ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. MÉRAY

Essai sur le calcul des quantités associées en systèmes et sur son application à la théorie des équations simultanées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 8 (1879), p. 81-110

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1879_2_8__81_0>

ESSAI

SUR LE

CALCUL DES QUANTITÉS ASSOCIÉES EN SYSTÈMES

ET SUR

SON APPLICATION A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES,

PAR M. CH. MÉRAY,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

1. Je vais étendre les règles essentielles du calcul ordinaire à celui des quantités que l'on rencontre groupées dans un ordre déterminé, telles que les coordonnées d'un même point, les solutions d'un système d'équations simultanées, etc. Les développements qui vont suivre expliqueront, mieux d'ailleurs que tout préambule, la nature et la portée de ces recherches. Ils montreront que les principales spéculations de l'Algèbre sont susceptibles d'une généralisation très-naturelle et pour ainsi dire indéfinie, qui semble promettre de nouvelles ressources à l'Analyse générale et en particulier à la théorie des équations simultanées.

Définition des assemblages et principes de leur calcul.

2. J'appellerai *assemblages binaires* des groupes de quantités (réelles ou imaginaires) telles que

$$a_{k,0},\quad a_{k-1,1},\quad \ldots,\quad a_{k-i,i},\quad \ldots,\quad a_{0,k},$$

c'est-à-dire susceptibles d'être représentées par une même lettre pourvue de deux indices qui varient de zéro à quelque nombre entier k, en formant pour chaque lettre une somme toujours égale à k, ces groupes étant d'ailleurs soumis, dans leurs combinaisons, aux règles qui vont être exposées.

Je nommerai le nombre k la *taxe* de l'assemblage, et les $k+1$ quantités $a_{k,0}$, ..., $a_{0,k}$ qui le composent, ses *pièces*. Les pièces doivent être conçues dans l'ordre déterminé que règlent leurs indices.

Un assemblage de taxe $= 0$ ne contient qu'une pièce $a_{0,0}$; nous nommerons *primordiaux* les assemblages de taxe $= 1$, et *isotaxiques* deux ou plusieurs assemblages dont les taxes sont égales.

Nous désignerons un assemblage soit par une lettre spéciale, soit par l'ensemble des lettres affectées à la notation de ses pièces, en ayant soin de les écrire dans l'ordre où leurs premiers indices vont en diminuant. De cette manière, les indices de chaque pièce sont suffisamment indiqués par le rang qu'elle occupe dans la notation, et peuvent être supprimés sans inconvénient.

3. Il y a lieu de considérer au même titre des assemblages *ternaires*, *quaternaires*, etc. ; les pièces d'un assemblage de classe M comportent M indices qui varient individuellement de zéro à k, taxe de l'assemblage, en formant pour chacun une somme invariablement égale à k; leur nombre est celui des combinaisons complètes de M lettres prises k à k, ou bien des monômes entiers dissemblables de degré k par rapport à M variables indépendantes. Mais, comme il est facile de leur appliquer ce que je vais exposer sur les assemblages binaires, je ne parlerai que de ceux-ci, en supprimant même, pour abréger, l'épithète *binaire* (1).

Quant aux assemblages *primaires* (dont la taxe est toujours $= 0$), ils se comportent exactement comme des quantités ordinaires.

4. Deux assemblages sont *égaux* quand ils sont isotaxiques et que leurs pièces de mêmes indices sont respectivement égales; dans le cas contraire, ils sont *inégaux*.

Un assemblage est *nul* quand toutes ses pièces se réduisent à zéro.

---

(1) Comme on va le voir, les principes du calcul des assemblages ne reposent que sur les règles du calcul ordinaire, et celles-ci s'étendent toutes aux assemblages. Il en résulte évidemment que l'on peut concevoir aussi des *assemblages binaires, ternaires*, etc., *ayant pour pièces des assemblages d'une même classe quelconque*, ce qui agrandit encore considérablement le champ déjà si vaste des considérations de cette espèce.

5. La *somme* de plusieurs assemblages isotaxiques est l'assemblage isotaxique qui a pour pièces les sommes des pièces de mêmes indices dans les assemblages proposés. Elle reste évidemment égale à elle-même, dans quelque ordre que l'on considère ses parties.

