essentiellement singuliers) $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sera*

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

ou

$$(2) \qquad \prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right).R^*(x),$$

$R^*(x)$ *désignant une fonction rationnelle qui devient seulement nulle ou infinie aux points singuliers essentiels.*

C. *Toute fonction uniforme de x ayant n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et en outre un nombre quelconque de pôles peut être mise sous les formes*

$$(1) \qquad \frac{\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\sum_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)},$$

$$(2) \qquad \frac{\prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}.R^*(x),$$

les numérateurs et les dénominateurs ne s'annulant à la fois pour aucune valeur de x.

Réciproquement, *si les fonctions entières $G_1, G_2, \ldots, G_{2n}$ sont prises arbitrairement, chacune des expressions* (1) *et* (2) *représentera une fonction de x qui aura, en général, n points singuliers essentiels.*

Il pourra y en avoir moins, et nous examinerons plus tard quelles restrictions doivent être apportées au choix des fonctions G pour que ces expressions représentent des fonctions ayant n points singuliers essentiels. Quant au nombre des pôles, il n'est pas déterminé.

De ces théorèmes, le premier seul était connu; celui qui est désigné par B (1) était facile à déduire de théorèmes connus. Pour démontrer les autres d'une manière générale, il me fallut combler une lacune dans la théorie des transcendantes entières, et je n'y suis arrivé que tout récemment, après de longues recherches infructueuses.

Une fonction uniforme de x n'admet qu'un nombre limité de zéros et d'infinis dans toute portion du plan qui ne contient pas de point singulier essentiel. Soit, en particulier, $f(x)$ une fonction entière; il y aura un nombre fini de valeurs de x, ayant un module inférieur à un nombre déterminé, pour lesquelles $f(x)$ s'annulera; on tiendra compte, en estimant le nombre des zéros, du degré de multiplicité de chacun d'eux. Le nombre des zéros de la fonction $f(x)$, dans toute l'étendue du plan, peut être fini ou croître sans limites; dans l'un et l'autre cas, on pourra former une suite de valeurs des zéros

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

jouissant des propriétés suivantes :

1° Chaque zéro est inscrit autant de fois que l'exige son degré de multiplicité;

2° Pour deux termes consécutifs de la suite (a_n, a_{n+1}) on doit avoir

$$|a_{n+1}| \geqq |a_n| \text{ (1)};$$

3° Dans le cas où la série ne se termine pas, on a

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty.$$

La suite ainsi formée peut s'appeler la *série des zéros*.

Ceci posé, deux questions se présentent :

I. *De quelle manière une fonction* G(x) *est-elle déterminée par la série de ses zéros?*

II. *Étant donnée une série jouissant des propriétés* 2° et 3°, *existe-t-il toujours une fonction* G(x) *pour laquelle cette série soit, au sens indiqué, la série des zéros?*

Le premier point est facile à traiter. Il y a une infinité de fonctions

(1) M. Weierstrass désigne par le signe | | le module. La quantité dont on considère le module est placée entre les deux traits.

entières qui ont la même série de zéros; elles sont toutes comprises dans l'expression

$$G(x)e^{\overline{G}(x)},$$

où $\overline{G}(x)$ désigne une fonction arbitraire supposée entière.

La seconde question n'a pas encore été résolue. Je suis parvenu à démontrer qu'*il existe toujours une fonction* $G(x)$ *remplissant les conditions requises*.

A l'aide de ce théorème fondamental, on peut facilement démontrer les théorèmes désignés par A, B et C, dans le cas où il y a seulement un point singulier essentiel.

J'ai alors eu besoin du lemme suivant :

Soit

$$\varphi(x) = k_0 + \frac{k_1}{x - c_1} + \ldots + \frac{k_n}{x - c_n};$$

les c et les k désignent des constantes. Aucune des constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *ne peut être nulle, et toutes les quantités* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *sont différentes.*

Soient $F_0(y), F_1(y), \ldots, F_{n-1}(y)$ *des fonctions uniformes de* y *ayant un seul point singulier essentiel, le point* ∞. *L'expression*

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} F_\nu(y)\left(\frac{1}{x-c}\right)^\nu,$$

où c désigne une quelconque des quantités $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *et* y *la fonction* $\varphi(x)$, *représente une fonction uniforme ayant les points singuliers essentiels* $c_1, c_2, \ldots, c_n$; *mais il y a plus,* $f(x)$ *étant une fonction uniforme ayant les n points singuliers essentiels* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *on pourra déterminer les fonctions* $F_0(y), \ldots, F_{n-1}(y)$ *de telle sorte que*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu[\varphi(x)]\left(\frac{1}{x-c}\right)^\nu.$$

Les fonctions F *seront des fonctions entières de y si la fonction* $f(x)$ *n'a pas de pôles.*

Ce lemme conduit à l'expression (B, 1) d'une fonction ayant n points singuliers.

Il peut arriver qu'une fonction de ce genre ne s'annule en aucun point différent de $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Dans ce cas, son expression sera

$$R^*(x)\prod_{\nu=1}^{n} e^{\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}.$$

Soit maintenant $f(x)$ une fonction uniforme ayant n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Partageons le plan en n parties, de telle manière que, à l'intérieur de chacune d'elles, il y ait un des points $c_1, c_2, \ldots, c_n$, et que sur les lignes de séparation de chacune de ces parties $f(x)$ soit toujours fini et différent de zéro. Désignons par c une des valeurs $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et par C la partie correspondante; il y a, parmi les valeurs de x situées dans C, pour lesquelles $|x-c|>\rho$, ρ désignant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, un nombre fini de valeurs pour lesquelles $f(x)$ s'annule. Cela posé, s'il existe dans C des zéros de $f(x)$, ces zéros, comptés autant de fois que l'indique leur degré de multiplicité, pourront être rangés en une suite

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

telle que

$$|a_{n+1}-c|\leqq|a_n-c|,$$

et, dans le cas où la suite ne se termine pas,

$$\lim_{n=\infty}|a_n-c|=0.$$

Alors la série

$$\frac{1}{a_1-c},\quad \frac{1}{a_2-c},\quad \ldots,\quad \frac{1}{a_n-c},\quad \ldots$$

est telle, qu'il existe une fonction $G(x')$ dont elle est la série des zéros. Donc, en posant

$$x'=\frac{1}{x-c},$$

la fonction $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ est une fonction de x qui n'a d'autre point singulier essentiel que le point $x=c$, et qui s'annule pour tous les zéros de $f(x)$ compris dans le contour C [si $f(x)$ n'a pas de racine dans ce contour, on remplacera cette fonction G par l'unité]. On peut de même former une fonction $G'\left(\frac{1}{x-c}\right)$ qui soit relativement à $\frac{1}{f(x)}$ ce que $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ est à $f(x)$.

Désignons ces deux fonctions relatives au point c_ν par

$$G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right), \quad G^{(n+\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

et posons

$$f(x)=\prod_{\nu=1}^{n}\left[\frac{G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{G^{(n+\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}\right].f_1(x);$$

la fonction $f_1(x)$ aura une valeur finie et différente de zéro pour toute valeur de x, à l'exception de $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Si l'on met maintenant $f_1(x)$ sous la forme précédemment donnée, on obtient les expressions (B, 2) et (C, 2). De la dernière on tire enfin, avec l'aide du théorème (B, 1), l'expression donnée (C, 1) de la même fonction.

