SERGE ALINHAC

Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux. I

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 28, nº 2 (1995), p. 225-251

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1995_4_28_2_225_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 28, 1995, p. 225 à 251.

TEMPS DE VIE ET COMPORTEMENT EXPLOSIF DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS D'ONDES QUASI-LINÉAIRES EN DIMENSION DEUX, I

PAR SERGE ALINHAC

ABSTRACT. – For a general quasi linear wave equation in two space dimensions and Cauchy data of size ε, we give a precise lower estimate for the lifespan of the smooth solution and show how the second order derivatives of the solution display a "blow up behaviour" when approaching this time.

RÉSUMÉ. – Pour une équation d'onde quasi-linéaire générale en dimension deux d'espace et des données de Cauchy de taille ε, nous précisons une borne inférieure du temps de vie de la solution régulière et montrons le comportement explosif des dérivées secondes de la solution à l'approche de cette borne.

Introduction

Dans ce travail, nous considérons des équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux d'espace.

Nous supposons les données de Cauchy C_0^∞ et de taille ε, et étudions le temps de vie T_ε et le comportement de la solution u du problème.

1. Cette situation a été très étudiée (voir une bibliographie dans Hörmander [4], par exemple). John et Klainerman ([5], [6], [7], [9]) ont obtenu des bornes inférieures de T_ε, ainsi que des bornes supérieures dans le cas particulier où l'équation et les données sont invariantes par rotation. Hörmander ([3, [4]) a établi une estimation plus précise de la forme $T_\varepsilon \geq \frac{A_0^2}{\varepsilon^2} + o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$, où A_0 est une constante explicite (avec égalité dans le cas invariant par rotation).

Nous prouvons ici (théorème 1.1.1) l'estimation

$$T_\varepsilon \geq \frac{A_0^2}{\varepsilon^2} + 2\frac{A_0 A_1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^{1-\nu}} = \tilde{T}_\varepsilon$$

pour un certain $\nu > 0$, où A_1 est une constante explicite, avec bien entendu, dans le cas invariant par rotation, $T_\varepsilon = \frac{A_0^2}{\varepsilon^2} + 2\frac{A_0 A_1}{\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\nu}}\right)$ (théorème 1.1.2).

De plus, nous établissons le comportement de la solution et de ses dérivées lorsque $t \longrightarrow \tilde{T}_\varepsilon$, montrant en particulier une dégradation effective des dérivées secondes (celle qui « doivent » exploser) à l'approche de $\tilde{T}_\varepsilon$ (corollaire 1.2) :

$$||\nabla^2 u||_{L^\infty} \geq \frac{C}{\dfrac{A_0^2}{\varepsilon^2} + 2\dfrac{A_0 A_1}{\varepsilon} - t} \qquad (t \leq \tilde{T}_\varepsilon).$$

Remarquons qu'il ne s'agit pas ici d'une preuve de l' « explosion » des dérivées secondes, car on ne permet pas au dénominateur d'atteindre zéro. Néanmoins, la taille des dérivées secondes, qui est de l'ordre de ε^2 pour $t \leq \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$ $(A < A_0)$, croît ici jusqu'à dépasser ε.

Nous pensons que ce « comportement explosif » est le signe que la constante A_0 est la valeur correcte de $\lim \varepsilon^2 T_\varepsilon$, dans tous les cas.

2. La méthode de la preuve est celle introduite par Hörmander ([3], [4]). Elle consiste à calculer une solution approchée u_a du problème de Cauchy considéré, puis à estimer le reste $\dot{u} = u - u_a$ à l'aide d'inégalités d'énergie pour l'opérateur linéarisé sur u_a.

La construction de u_a doit être ici très fine, et fait l'objet d'un travail séparé [1] dont on rappelle les résultats essentiels au paragraphe 2. Elle utilise des techniques dites « d'optique géométrique non linéaire » (*cf.* Majda [11] par exemple), et fait jouer à des solutions appropriées de l'équation de Burger (en les variables d'espace $\sigma = |x| - t$ et de temps $\tau = \varepsilon\sqrt{t}$) un rôle fondamental.

Dans ce contexte, la constante A_0 dont on a parlé plus haut n'est autre que le temps de vie (en variable τ) de ces solutions de l'équation de Burger. Alors que dans les travaux précédents (à l'exception de la tentative de John [8] dans le cas beaucoup plus délicat de la dimension trois) on se limitait à une zone $\tau \leq A < A_0$ (sans contrôle des constantes lorsque $A \overset{\rightarrow}{<} A_0$), nous nous approchons ici résolument du temps d'explosion, en permettant $A_0 - \tau = o(\varepsilon)$.

Au niveau des inégalités d'énergie dans une bande $t_0 \leq t \leq T$, la difficulté réside dans le fait que $\displaystyle\int_{t_0}^{T} ||\nabla^2 u||_{L^\infty}(t)\,dt$ n'est pas bornée pour $T \leq \tilde{T}_\varepsilon$; il faut donc, en reprenant le calcul standard avec un poids bien choisi, étudier de près les termes quadratiques en les dérivées de u. Cette démarche fait l'objet du paragraphe 3.

Au paragraphe 4, on complète les preuves des théorèmes 1.1.1 et 1.2, tandis que le paragraphe 5 traite du cas invariant par rotation.

1. Généralités et résultats

1.1. Notations et premiers résultats.

a. Dans $\mathbb{R}^3$, on note (x_0, x_1, x_2) les variables, en utilisant souvent la notation commode $x_0 = t$, $x = (x_1, x_2)$; les coordonnées polaires en (x_1, x_2) seront alors notées (r, ω), avec $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, $x_1 = r\cos\omega$, $x_2 = r\sin\omega$, $\omega_1 = \cos\omega$, $\omega_2 = \sin\omega$, $\partial_\omega = x_1\partial_2 - x_2\partial_1$.

Pour une fonction $f(x,t)$, on notera par abus

$$|f|_0 = \left(\int |f(x,t)|^2 dx \right)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad ||f||_0 = \sup_x |f(x,t)|$$

les normes L^2 et L^∞ de f à t fixé.

On considère l'équation des ondes quasi-linéaires à coefficients réels et constants

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u + g_{ij}^k \partial_k u \partial_{ij}^2 u = 0, \tag{1.1.1}$$

où la sommation est étendue aux indices $0 \le i, j, k \le 2$, $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, $g_{ij}^k = g_{ji}^k$, $g_{00}^k = 0$, $\Delta_x = \partial_1^2 + \partial_2^2$ et $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$.

Parfois on notera (1.1.1) sous la forme abrégée

$$\partial_t^2 u + g_{ij} (\nabla u) \partial_{ij}^2 u = 0, \tag{1.1.1$'$}$$

où

$$\nabla u = (\partial_0 u, \partial_1 u, \partial_2 u), \qquad g_{ij} (\nabla u) = g_{ij} (0) + \sum_{k=0}^{2} g_{ij}^k \partial_k u,$$

avec $g_{ij} (0) = 0$ sauf pour $i, j \ge 1$ où $g_{ij} (0) = -\delta_{ij}$.

Avec $\omega_0 = -1$, on définit (comme dans [4])

$$g (\omega) = g_{ij}^k \omega_i \omega_j \omega_k. \tag{1.1.2}$$

On suppose données des fonctions $u^0 (x, \varepsilon)$, $u^1 (x, \varepsilon)$, réelles de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0 [$, supportées dans $|x| \le M$, pour lesquelles on a

$$u^0 (x, \varepsilon) = \varepsilon u_1^0 (x) + \varepsilon^2 u_2^0 (x) +, \cdots, \qquad u^1 (x, \varepsilon) = \varepsilon u_1^1 (x) + \varepsilon^2 u_2^1 (x) + \cdots$$

On considère, pour $\varepsilon > 0$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + g_{ij} (\nabla u) \partial_{ij}^2 u = 0, \\ u (x, 0) = u^0 (x, \varepsilon), \qquad \partial_t u (x, 0) = u^1 (x, \varepsilon). \end{cases} \tag{1.1.3}$$

On note T_ε le temps de vie de la solution C^∞ de ce problème.

b. Quelques rappels.

Mentionnons brièvement les définitions de deux fonctions R et L qui jouent un rôle essentiel dans la suite, et qui sont discutées en détail dans [1].

• On note u_1 la solution du problème (linéarisé en 0)

$$\square u_1 = 0, \quad u_1 (x, 0) = u_1^0 (x), \quad \partial_t u_1 (x, 0) = u_1^1 (x). \tag{1.1.4}$$

Il est bien connu (*cf.* [3]) que

$$u_1 \sim \frac{R (r - t, \omega)}{r^{1/2}} (r \to +\infty, r - t \geqq -\text{cte}), \tag{1.1.5}$$

pour

$$R(\sigma, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{s \geqq \sigma} \frac{1}{\sqrt{s-\sigma}} \{\tilde{R}(s, \omega, u_1^1) - \partial_s \tilde{R}(s, \omega, u_1^0)\}\, ds, \tag{1.1.6}$$

$\tilde{R}(s, \omega, v)$ désignant la transformée de Radon $\tilde{R}(s, \omega, v) = \int_{x\omega = s} v(x)\, dx$ de v.

• On note u_2 la solution du problème

$$\Box u_2 + g_{ij}^k \partial_k u_1 \partial_{ij}^2 u_1 = 0, \quad u_2(x, 0) = u_2^0(x), \quad \partial_t u_2(x, 0) = u_2^1(x). \tag{1.1.7}$$

On montre dans [1] que

$$u_2 - \frac{g(\omega)}{2} (\partial_\sigma R)^2 \sim \frac{L(r-t, \omega)}{r^{1/2}} \ (r \to +\infty,\ r - t \geq -\text{cte}), \tag{1.1.8}$$

pour une certaine fonction L de classe C^∞.

Nous avons coutume d'appeler R et L de façon imagée les « premiers » et « deuxièmes » profils de u.

Nous faisons maintenant sur R et g l'hypothèse de non dégénérescence suivante :

(ND) Il existe un point (σ_0, ω_0) et un nombre $\kappa \geq 2$ tels que

(i)
$$-g(\omega_0)\, \partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0) < 0$$

(ii)
$$\forall A, \quad \exists C > 0 \qquad \text{avec, pour} \quad |\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0| \leq A,$$
$$-g(\omega)\, \partial_\sigma^2 R(\sigma, \omega) \geq -g(\omega_0)\, \partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0) + C(|\sigma - \sigma_0| + |\omega - \omega_0|)^\kappa.$$

• Nous posons alors

$$A_0 = \frac{1}{g(\omega_0)\, \partial_\sigma^2 R(\sigma_0, \omega_0)}, \tag{1.1.9}$$

$$A_1 = -A_0^2\, g(\omega_0)\, \partial_\sigma^2 L(\sigma_0, \omega_0), \tag{1.1.10}$$

et

$$\tau_* = \tau_*(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1. \tag{1.1.11}$$

c. Les théorèmes.

Notre résultat principal, qui sera précisé en 1.2, est le théorème suivant.

THÉORÈME 1.1.1. – *Sous l'hypothèse* (ND), *il existe* $\nu > 0$ *tel que le temps de vie* T_ε *de la solution classique* u *de* (1.1.3) *satisfasse, pour* $\varepsilon > 0$ *assez petit, à*

$$T_\varepsilon \geq \frac{A_0^2}{\varepsilon^2} + 2\,\frac{A_0\,A_1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^{1-\nu}}. \tag{1.1.12}$$

On notera dans la suite $\tilde{T}_\varepsilon = \dfrac{A_2^2}{\varepsilon^2} + 2\,\dfrac{A_0\,A_1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{\varepsilon^{1-\nu}}$. Nous croyons qu'en fait $T_\varepsilon - \dfrac{A_0^2}{\varepsilon^2} - 2\,\dfrac{A_0\,A_1}{\varepsilon} = o\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, sans savoir le prouver. Néanmoins, comme d'habitude dans ces questions, une procédure due à John [6] (*cf.* aussi [3]) permet de conclure dans le cas « invariant par rotation » c'est-à-dire pour une équation de la forme $\partial_t^2\,u - c^2\,(u_t)\,\Delta = 0$ [on a alors $g = 2\,c'\,(0)$]. L'hypothèse (ND) doit être alors remplacée par

(ND)′ Il existe un point σ_0 et un nombre $\kappa \geq 2$ tels que

$$g\,\partial_\sigma^2\,R\,(\sigma_0) < 0, \tag{i}$$

$$\forall\,A, \quad \exists\,C > 0 \qquad \text{avec, pour} \quad |\,\sigma - \sigma_0\,| \leq A, \tag{ii}$$
$$-g\,\partial_\sigma^2\,R\,(\sigma) \geq -g\,\partial_\sigma^2\,R\,(\sigma_0) + C\,|\,\sigma - \sigma_0\,|^\kappa.$$

THÉORÈME 1.1.2. – *Supposons l'équation* (1.1.1) *de la forme particulière* $\partial_t^2\,u - c^2\,(u_t)\,\Delta u = 0$, *et les données de Cauchy dans* (1.1.3) *invariantes par rotation.*

La solution u *est alors invariante par rotation et, sous l'hypothèse* (ND)′ *il existe* $\nu > 0$ *tel que*

$$T_\varepsilon = \frac{A_0^2}{\varepsilon^2} + 2\,\frac{A_0\,A_1}{\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\nu}}\right). \tag{1.1.13}$$

d. Remarques

• On aurait pu choisir en (1.1.1)′ des fonctions g_{ij} quelconques sans rien changer aux résultats; en effet, les termes de type $\partial_k\,u\;\partial_l\,u\;\partial_{ij}^2\,u$ etc. sont négligeables pour l'approximation requise en (1.1.12), (1.1.13).