6. La *différence* (¹) de deux assemblages isotaxiques se forme de même en prenant les différences des pièces de mêmes indices dans l'un et dans l'autre.

Quand deux assemblages sont égaux, leur différence est nulle, et réciproquement.

7. La *multiplication* de m assemblages donnés de taxes k', k'', ..., $k^{(m)}$ est l'assemblage de taxe $k = k' + k'' + \ldots + k^{(m)}$, dans lequel la pièce d'indices i, $j\,(i+j=k)$ s'obtient en prenant arbitrairement et respectivement, dans les assemblages donnés, m pièces dont les premiers indices ont une somme égale à i, les seconds une somme égale à j, en formant le produit de ces pièces, puis la somme de tous les produits de cette espèce.

Par exemple, pour le produit $(A_{5,0}, A_{4,1}, A_{3,2}, A_{2,3}, A_{1,4}, A_{0,5})$ des assemblages $(a_{2,0}, a_{1,1}, a_{0,2})$, $(\alpha_{3,0}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{0,3})$, on a

$$\begin{aligned}
A_{5,0} &= a_{2,0}\,\alpha_{3,0},\\
A_{4,1} &= a_{2,0}\,\alpha_{2,1} + a_{1,1}\,\alpha_{3,0},\\
A_{3,2} &= a_{2,0}\,\alpha_{1,2} + a_{1,1}\,\alpha_{2,1} + a_{0,2}\,\alpha_{3,0},\\
A_{2,3} &= \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On notera les observations suivantes :

1° Le produit de plusieurs assemblages ne dépend pas de l'ordre dans lequel on peut disposer ses *facteurs*.

2° La *multiplication* des assemblages peut être fractionnée comme celle des quantités ordinaires, c'est-à-dire que, pour former le produit de trois assemblages par exemple, on peut à volonté soit opérer en bloc comme nous venons de l'expliquer, soit former d'abord le produit de

(¹) Au point de vue *algébrique*, la soustraction n'est pas une opération irréductible; elle se décompose effectivement en une multiplication (celle de la quantité à retrancher par -1) et en une addition (celle de ce produit et de la quantité dont il faut retrancher). J'en fais ici une opération spéciale, comme en Algèbre, pour mieux faire ressortir le parallélisme parfait du calcul des assemblages et du calcul élémentaire.

deux facteurs quelconques et le multiplier par le troisième; il suffit d'un peu d'attention pour s'en convaincre.

3° Chacune des pièces d'un produit est une fonction linéaire et homogène de celles d'un facteur quelconque considéré isolément.

4° La multiplication d'un assemblage quelconque par un assemblage de taxe nulle ne change pas la taxe du premier, et n'a d'autre effet que d'opérer la multiplication de toutes ses pièces par la pièce unique du second.

Cette remarque conduit à nommer *produit d'un assemblage par une quantité ordinaire* le résultat de la multiplication de toutes ses pièces par cette quantité.

Un assemblage reste égal à lui-même quand on le multiplie ainsi par 1. Mais ses pièces changent simplement de signes sans changer de valeurs numériques (ou prennent des valeurs *opposées,* si elles sont imaginaires), quand on le multiplie par -1. Nous dirons donc que deux assemblages sont *opposés,* ou *égaux et de signes contraires,* quand chacun d'eux est égal au produit de l'autre par -1.

La différence de deux assemblages isotaxiques est ainsi la somme du premier et de l'opposé du second.

8. La *puissance* $m^{\text{ième}}$ d'un assemblage est naturellement le produit de m facteurs égaux à l'assemblage donné. Par exemple, la puissance $m^{\text{ième}}$ de l'assemblage primordial $(a_{1,0}, a_{0,1})$ a pour pièces les termes du développement de $(a_{1,0}+a_{0,1})^m$ ordonné suivant les puissances décroissantes de $a_{1,0}$.

9. *Pour qu'un produit de plusieurs assemblages soit nul, il est nécessaire et suffisant que l'un au moins des facteurs le soit lui-même.*

I. *Quand deux assemblages ne sont nuls ni l'un ni l'autre, leur produit ne l'est pas non plus.*

Soient k' la taxe de l'un de ces assemblages, et $k'-p'$ le plus grand des premiers indices de celles de ses pièces qui, par hypothèse, ne se réduisent pas à zéro; soient aussi k'' et $k''-p''$ les mêmes nombres pour l'autre assemblage.