Les expressions précédentes d'une fonction uniforme, ayant un nombre fini de points singuliers essentiels, peuvent être encore modifiées, pour que la dépendance entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la variable soit immédiatement en évidence. Dans les formes (B, 1) et (C, 1), il est convenable pour notre objet d'exprimer chaque fonction $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ sous la forme d'une série de puissances. Mais on peut, comme nous le prouverons au Chapitre II, exprimer toute fonction $G(x)$ comme un produit d'un nombre infini de facteurs; cette forme des fonctions $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ sera très-avantageuse pour le développement ultérieur des formes (B, 2) et (C, 2).

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_r$ la suite des zéros d'une fonction rationnelle entière $G(x)$, et x_0 une valeur qui ne soit pas contenue dans cette suite; on a

$$\frac{G(x)}{G(x_0)}=\prod_{n=1}^{n=r}\frac{x-a_n}{x_0-a_n}.$$

On a cherché, depuis longtemps, à étendre ce théorème aux fonctions transcendantes entières pour lesquelles s'offraient des difficultés considérables. On a reconnu qu'il est, en général, nécessaire de placer encore à la droite du second membre un facteur de la forme $e^{\overline{G}(x)}$ (Cauchy, *Exercices de Mathématiques*, t. III); mais cela même ne suffit que dans le cas où la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n - x}$, et avec elle le produit $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{x-a_n}{x_0-a_n}$, sont convergents, ce qui n'est pas le cas général.

Dans certains cas, le produit infini serait indéterminé si ses facteurs n'étaient arrangés dans un ordre convenable, et l'on peut établir sa convergence en fixant pour les facteurs un arrangement convenable; mais, en général, cela n'est pas possible, comme on s'en assure aisément par l'exemple de la fonction $\frac{1}{\Pi(x)}$, qui conduit au produit des facteurs

$$\left(1+\frac{x}{1}\right),\quad \left(1+\frac{x}{2}\right),\quad \ldots,\quad \left(1+\frac{x}{n}\right),\quad \ldots,$$

produit divergent de quelque manière que l'on dispose ses facteurs. Mais cet exemple va nous conduire à la solution de la question. Gauss a défini la fonction $\frac{1}{\Pi(x)}$ par le produit toujours convergent

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-x}\right] \quad \text{ou} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x\log\frac{n+1}{n}}\right].$$

On a ainsi une fonction pouvant se mettre sous la forme d'un produit d'un nombre infini de facteurs, dont chacun n'est pas une fonction linéaire entière de x, mais une fonction uniforme n'ayant qu'un zéro et un seul point singulier, le point ∞.

On est conduit par cet exemple à se demander si toute fonction $G(x)$ ne peut être considérée comme un produit de facteurs de la forme

$$(kx+l)\,e^{\overline{G}(x)},$$

et c'est en suivant cette idée que j'ai été conduit à compléter d'une manière satisfaisante la théorie des fonctions uniformes ayant un nombre fini de points singuliers essentiels.

Je nomme *fonction primaire* de x toute fonction uniforme de cette variable ayant un seul point singulier et n'ayant pas plus d'un zéro.

Si l'on désigne par c le point singulier, l'expression générale d'une telle fonction sera

$$\left(\frac{k}{x-c}+l\right)e^{G\left(\frac{1}{x-c}\right)};$$

k et l désignant des constantes, k peut être nul et $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ peut se réduire à une constante. Il sera suffisant, pour notre objet, de considérer les fonctions primaires où $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ est une fonction rationnelle entière de $\frac{1}{x-c}$, et c'est aux fonctions primaires de cette nature que nous donnerons uniquement dans la suite le nom de *fonctions primaires*.

Cela posé, nous démontrerons d'abord qu'une fonction uniforme quelconque ne présentant qu'un seul point singulier ne peut être qu'une fonction primaire ou un produit de fonctions primaires ayant le même point singulier. Nous pourrons reconnaître alors, à l'aide des expressions (B, 2) et (C, 2), comment on peut composer avec des fonctions primaires, par voie de multiplication et de division, une fonction quelconque du genre de celles que nous considérons.

Je termine ici l'analyse de ce travail. Dans les développements qui vont suivre, je supposerai seulement connues quelques propositions élémentaires de la théorie des séries et les propriétés de la fonction exponentielle.

CHAPITRE II.

SUR LES FONCTIONS UNIFORMES ENTIÈRES D'UNE SEULE VARIABLE.

Soit donnée une série indéfinie

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, \tag{1}$$

dont aucun des termes ne soit nul, et telle que

$$\lim_{n=\infty}|a_n| = \infty.$$

On peut trouver, d'une infinité de manières, une série de nombres entiers $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_\nu$ tels que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu} \right)^{m_\nu} \right|$$

soit convergente pour toute valeur de x. On pourra prendre, par exemple, $m_1 = 0$, $m_2 = 1$, $\ldots$, $m_\nu = \nu - 1$.

Posons alors

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu} \right)^{m_\nu};$$

$F(x)$ représentera une fonction uniforme de x. Soient a une des valeurs de la série (1) et k une quantité suffisamment petite; $F(a+k)$ pourra se mettre sous la forme

$$\frac{m}{k} + P(k).$$

Nous désignons par $P(k)$ une série ordonnée suivant les puissances croissantes de k. m est un nombre entier positif; il est égal au nombre de fois que a se trouve dans la suite (1).

Dans un travail précédent (*Journal de Crelle*, Bd. **52**, p. 333), j'ai démontré qu'il existe toujours une fonction $G(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{d\,G(x)}{dx} = F(x)\,G(x),$$

et telle que la série de ses zéros soit précisément

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$$

Voici une démonstration plus simple de cette importante proposition. On a, pour toute valeur de x ayant un module moindre que l'unité,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{r=0}^{\infty} x^r = \frac{d}{dx} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{r+1},$$

d'où

$$1 - x = e^{-\sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{x^{r+1}}{r+1}}.$$

Posons

$$
\begin{aligned}
E(x, 0) &= 1 - x,\\
E(x, 1) &= (1 - x)e^{x},\\
E(x, 2) &= (1 - x)e^{x + \frac{1}{2}x^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
E(x, m) &= (1 - x)e^{\sum\limits_{r=1}^{r=m} \frac{x^r}{r}};
\end{aligned}
$$

on a, sous la condition que $|x| < 1$,

$$
E(x, m) = e^{-\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{x^{m+r}}{m+r}}.
$$

Considérons maintenant l'ensemble des quantités comprises dans la formule

$$
\frac{1}{r + m_\nu}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{r+m_\nu},
$$

quand on donne à r toutes les valeurs entières de 1 à l'infini et à ν les valeurs $n, n+1, \ldots, \infty$. On voit de suite que la somme de ces quantités a une valeur finie quand la variable x prend seulement des valeurs dont le module est moindre que le module des termes $a_n, a_{n+1}, \ldots$ de la série (1).

Cette somme est moindre, en effet, que

$$
\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{r+m_\nu} \quad \text{ou} \quad \sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{1}{1-\left|\frac{x}{a_\nu}\right|}\left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1},
$$

et par suite moindre que le produit de $\left|\frac{x}{k}\right|$ par la série convergente

$$
\sum_{\nu=n}^{\infty}\left|\frac{1}{a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}\right|,
$$

en désignant par k la plus petite des quantités

$$
1 - \left|\frac{x}{a_n}\right|, \quad 1 - \left|\frac{x}{a_{n+1}}\right|, \quad \ldots.
$$

Il suit de là que la somme double

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu}$$

est non-seulement convergente, indépendamment de l'ordre de ses termes, pour les valeurs indiquées de x, mais que tous les termes contenant x à la même puissance peuvent se réunir en un seul. La somme double pourra donc être transformée en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x; nous la désignerons par $P(x, n)$.