• On trouvera dans Hörmander [4] l'estimation

$$T_\varepsilon \geq \frac{A_0^2}{\varepsilon^2} + o\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \tag{1.1.14}$$

ainsi qu'une bibliographie détaillée sur l'équation d'onde quasi-linéaire (1.1.13), étudiée originellement par Klainerman et John ([5], [9]).

Le présent travail vise à préciser (1.1.14) et à montrer la dégradation effective de la solution à l'approche du temps $\tilde{T}_\varepsilon$.

Ce point est l'objet du théorème 1.2.

1.2 SOLUTION APPROCHÉE ET ESTIMATIONS DES RESTES.

Dans [1], nous construisons une solution approchée u_a du problème (1.1.3) par des méthodes « d'optique géométrique non linéaire ». Nous introduisons à cette occasion un « temps lent » $\tau = \varepsilon\sqrt{t}$. Sans entrer ici dans les détails de la description de u_a (dont une partie sera rappelée au paragraphe 2), notons, pour cette solution u_a, $u = u_a + \dot{u}$.

Pour tout A, $0 < A < A_0$, on a précisé dans [1] le comportement de $\dot{u}$ pour $0 \leq t \leq \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$ et $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_A$. Nous fixons dans la suite A, $0 < A < A_0$.

Le théorème suivant précise les estimations de $\dot{u}$ dans les différentes zones du cône de lumière pour $\dfrac{A^2}{\varepsilon^2} \leq t \leq \tilde{T}_\varepsilon$.

THÉORÈME 1.2. – *Le nombre* $\nu > 0$ *étant celui introduit au théorème* 1.1.1, *il existe* $\mu > 0$ *(avec* $\mu \geq 5\nu$*) tel que, pour tout* $0 < A < A_0$ *et* $\dfrac{A^2}{\varepsilon^2} \leq t \leq \tilde{T}_\varepsilon$, *on ait :*

A. *Dans le domaine* $-C_0 \leq r - t \leq M$,

(i)
$$|\nabla \dot{u}|_0 \leq C \frac{\varepsilon^5}{(\tau_* - \tau)^{2-\mu}},$$

$$|\nabla^2 \dot{u}|_0 + |\nabla \partial_\omega \dot{u}|_0 \leq C \frac{\varepsilon^5}{(\tau_* - \tau)^{\frac{7}{2}-\mu}},$$

$$|\nabla^3 \dot{u}|_0 + |\nabla^2 \partial_\omega \dot{u}|_0 + |\nabla \partial_\omega^2 \dot{u}|_0 \leq C \frac{\varepsilon^5}{(\tau_* - \tau)^{5-\mu}}.$$

(ii) *Pour tout* $\eta > 0$, $\|\nabla \dot{u}\|_0 \leq C_\eta \dfrac{\varepsilon^{6-\eta}}{(\tau_* - \tau)^{\frac{7}{2}-\mu}}$,

$$\|\nabla^2 \dot{u}\|_0 + \|\nabla \partial_\omega \dot{u}\|_0 \leq C_\eta \frac{\varepsilon^{6-\eta}}{(\tau_* - \tau)^{5-\mu}}.$$

B. *Dans le domaine* $r - t \leq -C_0$,

(i)
$$|\nabla \dot{u}|_0 \leq C\varepsilon^{23/9}|\log \varepsilon|,$$

$$|\nabla^2 \dot{u}|_0 + |\nabla \partial_\omega \dot{u}|_0 \leq C\left(\varepsilon^{23/9}|\log\varepsilon| + \frac{\varepsilon^5}{(\tau_* - \tau)^{\frac{7}{2}-\mu}}\right),$$

$$|\nabla^3 \dot{u}|_0 + |\nabla^2 \partial_\omega \dot{u}|_0 + |\nabla \partial_\omega^2 \dot{u}|_0 \leq C\left(\varepsilon^{23/9}|\log\varepsilon| + \frac{\varepsilon^5}{(\tau_* - \tau)^{5-\mu}}\right).$$

(ii) *Pour tout* $\eta > 0$, $\|\nabla \dot{u}\|_0 \leq C_\eta \left(\varepsilon^{\frac{23}{9}-\eta} + \dfrac{\varepsilon^{6-\eta}}{(\tau_* - \tau)^{\frac{7}{2}-\mu}}\right)$,

$$\|\nabla^2 \dot{u}\|_0 + \|\nabla \partial_\omega \dot{u}\|_0 \leq C_\eta \left(\varepsilon^{\frac{23}{9}-\eta} + \frac{\varepsilon^{6-\eta}}{(\tau_* - \tau)^{5-\mu}}\right).$$

Ces estimations, combinées à la description de u_a donnée au paragraphe 2 (*cf.* aussi [1] pour plus de détails), permettent de se faire une bonne idée de u. En particulier, nous obtenons le corollaire suivant, qui décrit la dégradation effective de $\nabla^2 u$ lorsque $t \to \tilde{T}_\varepsilon$.

COROLLAIRE 1.2. – *Il existe* $C > 0$ *telle que, pour* $\frac{A^2}{\varepsilon^2} \leq t \leq \tilde{T}_\varepsilon$, *on ait* $\frac{1}{C} \frac{\varepsilon^2}{\tau_* - \tau} \leq \| \nabla^2 u \|_0 \leq C \frac{\varepsilon^2}{\tau_* - \tau}$.

2. Quelques précisions sur la solution approchée u_a

Pour la commodité du lecteur et la suite de la preuve, nous rappelons ici brièvement quelques propriétés de la solution approchée u_a construite dans [1].

On notera, dans tout ce qui suit (en accord avec le lemme 6.5.1 de [1]),

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(\varepsilon) = \tau_*(\varepsilon) - C\, \varepsilon^{\kappa/\kappa-1} - C\, \varepsilon^2 \,|\log \varepsilon\,|,$$

C étant choisi assez grand.

2.1. LA SOLUTION u_a.

Nous distinguons deux domaines D_i et D_e :

• D_e est défini par $A \leq \tau < \tilde{\tau}$, $-C_0 \leq r - t \leq M$, pour un C_0 assez grand; c'est la partie « extérieure » du cône de lumière, où l'analyse est la plus délicate.

• D_i est défini par $A \leq \tau < \tilde{\tau}$, $r - t \leq -C_0$; c'est « l'intérieur » du cône.

Dans D_i, u_a et ses dérivées en ∂_x, ∂_t, ∂_ω vérifient

$$|\,\partial_x^\alpha\, \partial_t^j\, \partial_\omega^k\, u_a\,| \leq C\, \varepsilon^2. \tag{2.1.1}$$

Dans D_e, u_a peut être décrite de la façon suivante : soit $S(\sigma, \omega, \tau)$ la solution du problème de Cauchy

$$\partial_\tau S - \frac{g}{2}(\partial_\sigma S)^2 = 0, \qquad S(\sigma, \omega, 0) = R(\sigma, \omega) + \varepsilon\, L(\sigma, \omega). \tag{2.1.2}$$

Pour une certaine fonction C^∞ $F_A(\sigma, \omega)$ (construite dans [1]) qui vérifie

$$F_A(\sigma, \omega) = S(\sigma, \omega, A) + O(\varepsilon^2 \,|\log \varepsilon\,|),$$

on note $F(\sigma, \omega, \tau)$ la solution de

$$\partial_\tau F - \frac{g}{2}(\partial_\sigma F)^2 = 0, \qquad F(\sigma, \omega, A) = F_A(\sigma, \omega). \tag{2.1.3}$$

La solution u_a est alors de la forme

$$u_a = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}}\,(F(r - t, \omega, \tau) + \varepsilon^2\, G(r - t, \omega, \tau)),$$

où G est un deuxième terme que nous n'expliciterons pas ici.

Dans D_ε, les estimations suivantes sont prouvées aux lemmes 6.3.4, 6.3.5 et 6.5.1 de [1]:

$$(2.1.4)\qquad \begin{cases} \text{(i)} & |\,u_a\,| + |\,\nabla_{x,\,t,\,\omega}\,u_a\,| \leq C\,\varepsilon^2, \\ \text{(ii)} & \text{Pour } k \geq 2, \\ & \displaystyle\sum_{|\alpha|+j+l\leq k} |\,\partial_x^\alpha\,\partial_t^j\,\partial_\omega^l\,u_a\,| \leq C\,\frac{\varepsilon^2}{(\tilde\tau-\tau)^{\frac{3k}{2}-\frac{1}{2}}}, \\ \text{(iii)} & \displaystyle\|\,\partial_{ij}^2\,u_a\,(x,\,t) - \frac{\varepsilon}{r^{1/2}}\,\omega_i\,\omega_j\,F''\,(r-t,\,\omega,\,\tau)\,\|_0 \\ & \displaystyle\leq C\,\frac{\varepsilon^4}{(\tilde\tau-\tau)^{5/2}}, \\ \text{(iv)} & \displaystyle\frac{C}{\tilde\tau-\tau} \leq \|\,g\,F''\,\|_0 \leq \frac{1}{\tilde\tau-\tau} + C. \end{cases}$$

Ici comme dans la suite, on note $\partial_\sigma\,F\,(\sigma,\omega,\tau) = F'\,(\sigma,\omega,\tau)$, $\partial_\sigma^2\,F\,(\sigma,\omega,\tau) = F''\,(\sigma,\omega,\tau)$ etc.

2.2. La précision de l'approximation.

Elle résulte des estimations de $u - u_a$ $\left(\text{en } t = \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}\right)$ et de $J_a = \Box\,u_a + g_{ij}^k\,\partial_k\,u_a\,\partial_{ij}^2\,u_a$ (pour $A \leq \tau < \tilde\tau$). L'approximation u_a construite est en fait bien meilleure dans D_e que dans D_i, comme le montrent les estimations suivantes, prouvées aux paragraphes 5 et 6 de [1] :

$$(2.2.1)\qquad \begin{cases} & \text{Dans D}_\varepsilon,\ \text{on a, pour un } \nu_1 > 0, \\ \text{(i)} & \displaystyle|\,J_a\,|_0 \leq C\,\frac{\varepsilon^7}{(\tilde\tau-\tau)^{3-\nu_1}}, \\ \text{(ii)} & \displaystyle|\,\nabla\,J_a\,|_0 + |\,\partial_\omega\,J_a\,|_0 \leq C\,\frac{\varepsilon^7}{(\tilde\tau-\tau)^{\frac{9}{2}-\nu_1}}, \\ \text{(iii)} & \displaystyle|\,\nabla^2\,J_a\,|_0 + |\,\partial_\omega\,J_a\,|_0 + |\,\partial_\omega^2\,J_a\,|_0 \leq C\,\frac{\varepsilon^7}{(\tilde\tau-\tau)^{6-\nu_1}}. \end{cases}$$

$$(2.2.2)\qquad \text{Dans } D_i,\ \text{on a}\quad |\,\partial_x^\alpha\,\partial_t^j\,\partial_\omega^l\,J_a\,|_0 \leq C\,\varepsilon^5\,|\log\varepsilon\,|.$$

$$(2.2.3)\qquad \text{Pour } \tau = A,\ \text{on a}$$

$$\begin{aligned} &\text{dans } D_i, \quad |\,\partial_x^\alpha\,\partial_t^j\,\partial_\omega^l\,(u-u_a)\,|_0 \leq C\,\varepsilon^{23/9}\,|\log\,\varepsilon\,|, \\ &\text{dans } D_e, \quad |\,\partial_x^\alpha\,\partial_t^j\,\partial_\omega^l\,(u-u_a)\,|_0 \leq C\,\varepsilon^7. \end{aligned}$$

3. Les estimations de $u - u_a$ au bord du cône de lumière par la méthode d'énergie

3.1. Quelques généralités sur la méthode de la preuve.

Nous nous proposons d'évaluer $\dot u = u - u_a$ pour $\tau = \varepsilon\,\sqrt{t} \geq A$ $\left(t \geq t_0 = \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}\right)$, u_a étant la solution approchée de (1.1.3) construite en [1], dont on a rappelé au paragraphe 2 quelques propriétés essentielles.