Toutes les pièces du produit dont le premier indice surpasse la somme $(k'-p')+(k''-p'')$ se réduisent à zéro, parce que chacune d'elles est composée de termes qui ont pour facteur soit une pièce du premier facteur dont le premier indice surpasse $k'-p'$, soit une pièce du second dont le premier indice surpasse $k''-p''$, c'est-à-dire zéro dans l'un et l'autre cas.

Mais la pièce du produit qui a cette somme $(k'-p')+(k''-p'')$ pour premier indice n'est certainement pas nulle, car elle se réduit au produit de celles des pièces des deux assemblages donnés qui ont respectivement $k'-p'$, $k''-p''$ pour premiers indices. Effectivement, tout autre terme de la pièce en question contient en facteur soit une pièce du premier facteur, dont le premier indice surpasse $k'-p'$, soit une pièce du second, dont le premier indice surpasse $k''-p''$, c'est-à-dire zéro dans tous les cas.

II. *La même chose a lieu pour un produit d'un nombre quelconque d'assemblages.* Car, si elle est vraie pour n facteurs, elle l'est aussi pour $n+1$, puisqu'un produit de $n+1$ facteurs est aussi le produit de l'un d'eux par le produit des autres (n° 7, 2°). Or elle est vraie pour $n=2$ (I), donc elle l'est pour $n=3, 4, \ldots$.

III. De là résulte évidemment l'exactitude du premier point de notre proposition, puisque, contrairement à l'hypothèse, le produit proposé ne serait pas nul, si aucun des facteurs ne l'était. Le second point est d'ailleurs évident, en vertu de la remarque faite au n° 7 (3°).

10. *Le produit de deux sommes* A, B, *composées chacune d'un nombre quelconque d'assemblages isotaxiques, est égal à la somme des produits partiels que l'on obtient en multipliant successivement chacune des parties de* A *par chacune des parties de* B.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les parties de B; il est évident, en vertu de la troisième remarque du n° 7, combinée avec les propriétés des fonctions linéaires et homogènes, que l'on a

$$AB = Ab_1 + Ab_2 + \ldots + Ab_n.$$

Mais, en appelant $a_1, a_2, \ldots, a_m$ les diverses parties de A, on a, pour la même raison,

$$\begin{aligned} Ab_1 &= a_1 b_1 + a_2 b_1 + \ldots + a_m b_1, \\ Ab_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Ab_n &= a_1 b_n + a_2 b_n + \ldots + a_m b_n, \end{aligned}$$

relations dont la combinaison avec la précédente montre immédiatement l'exactitude du point à établir.

Si les polynômes A, B contenaient des termes soustractifs, il faudrait évidemment, comme dans l'Algèbre ordinaire, faire précéder, dans le développement de leur produit, chaque produit partiel par le signe + ou le signe —, selon que ses facteurs seraient, dans A et B, soit tous deux additifs ou soustractifs, soit l'un additif et l'autre soustractif.

11. En Algèbre ordinaire, la formule de Newton pour décomposer une puissance entière d'un polynôme en une somme de produits de puissances entières de ses termes ne résulte que de la loi suivant laquelle le produit de plusieurs polynômes se décompose en produits partiels ayant les termes mêmes de ces polynômes pour facteurs, combinée avec l'identité de tous les polynômes multipliés les uns par les autres.

Donc, et cette remarque a une grande importance, puisque cette loi subsiste (n° **10**), ainsi que l'identité des facteurs, pour une puissance d'un polynôme à termes isotaxiques, *la formule de Newton est aussi applicable au développement de toute puissance d'un polynôme quelconque ayant pour termes des assemblages isotaxiques, en monômes entiers par rapport aux termes de ce polynôme.*

Par exemple, a, b désignant des assemblages isotaxiques quelconques et m un nombre entier, on a, comme si a, b étaient de véritables quantités,

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \ldots .$$

12. La *division* [1] des assemblages est naturellement l'opération inverse de la multiplication; elle consiste à former un assemblage-*quotient* qui, multiplié par un assemblage-*diviseur* donné, reproduise un assemblage-*dividende* également donné.