Soit x une valeur dont le module soit moindre que les modules des termes de la suite (1). Les séries $P(x, 1)$, $P(x, 2)$, $P(x, 3)$, ... seront toutes convergentes, et l'on aura

$$P(x, 1) - P(x, n+1) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu};$$

donc

$$e^{-P(x,1)} = \prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) e^{-P(x, n+1)}.$$

Mais on peut développer $E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$ en une série de la forme

$$1 + A_1^{(\nu)} x + A_2^{(\nu)} x^2 + \ldots,$$

convergente pour toute valeur de x, et $e^{-P(x, n+1)}$ en une série

$$1 + B_1^{(n)} x + B_2^{(n)} x^2 + \ldots,$$

convergente pour toute valeur de x de module moindre que $|a_{n+1}|$, $|a_{n+2}|$, ...

Désignons par g une grandeur positive telle que $|a_\nu| > g$ quand $\nu > n$; le développement du produit

$$(1 + B_1^{(n)} x + B_2^{(n)} x^2 + \ldots)\prod_{\nu=1}^{n}(1 + A_1^{(\nu)} x + A_2^{(\nu)} x^2 + \ldots)$$

sera une série de la forme

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

dont la convergence est évidente pour toute valeur de x de module moindre que g. Mais, pour des valeurs suffisamment petites de x, on a l'égalité

$$e^{-P(x,1)} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

qui prouve que les coefficients A_1, A_2, ... sont indépendants de g. Par suite, la série est convergente pour toute valeur de x; nous désignerons par $G(x)$ cette fonction uniforme entière de x.

Cette fonction s'annule seulement pour $x = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; c'est ce qui résulte de l'égalité

$$G(x) = \prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) e^{-P(x, n+1)}$$

lorsqu'on y fait n assez grand pour que la quantité a, que l'on veut prouver être racine de $G(x)$, soit comprise à l'intérieur du cercle de convergence de la série $P(x, n+1)$. On voit aussi que, si a entre μ fois dans la série a_1, a_2, ..., $G(x)$ pourra se mettre sous la forme

$$(x-a)^\mu f(x),$$

$f(x)$ ayant une valeur finie, différente de zéro, pour $x = a$.

La série a_1, a_2, ... est donc bien la série des zéros de la fonction uniforme entière $G(x)$, définie par l'équation

$$\frac{1}{G(x)} \frac{dG(x)}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x-a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{m_\nu}.$$

Mais la fonction $G(x)$ n'est pas la seule fonction ayant la série (1) pour série de zéros. Si l'on pose

$$G_1(x) = G(x)\, e^{\overline{G}(x)},$$

la fonction $G_1(x)$ a la même série de zéros, $\overline{G}(x)$ étant une fonction entière quelconque de x; inversement, si deux fonctions $G(x)$ et $G_1(x)$ ont la même série de zéros, le quotient $\frac{G_1(x)}{G(x)}$, que nous désignerons par $G_2(x)$, sera une fonction qui pour toute valeur de x aura une valeur finie différente de zéro.

Donc $\frac{1}{G_2(x)} \frac{dG_2(x)}{dx}$ peut se développer en une série de la forme

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots,$$

et, en posant

$$\overline{G}(x) = c_0 + c_1 x + \tfrac{1}{2} c_2 x^2 + \tfrac{1}{3} c_3 x^3 + \ldots,$$

la constante c_0 étant telle que $G_2(0) = e^{c_0}$, on aura

$$\frac{1}{G_2(x)} \frac{dG_2(x)}{dx} = \frac{d\overline{G}(x)}{dx},$$

et, par suite,

$$G_2(x) = e^{\overline{G}(x)}.$$

L'expression $G(x)e^{\overline{G}(x)}$ est donc bien la forme générale des fonctions entières ayant la même série de zéros que $G(x)$. Supposons maintenant que $G(x)$ soit une fonction donnée entière de x; trois cas pourront se présenter :

1° Elle n'a pas de zéros; sa forme sera alors

$$e^{\overline{G}(x)}.$$

2° Ses zéros sont en nombre limité. Elle sera alors de la forme

$$G_0(x)\, e^{\overline{G}(x)},$$

$G_0(x)$ étant une fonction rationnelle entière de x.

3° Ses zéros sont en nombre infini. Dans ce cas, la fonction sera de la forme

$$x^\lambda G_0(x)\, e^{\overline{G}(x)};$$

λ désigne un nombre entier positif ou nul. $G_0(x)$ est une fonction entière formée de la manière indiquée ci-dessus; elle a toutes les racines de la fonction donnée, sauf les racines nulles.

Nous avons vu que cette fonction $G_0(x)$ pouvait se mettre sous la forme

$$\prod_{\nu=1}^{n} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) e^{-P(x, n+1)};$$

n doit être pris assez grand, pour que le module de x soit moindre que $|a_n|$, $|a_{n+1}|$, ... Nous avons fixé plus haut une limite supérieure pour le module de $P(x, n)$; il en résulte que

$$\lim_{n=\infty} P(x, n+1) = 0,$$

car

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=n}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu} \right)^{m_\nu} \right| = 0,$$

si, comme nous le supposons, les nombres m sont choisis de telle sorte que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_\nu} \left(\frac{x}{a_\nu} \right)^{m_\nu} \right|$$

soit convergent.

Nous aurons donc, pour toute valeur de x,

$$G_0(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu \right).$$

La fonction $\overline{G}(x)$ peut, d'une infinité de manières, se mettre sous la forme

$$\overline{G}(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \overline{g}_\nu(x),$$

les fonctions $\overline{g}_\nu(x)$ étant des fonctions rationnelles entières de x s'annulant toutes pour $x = 0$.

Si nous posons alors

$$g_\nu(x) = \overline{g}_\nu(x) + \sum_{r=1}^{r=m_\nu} \frac{1}{r} \left(\frac{x}{a_\nu} \right)^r,$$

il viendra

$$G(x) = C x^\lambda \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{x}{a_\nu} \right) e^{g_\nu(x)} \right],$$

où C désigne une constante. Cette formule est relative au troisième cas. Dans le premier, on aura

$$G(x) = C \prod^{\infty} e^{\overline{g}_\nu(x)},$$

et dans le second, en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_m$ les racines différentes de zéro, on pourra écrire

$$G(x) = Cx^\lambda \prod_{\nu=1}^{m} \left[\left(1 - \frac{x}{a_\nu} \right) e^{\bar{g}_\nu(x)} \right] \cdot \prod_{\nu=m+1}^{\infty} e^{\bar{g}_\nu(x)}.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème. — *Toute fonction uniforme entière de x peut se mettre sous la forme d'un produit de facteurs primaires*

$$(kx + l) e^{g(x)}$$

k et l étant des constantes et $g(x)$ une fonction rationnelle entière s'annulant pour $x = 0$.

J'ajoute une remarque importante. On dit qu'une série est absolument convergente quand la convergence est indépendante de l'arrangement des termes. Si chaque terme d'une série est fonction de x, on dit que la série est uniformément convergente dans un contour C lorsque, étant donnée une quantité δ aussi petite que l'on voudra, on pourra déterminer un nombre n assez grand pour que la somme des n premiers termes de la série diffère de la somme de cette série d'une quantité ayant un module moindre que δ pour toute valeur de x à l'intérieur de C. Les mêmes dénominations peuvent s'appliquer aux produits infinis.

Cela posé, en supposant que la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{g}_\nu(x),$$

par laquelle nous avons représenté $\overline{G}(x)$, soit absolument et uniformément convergente pour toute valeur de x ayant un module inférieur à une limite fixe prise arbitrairement, nous allons montrer que le produit infini

$$Cx^\lambda \prod^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_\nu} \right) e^{g_\nu(x)}$$

est lui-même absolument et uniformément convergent pour les mêmes valeurs de x.