On écrit (1.1.1) sous la forme

$$\mathcal{L}\,\dot u \equiv \Box\,\dot u + g_{ij}^k\,\partial_k\,u\,g_{ij}^2\,\dot u + g_{ij}^k\,g_{ij}^2\,u_a\,\partial_k\,\dot u = -J_a. \tag{3.1.1}$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ est essentiellement le linéarisé sur u_a de l'équation de départ.

Choisissons $\nu_2 > 0$, $\nu_2 < \dfrac{1}{\kappa - 1}$, $\nu_2 < \dfrac{\nu_1}{4}$. Nous supposerons que la solution u de (1.1.3), pour ε assez petit, existe et est régulière dans $0 \leq t \leq T_0$, pour un T_0 vérifiant

$$A < \varepsilon\,\sqrt{T_0} \leq \tilde\tau\,(\varepsilon) - \varepsilon^{1+\nu_2}. \tag{3.1.2}$$

Définissons un domaine $\tilde D_e$ par

$$t - (1 - C_1\,\varepsilon^2)\,r \leq C_2, \qquad r + t \leq \frac{C_3}{\varepsilon^2}, \qquad \tau \geq A,$$

où $C_1 > 0$, $C_3 \gg 1$, et C_2 telle que $\tilde D_e \cap \{r - t \leq M\} \subset D_e$.

On a $\|\,\nabla\,u_a\,\|_0 \leq C_0\,\varepsilon^2$, et l'on choisit $C_1 \gg C_0$.

Pour établir des inégalités d'énergie, il est nécessaire de faire des hypothèses *a priori* sur $\dot u$; choisissons un $\nu_3 > 0$, $\nu_3 \leq \nu_1 - 4\,\nu_2$, et supposons que pour ε assez petit, il existe T, $\dfrac{A^2}{\varepsilon^2} = t_0 < T < T_0$ avec, pour $t_0 \leq t < T$,

$$\text{Dans } \tilde D_e, \quad \|\,\nabla\,\dot u\,\|_0 < \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau - \tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}}, \tag{3.1.3$_a$}$$

$$\|\,\nabla^2\,\dot u\,\|_0 + \|\,\partial_\omega\,\nabla\,\dot u\,\|_0 < \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau - \tau)^{5-\nu_1}},$$

$$\text{Partout}, \quad \|\,\nabla\,\dot u\,\|_0 < \varepsilon^{\frac{23}{9}+\nu_3} + \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau - \tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}} \tag{3.1.3$_b$}$$

$$\|\,\nabla^2\,\dot u\,\|_0 + \|\,\partial_\omega\,\nabla\,\dot u\,\|_0 < \varepsilon^{\frac{23}{9}-\nu_3} + \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau - \tau)^{5-\nu_1}}.$$

D'après les résultats de [1], un tel T existe, par exemple $T = \dfrac{B^2}{\varepsilon^2}$, $B > A$, B proche de A. Remarquons qu'on a alors [grâce à (3.1.2) et aux choix de ν_2, ν_3]

$$\text{Dans } \tilde D_e, \quad \|\,\nabla\,u\,\|_0 \leq C\,\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau - \tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}} \leq C\,\varepsilon^2, \tag{3.1.3$'_a$}$$

$$\|\,\nabla^2\,u\,\|_0 + \|\,\partial_\omega\,\nabla\,u\,\|_0 \leq C\,\frac{\varepsilon^2}{\tilde\tau - \tau} + \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau - \tau)^{5-\nu_1}} \leq C\,\frac{\varepsilon^2}{\tilde\tau - \tau},$$

$$\text{Hors de } \tilde D_e, \quad \|\,\nabla\,u\,\|_0 \leq C\,\varepsilon^2, \tag{3.1.3$'_b$}$$

$$\|\,\nabla^2\,u\,\|_0 + \|\,\partial_\omega\,\nabla\,u\,\|_0 \leq C\,\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau - \tau)^{5-\nu_1}}.$$

Remarquons que, grâce à (3.1.3)$_a$, $\tilde D_e \cap \{t_0 \leq t \leq T\}$ est un domaine d'influence pour $\mathcal{L}$, pour des données de Cauchy prescrites sur $\tau = A$.

Dans ce paragraphe, nous établissons des inégalités d'énergie pour $\dot{u}$ et ses dérivées dans $\tilde{D}_e \cap \{t_0 \leq t \leq T\}$. Par induction sur T, nous en déduisons que $(3.1.3)_a$ est en fait valide pour $t \leq T_0$.

Au paragraphe 4, nous établirons des inégalités d'énergie dans toute la bande $t_0 \leq t \leq T$. Par induction sur T, nous en déduirons la validité de $(3.1.3)_b$ pour $t \leq T_0$.

Grâce au théorème d'existence locale, par induction sur T_0, nous obtenons alors (1.1.12).

3.2. Les équations sur les dérivées de $\dot{u}$.

On aura besoin des équations vérifiées par $\nabla \dot{u}$, $\partial_\omega \dot{u}$, $\nabla^2 \dot{u}$, $\partial_\omega \nabla \dot{u}$ et $\partial_\omega^2 \dot{u}$, que nous établissons maintenant.

Lemme 3.2. – *Les équations sur les dérivées de $\dot{u}$ s'écrivent :*

$$\text{(i)} \qquad \mathcal{L}\, \partial_t \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{kl}^2 u\, \partial_{ij}^2 \dot{u} = -\{\partial_l J_a + g_{ij}^k\, \partial_{ijl}^3 u_a\, \partial_k \dot{u}\} = F_l.$$

$$\text{(ii)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}\, \partial_\omega \dot{u} = -\, \{&\partial_\omega J_a + g_{ij}^k\, (\partial_\omega \partial_k u)\, \partial_{ij}^2 \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_k u\, [\partial_\omega, \partial_{ij}^2]\, \dot{u} \\ &+ g_{ij}^k\, \partial_\omega \partial_{ij}^2 u_a\, \partial_k \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{ij}^2 u_a\, [\partial_\omega, \partial_k]\, \dot{u}\} = F_\omega. \end{aligned}$$

$$\text{(iii)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}\, \partial_{ql}^2 \dot{u} &+ g_{ij}^k\, \partial_{lk}^2 u\, \partial_{qij}^3 \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{qlk}^3 \dot{u}\, \partial_{ij}^2 \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{qk}^2 u\, \partial_{ijl}^3 \dot{u} \\ &= -\{\partial_{ql}^2 J_a + g_{ij}^k\, \partial_{qlk}^3 u_a\, \partial_{ij}^2 \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{ijl}^3 u_a\, \partial_{qk}^2 \dot{u} \\ &\quad + g_{ij}^k\, \partial_{qij}^3 u_a\, \partial_{kl}^2 \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{qlij}^4 u_a\, \partial_k \dot{u}\} = F_{ql}. \end{aligned}$$

$$\text{(iv)} \qquad \begin{aligned} &\mathcal{L}\, \partial_l \partial_\omega \dot{u} + g_{ij}^k\, (\partial_{lk}^2 \partial_\omega \dot{u})\, \partial_{ij}^2 \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{lk}^2 u\, \partial_{ij}^2 \partial_\omega \dot{u} \\ &\quad = -\{\partial_l \partial_\omega J_a + g_{ij}^k\, (\partial_\omega \partial_k\, u)\, \partial_{ijl}^3 \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_k u\, [\partial_\omega, \partial_{ij}^2]\, \partial_l \dot{u} \\ &\quad + g_{ij}^k\, \partial_{ijl}^3 u_a\, \partial_k \partial_\omega \dot{u} + g_{ij}^k\, (\partial_l \partial_\omega\, \partial_k u_a)\, \partial_{ij}^2 \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{lk}^2 u\, [\partial_\omega, \partial_{ij}^2]\, \dot{u} \\ &\quad + g_{ij}^k\, (\partial_\omega \partial_{ij}^2 u_a)\, \partial_{kl}^2 \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{ij}^2 u_a\, [\partial_\omega \partial_k]\, \partial_l\, \dot{u} + g_{ij}^k\, (\partial_l \partial_\omega \partial_{ij}^2 u_a)\, \partial_k \dot{u} \\ &\quad + g_{ij}^k\, \partial_{ijl}^3 u_a\, [\partial_\omega, \partial_k]\, \dot{u}\} \equiv F_{l\omega}. \end{aligned}$$

$$\text{(v)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{L}\, \partial_\omega^2 \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_\omega^2 \partial_k \dot{u}\, \partial_{ij}^2 \dot{u} &= -\{\partial_\omega^2 J_a + 2\, g_{ij}^k\, (\partial_\omega \partial_k u)\, \partial_{ij}^2 \partial_\omega \dot{u} \\ &+ g_{ij}^k\, \partial_k\, u\, [\partial_\omega, \partial_{ij}^2]\, \partial_\omega \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_k u\, \partial_\omega\, [\partial_\omega, \partial_{ij}^2]\, \dot{u} \\ &+ g_{ij}^k\, (\partial_\omega \partial_{ij}^2 u_a)\, \partial_k \partial_\omega \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{ij}^2 u_a\, [\partial_\omega, \partial_k]\, \partial_\omega \dot{u} \\ &+ g_{ij}^k\, \partial_\omega \partial_{ij}^2 u_a\, \partial_\omega \partial_k \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_{ij}^2 u_a\, \partial_\omega\, [\partial_\omega, \partial_k]\, \dot{u} \\ &+ g_{ij}^k\, (\partial_\omega^2\, \partial_k u_a)\, \partial_{ij}^2 \dot{u} + 2\, g_{ij}^k\, (\partial_\omega \partial_k u)\, [\partial_\omega, \partial_{ij}^2]\, \dot{u} \\ &+ g_{ij}^k\, (\partial_\omega^2\, \partial_{ij}^2 u_a)\, \partial_k \dot{u} + g_{ij}^k\, \partial_\omega\, \partial_{ij}^2 u_a\, [\partial_\omega, \partial_k]\, \dot{u}\} \equiv F_{\omega^2}. \end{aligned}$$

Preuve. – *a*) En dérivant (3.1.1), il vient

$$-\partial_l J_a = g^k_{ij}\,\partial^2_{lk}\,u\,\partial^2_{ij}\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^3_{lij}\;u_a\,\partial_k\,\dot u + L\,\partial_l\,\dot u.$$

b) Comme $\mathcal{L}\,\dot u = \Box\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial_k\,u\,\partial^2_{ij}\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^2_{ij}\,u_a\,\partial_k\,\dot u$,

$$\begin{aligned}\partial_\omega\,\mathcal{L}\,\dot u &= \mathcal{L}\,\partial_\omega\,\dot u + g^k_{ij}\,(\partial_\omega\,\partial_k\,u)\,\partial^2_{ij}\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial_k\,u\,[\partial_\omega,\,\partial^2_{ij}]\,\dot u\\ &\quad + g^k_{ij}\,\partial_\omega\,\partial^2_{ij}\,u_a\,\partial_k\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^2_{ij}\,u_a\,[\partial_\omega,\,\partial_k]\,\dot u.\end{aligned}$$

c) On a ensuite

$$\begin{aligned}-\partial^2_{ql}\,J_a &= g^k_{ij}\,\partial^3_{qlk}\,u\,\partial^2_{ij}\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^2_{lk}\,u\,\partial^3_{qij}\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^4_{qlij}\,u_a\,\partial_k\,\dot u\\ &\quad + g^k_{ij}\,\partial^3_{lij}\,u_a\,\partial^2_{qk}\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^2_{qk}\,u\,\partial^3_{ijl}\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^3_{qij}\,u_a\,\partial^2_{kl}\,\dot u + \mathcal{L}\,\partial^2_{ql}\,\dot u.\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\partial_l\,\partial_\omega\,\mathcal{L}\,\dot u &= g^k_{ij}\,\partial^2_{lk}\,u\,\partial^2_{ij}\,\partial_\omega\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^3_{lij}\,u_a\,\partial_k\,\partial_\omega\,\dot u + \mathcal{L}\,\partial_l\,\partial_\omega\,\dot u\\ &\quad + g^k_{ij}\,(\partial_l\,\partial_\omega\,\partial_k\,u)\,\partial^2_{ij}\,\dot u + g^k_{ij}\,(\partial_\omega\,\partial_k\,u)\,\partial^3_{ijl}\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^2_{lk}\,u\,[\partial_\omega,\,\partial^2_{ij}]\,\dot u\\ &\quad + g^k_{ij}\,\partial_k\,u\,[\partial_\omega,\,\partial^2_{ij}]\,\partial_l\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial_l\,\partial_\omega\,\partial^2_{ij}\,u_a\,\partial_k\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial_\omega\,\partial^2_{ij}\,u_a\,\partial^2_{kl}\,\dot u\\ &\quad + g^k_{ij}\,\partial^3_{ijl}\,u_a\,[\partial_\omega,\,\partial_k]\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^2_{ij}\,u_a\,[\partial_\omega,\,\partial_k]\,\partial_l\,\dot u.\end{aligned}$$