Comme la taxe d'un produit est égale à la somme de celles de ses

[1] Au point de vue *algébrique*, la division n'est pas une opération spéciale à placer à côté de l'addition et de la multiplication; c'est un cas particulier, fort intéressant sans doute, mais très-restreint, de la résolution des équations entières. Sa place naturelle serait dans un Chapitre spécial consacré à l'étude des équations du premier degré (*voir* la note du n° 6).

facteurs (n° 7), le quotient doit avoir une taxe égale à l'excès $k - k'$ de la taxe k du dividende sur la taxe k' du diviseur, et, partant, $k - k' + 1$ pièces.

Ces pièces se calculeront donc par la résolution des $k + 1$ équations linéaires simultanées que l'on obtient en égalant respectivement aux pièces connues du dividende les $k + 1$ pièces de mêmes indices dans le produit du diviseur par un assemblage indéterminé de taxe $k - k'$.

Voici des observations essentielles :

I. *La division n'est pas toujours possible.* Pour qu'elle le soit, il faut effectivement, et avant tout, que la taxe du diviseur ne soit pas supérieure à celle du dividende. Il faut ensuite que les $k + 1$ équations linéaires à $k - k' + 1$ inconnues, que l'on doit résoudre pour avoir les pièces du quotient, admettent quelque système de solutions communes.

Cette dernière condition exige, comme le montre facilement la théorie des équations linéaires :

1° *Si le diviseur n'est pas nul,* que certaines équations de condition entre les pièces du dividende et celles du diviseur soient préalablement vérifiées. Réciproquement, quand elles sont satisfaites, la division est possible et déterminée, c'est-à-dire qu'il existe un quotient, mais un seul.

2° *Si le diviseur est nul,* que le dividende le soit lui-même ; le quotient est alors absolument indéterminé.

II. Les équations linéaires dont dépendent les pièces du quotient ont une forme telle, que ces pièces, considérées dans l'ordre décroissant de l'un ou l'autre indice, sont données successivement par la résolution de simples équations à une seule inconnue. Les observations suivantes donnent à ce calcul une marche fort simple.

1° On remarquera d'abord qu'en posant $k - k' = k''$, et nommant $k' - i'$, $k'' - i''$ respectivement, les plus élevés des premiers indices dans les pièces du diviseur et du quotient qui ne se réduisent pas à zéro, toutes les pièces du dividende dont le premier indice surpasse $(k' - i') + (k'' - i'')$ sont nulles, et que celle de premier indice $(k' - i') + (k'' - i'')$ se réduit au produit des pièces de premiers indices $k' - i'$, $k'' - i''$ dans le diviseur et le quotient respectivement (n° 9, I). De là résulte évidemment la possibilité de déterminer le nombre $k'' - i''$, puis de calculer par une simple division la pièce du quotient dont il est le premier indice.

2° Supposons connues toutes les pièces du quotient qui ont pour premiers indices les nombres k'', $k'' - 1$, ..., $k'' - j''$, et décomposons le quotient en une somme de deux assemblages de même taxe k'', l'un ayant ses pièces de premiers indices k'', $k'' - 1$, ..., $k'' - j''$ égales aux pièces de mêmes rangs dans le quotient et toutes ses autres pièces nulles, l'autre ayant au contraire ses pièces de mêmes premiers indices toutes nulles et les suivantes égales aux pièces de mêmes rangs dans le quotient. Il est clair que le dividende est égal à la somme des produits du diviseur par ces deux assemblages; or le premier est connu par hypothèse : donc, pour avoir le second, c'est-à-dire les pièces encore inconnues du quotient, il suffit de diviser par le diviseur le reste obtenu en retranchant du dividende le produit du diviseur par ce premier assemblage.

3° Après quoi, l'usage de la première remarque fera connaître le premier indice et la valeur numérique de la première des pièces du quotient, non $= 0$, qui suivent celle de premier indice $= k'' - j''$, et il est clair que l'application alternative de ces deux principes conduira successivement à la connaissance de toutes les pièces du quotient. La possibilité de la division sera même manifestée, affirmativement ou négativement, par celle de pousser ces calculs jusqu'à la dernière pièce du quotient et d'arriver à un reste nul.