Pour démontrer ce fait, il nous suffira de faire voir que le produit

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$$

est uniformément convergent dans les limites indiquées, c'est-à-dire que, ξ et δ désignant deux quantités positives dont la première est aussi grande et la seconde aussi petite que l'on voudra, on pourra déterminer un nombre n tel que le module du produit d'un nombre quelconque des fonctions $\mathrm{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$, pour lesquelles $\nu > n$, diffère de l'unité d'une quantité ayant un module moindre que δ pour toute valeur de x de module moindre que ξ. Cette condition est effectivement remplie si l'on suppose n assez grand pour que l'on ait

$$|a_\nu| > \xi \quad \text{si} \quad \nu > n,$$

car nous aurons alors, pour toute valeur de x de module moindre que ξ,

$$\mathrm{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right) = e^{-\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{r+m_\nu}}.$$

Donc, en choisissant un nombre quelconque de ces fonctions et désignant par $e^{-\mathrm{F}(x)}$ leur produit, le module de $\mathrm{F}(x)$ sera toujours moindre que

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r+m_\nu}\left|\frac{\xi}{a_\nu}\right|^{r+m_\nu},$$

expression qui, comme on l'a vu précédemment, tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La proposition est donc établie.

J'ajouterai encore que les fonctions exponentielles qui entrent dans les fonctions primaires de $\mathrm{G}(x)$ ne sont pas entièrement déterminées. En effet, soient $g'_1(x)$, $g'_2(x)$, ... des fonctions rationnelles entières de x telles que l'on ait pour une valeur quelconque de x

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g'_\nu(x) = 0,$$

fonctions que l'on pourra choisir d'une infinité de manières; l'expression de $G(x)$ ne changera pas de valeur si, dans chacun des facteurs primaires, on remplace $g_\nu(x)$ par $g_\nu(x) + g'_\nu(x)$.

Il est évident, d'autre part, qu'on obtient ainsi toutes les manières de représenter $G(x)$ par un produit de facteurs primaires.

Remarquons enfin que, si pour un nombre positif déterminé μ la somme $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\mu$ a une valeur finie, cas qui se présente fréquemment, notamment dans la théorie des fonctions elliptiques, on pourra supposer égaux à $\mu - 1$ tous les nombres $m_1, m_2, \ldots$ qui entrent dans les fonctions $E\left(\frac{x}{a_\nu}, m_\nu\right)$ (1).

CHAPITRE III.

FONCTIONS UNIFORMES DE x AYANT UN SEUL POINT SINGULIER ESSENTIEL.

Soit $f(x)$ une fonction uniforme de x avec un seul point singulier essentiel, le point ∞. On peut, dans le cas où elle possède un nombre quelconque (fini ou infini) de pôles, trouver une fonction entière $G_2(x)$ qui ait la même série de zéros que la fonction $\frac{1}{f(x)}$. Le produit $G_2(x).f(x)$ est alors une fonction entière de x que nous désignerons par $G_1(x)$, et l'on aura

$$f(x) = \frac{G_1(x)}{G_2(x)}.$$

Les deux fonctions $G_1(x)$ et $G_2(x)$ ne s'annulent pas en même temps.

(1) Le théorème établi dans ce Chapitre a été démontré pour la première fois par M. Weierstrass dans son Cours, à l'Université de Berlin, en 1874.

Inversement, toute fonction $f(x)$ de cette forme est une fonction uniforme de x ayant un seul point singulier essentiel, le point ∞, si les deux fonctions G_1 et G_2 ne s'annulent pas ensemble, et que l'une d'entre elles au moins soit transcendante.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction ayant un seul point singulier c; si l'on pose $x' = \frac{1}{x-c}$, $f(x)$ devient une fonction de x' ayant comme point singulier le point infini, et l'on a

$$f(x) = G\left(\frac{1}{x-c}\right),$$

G étant une fonction entière rationnelle ou transcendante suivant que le point $x = c$ est un pôle ou un point essentiellement singulier. Enfin, l'expression générale d'une fonction uniforme ayant comme point singulier essentiel le point $x = c$ et un nombre quelconque de pôles est

$$\frac{G_1\left(\frac{1}{x-c}\right)}{G_2\left(\frac{1}{x-c}\right)},$$

les fonctions G_1 et G_2 ne s'annulant pas pour la même valeur de x, et l'une d'elles au moins étant transcendante.

CHAPITRE IV.

LEMME.

Soient $F(y)$ une fonction de y ayant un seul point singulier essentiel, le point ∞, et $\varphi(x)$ une fonction rationnelle de degré n qui devient infinie pour n valeurs différentes $c_1, c_2, \ldots, c_n$; la fonction $F(y)$ devient, quand on pose $y = \varphi(x)$, une fonction uniforme de x ayant les n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$. On reconnaît de suite que l'on ne peut obtenir de cette manière toutes les fonctions ayant n points singuliers essentiels; mais il est possible, comme je l'ai énoncé dans le Chapitre I et comme je vais le démontrer maintenant, de mettre toute fonction uniforme de x ayant n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sous la forme

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu[\varphi(x)] \frac{1}{(x-c)^\nu},$$

c représentant une quelconque des valeurs $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Supposons d'abord qu'un des points singuliers de $f(x)$ soit à l'infini. Nous poserons

$$\varphi(x) = k_0 + k_1 x + \frac{k_2}{x-c_2} + \ldots + \frac{k_n}{x-c_n},$$

aucune des constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ne pouvant être nulle.

Établissons entre x et une autre variable y la relation $y = \varphi(x)$; à chaque valeur finie de y correspondront n valeurs finies de x, différentes de $c_2, c_3, \ldots, c_n$, que nous désignerons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On pourra, si l'on fait d'abord abstraction de ces valeurs spéciales de y, en nombre fini, pour lesquelles il se trouve des valeurs égales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, trouver n fonctions $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ de y telles que

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} F_\nu x^\nu = f(x) \quad \text{pour } x = x_1, \ldots, x_n.$$

En posant

$$\Pi(x) = (x-x_1)\ldots(x-x_n) = x^n + X_1 x^{n-1} + \ldots + X_n, \quad \Pi'(x) = \frac{d\,\Pi(x)}{dx},$$

on aura

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} F_\nu x^\nu = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} \frac{\Pi(x)}{x-x_\nu}.$$

Mais

$$\frac{\Pi(x)}{x-x_\nu} = x^{n-1} + (x_\nu + X_1)x^{n-2} + \ldots + (x_\nu^{n-1} + X_1 x_\nu^{n-2} + \ldots + X_{n-1});$$

donc

$$
\begin{aligned}
F_{n-1} &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)},\\
F_{n-2} &= X_1 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)},\\
F_{n-3} &= X_2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} + X_1 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^2 f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F_0 &= X_{n-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} + \ldots + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^{n-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}.
\end{aligned}
$$

Il faut maintenant montrer que ces expressions $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$ sont des fonctions uniformes de y, avec le point ∞ comme seul point singulier essentiel.

Si l'on pose

$$(x - c_2), \ \ldots, \ (x - c_n) = \psi(x),$$

on aura

$$\psi(x)[\varphi(x) - y] = k_1 \Pi(x),$$

d'où l'on conclut que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions linéaires entières de y. Les expressions

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}, \quad \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu^{n-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)},$$

dans lesquelles les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entrent symétriquement comme dans $X_1, X_2, \ldots, X_n$, ont aussi une valeur déterminée unique pour chaque valeur de y, à l'exception, bien entendu, des valeurs de y que nous avons exclues; mais il ne résulte pas de là que, dans le voisinage d'une valeur b de y, elles puissent, après avoir été multipliées, s'il est nécessaire, par une puissance entière convenable de $y - b$, être développées en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $y - b$: c'est ce point que nous allons maintenant démontrer.