Notons pour mémoire les formules $[\partial_1,\,\partial_\omega] = \partial_2$, $[\partial_2,\,\partial_\omega] = -\partial_1$, $[\partial_1^2,\,\partial_\omega] = 2\,\partial_1\,\partial_2$, $[\partial_2^2,\,\partial_\omega] = -2\,\partial_1\,\partial_2$, $[\partial_1\,\partial_2,\,\partial_\omega] = \partial_2^2 - \partial_1^2$.

e)
$$\begin{aligned}\partial^2_\omega\,\mathcal{L}\,\dot u &= \mathcal{L}\,\partial^2_\omega\,\dot u + 2\,g^k_{ij}\,(\partial_\omega\,\partial_k\,u)\,\partial^2_{ij}\,\partial_\omega\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial_k\,u\,[\partial_\omega,\,\partial^2_{ij}]\,\partial_\omega\,\dot u\\ &\quad + g^k_{ij}\,\partial_\omega\,\partial^2_{ij}\,u_a\,\partial_k\,\partial_\omega\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial^2_{ij}\,u_a\,[\partial_\omega,\,\partial_k]\,\partial_\omega\,\dot u\\ &\quad + g^k_{ij}\,(\partial^2_\omega\,\partial_k\,u)\,\partial^2_{ij}\,\dot u + 2\,g^k_{ij}\,\partial_\omega\,\partial_k u\,[\partial_\omega,\,\partial^2_{ij}]\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial_k\,u\,\partial_\omega\,[\partial_\omega,\,\partial^2_{ij}]\,\dot u\\ &\quad + g^k_{ij}\,\partial^2_\omega\,\partial^2_{ij}\,u_a\,\partial_k\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial_\omega\,\partial^2_{ij}u_a\,\partial_\omega\,\partial_k\,\dot u + g^k_{ij}\,\partial_\omega\,\partial^2_{ij}\,u_a\,[\partial_\omega,\,\partial_k]\,\dot u\\ &\quad + g^k_{ij}\,\partial^2_{ij}\,u_a\,\partial_\omega\,[\partial_\omega,\,\partial_k]\,\dot u. \quad \Box\end{aligned}$$

3.3. L'inégalité d'énergie pour L.

La fonction F étant définie par (2.1.3) on pose

$$d = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}}\,F''(r-t,\,\omega,\,\tau), \qquad \text{et} \qquad a = e^{B\frac{\varepsilon}{r^{1/2}}\,F'\,\psi\,g},$$

où $B > 0$ est une (grande) constante et $\psi\,(r-t,\,\omega,\,\tau)$, $0 \le \psi \le 1$, est une troncature convenable fixée telle que $\psi\,g d \ge 0$. Rappelons que $t_0 = \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$, A ayant été fixé, $0 < A < A_0$.

On a alors l'inégalité d'énergie suivante :

Lemme 33. – *Posons* $E\,(t,\,v) = E\,(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int a\,((\partial_t\,v)^2 - g_{ij}\,(\nabla\,u)\,\partial_i\,v\,\partial_j\,v)\,dx$. *Il existe une fonction* $C_\eta\,(\eta > 0)$ *et pour tout* $B \ge 1$, *une fonction* $\alpha_B \ge 0$, *vérifiant* $\displaystyle\int_{t_0}^T \alpha_B\,(t)\,dt \le C\,(1+B)$ *telles que, pour tout* $\lambda \le 10$ *on ait*

$$
\begin{aligned}
(3.3.1)\qquad & \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} a\,\psi\,gd\left\{(B-C_\eta)\sum_{i\geq 1}(\partial_i\,v+\omega_i\,\partial_t\,v)^2\right.\\
&\qquad\left.+\,2\left(\lambda-\frac{1}{2}-\eta\right)(\partial_t\,v)^2\right\}dx\,dt+E\,(T)\\
&\leq E\,(t_0)+\int_{t_0}^{T} a\,\mathcal{L}\,v\,\partial_t\,v\,dx\,dt\\
&\qquad+\int_{t_0}^{T}\left\{\alpha_B\,(t)+\frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{t}\,(\tilde{\tau}-\tau)}\right\}E\,(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Rappelons que le domaine considéré ici est $\tilde{D}_e\,\cap\,\{t_0\leq t\leq T\}$.

Preuve. – *a*) On a

$$\partial_t^2\,v_a\,\partial_t\,v=\frac{1}{2}\,\partial_t\,(a\,(\partial_t\,v)^2)-\frac{1}{2}\,(\partial_t\,a)\,(\partial_t\,v)^2,$$

$$g_{oi}\,\partial_{it}^2\,v_a\,\partial_t\,v=\frac{1}{2}\,\partial_i\,(a\,g_{oi}\,(\partial_t\,v)^2)-\frac{1}{2}\,\partial_i\,(a\,g_{oi})\,(\partial_t\,v)^2,$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,\,j\geq 1} g_{ij}\,\partial_{ij}^2\,va\,\partial_t\,v &=\sum\partial_i\,(ag_{ij}\,\partial_j\,v\,\partial_t\,v)-\frac{1}{2}\,\partial_t\,(\sum ag_{ij}\,\partial_i\,v\,\partial_j\,v)\\
&\quad-(\partial_t\,v)\,(\sum\partial_i\,(ag_{ij})\,\partial_j\,v)+\frac{1}{2}\sum\partial_t\,(ag_{ij})\,\partial_i\,v\,\partial_j\,v.
\end{aligned}
$$

Donc, avec $\alpha\,=\,\lambda\,dg$,

$$
\begin{aligned}
(3.3.2)\qquad & \mathcal{L}\,va\,\partial_t\,v+\frac{a\,\alpha}{2}\,((\partial_t\,v)^2-\sum_{i,\,j\geq 1} g_{ij}\,\partial_i\,v\,\partial_j\,v)\\
&=\partial_t\left\{\frac{a}{2}\,((\partial_t v)^2-\sum_{i,\,j\geq 1} g_{ij}\,\partial_i\,v\,\partial_j\,v)\right\}\\
&\quad+\sum_{i\geq 1}\partial_i\,\{ag_{oi}\,(\partial_t\,v)^2+\sum_{j\geq 1} ag_{ij}\,\partial_j\,v\,\partial_t\,v\}+Q\,(\nabla\,v),
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
Q\,(\nabla\,v) &=-\,(\partial_t\,v)^2\left[\frac{1}{2}\,(\partial_t\,a)+\sum_{i\geq 1}\partial_i\,(ag_{oi})-ag_{ij}^0\,\partial_{ij}^2\,u_a-\frac{a\,\alpha}{2}\right]\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,\,j\geq 1}[\partial_t\,(ag_{ij})-a\,\alpha\,g_{ij}]\,\partial_i\,v\,\partial_j\,v-\sum_{i,\,j\geq 1}\partial_i\,(ag_{ij})\,\partial_j\,v\,\partial_t\,v\\
&\quad+\sum_{k\geq 1} ag_{ij}^k\,\partial_{ij}^2\,u_a\,\partial_k\,v\,\partial_t\,v.
\end{aligned}
$$

Dans Q, séparons les termes qui contiennent une dérivée de a des autres :

$$\begin{aligned} Q(\nabla v) = &- (\partial_t v)^2 \left[\frac{1}{2} (\partial_t a) + \sum_{i \geq 1} (\partial_i a) g_{oi} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1} (\partial_t a) g_{ij} \partial_i v \partial_j v \\ &- \sum_{i,j \geq 1} (\partial_i a) g_{ij} \partial_j v \partial_t v + a \left[(\partial_t v)^2 \left(\frac{\alpha}{2} + g_{ij}^0 \partial_{ij}^2 u_a - \sum_{i \geq 1} \partial_i (g_{oi}) \right) \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1} [\partial_t (a g_{ij}) - \alpha g_{ij}] \partial_i v \partial_j v - \sum_{i,j \geq 1} \partial_i (g_{ij}) \partial_j v \partial_t v \\ &\left. + \sum_{k \geq 1} g_{ij}^k \partial_{ij}^2 u_a \partial_k v \partial_t v \right] \equiv Q_1 + a [Q_2]. \end{aligned}$$

b) Explicitons Q_2 :

$$\begin{aligned} Q_2 (\nabla v) = &(\partial_t v)^2 \left(\frac{\alpha}{2} + g_{ij}^0 \partial_{ij}^2 u_a - \sum_{i \geq 1} g_{oi}^k \partial_{ik}^2 u \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1} [g_{ij}^k \partial_t \partial_k u - \alpha g_{ij}] \partial_i v \partial_j v \\ &- \sum_{i,j \geq 1} g_{ij}^k \partial_{ki}^2 u \partial_j v \partial_t v + \sum_{k \geq 1} g_{ij}^k \partial_{ij}^2 u_a \partial_k v \partial_t v. \end{aligned}$$

Compte tenu de (2.1.4) et $(3.1.3)_a$, on a

$$\left\| \partial_{ij}^2 u - \frac{\varepsilon}{r^{1/2}} \omega_i \omega_j F'' \right\|_0 \leq C \frac{\varepsilon^4}{(\tilde{\tau} - \tau)^{5/2}} + C \frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde{\tau} - \tau)^{5-\nu_1}} \equiv \beta(t).$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} Q_2 = &(\partial_t v)^2 \left(\frac{\alpha}{2} + g_{ij}^0 \omega_i \omega_j d - \sum_{i \geq 1} g_{oi}^k \omega_i \omega_k d \right) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i,j \geq 1} [g_{ij}^k \omega_k d + \alpha g_{ij}(0)] \partial_i v \partial_j v \\ &- \sum_{i,j \geq 1} g_{ij}^k \omega_i \omega_k d \partial_j v \partial_t v + \sum_{k \geq 1} g_{ij}^k \omega_i \omega_j d \partial_k v \partial_t v + \tilde{Q}_2 = d Q_2^0 + \tilde{Q}_2, \end{aligned}$$

où

$$|\tilde{Q}_2| \leq C \beta(t) |\nabla v|^2.$$

c) L'équation (2.1.3) implique que $-g F'$ est solution de l'équation de Burger. Les hypothèses (ND) de non dégénérescence faites sur R montrent qu'il existe une fonction de troncature $\psi(\sigma, \omega, \tau)$, indépendante de ε, telle que, sur supp ψ, $|g| \geq$ cte > 0, et $g F'' \geq$ cte > 0 : la fonction ψ est concentrée près des caractéristiques de l'équation de

Burger le long desquelles l'explosion a lieu au plus tôt, c'est-à-dire à peu près au temps $\tau_*(\varepsilon)$. Sur supp $(1-\psi)$, $\nabla^2 F$ est bornée, et n'explose pas pour $\tau \to \tau_*(\varepsilon)$.

d) On écrit donc

$$Q_2 = \psi\, dQ_2^0 + \bar{Q}_2,$$

où $\bar{Q}_2 = (1-\psi)\, d\, Q_2^0 + \tilde{Q}_2$ vérifie

$$|\bar{Q}_2| \leq C\,|\nabla v|^2 (\varepsilon^2 + \beta(t)).$$

Nous faisons apparaître maintenant les variables $\partial_i v + \omega_i \partial_i v$ dans Q_2^0, pour une raison qui sera claire au paragraphe *e*) :

$$\begin{aligned} Q_2^0 = &- \frac{1}{2} \sum_{i,j\geq 1} [g_{ij}^k \omega_k + \lambda\, g\, \delta_{ij}]\,(\partial_i v + \omega_i \partial_t v)\,(\partial_j v + \omega_j \partial_t v) \\ &+ \sum_{k\geq 1} g_{ij}^k \omega_i \omega_j (\partial_k v + \omega_k \partial_t v)\,\partial_t v + \lambda\, g \sum_{i\geq 1} (\partial_i v + w_i \partial_t v)\,\omega_i \partial_t v + q_2^0 (\partial_t v)^2, \end{aligned}$$

où $q_2^0 = \left(\lambda - \dfrac{1}{2}\right) g(\omega)$.

e) Analysons Q_1.