III. On doit remarquer deux cas fort simples dans lesquels la division s'opère à vue : premièrement, quand le dividende est nul; le quotient est aussi nul (indéterminé, si le diviseur est nul lui-même); deuxièmement, quand la taxe du diviseur est égale à 0; le quotient est alors isotaxique au dividende, et ses pièces s'obtiennent en divisant simplement celles du dividende par la pièce unique du diviseur (n° 7, 4°).

13. Il est inutile d'insister davantage sur le calcul élémentaire des assemblages; on leur étendra maintenant sans difficulté tous les autres détails du calcul algébrique ordinaire, et les résultats obtenus s'exprimeront par des formules *extérieurement* identiques à celles de l'Algèbre. Deux causes seulement pourront faire naître des dissemblances : la né-

cessité de ne combiner par addition (ou soustraction) que des assemblages isotaxiques, et l'impossibilité éventuelle de la division ([1]).

Fonctions entières d'assemblages variables.

14. Comme on le fait dans l'Analyse ordinaire, je nommerai *fonction de plusieurs assemblages indéterminés* un assemblage indéterminé se présentant comme résultat de calculs quelconques exécutés sur ces derniers, mais d'une nature indépendante de leurs *valeurs,* c'est-à-dire des valeurs numériques de leurs pièces, et je conserverai naturellement toutes les dénominations usitées dans la théorie des fonctions.

Ainsi une fonction de plusieurs assemblages est *entière* quand, relativement aux *variables indépendantes,* les opérations génératrices se réduisent seulement à quelques additions (soustractions) et multiplications (ou élévations à certaines puissances).

Une fonction entière se réduit naturellement, par une transposition convenable des opérations génératrices, à une somme de *termes* dont chacun est le produit d'un *coefficient constant* par quelques puissances des variables indépendantes, et que l'on peut supposer *dissemblables,* c'est-à-dire différant les uns des autres par les degrés des puissances auxquelles y est élevée quelque variable.

Seulement il faut remarquer que, tous les termes devant être isotaxi-

---

([1]) Cette impossibilité disparaît quand on admet dans les calculs des assemblages *indéfinis,* c'est-à-dire composés d'un nombre illimité de pièces. Par exemple, en considérant l'assemblage *défini* (1) comme équivalent à l'assemblage indéfini (1, 0, 0, 0, ...), et prenant pour diviseur l'assemblage $(a,\ b)$, on peut poser, si a n'est pas nul,

$$1:(a, b) = \left[\frac{1}{a},\ -\frac{b}{a^2},\ \frac{b^2}{a^3},\ \ldots,\ (-1)^n\frac{b^n}{a^{n+1}},\ \ldots\right];$$

car, en étendant les règles de la multiplication des assemblages à la formation du produit de (a, b) par l'assemblage indéfini qui constitue le second membre de cette relation, on trouve pour résultat (1, 0, 0, 0, ...). De là, une simple multiplication conduit au cas d'un dividende quelconque.

On opérerait d'une manière analogue pour tout autre diviseur. On voit sans peine qu'à partir d'un certain rang les pièces du quotient forment une série récurrente ayant précisément pour échelle de relation les pièces du diviseur rangées dans un ordre convenable. Mais je n'ai pas à m'appesantir sur ces considérations, dont nous n'avons présentement aucun besoin.

ques, sans quoi leur addition ne serait pas possible, il faut que pour chacun il existe une relation convenable entre la taxe du coefficient, celles des variables et les exposants des puissances auxquelles elles y sont élevées. Cette relation consiste évidemment en ce que, pour un terme quelconque, la somme de la taxe du coefficient et des produits de celles des variables qui y entrent comme facteurs par les exposants des puissances auxquelles elles y sont élevées soit un même nombre, qui est évidemment la taxe du polynôme.

Le *degré* d'un terme est la somme des exposants des variables qui y figurent; celui de la fonction est le plus grand de ces nombres (dans les termes dont les coefficients ne sont pas nuls).