Prenons d'abord b de manière que les racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de l'équation $\varphi(x) = b$ soient toutes distinctes. Alors $\varphi'(a_\nu)$ n'est pas nul, et l'égalité $\varphi(x)=y$ peut s'écrire, pour une valeur de x voisine de a_ν,

$$\varphi'(a_\nu)(x-a_\nu)+\tfrac{1}{2}\varphi''(a_\nu)(x-a_\nu)^2+\ldots=y-b;$$

et l'on a, pour de petites valeurs de $y-b$, en désignant par x_ν la racine voisine de a_ν,

$$x_\nu=a_\nu+(y-b)\,\mathrm{P}_\nu(y-b)\ (^1).$$

Comme $\Pi'(a_\nu)$ n'est pas nul, et que a_ν n'est pas un point singulier essentiel de la fonction $f(x)$, on peut écrire

$$\frac{x_\nu^{\lambda-1}f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}=(x_\nu-a_\nu)^{-m_\nu}\,\overline{\mathrm{P}}_\nu(x_\nu-a_\nu)\quad \text{pour } \lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

m_ν étant un entier nul, ou positif suivant que a_ν est un point ordinaire ou un pôle de $f(x)$. Si m est le plus grand des nombres m_1, m_2, ..., m_n, on aura

$$(y-b)^m\sum_{\nu=1}^{n}\frac{x_\nu^{\lambda-1}f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)}=\mathrm{P}^{(\lambda)}(y-b).$$

Considérons maintenant le cas où l'équation $\varphi(x)=b$ a des racines égales.

Soit a une racine multiple de l'ordre μ; $\varphi(x)$ et ses $\mu-1$ premières dérivées s'annuleront pour $x=a$. On pourra, dans le voisinage de $x=a$, écrire

$$\frac{1}{\mu!}\varphi^{(\mu)}(a)(x-a)^\mu+\frac{1}{(\mu+1)!}\varphi^{(\mu+1)}(a)(x-a)^{\mu+1}+\ldots=y-b,$$

et, en posant

$$\left[\frac{\mu!(y-b)}{\varphi^{(\mu)}(a)}\right]^{\frac{1}{\mu}}=\eta,$$

les μ racines qui deviennent égales à a pour $y=b$ pourront être représentées par une série de la forme $a+\eta\,\mathrm{P}(\eta)$, $\mathrm{P}(\eta)$ ne s'annulant pas pour $\eta=0$.

Fixons une des μ valeurs de η et posons $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{\mu}}$; les μ racines seront

---

(1) L'expression $\mathrm{P}(x)$ représente d'une manière générale une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

données par les formules

$$x_1 = a + \eta\, P(\eta), \quad x_2 = a + \varepsilon\eta\, P(\varepsilon\eta), \quad \ldots, \quad x_\mu = a + \varepsilon^{\mu-1}\eta\, P(\varepsilon^{\mu-1}\eta).$$

D'autre part, l'équation $\Pi'(x) = 0$ admettant, pour $y = b$, la racine $x = a$ comme racine multiple de l'ordre $\mu - 1$, on aura

$$\Pi'(x_\nu) = (\varepsilon^{\nu-1}\eta)^{\mu-1}\overline{P}(\varepsilon^{\nu-1}\eta), \quad \text{pour} \quad \nu = 1, 2, \ldots, \mu,$$

$\overline{P}(\varepsilon^{\nu-1}\eta)$ ne s'annulant pas pour $\eta = 0$.

On a en outre, dans le voisinage de $x = a$,

$$f(x) = (x-a)^{-m}[A_0 + A_1(x-a) + \ldots];$$

donc

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = \eta^{-m\mu-\mu} \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \varepsilon^{\nu-1}\eta\, P^{(\lambda)}(\varepsilon^{\nu-1}\eta).$$

L'expression $\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \varepsilon^{(\nu-1)k}$ étant nulle quand l'entier k n'est pas multiple de μ, il en résulte que

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = (y-b)^{-m}\, P^{(\lambda)}(y-b).$$

Donc, si l'équation $\varphi(x) = b$ a r racines distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_r$, et si μ_k et m_k ont relativement à a_k la signification qu'avaient μ et m relativement à a, on aura, pour de petites valeurs de $(y-b)$,

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = \sum_{k=1}^{k=r} (y-b)^{-m_k} P_k^{(\lambda)}(y-b),$$

et enfin, en désignant par m le plus grand des nombres $m_1, m_2, \ldots, m_r$,

$$(y-b)^m \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{x_\nu^{\lambda-1} f(x_\nu)}{\Pi'(x_\nu)} = P^{(\lambda)}(y-b),$$

ce qui montre que la formule trouvée précédemment, dans le cas où l'équation $\varphi(x) = b$ a toutes ses racines distinctes, est vraie dans tous les cas. Il est donc démontré que toutes les sommes entrant dans les expressions de F_0, F_1, ..., F_{n-1}, et par suite ces quantités elles-mêmes, sont des fonctions uniformes de y n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point ∞. Dans le cas où la fonction $f(x)$ n'a pas de pôle, tous les nombres m sont nuls, et $F_0(y)$, ..., $F_{(n-1)}(y)$ sont des fonctions entières de y.

D'après la définition des fonctions $F_\nu(y)$, on a

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} F_\nu(y) x^\nu = f(x),$$

si pour une valeur finie quelconque de y, x satisfait à l'équation $\varphi(x)=y$. Donc, en remplaçant y par $\varphi(x)$, on aura pour toute valeur de x, à l'exception de c_2, c_3, ..., c_n et ∞,

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} F_\nu[\varphi(x)] x^\nu.$$

Nous avons, dans ce qui précède, supposé que la fonction $f(x)$ avait pour points singuliers essentiels c_2, c_3, ..., c_n et le point ∞. De cette manière, à des valeurs finies de y correspondaient toujours des valeurs finies de x. Supposons maintenant que les points singuliers de $f(x)$ soient tous à distance finie : désignons-les par c_1, c_2, ..., c_n; nous poserons $x = c_1 + \frac{1}{z}$; $f(x)$ et $\varphi(x)$ deviendront des fonctions de z, $\overline{f(z)}$ et $\overline{\varphi(z)}$; on aura

$$\overline{\varphi(z)} = k'_0 + k'_1 z + \frac{k'_2}{z - c'_2} + \ldots + \frac{k'_n}{z - c'_n};$$

les k' et les c' sont des constantes; c'_2, c'_3, ..., c'_n et le point ∞ seront les points singuliers essentiels de $\overline{f(z)}$; donc

$$\overline{f(z)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} F_\nu[\overline{\varphi(z)}] z^\nu,$$

et, par suite,

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} F_\nu[\varphi(x)] \left(\frac{1}{x - c_1}\right)^\nu.$$

CHAPITRE V.

DES FONCTIONS UNIFORMES DE x AYANT UN NOMBRE FINI DE POINTS SINGULIERS (PÔLES OU POINTS SINGULIERS ESSENTIELS).

Une fonction rationnelle $f(x)$ peut se mettre sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant les points singuliers, et $G_1, G_2, \ldots, G_n$ étant des fonctions rationnelles entières. Nous allons montrer maintenant que toute fonction uniforme de x, $f(x)$, ayant un nombre fini de points singuliers, peut se mettre sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

les symboles G désignant, suivant notre convention, des fonctions entières; la fonction G_ν sera transcendante ou rationnelle suivant que le point $x=c_\nu$ sera un point singulier essentiel ou un pôle de $f(x)$.