Compte tenu du choix de a et de $g_{oi}(0) = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{a\,B} Q_1 = &\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{r^{1/2}}\, g\, \partial_t (\psi F')\,\{-(\partial_t v)^2 + \sum_{i,j\geq 1} g_{ij}\, \partial_i v\, \partial_j v\} \\ &- \sum_{i,j\geq 1} \varepsilon\, \partial_i \left(\frac{\psi F' g}{r^{1/2}}\right) g_{ij}\, \partial_j v\, \partial_t v = \frac{\psi\, g\, d}{2} \sum_{i\geq 1} (\partial_i v + \omega_i \partial_t v)^2 + \tilde{Q}_1, \end{aligned}$$

avec

$$|\tilde{Q}_1| \leq C\,|\nabla v|^2 \varepsilon^2.$$

f) Finalement,

$$\begin{aligned} Q(\nabla v) = &\frac{a\,B\,\psi\, gd}{2} \sum_{i\geq 1} (\partial_i v + \omega_i \partial_t v)^2 + a\,B\,\tilde{Q}_1 + a\,\psi\, d\,Q_2^0 + a\,\bar{Q}_2 \\ = &\frac{a}{2}\, \psi\, gd \Bigg\{ B \sum_{i\geq 1} (\partial_i v + \omega_i \partial_t v)^2 + \frac{1}{g} \\ &\sum_{i,j\geq 1} (g_{ij}^k \omega_k + \lambda\, \delta_{ij})\,(\partial_i v + \omega_i \partial_t v)\,(\partial_j v + \omega_j \partial_t v) \\ &+ \frac{2}{g} \sum_{k\geq 1} g_{ij}^k \omega_i \omega_j (\partial_k v + \omega_k \partial_t v)\,\partial_t v + 2\,\lambda \sum_{i\geq 1} (\partial_i v + \omega_i \partial_t v)\,\omega_i \partial_t v \\ &+ 2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\partial_t v)^2 \Bigg\} + a\,B\,\tilde{Q}_1 + a\,\bar{Q}_2. \end{aligned}$$

Pour tout $\eta > 0$, il existe C_η telle que

$$Q(\nabla v) \geq \frac{a}{2}\,\psi\, gd\left\{(B - C_\eta)\sum(\partial_i v + \omega_i\,\partial_t v)^2 + 2\left(\lambda - \frac{1}{2} - \eta\right)(\partial_t v)^2\right\} + \tilde{Q},$$

avec $|\tilde{Q}| \leq C\,a\,|\nabla v|^2(\varepsilon^2 + \beta(t) + B\,\varepsilon^2)$.

g) En intégrant (3.3.2) dans $\tilde{D}_e$, on trouve

$$E(T) - E(t_0) + \int \frac{a}{2}\,\psi\, gd\{\quad\} \leq \int a\,\mathcal{L}v\,\partial_t v + \int \frac{a\,\lambda\, dg}{2}\,[(\partial_t v)^2 - g_{ij}\,\partial_i v\,\partial_j v]\,dx\,dt$$
$$+ C\int a\,|\nabla v|^2((1+B)\,\varepsilon^2 + \beta(t))\,dx\,dt.$$

La dernière intégrale est majorée par $C\displaystyle\int_{t_0}^{T}((1+B)\,\varepsilon^2 + \beta(t))\,E(t)\,dt$.

Dans l'avant-dernière, on a

$$d = \frac{\varepsilon}{t^{1/2}}\,F'' + O\left(\frac{\varepsilon^4}{\tilde{\tau} - \tau}\right);$$

grâce à (2.1.4) (iv),

$$\int \frac{a\,\lambda\, dg}{2}[\quad]\,dx\,dt \leq \int_{t_0}^{T}\frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{t}\,(\tilde{\tau} - \tau)}\,E(t)\,dt + C\int_{t_0}^{T}\left(\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{\tilde{\tau} - \tau}\right)E(t)\,dt.$$

Finalement, on obtient (3.3.1) avec $\alpha_B(t) = C((1+B)\,\varepsilon^2 + \beta(t)) + C\,\dfrac{\varepsilon^4}{\tilde{\tau} - \tau}$, et $\displaystyle\int_{t_0}^{T}\alpha_B(t)\,dt \leq CB + C\frac{\varepsilon^2}{(\tilde{\tau} - \tau)^{3/2}} + C\frac{\varepsilon^{4-\nu_3}}{(\tilde{\tau} - \tau)^{4-\nu_1}} \leq C(1+B)$ car $\nu_3 \leq \nu_1 - 4\,\nu_2 + \nu_1\,\nu_2$ par hypothèse. □

3.4. ESTIMATIONS DE $\dot{u}$ ET DE SES DÉRIVÉES.

3.4.1. *Estimations des seconds membres*

Les estimations de J_a ont été rappelées en (2.2.1); il suffit donc d'examiner les termes supplémentaires dans les seconds membres des équations établies au lemme 3.2.

Avec les notations du lemme 3.2, nous avons, en posant $\delta = \dfrac{1}{\tilde{\tau} - \tau}$:

a) $$|F_l|_0 \leq C\,\varepsilon^7\,\delta^{\frac{9}{2}-\nu_1} + C\,\varepsilon^2\,\delta^{\frac{5}{2}}\,|\nabla\dot{u}|_0$$

b) $$|F_\omega|_0 \leq C\,\varepsilon^7\,\delta^{\frac{9}{2}-\nu_1} + C\,\varepsilon^2\,\delta\,|\nabla^2\dot{u}|_0 + C\,\varepsilon^2\,\delta^{\frac{5}{2}}\,|\nabla\dot{u}|_0$$

c) $$|F_{ql}|_0 \leq C\,\varepsilon^7\,\delta^{6-\nu_1} + C\,\varepsilon^2\,\delta^{\frac{5}{2}}\,|\nabla^2\dot{u}|_0 + C\,\varepsilon^2\,\delta^4\,|\nabla\dot{u}|_0$$

d) $$| F_{l\omega} |_0 \leq C\,\varepsilon^7\,\delta^{6-\nu_1} + C\,\varepsilon^2\,\delta\,| \nabla^3\,\dot u\,|_0 + C\,\varepsilon^2\,\delta^{5/2}\,(| \nabla^2\,\dot u\,|_0 + |\,\partial_\omega\,\nabla\,\dot u\,|_0) + C\,\varepsilon^2\,\delta^4\,| \nabla\,\dot u\,|_0$$

e) $$| F_{\omega^2} |_0 \leq C\,\varepsilon^7\,\delta^{6-\nu_1} + C\,\varepsilon^2\,\delta\,| \nabla^2\,\partial_\omega\,\dot u\,|_0 + C\,\varepsilon^2\,\delta^{\frac{5}{2}}\,(| \nabla^2\,\dot u\,|_0 + |\,\partial_\omega\,\nabla\,\dot u\,|_0) + C\,\varepsilon^2\,\delta^4\,| \nabla\,\dot u\,|_0.$$

3.4.2. *Le lemme de Gronwall.*

La forme du lemme de Gronwall adaptée au lemme 3.3 est la suivante :

LEMME 3.4.2. – *Soit* $\varphi(t) \geq 0$ *telle que, pour tout* $t \geq 0$, *on ait*

$$\varphi(t) \leq C + \int_0^t \alpha(s)\,\varphi(s)\,ds + \int_0^t \beta(s)\,\varphi(s)^{1/2}\,ds,$$

pour une constante $C \geq 0$ *et des fonctions* α, $\beta \geq 0$. *Alors*

$$\varphi(t)^{1/2} \leq \sqrt{C}\,\sqrt{h(t)} + \sqrt{h(t)}\int_0^t \frac{\beta(s)}{\sqrt{h(s)}}\,ds,$$

où $h(t) = e^{\int_0^t \alpha(s)\,ds}$.

Remarquons que dans l'application au lemme 3.3, $\alpha(s)$ est de la forme

$$\alpha(s) = \alpha_B(s) + \lambda\,\frac{\varepsilon}{\sqrt{s}\,(\tilde\tau - \varepsilon\sqrt{s})},$$

avec $\int_{t_0}^T \alpha_B(t)\,dt \leq C$, en sorte que

$$\int_{t_0}^T \alpha(t)\,dt = \int_{t_0}^T \alpha_B(t)\,dt + 2\,\lambda\log(\tilde\tau - C) - 2\,\lambda\log(\tilde\tau - \tau),$$

et

$$\frac{1}{C\,(\tilde\tau - \tau)^\lambda} \leq \sqrt{h(t)} \leq \frac{C}{(\tilde\tau - \tau)^\lambda}. \tag{3.4.2}$$

Dans les paragraphes 3.4.3-3.4.5, on va appliquer le lemme 3.3 aux diverses équations du lemme 3.2. Comme ces équations comportent des termes d'ordre inférieur additionnels, l'application du lemme 3.3, après analyse de ces termes, conduit à choisir $\lambda > \frac{1}{2}$, $\lambda > \frac{3}{2}$ ou $\lambda > \frac{5}{2}$ selon les cas.

Les choix de η dans chaque cas sont faits en conséquence, d'où les valeurs de C_η, puis B, dont dépendent les constantes des diverses inégalités.

Rappelons d'autre part que, selon (3.1.2), dans le domaine considéré, $\tilde\tau - \tau \geq \varepsilon^{1+\nu_2}$.

3.4.3. *Estimation de* $|\nabla \dot{u}|_0$.

LEMME 3.4.3. – *On a, dans* $\tilde{D}_e$,

$$|\nabla \dot{u}|_0 \leq C \frac{\varepsilon^5}{(\tilde{\tau}-\tau)^{2-\nu_1}}. \tag{3.4.3}$$

Preuve. – On applique simplement (3.3.1) pour $v = \dot{u}$, $\lambda = \dfrac{1}{2} + \eta$, $\eta > 0$ petit, $B = C_\eta$; on trouve

$$|\nabla \dot{u}|_0 \leq C\,\varepsilon^7\,\delta^{\frac{1}{2}+\eta} + C\,\varepsilon^7\,\delta^\lambda \int_{t_0}^{T} \frac{dt}{(\tilde{\tau}-\tau)^{3-\nu_1-\lambda}} \leq C\,\varepsilon^5\,\delta^{2-\nu_1}. \quad \square$$

3.4.4 *Estimations de* $|\nabla^2 \dot{u}|_0$ *et* $|\nabla \partial_\omega \dot{u}|_0$.

LEMME 3.4.4. – *On a, dans* $\tilde{D}_e$,

$$|\nabla^2 \dot{u}|_0 + |\nabla \partial_\omega \dot{u}|_0 \leq C \frac{\varepsilon^5}{(\tilde{\tau}-\tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}}. \tag{3.4.4}$$

Preuve. – *a*) On doit tenir compte des termes d'ordre inférieur présents dans l'équation qui gouverne $\partial_l \dot{u}$.

On écrit d'abord (3.3.1) pour $v = \partial_l \dot{u}$, $l = 0, 1, 2$, avec les mêmes a et λ (à choisir). On obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_l E(T, \partial_l \dot{u}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} a\,\psi\,dg \left\{ (B - C_\eta) \sum_l \sum_{i\geq 1} (\partial_i\,\partial_l\,\dot{u} + \omega_i\,\partial_t\,\partial_l\,\dot{u})^2 \right. \\
&\quad \left. +2\left(\lambda - \frac{1}{2} - \eta\right) \sum_l (\partial_t\,\partial_l\,\dot{u})^2 \right\} dx\,dt \\
&\leq \sum_l E(t_0, \partial_l \dot{u}) + \int_{t_0}^{T} \{\quad\} \sum_l E(t, \partial_l \dot{u})\,dt \\
&\quad + \sum_l \left\{ \int_{t_0}^{T} a\,F_l\,\partial_t\,\partial_l\,\dot{u}\,dx\,dt - \int_{t_0}^{T} a g_{ij}^k\,\partial_{kl}^2\,u\,\partial_{ij}^2\,\dot{u}\,\partial_t\,\partial_l\,\dot{u}\,dx\,dt \right\}.
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

• On écrit les termes $\int_{t_0}^{T} a\,\psi\,dg\,\{\quad\}\,dx\,dt$ au membre de gauche de (3.4.5), qu'on appellera par abus « les termes d'énergie contrôlée », sous la forme

$$\begin{aligned}
&(B - C_\eta) \sum_{i\geq 1} (\partial_i\,\partial_t\,\dot u + \omega_i\,\partial_t^2\,\dot u)^2\\
&\quad + 2\left(\lambda - \frac{1}{2} - \eta\right) (\partial_t^2\,\dot u)^2 + (B - C_\eta) \sum_{i,\,l\geq 1} (\partial_i\,\partial_l\,\dot u + \omega_i\,\partial_t\,\partial_l\,\dot u)^2\\
&\quad + 2\left(\lambda - \frac{1}{2} - \eta\right) \sum_{l\geq 1} [(\partial_t\,\partial_l\,\dot u + \omega_l\,\partial_t^2\,\dot u)^2 + \omega_l^2\,(\partial_t^2\,\dot u)^2 - 2\,\omega_l\,\partial_t^2\,\dot u\,(\partial_t\,\partial_l\,\dot u + \omega_l\,\partial_t^2\,\dot u)]\\
&= (B - C_\eta) \sum_{i\geq 1,\,l} (\partial_i\,\partial_l\,\dot u + \omega_i\,\partial_t\,\partial_l\,\dot u)^2 + 4\left(\lambda - \frac{1}{2} - \eta\right) (\partial_t^2\,\dot u)^2\\
&\quad + 2\left(\lambda - \frac{1}{2} - \eta\right) \sum_{l\geq 1} [(\partial_t\,\partial_l\,\dot u + \omega_l\,\partial_t^2\,\dot u)^2 - 2\,\omega_l\,(\partial_t^2\,\dot u)\,(\partial_t\,\partial_l\,\dot u + \omega_l\,\partial_t^2\,\dot u)]\\
&\geq 4\left(\lambda - \frac{1}{2} - \eta - \eta'\right) (\partial_t^2\,\dot u)^2 + (B - C_\eta - C_{\eta'}) \sum_{i\geq 1,\,l} (\partial_i\,\partial_l\,\dot u + \omega_i\,\partial_t\,\partial_l\,\dot u)^2.
\end{aligned}$$