15. *Pour qu'une fonction entière de quelques assemblages variables soit nulle identiquement, il est nécessaire et suffisant que tous ses coefficients soient nuls*. Cette proposition s'établit exactement comme s'il s'agissait de quantités ordinaires, en commençant par le cas d'une seule variable indépendante.

On en déduit immédiatement cette autre :

Pour que deux fonctions entières des mêmes assemblages variables soient égales identiquement, il faut et il suffit que les coefficients des termes semblables dans l'une et dans l'autre soient toujours égaux.

16. Si, dans une fonction de plusieurs assemblages, on remplace chaque variable par une somme de quelques autres (isotaxiques), l'emploi de la formule de Newton (nº 11) et l'exécution de multiplications et d'additions convenables permettent de transformer la nouvelle fonction en une fonction entière de toutes les nouvelles variables. Et si, chacune des anciennes variables ayant été remplacée par la somme de deux autres seulement, considérées l'une comme une valeur particulière de cette variable, l'autre comme son accroissement, on ordonne, par rapport aux puissances croissantes des accroissements, le développement de la nouvelle fonction, il est évident que *le résultat aura précisément la forme de la formule de Taylor*.

En conséquence, si $x, y, z, \ldots$ désignent les variables, et $h, k, l, \ldots$ leurs accroissements, je nommerai *dérivée de la fonction, d'ordre p par rapport à x, q par rapport à y, r par rapport à z, ..., et d'ordre total*

$p+q+r+\ldots$, le produit par le nombre $1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r\ldots$, de la fonction de $x, y, z, \ldots$ seulement, qui constitue le coefficient de $h^p k^q l^r\ldots$ dans ce développement.

Les dérivées des fonctions entières d'assemblages variables se calculent évidemment d'après les mêmes règles que celles des fonctions ordinaires, et se plient à la généralisation de la plupart des propositions qui concernent ces dernières : différentiation des fonctions composées, etc.

On notera que toutes les dérivées d'une fonction entière, dont les ordres surpassent le degré de celle-ci, sont nulles identiquement.

17. Nous n'aurons à considérer ici que des assemblages fonctions entières d'une seule variable indépendante. Il faut noter d'une manière générale qu'ils sont aptes à subir toutes les opérations constituant ce que l'on nomme en Algèbre la *division des polynômes,* sauf la restriction imposée par l'impossibilité accidentelle de diviser les premiers coefficients des dividendes partiels par celui du diviseur quand sa taxe n'est pas nulle (n° 12). Les *quotients, restes, plus grands communs diviseurs,* etc., s'obtiennent par les procédés connus.

Équations entières à un assemblage inconnu.

18. Une *équation* entre quelques assemblages inconnus ou indéterminés est la relation que l'on établit entre eux, en égalant à zéro (c'est-à-dire à un assemblage isotaxique nul) quelque fonction de ces assemblages. Nous n'aurons à parler ici que des équations *entières* à une seule inconnue; leurs *racines* sont naturellement les valeurs des inconnues qui sont propres à les vérifier.

19. *Si l'équation entière*

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

admet la racine a, et si l'on nomme α le moins élevé des ordres des dérivées de $f(x)$ qui ne s'annulent pas pour $x=a$, le polynôme $f(x)$ est divisible (n° 17) *par $(x-a)^\alpha$, mais non par $(x-a)^{\alpha+1}$.*

Effectivement, en développant par la formule de Taylor (n° 16) le polynôme $f(x)$ mis sous la forme $f[a+(x-a)]$, on trouve, à cause des hypothèses $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(\alpha-1)}(a)=0$,

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}\left[\frac{f^{(\alpha)}(a)}{1.2\ldots\alpha}+\frac{f^{(\alpha+1)}(a)}{1.2\ldots(\alpha+1)}(x-a)+\ldots\right].$$

Donc $\dfrac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}}$ est une fonction entière de x; mais $\dfrac{f(x)}{(x-a)^{\alpha+1}}$ n'en est pas une, sans quoi on verrait facilement que $f^{(\alpha)}(x)$ s'évanouit pour $x=a$.