Supposons d'abord que $f(x)$ n'ait que des points singuliers essentiels. On pourra mettre $f(x)$ sous la forme (Chap. IV)

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu[\varphi(x)]\,\frac{1}{(x-c_1)^\nu},$$

les fonctions $F_\nu(y)$ étant des fonctions entières de y, de telle sorte que

$$F_\nu[\varphi(x)] = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F_{\nu,\lambda}\,\varphi^\lambda(x),$$

les quantités $F_{\nu,\lambda}$ étant des constantes.

Pour toute valeur de $x-c_1$ d'un module suffisamment petit, on a

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-c_1}\,P(x-c_1);$$

donc

$$F_\nu[\varphi(x)] = \sum_{\lambda=0}^{\infty} F_{\nu,\lambda}(x-c_1)^{-\lambda} P^\lambda(x-c_1),$$

et, en posant

$$P^\lambda(x-c_1) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\lambda,\mu}(x-c_1)^\mu,$$

on a

$$F_\nu[\varphi(x)] = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left[\sum_{\mu=0}^{\infty} F_{\nu,\lambda} A_{\lambda,\mu}(x-c_1)^{-\lambda+\mu}\right].$$

La somme double qui forme le second membre de cette égalité reste convergente quand on y remplace chaque terme par son module. En effet, si la série $P(x-c_1)$ converge pour toute valeur de $x-c_1$ de module moindre que ρ, on peut déterminer une grandeur positive g telle que chaque coefficient de $P(x-c_1)$ ait un module moindre que le coefficient correspondant dans le développement de

$$\frac{g}{1-\frac{x-c_1}{\rho}};$$

donc, en posant $|x-c_1| = \xi$ et en supposant $\xi < \rho$, on aura

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} |A_{\lambda,\mu}(x-c_1)^{-\lambda+\mu}| < g^\lambda \xi^{-\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\rho}\right)^{-\lambda},$$

et, par suite,

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} |F_{\nu,\lambda} A_{\lambda,\mu}(x-c_1)^{-\lambda+\mu}| < \sum_{\lambda=0}^{\infty} |F_{\nu,\lambda}|\, g^\lambda \xi^{-\lambda}\left(1-\frac{\xi}{\rho}\right)^{-\lambda}.$$

Donc la somme double par laquelle $F_\nu[\varphi(x)]$ se trouve exprimée est absolument convergente, et l'on peut alors, dans cette expression, grouper tous les termes contenant $x-c_1$ à la même puissance; et l'on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)}\left(\frac{1}{x-c_1}\right)^k + P_1(x-c_1),$$

pour toute valeur de $x-c_1$ de module moindre que ρ.

La série $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)}\left(\frac{1}{x-c_1}\right)^k$, convergente pour des valeurs quelconques de $\frac{1}{x-c_1}$, est une fonction entière de $\frac{1}{x-c_1}$ que nous pouvons représenter par $G_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right)$, et l'on peut écrire

$$f(x) - G_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right) = P^{(1)}(x-c_1),$$

c'est-à-dire que la différence $f(x) - G_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right)$ est régulière dans le voisinage du point c_1.

Formons de même la fonction $G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$ telle que la différence $f(x) - G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$ soit régulière dans le voisinage du point c_ν. Alors la différence

$$f(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$$

sera uniforme et régulière dans toute l'étendue du plan; elle ne pourra être qu'une constante, et l'on aura

$$f(x) = C + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

ou, en faisant entrer la constante C dans les fonctions G,

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right).$$

Supposons maintenant que $f(x)$ ait m points singuliers essentiels $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ et $n-m$ pôles $(c_{m+1}, \ldots, c_n)$; ν désignant un des nombres $m+1, \ldots, n$, et x étant supposé dans le voisinage de c_ν, $f(x)$ peut se mettre sous la forme

$$(x-c_\nu)^{-m_\nu}[C_0^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(x-c_\nu) + \ldots].$$

Posons

$$\sum_{k=0}^{k=m_\nu-1} C_k^{(\nu)}(x-c_\nu)^{-m_\nu+k} = G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$$

et

$$f_1(x) = f(x) - \sum_{\nu=m+1}^{\nu=n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right);$$

on voit que $f_1(x)$ sera une fonction uniforme de x ayant m points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_m$, mais n'ayant pas de pôles, et qui pourra, par suite, se mettre sous la forme

$$\sum_{\nu=1}^{m} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right);$$

on aura donc aussi dans le second cas

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

avec cette différence que, parmi les fonctions entières G_ν, il y en aura seulement m de transcendantes.

Nous venons de démontrer la formule désignée par (B, 1) dans le Chapitre I (¹).

CHAPITRE VI.

DES FONCTIONS UNIFORMES DE x AYANT n POINTS SINGULIERS ESSENTIELS ET QUI POUR TOUTE AUTRE VALEUR DE x ONT UNE VALEUR FINIE ET DIFFÉRENTE DE ZÉRO.

Soit $f(x)$ une fonction de cette espèce; on a, dans le voisinage d'un point ordinaire $x = a$,

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots, \quad \text{où} \quad A_0 \gtrless 0;$$

donc

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = P(x-a).$$

(¹) Il est presque inutile d'ajouter que, en s'appuyant sur quelques théorèmes que l'on ne

Si le point ∞ n'est pas un point singulier, on aura, pour x très-grand,

$$f(x) = A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots;$$

donc

$$\frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} P\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction $\frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$ n'a, par suite, d'autres points singuliers que les n points singuliers $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de la fonction $f(x)$. On peut donc la mettre sous la forme

$$C + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right),$$

les fonctions G_ν ne contenant pas de terme constant.

Supposons que c_ν ne soit pas à l'infini et que k_ν soit le coefficient de $\frac{1}{x - c_\nu}$ dans G_ν; on peut écrire $G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right)$ sous la forme

$$\frac{k_\nu}{x - c_\nu} + \frac{d}{dx} \overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right),$$

où $\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right)$ représente une fonction entière de $\frac{1}{x - c_\nu}$, sans terme constant. Dans le cas où tous les points singuliers sont à distance finie, si l'on donne à x une valeur telle que $|x| > |c_1|, |c_2|, \ldots, |c_n|$, on aura

$$C + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right) = C + \frac{1}{x} \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu + \frac{1}{x^2} P\left(\frac{1}{x}\right);$$

on devra, par conséquent, avoir

$$C = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} k_\nu = 0,$$

---

démontre pas habituellement dans les éléments de la théorie des fonctions, on aurait pu établir plus brièvement l'expression donnée ci-dessus; mais je n'ai pas voulu passer sous silence le lemme précédent, parce que, indépendamment de l'usage que l'on peut en faire, il fournit une expression générale et remarquable des fonctions considérées.

et l'on a

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{\nu=1}^{\nu=n}\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{k_\nu}{x-c_\nu}.$$

Supposons maintenant qu'un des points singuliers, c_n par exemple, soit à l'infini; on devra remplacer $G_n\left(\frac{1}{x-c_n}\right)$ par $G_n(x)$.

Nous poserons $C + G_n(x) = \frac{d}{dx}\overline{G_n}(x)$, en supposant $\overline{G_n}(0) = 0$, et l'on aura encore, dans ce cas,

$$\frac{1}{f(x)}\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{\nu=1}^{n}\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{k_\nu}{x-c_\nu}.$$

Nous allons montrer d'abord que, dans les deux cas, les quantités k_ν sont des nombres entiers. Soient ρ une constante et τ une variable réelle. Posons

$$x_\tau = c_\lambda + \rho e^{\tau i},$$

λ désignant dans le premier cas un des nombres $1, 2, \ldots, n$, et dans le second un des nombres $1, 2, \ldots, (n-1)$ seulement.