• Par ailleurs, on a

$$\partial_t\,\partial_j\,\dot u = \partial_t\,\partial_j\,\dot u + \omega_j\,\partial_t^2\,\dot u - \omega_j\,\partial_t^2\,\dot u \quad (j \geq 1),$$

et

$$\partial_{ij}^2\,\dot u = \partial_{ij}^2\,\dot u + \omega_i\,\partial_t\,\partial_j\,\dot u - \omega_i\,(\partial_t\,\partial_j\,\dot u + \omega_j\,\partial_t^2\,\dot u) + \omega_i\,\omega_j\,\partial_t^2\,\dot u\,(i,\,j \geq 1).$$

Les « termes quadratiques additionnels » $ag_{ij}^k\,\partial_{kl}^2\,u\,\partial_{ij}^2\,\dot u\,\partial_t\,\partial_l\,\dot u$ [au membre de droite de (3.4.5)] peuvent donc s'écrire, modulo des termes contrôlés par

$$C\,(\varepsilon^2 + \alpha_1\,(t)) \sum_l E\,(t,\,\partial_l\,\dot u)$$

[comme dans la preuve de (3.3.1)],

$$\begin{aligned}
\psi\,ag_{ij}^k\,\frac{\varepsilon}{r^{1/2}}\,\omega_k\,\omega_l\,F''\,\{ -\omega_i\,\omega_j\,\omega_l\,(\partial_t^2\,\dot u)^2 &+ \sum \star\,(\partial_{ij}^2\,\dot u + \omega_i\,\partial_t\,\partial_j\,\dot u)\,(\partial_t\,\partial_l\,\dot u + \omega_l\,\partial_t^2\,\dot u)\\
&+ \sum \star\,(\partial_t^2\,\dot u)\,(\partial_{ij}^2\,\dot u + \omega_i\,\partial_t\,\partial_j\,\dot u)\}.
\end{aligned}$$

Le premier terme vaut

$$-\psi\,ad\,(\partial_t^2\,\dot u)^2 \sum g_{ij}^k\,\omega_i\,\omega_j\,\omega_k\,\omega_l^2 = -2\,a\,\psi\,dg\,((\partial_t^2\,\dot u)^2,$$

tandis que les divers termes dans les sommes sont majorés par

$$\psi\,a\,|\,d\,|\,(C_{\eta''} \sum_{i\geq 1,\,j} (\partial_{ij}^2\,\dot u + \omega_i\,\partial_t\partial_j\,\dot u)^2 + \eta''\,(\partial_t^2\,\dot u)^2).$$

• Au total, comme $dg = |\,dg\,| \geq C\,|\,d\,|$ sur le support de ψ, on obtient, pour tout $\lambda > \dfrac{3}{2}$, pour des choix convenables de η, η', η'', puis de B, l'inégalité

$$\sum_l E(T,\, \partial_t \dot u) \le \sum_l E(t_0,\, \partial_l \dot u)$$
$$+ \int_{t_0}^{T} \left\{ \alpha_B + \frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{t}\,(\tilde\tau - \tau)} + C\,(\varepsilon^2 + \alpha_1(t)) \right\} (\sum_l E(t,\, \partial_l \dot u))\, dt$$
$$+ \sum \int a\, F_l\, \partial_t\, \partial_l\, \dot u\, dx\, dt.$$

• Le lemme de Gronwall donne alors, puisque $\sum |\, F_l\, |_0 \le C\,\varepsilon^7\,\delta^{\frac{9}{2}-\nu_1}$,

$$|\, \nabla^2\, \dot u\, |_0 \le C\,\varepsilon^7\,\delta^\lambda + C\,\varepsilon^7\,\delta^\lambda \int_{t_0}^{T} \frac{dt}{(\tilde\tau - \tau)^{\frac{9}{2}-\nu_1-\lambda}} \le C\,\varepsilon^5\,\delta^{\frac{7}{2}-\nu_1}.$$

b) Pour estimer $\nabla\,\partial_\omega\,\dot u$, on applique l'inégalité d'énergie à $L\,\partial_\omega\,\dot u = F_\omega$. D'après *a*) et 3.4.1. *b*)

$$|\, F_\omega\, |_0 \le C\,\varepsilon^7\,\delta^{\frac{9}{2}-\nu_1} + C\,\varepsilon^7\,\delta^{\frac{9}{2}-\nu_1} + C\,\varepsilon^7\,\delta^{\frac{9}{2}-\nu_1} \le C\,\varepsilon^7\,\delta^{\frac{9}{2}-\nu_1},$$

d'où, pour $\lambda > \dfrac{1}{2}$,

$$|\, \nabla\,\partial_\omega\,\dot u\, |_0 \le C\,\varepsilon^7\,\delta^\lambda + C\,\varepsilon^\tau\,\delta^\lambda \int_{t_0}^{T} \frac{dt}{(\tilde\tau - \tau)^{\frac{9}{2}-\nu_1-\lambda}} \le C\,\varepsilon^5\,\delta^{\frac{7}{2}-\nu_1}. \quad \square$$

3.4.5 *Estimations de* $|\, \nabla^3\,\dot u\, |_0,\ |\, \nabla^2\,\partial_\omega\,\dot u\, |_0,\ |\, \nabla\,\partial^2_\omega\,\dot u\, |_0$.

LEMME 3.4.5. – *On a, dans* $\tilde D_e$,

$$|\, \nabla^3\,\dot u\, |_0 + |\, \nabla^2\,\partial_\omega\,\dot u\, |_0 + |\, \nabla\,\partial^2_\omega\,\dot u\, |_0 \le C\, \frac{\varepsilon^5}{(\tilde\tau - \tau)^{5-\nu_1}}\,. \tag{3.4.6}$$

Preuve. – *a*) On procède avec l'équation sur $\partial^2_{ql}\,\dot u$ exactement comme au lemme 3.4.4 *a*). inégalités d'énergie avec $v = \partial^2_t\,\dot u,\ \partial_t\,\partial_l\,\dot u,\ (l = 1,\, 2),\ \partial^2_{ql}\,\dot u,\ (q,\, l \ge 1)$.

• Les « termes d'énergie contrôlée » sont :

$$(B - C_\eta) \sum_{i\ge 1} (\partial_i\,\partial_t^2\,\dot u + \omega_i\,\partial_t^3\,\dot u)^2 + 2\left(\lambda - \frac{1}{2} - \eta\right) (\partial_t^3\,\dot u)^2$$
$$+ (B - C_\eta) \sum_{i,\,l\ge 1} (\partial_i\,\partial_l\,\partial_t\,\dot u + \omega_i\,\partial_t^2\,\partial_l\,\dot u)^2 + 2\left(\lambda - \frac{1}{2} - \eta\right) \sum_{l\ge 1} (\partial_t^2\,\partial_l\,\dot u)^2$$
$$+ (B - C_\eta) \sum_{i,\,q,\,l\ge 1} (\partial_i\,\partial^2_{ql}\,\dot u + \omega_i\,\partial_t\,\partial^2_{ql}\,\dot u)^2 + 2\left(\lambda - \frac{1}{2} - \eta\right) \sum_{q,\,l\ge 1} (\partial_t\,\partial^2_{ql}\,\dot u)^2.$$

On écrit

$$\partial_t^2\,\partial_l\,\dot u = \partial_t^2\,\partial_l\,\dot u + \omega_l\,\partial_t^3\,\dot u - \omega_l\,\partial_t^3\,\dot u,$$
$$\partial_t\,\partial^2_{ql}\,\dot u = \partial_t\,\partial^2_{ql}\,\dot u + \omega_q\,\partial_t^2\,\partial_l\,\dot u - \omega_q\,(\partial_t^2\,\partial_l\,\dot u + \omega_l\,\partial_t^3\,\dot u) + \omega_q\,\omega_l\,\partial_t^3\,\dot u,$$
$$\partial^3_{iql}\,\dot u = \partial^3_{iql}\,\dot u + \omega_i\,\partial_t\,\partial^2_{ql}\,\dot u - \omega_i\,(\partial_t\,\partial^2_{ql}\,\dot u + \omega_q\,\partial_t^2\,\partial_l\,\dot u)$$
$$+ \omega_i\,\omega_q\,(\partial_t^2\,\partial_l\,\dot u + \omega_l\,\partial_t^3\,\dot u) - \omega_i\,\omega_q\,\omega_l\,\partial_t^3\,\dot u,$$

et l'on obtient la minoration

$$2\left(\lambda-\frac{1}{2}-\eta'\right)(1+\sum_{l\geq 1}\omega_l^2+\sum_{q,\,l\geq 1}\omega_q^2\,\omega_l^2)\,(\partial_t^3\,\dot u)^2$$
$$+\,(B-C_\eta-C_{\eta'})\sum_{i\geq 1,\,q,\,l}(\partial_i\,\partial_{ql}^2\,\dot u+\omega_i\,\partial_t\,\partial_{ql}^2\,\dot u)^2.$$

• Les « termes quadratiques additionnels »

$$-a g_{ij}^k\,\partial_{kl}^2\,u\,\partial_{qij}^3\,\dot u\,\partial_t\,\partial_{ql}^2\,\dot u-a g_{ij}^k\,\partial_{ij}^2\,\dot u\,\partial_{qkl}^3\,\dot u\,\partial_t\,\partial_{ql}^2\,\dot u-a g_{ij}^k\,\partial_{qk}^2\,u\,\partial_{ijl}^3\,\dot u\,\partial_t\,\partial_{ql}^2\,\dot u$$

s'écrivent, modulo des termes contrôlés par $C\,(\varepsilon^2+\alpha_1\,(t))\sum_{q,\,l}E\,(t,\,\partial_{ql}^2\,\dot u)$ (parmi lesquels le deuxième terme de la somme),

$$-\,a\,\psi\,d\,\{-g_{ij}^k\,\omega_l\,\omega_j\,\omega_k\,\omega_l^2\,\omega_q^2-g_{ij}^k\,\omega_i\,\omega_j\,\omega_k\,\omega_l^2\,\omega_q^2\}\,(\partial_t^3\,\dot u)^2$$
$$+\,a\,\psi\,d\{\sum\star(\partial_i\,\partial_{ql}^2\,\dot u+\,\omega_i\,\partial_t\,\partial_{ql}^2\,\dot u)\,(\partial_j\,\partial_{pk}^2\,\dot u+\omega_j\,\partial_t\,\partial_{pk}^2\,\dot u)$$
$$+\sum\star(\partial_t^3\,\dot u)\,(\partial_i\,\partial_{ql}^2\,\dot u+\omega_i\,\partial_t\,\partial_{ql}^2\,\dot u)\}.$$

Le premier terme vaut $6\,a\,\psi\,dg\,(\partial_t^3\,\dot u)^2$ tandis que les seconds sont majorés par $\psi\,a\,|\,d\,|\,(C_{\eta''}\sum_{i\geq 1,\,q,\,l}(\partial_i\,\partial_{ql}^2\,\dot u+\omega_i\,\partial_t\,\partial_{ql}^2\,\dot u)^2+\eta''\,(\partial_t^3\,\dot u)^2)$.

• Au total, on obtient, pour tout $\lambda>\dfrac{5}{2}$, avec $|\,F_{ql}\,|_0\leq C\,\varepsilon^7\,\delta^{6-\nu_1}$,

$$|\,\nabla^3\,\dot u\,|_0\leq C\,\varepsilon^7\,\delta^\lambda+C\,\varepsilon^7\,\delta^\lambda\int_{t_0}^T\frac{dt}{(\tilde\tau-\tau)^{6-\nu_1-\lambda}}\leq C\,\varepsilon^5\,\delta^{5-\nu_1}.$$

b) Pour estimer $\nabla^2\,\partial_\omega\,\dot u$, on procède comme en *a*), et on trouve que l'inégalité a lieu pour $\lambda>\dfrac{3}{2}$. Comme $|\,F_{l\omega}\,|_0\leq C\,\varepsilon^7\,\delta^{6-\nu_1}$, on obtient (3.4.6).

c) Enfin, $\lambda>\dfrac{1}{2}$ suffit pour l'inégalité portant sur $\partial_\omega^2\,\dot u$. □

3.4.6. *Conclusions pour le domaine* $\tilde D_e$.