Si le module de ρ est suffisamment petit, la somme des quantités $\frac{k_\nu dx_\tau}{x_\tau - c_\nu}$ peut se mettre sous la forme

$$k_\lambda i\,d\tau + d\mathrm{P}(x_\tau - c_\lambda);$$

donc

$$\frac{1}{f(x_\tau)}\frac{df(x_\tau)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\sum_{\nu=1}^{n}\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x_\tau - c_\nu}\right) + \frac{d}{d\tau}\mathrm{P}(x_\tau - c_\lambda) + k_\lambda i,$$

et, par suite, en écrivant $\mathrm{F}(x) = e^{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right) + \mathrm{P}(x-c_\lambda)}$,

$$f(x_\tau) = \overline{C}\,\mathrm{F}(x_\tau)\,e^{k_\lambda \tau i},$$

où $\overline{C}$ ne dépend pas de τ.

Si l'on remplace dans cette égalité τ par $\tau + 2\pi$, x_τ ne changera pas; donc

$$e^{2k_\lambda \pi i} = 1;$$

par conséquent k_λ est un nombre entier.

Posons maintenant

$$\mathrm{R}^*(x) = \mathrm{C}_0 \prod_{\nu=1}^{\nu=n-\varepsilon} (x - c_\nu)^{k_\nu},$$

où $\varepsilon = 0$ ou 1 suivant que c_n a ou non une valeur finie;

$$\frac{1}{\mathrm{R}(x)} \frac{d\mathrm{R}^*(x)}{dx} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n-\varepsilon} \frac{k_\nu}{x - c_\nu};$$

donc, en disposant convenablement de la constante C_0,

$$f(x) = \mathrm{R}^*(x) \prod_{\nu=1}^{\nu=n} e^{\overline{\mathrm{G}}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}.$$

Dans le cas où tous les points singuliers de $f(x)$ sont à distance finie, $\Sigma k_\nu = 0$; donc la fonction $\mathrm{R}^*(x)$ ne devient ni nulle ni infinie pour $x = \infty$; c'est une fonction rationnelle de x qui a une valeur finie et différente de zéro pour toute valeur de x qui ne coïncide pas avec un point singulier de $f(x)$; pour $n = 1$, elle se réduit à une constante. Nous avons donc la forme (B, 2).

Inversement, la forme précédente représente toujours une fonction de x ayant les points singuliers $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et ne devenant ni nulle ni infinie pour toute autre valeur de x.

On peut encore faire la remarque suivante : s'il est démontré qu'une fonction uniforme de $x, f(x)$ et son inverse $\frac{1}{f(x)}$, ne peut avoir d'autres points singuliers que les points $c_1, c_2, \ldots, c_n$, sans qu'on sache si ces points sont ou ne sont pas des points singuliers, on aura

$$\frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = \overline{\mathrm{C}} + \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{G}_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n-\nu} \frac{k_\nu}{x - c_\nu} + \frac{d}{dx} \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\mathrm{G}}_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right),$$

$$f(x) = \mathrm{R}(x) \prod_{\nu=1}^{n} e^{\overline{\mathrm{G}}_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}, \quad \mathrm{R}(x) = \mathrm{C} \prod_{\nu=1}^{n} (x - c_\nu)^{k_\nu}.$$

Dans ce cas, les fonctions $\overline{\mathrm{G}}_\nu(x)$ peuvent être nulles.

CHAPITRE VII.

FONCTIONS UNIFORMES DE x AVEC n POINTS SINGULIERS ESSENTIELS ET UN NOMBRE QUELCONQUE DE PÔLES.

Nous avons expliqué (Chap. I) comment, à l'aide des propositions démontrées dans les Chapitres II-VI, on pouvait arriver aux expressions (B, 2), (C, 1) et (C, 2) d'une fonction uniforme de x ayant n points singuliers essentiels. Il nous restera peu de chose à ajouter.

Si la fonction $f(x)$ n'a pas de zéro, les fonctions désignées (Chapitre I) par $G^{(\nu)}$ doivent être toutes remplacées par l'unité. Si elle a des zéros en nombre limité, on peut choisir les fonctions $G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$, dans ce cas rationnelles, de différentes manières. Le plus simple sera de déterminer une de ces fonctions de manière qu'elle ait les mêmes zéros que $f(x)$ et de prendre toutes les autres égales à l'unité. Dans le cas enfin où $f(x)$ aura une infinité de zéros, il y aura certainement parmi les points singuliers essentiels un au moins (nous le désignerons par c_1) dans le voisinage duquel la fonction aura une infinité de zéros. Soit c_λ un des autres points singuliers essentiels, et désignons par C_λ la portion du plan pour laquelle $|x-c_\lambda|\leqq\rho$.

On peut choisir ρ suffisamment petit pour que C_λ contienne seulement le point singulier essentiel c_λ, et des zéros dans le cas seulement où il y en aurait une infinité dans le voisinage de c_λ. Nous supposerons, en outre, ρ tellement choisi, qu'il n'y ait pas de zéros sur le contour de c_λ. Nous désignerons par C_1 la partie du plan qui reste en dehors des contours $c_2, c_3, \ldots, c_n$. La fonction désignée par $G^{(\nu)}$ devra être remplacée par l'unité si le contour $C^{(\nu)}$ ne contient pas de zéros. En procédant de cette manière, on arrive à avoir le moindre nombre de fonctions $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ dont l'ensemble des zéros coïncide avec la série des zéros de $f(x)$.

Si la fonction $f(x)$ a, comme nous l'avons supposé au Chapitre V, n points singuliers (pôles ou points singuliers essentiels), trois cas seront à distinguer.

Les points singuliers $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont tous des points singuliers essentiels; alors

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right) . f_1(x),$$

la fonction $f_1(x)$ jouissant des propriétés étudiées dans le Chapitre précédent et pouvant, par suite, se mettre sous la forme

$$R^\star(x) \prod_{\nu=1}^{\nu=n} e^{\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right)}.$$

Parmi les fonctions G_ν, il peut y en avoir, comme nous l'avons remarqué dans le Chapitre précédent, qui se réduisent à zéro.

Si l'on pose

$$G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right) e^{\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right)} = G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right),$$

on aura

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{\nu=n} G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right) . R^\star(x).$$

Supposons que $f(x)$ ait m points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_m$ et $n - m$ pôles $c_{m+1}, \ldots, c_n$; soit d'autre part, pour $\nu = m + 1, \ldots, n$, m_ν le plus petit nombre entier positif pour lequel le produit $(x - c_\nu)^{m_\nu} f(x)$ ait une valeur finie pour $x = c_\nu$. Si l'on pose

$$f(x) = \overline{f(x)} \prod_{\nu=m+1}^{n} \left(\frac{1}{x - c_\nu}\right)^{m_\nu},$$

la fonction $\overline{f(x)}$ aura m points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_m$, mais n'aura pas de pôles; $f(x)$ sera donc encore de la forme

$$\prod_{\nu=1}^{m} G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right) . R^\star(x).$$

Enfin, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, si $c_1, c_2, \ldots, c_n$

sont tous des pôles, $f(x)$ prendra la forme

$$\prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right),$$

G_ν étant une fonction rationnelle entière de $\frac{1}{x-c_\nu}$, du degré m_ν, si m_ν est le degré de multiplicité du pôle c_ν.

Donc, en résumé, la formule (B, 2) se trouve démontrée dans toute sa généralité. Rappelons que la fonction rationnelle $R^*(x)$ ne peut être nulle ou infinie qu'aux points singuliers essentiels de $f(x)$; de plus, aucune des fonctions $G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)$, quand elles ont été formées de la manière indiquée, ne s'annule aux points $c_1, c_2, \ldots, c_n$, et ne se réduit à une constante. Inversement, la formule précédente représente toujours une fonction uniforme de x, ayant m points singuliers si les fonctions $G_\nu(x)$ et $R^*(x)$ sont assujetties aux conditions indiquées.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction uniforme de x ayant n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$. On formera, comme il a été indiqué dans le Chapitre I, les fonctions

$$G_{n+1}\left(\frac{1}{x-c_1}\right), \quad \ldots, \quad G_{2n}\left(\frac{1}{x-c_n}\right),$$

en opérant relativement à $\frac{1}{f(x)}$ comme on a opéré à l'égard de $f(x)$ pour former $G_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right), \ldots, G_n\left(\frac{1}{x-c_1}\right)$ (1).

On aura alors

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n}\left[\frac{G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}\right] \cdot f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant une fonction de x qui appartient à la classe étudiée dans le Chapitre précédent et que l'on pourra, par conséquent, mettre sous la

(1) Il est à remarquer que les n portions du plan peuvent être différentes dans la formation des fonctions $G_1, G_2, \ldots, G_n$ et des fonctions $G_{n+1}, \ldots, G_{2n}$.

forme indiquée ; par suite, on peut écrire

$$f(x) = \frac{\prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)} \cdot R^*(x).$$

C'est la forme désignée par (C, 2).

Remarquons que les fonctions $G_1, G_2, \ldots, G_{2n}$ sont formées de telle sorte que deux quelconques d'entre elles ne s'annulent pas pour la même valeur de x et qu'aucune d'elles ne s'annule aux points $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Tout facteur du dénominateur qui n'a pas un nombre infini de zéros est une fonction rationnelle; on peut être assuré, dans ce cas, que la fonction correspondante du numérateur est une fonction transcendante.

Inversement, il est clair que l'expression précédente représente toujours une fonction uniforme de x ayant n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$ si les fonctions $G(x)^*$ et $R^*(x)$ jouissent des propriétés qui viennent d'être indiquées.

La fonction $R^*(x)$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{G_1^*\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)}{G_1^*\left(\frac{1}{x-c_\lambda}\right)},$$

où c_λ représente une quelconque des quantités $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Les fonctions G_1^* et G_2^* sont des fonctions rationnelles entières de $\frac{1}{x-c_\lambda}$, sans facteur commun. *L'expression générale d'une fonction uniforme de x avec n points singuliers essentiels $c_1, c_2, \ldots, c_n$ peut donc aussi être mise sous la forme*

$$\frac{\prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)},$$

où les fonctions $G_1, G_2, \ldots, G_{2n}$ *ont les mêmes propriétés que plus haut, avec cette modification que cependant un facteur du dénominateur et le facteur correspondant du numérateur peuvent s'annuler pour les points* $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Cette seconde expression de $f(x)$ peut se développer maintenant de deux manières différentes.

Posons

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

où

$$f_1(x) = \prod_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right), \quad f_2(x) = \prod_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu}\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right).$$

On peut développer f_1 et f_2 (Chap. V) de la manière suivante :

$$f_1(x) = A + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\infty} A_{\mu,\nu}(x - c_\nu)^{-\mu},$$

$$f_2(x) = B + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\mu,\nu}(x - c_\nu)^{-\mu}.$$

Les coefficients A, B, $A_{\mu,\nu}$, $B_{\mu,\nu}$ sont des constantes, et les séries sont convergentes pour toute valeur de x différente de $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Nous arrivons ainsi à l'expression (C, 1) du Chapitre I.

On peut effectuer un développement d'une autre nature. Nous avons vu en effet, au Chapitre II, que toute fonction entière pouvait être développée en un produit de facteurs primaires si elle n'est pas elle-même une fonction primaire. Développons de cette manière $G_1, G_2, \ldots, G_n$; alors chacune des fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ se trouvera exprimée par un produit toujours convergent de facteurs primaires (rationnels ou transcendants) et tels, que le point singulier de chaque facteur est en même temps un point singulier essentiel de $f(x)$. Nous voyons donc que toute fonction uniforme de x ayant n points singuliers essentiels et un nombre quelconque de pôles peut, à l'aide d'opérations arithmétiques, être composée avec des éléments qui sont les fonctions les plus simples de même nature. Il nous reste à étudier comment une telle fonction se comporte dans le voisinage d'un point singulier essentiel.

CHAPITRE VIII.

VALEURS DE LA FONCTION DANS LE VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER ESSENTIEL.

Soit $f(x)$ une fonction uniforme et entière de x; on sait qu'il y a des valeurs infiniment grandes de x pour lesquelles la fonction devient aussi infiniment grande : en d'autres termes, soient a et b deux quantités positives quelconques. On peut toujours trouver parmi les valeurs de x de module supérieur à a des valeurs pour lesquelles le module de $f(x)$ soit supérieur à b.

On peut dire la même chose de toute fonction uniforme de x pour laquelle le point ∞ est le seul point singulier essentiel. L'expression générale d'une telle fonction est (Chap. III)

$$\frac{G_1(x)}{G_2(x)}.$$

Nous avons deux cas à distinguer : si le dénominateur est une fonction transcendante, la fonction s'annule pour une infinité de valeurs de x; parmi ces valeurs, il y en a nécessairement dont le module surpasse une quantité donnée quelconque, et dans le voisinage d'une telle valeur $f(x)$ est infiniment grand; mais, si $G_2(x)$ est une fonction rationnelle, on peut mettre $\frac{G_1(x)}{G_2(x)}$ sous la forme

$$\frac{G_3(x)}{G_2(x)} + G_4(x),$$

$G_3(x)$ étant une fonction rationnelle entière de degré moindre que $G_2(x)$, et $G_4(x)$ une fonction transcendante entière. Le quotient $\frac{G_3(x)}{G_2(x)}$ étant infiniment petit pour toute valeur infiniment grande de x, on voit que, dans ce cas, ce qui a été dit précédemment subsiste.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction uniforme ayant un nombre fini de points singuliers essentiels. Le point c étant un de ces points singuliers, on peut, d'après le Chapitre précédent, mettre cette fonction sous la forme

$$\frac{G_1\left(\frac{1}{x-c}\right)}{G_{n+1}\left(\frac{1}{x-c}\right)} F(x),$$

$F(x)$ désignant une fonction régulière dans le voisinage de c et ne s'annulant pas pour $x=c$.

Si ρ et R désignent deux quantités positives, la première aussi petite et la seconde aussi grande que l'on voudra, on aura, pour les valeurs de x telles que $|x-c|<\rho$,

$$|f(x)|>R.$$

Considérons maintenant la fonction $\frac{1}{f(x)-C}$, C étant une constante arbitraire, on aura, pour toute valeur de x telle que $|x-c|<\rho$,

$$\left|\frac{1}{f(x)-C}\right|>R \quad \text{ou} \quad |f(x)-C|<\frac{1}{R}.$$

Donc $f(x)$ présente, dans le voisinage du point singulier c, la particularité suivante : *elle peut s'approcher autant que l'on voudra d'une valeur quelconque et n'a pas pour $x=c$ de valeur déterminée. Dans les expressions données de la fonction, cette indétermination se manifeste en ce que, pour $x=c$, ces expressions cessent d'avoir un sens.*