Les estimations d'énergie (3.4.4) et (3.4.6) permettent d'obtenir, grâce aux injections de Sobolev en coordonnées polaires, les estimations

$$\text{(3.4.7)}\qquad \begin{aligned}&\|\,\nabla\,\dot u\,\|_0\leq C_\eta\,\frac{\varepsilon^{6-\eta}}{(\tilde\tau-\tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1+\eta}},\\ &\|\,\nabla^2\,\dot u\,\|_0+\|\,\nabla\,\partial_\omega\,\dot u\,\|_0\leq C_\eta\,\frac{\varepsilon^{6-\eta}}{(\tilde\tau-\tau)^{5-\nu_1+\eta}},\end{aligned}$$

pour tout $\eta>0$ [la perte arbitrairement petite vient du fait qu'on est dans le cas limite de $H^1\,(\mathbb{R}^2)$, et qu'on doit interpoler avec des estimations éventuellement moins bonnes].

Tant que T est tel que $(3.1.3)_a$ a lieu dans $\tilde D_e$ pour $t<T$, $\tilde D_e$ est un domaine d'influence et on obtient en fait les estimations (3.4.7). Celles-ci impliquent à leur tour

$$\|\,\nabla\,\dot u\,\|_0\leq\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau-\tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}},\qquad \|\,\nabla^2\,\dot u\,\|_0+\|\,\nabla\,\partial_\omega\,\dot u\,\|_0\leq\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau-\tau)^{5-\nu_1}},$$

pour ε assez petit, pourvu que $\eta < \dfrac{\nu_3}{2+\nu_2}$.

Par induction sur T, on en déduit que $(3.1.3)_a$ est valable pour $t < T_0$.

4. Les estimations complémentaires de $\dot{u}$

4.1. On va maintenant prouver la validité de $(3.1.3)_b$ pour $t < T_0$. Notons que la preuve des théorèmes 1.1.1 et 1.2 sera alors complète, car cela montre que la solution u existe pour $\varepsilon\sqrt{t} \leq \tilde{\tau}(\varepsilon) - \varepsilon^{1+\nu_2}$, c'est-à-dire $t \leq \dfrac{A_0^2}{\varepsilon^2} + \dfrac{2\,A_0\,A_1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{\varepsilon^{1-\nu}} = \tilde{T}_\varepsilon$ pour $0 < \nu < \nu_2$ et ε petit. De plus, toutes les estimations d'énergie restent valables.

Enfin, comme $\tilde{\tau} - \tau \geq \varepsilon^{1+\nu_2}$, on a

$$\tau_* - \tau = \tilde{\tau} - \tau + C\,\varepsilon^{\kappa/\kappa-1} + C\,\varepsilon^2\,|\log\,\varepsilon\,| \leq \tilde{\tau} - \tau + \varepsilon^{1+\nu_2} \leq 2\,(\tilde{\tau} - \tau) \leq 2\,(\tau_* - \tau),$$

ce qui permet de formuler les estimations plus agréablement à l'aide de $\tau_* - \tau$.

4.2. Estimations dans une bande $t_0 \leq t \leq T$.

Lemme 4.2. – *Pour* $t_0 \leq t \leq T$, *on a, sous l'hypothèse* $(3.1.3)_b$,

(i) $$|\,\nabla\,\dot{u}\,|_0 \leq C\,\varepsilon^{23/9}\,|\log\,\varepsilon\,|,$$

(ii) $$|\,\nabla^2\,\dot{u}\,|_0 + |\,\nabla\,\partial_\omega\,\dot{u}\,|_0 \leq C\left(\varepsilon^{23/9}\,|\log\,\varepsilon\,| + \frac{\varepsilon^5}{(\tilde{\tau} - \tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}}\right),$$

(iii) $$|\,\nabla^3\,\dot{u}\,|_0 + |\,\nabla^2\,\partial_\omega\,\dot{u}\,|_0 + |\,\nabla\,\partial_\omega^2\,\dot{u}\,|_0 \leq C\left(\varepsilon^{23/9}\,|\log\,\varepsilon\,| + \frac{\varepsilon^5}{(\tilde{\tau} - \tau)^{5-\nu_1}}\right).$$

Preuve. – On utilise cette fois la méthode standard d'inégalité d'énergie, c'est-à-dire celle pour laquelle $a \equiv 1$.

Nous distinguerons les domaines $\tilde{D}_e$ et son complémentaire dans le cône $\tilde{D}_i$.

a) Comme, en période III dans $\tilde{D}_i$, on a (prop. 4.3 de [1]) $|\,\partial_{x,\,t,\,\omega}^\alpha\,J_a\,|_0 \leq C\,\varepsilon^5\,|\log\,\varepsilon\,|$, les estimations des seconds membres F_l, F_{ql} etc. sont maintenant les suivantes :

- $$|\,J_a\,|_0 \leq C\,\varepsilon^5\,|\log\,\varepsilon\,| + C\,\varepsilon^7\,\delta^{3-\nu_1},$$

- $$|\,F_l\,|_0 \leq C\,\varepsilon^5\,|\log\,\varepsilon\,| + C\,\varepsilon^7\,\delta^{\frac{9}{2}-\nu_1} + C\,\varepsilon^2\,|\,\nabla\,\dot{u}\,|_0,$$

- $$|\,F_\omega\,|_0 \leq C\,\varepsilon^5\,|\log\,\varepsilon\,| + C\,\varepsilon^7\,\delta^{\frac{9}{2}-\nu_1} + C\,\beta\,|\,\nabla^2\,\dot{u}\,|_0,$$

où l'on a noté $\beta\,(t) = \varepsilon^2 + \dfrac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde{\tau} - \tau)^{5-\nu_1}}$.

- $$|F_{ql}|_0 \leq C\,\varepsilon^5\,|\log\,\varepsilon| + C\,\varepsilon^7\,\delta^{6-\nu_1} + C\,\varepsilon^2\,|\nabla^2\,\dot u|_0,$$

- $$|F_{l\omega}|_0 \leq C\,\varepsilon^5\,|\log\,\varepsilon| + C\,\varepsilon^7\,\delta^{6-\nu_1} + C\,\beta\,|\nabla^3\,\dot u|_0 + C\,\varepsilon^2\,(|\nabla^2\,\dot u|_0 + |\nabla\,\partial_\omega\,\dot u|_0)$$

- $$|F_\omega^2|_0 \leq C\,\varepsilon^5\,|\log\,\varepsilon| + C\,\varepsilon^7\,\delta^{6-\nu_1} + C\,\beta\,(|\nabla^2\,\partial_\omega\,\dot u|_0 + |\nabla^2\,\dot u|_0 + |\nabla\,\partial_\omega\,\dot u|_0).$$

On a utilisé ici les estimations d'énergie déjà établies dans $\tilde D_e$.

b) Dans le calcul de $\mathcal{L}\,\dot u\,\partial_t\,\dot u$, il apparaît des termes quadratiques majorés par $C\,(|\nabla^2\,u| + |\nabla^2\,u_a|)\,|\nabla\,\dot u|^2$; on écrit alors, en séparant $\tilde D_i$ et $\tilde D_e$,

$$\begin{aligned}\int (|\nabla^2\,u| + |\nabla^2\,u_a|)\,|\nabla\,\dot u|^2\,dx\,dt &\leq C\int_{t_0}^T \beta\,(t)\,E\,(t)\,dt + C\,\varepsilon^{12}\int_{t_0}^T \frac{dt}{(\tilde\tau-\tau)^{5-\nu_1}}\\ &\leq C\int_{t_0}^T \beta\,(t)\,E\,(t)\,dt + C\,\frac{\varepsilon^{10}}{(\tilde\tau-\tau)^{4-2\nu_1}}.\end{aligned}$$

On obtient donc

$$E\,(T) \leq E\,(t_0) + \int_{t_0}^T |J_a|_0\,E^{1/2}\,(t)\,dt + C\int_{t_0}^T \beta\,(t)\,E\,(t)\,dt + C\,\frac{\varepsilon^{10}}{(\tilde\tau-\tau)^{4-2\nu_1}}.$$

Le lemme de Gronwall implique alors $\left(\text{car} \int_{t_0}^T \beta\,(t)\,dt \leq C\right)$

$$\begin{aligned}CE^{1/2}\,(T) &\leq E^{1/2}\,(t_0) + \frac{\varepsilon^5}{(\tilde\tau-\tau)^{2-\nu_1}} + \int_{t_0}^T |J_a|_0\,dt\\ &\leq C\,\varepsilon^{23/9}\,|\log\,\varepsilon| + \frac{\varepsilon^5}{(\tilde\tau-\tau)^{2-\nu_1}} + C\,\varepsilon^3\,|\log\,\varepsilon|\\ &\quad + C\,\frac{\varepsilon^5}{(\tilde\tau-\tau)^{2-\nu_1}} \leq C\,\varepsilon^{23/9}\,|\log\,\varepsilon| + C\,\frac{\varepsilon^5}{(\tilde\tau-\tau)^{2-\nu_1}}.\end{aligned}$$

c) Pour l'équation $\mathcal{L}\,\partial_l\,\dot u + g_{ij}^k\,\partial_{kl}^2\,u\,\partial_{ij}^2\,\dot u = F_l$, on calcule $\mathcal{L}\,\partial_l\,\dot u\,\partial_t\,\partial_l\,\dot u$, ce qui fait apparaître des termes quadratiques majorés par $C\,(|\nabla^2\,u|+|\nabla^2\,u_a|)\,|\nabla^2\,\dot u|^2$. En procédant comme en *b*), on trouve

$$|\nabla^2\,\dot u|_0 \leq C\,\varepsilon^{23/9}\,|\log\,\varepsilon| + C\,\frac{\varepsilon^5}{(\tilde\tau-\tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}}.$$

Il en va de même pour les autres équations : les bornes trouvées sont les sommes des bornes « extérieures » déjà établies et des bornes « intérieures ». □

Pour conclure, nous avons besoin d'une estimation supplémentaire dans un domaine « central » D_c, défini par

$$(1 - C_1\,\varepsilon^2)\,r + t \leq \frac{A_0^2}{\varepsilon^2}\,(1+\gamma).$$

• Remarquons que si $C_1 > 0$ est assez grand, D_c est un domaine d'influence pour $\mathcal{L}$; si $A_0 - A > 0$ est assez petit et que l'on choisit $\gamma > 0$ petit, on a tout simplement $u_a \equiv 0$ dans D_c. Les inégalités d'énergie dans D_c pour l'équation (1.1.1) montrent qu'alors, dans D_c,

$$|\,\nabla\,\dot u\,|_0 + |\,\nabla^2\,\dot u\,|_0 + |\,\nabla\,\partial_\omega\,\dot u\,|_0 + |\,\nabla^3\,\dot u\,|_0 + |\,\nabla^2\,\partial_\omega\,\dot u\,|_0 + |\,\nabla\,\partial_\omega^2\,\dot u\,|_0 \leq C\,\varepsilon^{23/9}\,|\log\,\varepsilon\,|,$$

ce qui implique, comme en (3.4.6),

$$\|\,\nabla\,\dot u\,\|_0 + \|\,\nabla^2\,\dot u\,\|_0 + \|\,\partial_\omega\,\nabla\,\dot u\,\|_0 = C_\eta\,\varepsilon^{\frac{23}{9}-\eta} \quad (\eta > 0 \text{ arbitraire}).$$

• Par l'argument de 3.4.6, les estimations du lemme 4.2 impliquent dans la bande $t_0 \leq t \leq T$, hors de D_c,

$$\|\,\nabla\,\dot u\,\|_0 \leq C\left(\varepsilon^{\frac{23}{9}+1-\eta} + \frac{\varepsilon^{6-\eta}}{(\tilde\tau - \tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1+\eta}}\right),$$
$$\|\,\nabla^2\,\dot u\,\|_0 + \|\,\nabla\,\partial_\omega\,\dot u\,\|_0 \leq C\left(\varepsilon^{\frac{23}{9}+1-\eta} + \frac{\varepsilon^{6-\eta}}{(\tilde\tau - \tau)^{5-\nu_1+\eta}}\right).$$

• Au total, partout dans la bande $t_0 \leq t \leq T$,

$$\|\,\nabla\,\dot u\,\|_0 \leq C\,\varepsilon^{\frac{23}{9}-\eta} + C\,\frac{\varepsilon^{6-\eta}}{(\tilde\tau - \tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1+\eta}},$$
$$\|\,\nabla^2\,\dot u\,\|_0 + \|\,\nabla\,\partial_\omega\,\dot u\,\|_0 \leq C\,\varepsilon^{\frac{23}{9}-\eta} + C\,\frac{\varepsilon^{6-\eta}}{(\tilde\tau - \tau)^{5-\nu_1+\eta}}.$$

Pourvu qu'on ait $\eta < \dfrac{\nu_3}{2+\nu_2}$ et ε assez petit, cela implique

$$\|\,\nabla\,\dot u\,\|_0 \leq \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\frac{23}{9}-\nu_3} + \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau - \tau)^{\frac{7}{2}-\nu_1}},$$
$$\|\,\nabla^2\,\dot u\,\|_0 + \|\,\nabla\,\partial_\omega\,\dot u\,\|_0 \leq \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\frac{23}{9}-\nu_3} + \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^{6-\nu_3}}{(\tilde\tau - \tau)^{5-\nu_1}}.$$

Par induction, on en déduit que $(3.1.3)_b$ est valable pour $t < T_0$. Cela complète la preuve du théorème 1.2. Pour obtenir le corollaire 1.2, il suffit de remarquer en outre que $\|\,F''\,\|_0 \geq \dfrac{C}{\tilde\tau - \tau}$, d'après (2.1.4), (iv).

5. Le cas invariant par rotation

Il suffit de prouver ici la majoration de T_ε.

On va en fait donner une estimation un peu meilleure.

PROPOSITION 5. – *Dans le cas invariant par rotation, on a, pour ε assez petit,*

$$T_\varepsilon \leq \frac{A_0^2}{\varepsilon^2} + 2\,\frac{A_0\,A_1}{\varepsilon} + C\,|\log\,\varepsilon\,|.$$

Preuve. – Les étapes de la preuve sont classiques (*voir* John [6], Hörmander [3] ou Alinhac [2]), et nous les résumons rapidement.

1. On pose $v = r^{1/2}\,u$, puis $\partial_{rt}^2\,v = c\,(w_2 - w_1)$, $\partial_{rr}^2\,v = w_1 + w_2$. Avec $L_1 = \partial_t + c\,\partial_r$, $L_2 = \partial_t - c\,\partial_r$, on obtient facilement, en dérivant l'équation $\partial_t^2\,v - c^2\left(\frac{\partial_t\,v}{r^{1/2}}\right)\left(\partial_r^2\,v + \frac{v}{4\,r^2}\right) = 0$,

$$\begin{aligned}(5.1)\qquad L_1\,w_1 + \frac{cc'}{r^{1/2}}\,w_1\,(w_2 - w_1) + \frac{ucc'}{8\,r^2}\,(w_2 - w_1) - \frac{(\partial_t\,u)\,c'}{4\,r}\,(3\,w_1 + w_2)\\ + \frac{c}{8\,r^2}\left(\partial_r\,v - \frac{2\,v}{r}\right) - \frac{c'\,u\,\partial_t\,u}{8\,r^{5/2}} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5.2)\qquad L_2\,w_2 + \frac{cc'}{r^{1/2}}\,w_2\,(w_2 - w_1) - \frac{ucc'}{8\,r^2}\,(w_2 - w_1) + \frac{(\partial_t\,u)\,c'}{4\,r}\,(3\,w_2 + w_1)\\ - \frac{c}{8\,r^2}\left(\partial_r\,v - \frac{2\,v}{r}\right) + \frac{c'\,u\,\partial_t\,u}{8\,r^{5/2}} = 0.\end{aligned}$$

2. On suppose que la solution u existe pour $t < T$ pour un $T > \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$; en notant R la bande comprise entre les deux caractéristiques de L_1 issues, au temps $t_0 = \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$, des points $r = t_0 + M$ et $r = t_0 - C$ $(C \gg |\,\sigma_0\,|)$, on pose

$$J\,(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t} \int_R |\,w_1\,(r,\,s)\,|\,dr,$$

$$U\,(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t,\,R} (|\,\partial_r\,u\,| + |\,\partial_t\,u\,|),$$

$$V\,(t) = \sup_{t_0 \leq s \leq t,\,R} |\,w_2\,|.$$

Observons que, comme $u - u_a$ et ses dérivées sont $O\,(\varepsilon^8)$ pour $t = t_0$ et

$$u_a = \frac{\varepsilon}{r^{1/2}}\,(F\,(r - t,\,\omega,\,\tau) + \varepsilon^2\,G\,(r - t,\,\omega,\,\tau)),$$

on a $w_2 = O\,(\varepsilon^5)$ à cause de (2.1.3). Soit donc C_0 une constante assez grande pour que

$$J\,(t_0) \leq C_0\,\varepsilon, \qquad U\,(t_0) \leq C_0\,\varepsilon^2, \qquad V\,(t_0) \leq C_0^2\,\varepsilon^5.$$

Nous allons montrer, par induction sur le temps, que

$$J(t) \le 2\,C_0\,\varepsilon, \qquad U(t) \le 3\,C_1\,C_0\,\varepsilon^2, \qquad V(t) \le 4\,C_1\,C_2 C_0^2\,\varepsilon^5, \tag{5.3}$$

où $C_1 \ge 1$, $C_2 \ge 1$ sont des constantes numériques.

a) Pour ce faire, on note que

$$d\,(w_1\,(dr - c\,dt)) = \left[\frac{c}{8\,r^2}\left(\partial_r\,v - \frac{2\,v}{r}\right) - \frac{c'\,u\,\partial_t\,u}{8\,r^{5/2}}\right.$$
$$\left. + \,c'\,w_2\left(\frac{uc}{8\,r^2} - \frac{\partial_t\,u}{4\,r}\right) - c'\,w_1\left(\frac{uc}{8\,r^2} - 5\,\frac{\partial_t\,u}{4\,r}\right)\right] dr \wedge dt.$$

On obtient alors comme dans [3] la majoration

$$\int_R |\,w_1\,(r,\,t)\,|\,dr \le \int_R |\,w_1\,(r,\,t_0)\,|dr + \iint |\,[\quad]\,|\,dr\,dt,$$

soit

$$\int_R |\,w_1\,(r,\,t)\,|\,dr \le C_0\,\varepsilon\,(1 + O\,(\varepsilon)) \le \frac{3}{2}\,C_0\,\varepsilon \quad \text{pour } \varepsilon \text{ petit.}$$

b) Pour estimer U, on note que

$$L_2\,\partial_t\,u = \frac{2\,c^2}{r^{1/2}}\,w_1 + \frac{u\,c^2}{4\,r^2} + \frac{c\,\partial_t\,u}{2\,r},$$
$$L_2\,\partial_r\,u = \frac{-2\,cw_1}{r^{1/2}} - \frac{\partial_t u}{2\,r} - \frac{c\,\partial_r\,u}{r} + \frac{uc}{4\,r^2}.$$

En intégrant vers le passé le long d'une caractéristique C de L_2 issue d'un point $(r,\,t)$, on trouve

$$|\,\partial_r\,u\,| + |\,\partial_t\,u\,| \le C_1\,\varepsilon \int_C |\,w_1\,| + CC_0\,\varepsilon^4.$$

Par le même argument qu'en *a*), on prouve

$$\int_C |\,w_1\,| \le \frac{3}{2}\,C_0\,\varepsilon,$$

d'où

$$U\,(t) \le \frac{3}{2}\,C_1\,C_0\,\varepsilon^2 + CC_0\,\varepsilon^4 \le 2\,C_1\,C_0\,\varepsilon^2$$

pour ε assez petit.

c) Enfin, en intégrant comme en *b*) le long de C et en utilisant (5.2), on trouve

$$|\,w_2\,| \le 3\,C_1\,C_2\,C_0^2\,\varepsilon^5\,(1 + O\,(\varepsilon)) \le \frac{7}{2}\,C_1\,C_2\,C_0^2\,\varepsilon^5$$

pour ε assez petit.

On en déduit que (5.3) est vrai pour $t < T$.

3. A cause de (2.1.2), la fonction $-g\,\partial_\sigma S$ est solution de l'équation de Burger avec $-g\,\partial_\sigma S(\sigma, 0) = -g\,(R'(\sigma) + \varepsilon L'(\sigma))$ (ici, $c(0) = 1$, $g = 2c'(0)$). Notons $\sigma_0(\varepsilon)$ l'abscisse de l'intersection de la caractéristique issue de σ_0 avec $\tau = A$. On a alors

$$\frac{1}{g\,S''(\sigma_0(\varepsilon), A)} = \frac{1}{g\,(R''(\sigma_0) + \varepsilon L''(\sigma_0))} - A = \tau_*(\varepsilon) - A + O(\varepsilon^2).$$

Les estimations sur u_a et $\dot{u}$ montrent que $w_1(r, t) = \varepsilon F''(r - t, \tau) + O(\varepsilon^3)$; on en déduit $w_1\left(\sigma_0(\varepsilon) + \frac{A^2}{\varepsilon^2}, \frac{A^2}{\varepsilon^2}\right) = \varepsilon S''(\sigma_0(\varepsilon), A) + O(\varepsilon^3 \,|\log\,\varepsilon\,|)$, par définition de F.

Considérons alors (5.1) restreinte à la caractéristique $(r(t), t)$ de L_1 issue, à $t = t_0 = \frac{A^2}{\varepsilon^2}$, du point $r = \sigma_0(\varepsilon) + \frac{A^2}{\varepsilon^2}$: c'est une équation différentielle pour la fonction $w(t) = w_1(r(t), t)$ de la forme $w'(t) = a_0(t)\,w^2 + a_1(t)\,w + a_2(t)$, où les coefficients peuvent être estimés, grâce à (5.3), par

$$a_0 = \frac{c'(0)}{t^{1/2}} + O(\varepsilon^3), \qquad |\,a_1\,| = O(\varepsilon^4), \qquad |\,a_2\,| = O(\varepsilon^5).$$

Le lemme 1.3.2 de [4] s'applique alors et donne

$$\begin{aligned}(1 + O(\varepsilon^2)) \int_{t_0}^{t} a_0(s)\,ds &= (1 + O(\varepsilon^2)) \left[2\,c'(0)\left(\sqrt{t} - \frac{A}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon)\right] \\ &< \frac{1}{\varepsilon\,S''(\sigma_0(\varepsilon), A) + O(\varepsilon^3\,|\log\varepsilon\,|)},\end{aligned}$$

d'où $\tau < \tau_*(\varepsilon) + O(\varepsilon^2\,|\log\,\varepsilon\,|)$, ce qu'il fallait démontrer. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC, *Approximation près du temps d'explosion des solutions d'équations d'ondes quasi-linéaires en dimension deux (S.I.A.M. J. Math. An.,* à paraître).

[2] S. ALINHAC, *Temps de vie des solutions régulières des équations d'Euler compressibles axisymétriques en dimension deux* (*Inv. Math.,* à paraître).

[3] L. HÖRMANDER, *The Lifespan of Classical Solutions of non Linear Hyperbolic Equations* (Mittag-Leffler report n° 5, 1985).

[4] L. HÖRMANDER, *Non Linear Hyperbolic Differential Equations* (*Lectures,* 1986-1987).

[5] F. JOHN et S. KLAINERMAN, *Almost Global Existence to Nonlinear Wave Equations in Three Space Dimensions* (*Comm. Pure App. Math.,* vol. 37, 1984, p. 443-455).

[6] F. JOHN, *Blow up of Radial Solutions of* $u_{tt} = c^2(u_t)\,\Delta u$ *in Three Space Dimensions* (*Math. Aplicada e Comp.,* vol. 4, 1985, p. 3-18).

[7] F. JOHN, *Existence for Large Times of Strict Solutions of Nonlinear Wave Equations in Three Space Dimensions for Small Initial Data,* (*Comm. Pure Appl. Math.,* vol. 40, 1987, p. 79-109).

[8] F. JOHN, *Solutions of Quasilinear Wave Equations with Small Initial Data; the Third Phase,* (Non Linear Hyperbolic Equations, Proceedings, Bordeaux 1988, Lect. Notes Math. 1402, Springer Verlag, p. 155-184).

[9] S. KLAINERMAN, *Weighted L^∞ and L^1 Estimates for Solutions to the Classical Wave Equation in Three Space dimensions* (*Comm. Pure Appl. Math.,* vol. 37, 1984, p. 269-288).
[10] S. KLAINERMAN, *Uniform Decay Estimates and the Lorentz Invariance of the Classical Wave Equation,* (*Comm. Pure Appl. Math.,* vol. 38, 1985, 321-332).
[11] A. MAJDA, *Compressible Fluid Flows and Systems of Conservation Laws* (*Springer Appl. Math. Sc.,* vol. 53 1984).

(Manuscrit reçu le 7 janvier 1993;
révisé le 29 octobre 1993).

S. ALINHAC
Université Paris-Sud,
Bât. 425, Mathématiques,
91405 Orsay Cedex.