Quand $\alpha=1$, la racine a est *simple;* quand $\alpha>1$, elle est *multiple*, le nombre α est son *degré de multiplicité*, et on la considère assez souvent, pour les raisons connues, comme équivalant à α racines simples *égales* à a.

20. *Si l'équation* (1) *admet aux degrés de multiplicité* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g$, *les racines* $a_1, a_2, \ldots, a_g$ *toutes différentes les unes des autres, le polynôme* $f(x)$ *est divisible par le produit* $(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_g)^{\alpha_g}$, *mais non par un produit de cette espèce où le binôme relatif à quelque racine serait élevé à une puissance d'exposant supérieur au degré de multiplicité de cette racine.*

En admettant l'exactitude de cette proposition pour les i premières racines, il est certain que $f(x)$ est divisible par le polynôme $P=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_i)^{\alpha_i}$, et que l'équation obtenue en égalant à zéro le quotient Q de la division n'admet pour racine aucune des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_i$. Maintenant on a, quelle que soit x,

$$f(x)=PQ,$$

d'où, quel que soit m,

$$f^{(m)}(x)=1.2\ldots m\sum_{p=0}^{p=m}\frac{P^{(m-p)}}{1.2\ldots(m-p)}\,\frac{Q^{(p)}}{1.2\ldots p},$$

identités d'où, pour $x=\alpha_{i+1}$, on tire facilement, à cause de $f(x)=f'(x)=\ldots=f^{(\alpha_{i+1}-1)}(x)=0$, $f^{(\alpha_{i+1})}(x)$ non $=0$, P non $=0$,

$$Q=Q'=Q''=\ldots=Q^{(\alpha_{i+1}-1)}=0,$$
$$Q^{(\alpha_{i+1})}\text{ non}=0\quad(\text{n}^{\text{o}}\ 9).$$

Il en résulte (nº 19) que Q est divisible par $(x-a_{i+1})^{\alpha_{i+1}}$, mais non par $(x - a_{i+1})^{\alpha_{i+1}+1}$, c'est-à-dire que notre proposition est exacte pour les $i + 1$ premières racines. Elle a donc lieu pour toutes, puisqu'elle a été vérifiée pour la première (n° 19).

21. *Si l'on sait que le degré de l'équation* (1) *ne surpasse pas le nombre m, et qu'elle admet des racines distinctes dont la somme des degrés de multiplicité surpasse au contraire ce même nombre m, le polynôme* $f(x)$ *est identiquement nul.*

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_g$ des racines distinctes de l'équation (1), dont les degrés de multiplicité $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g$ forment, par hypothèse, une somme supérieure à m; appelons i l'indice de ces degrés, qui donne

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i < m, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i + \alpha_{i+1} \geqq m,$$

et posons

$$m - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i) = \alpha'_{i+1}.$$

Il est évident que i est $< g$, $\alpha'_{i+1} \leqq \alpha_{i+1}$, et que $f(x)$ est divisible par

$$(x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_i)^{\alpha_i}(x - a_{i+1})^{\alpha'_{i+1}}.$$

Comme ce produit est de degré m et que le coefficient de x^m y est 1 (je veux dire l'assemblage de taxe nulle ayant sa pièce unique $= 1$), le quotient est une constante précisément égale à p_0, coefficient de x^m dans $f(x)$ (n° 17). On a donc identiquement

$$f(x) = p_0(x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \ldots (x - a_i)^{\alpha_i}(x - a_{i+1})^{\alpha'_{i+1}}.$$

Maintenant, si $\alpha'_{i+1} = \alpha_{i+1}$, l'équation (1) admet quelque racine autre que $a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}$, qui, par suite, annule le second membre de l'identité précédente sans annuler aucun de ses facteurs dépendant de x, ce qui donne $p_0 = 0$ (n° 9). Si $\alpha'_{i+1} < \alpha_{i+1}$, la dérivée de $f(x)$ d'ordre $\alpha'_{i+1} + 1$ s'annule certainement pour $x = a_{i+1}$, et, en vertu de l'identité précédente, il en est de même pour la dérivée semblable de son second membre; d'où l'on conclut encore facilement $p_0 = 0$.

Comme $p_0 = 0$ dans tous les cas, l'identité précédente devient $f(x) = 0$, c'est-à-dire celle qu'il fallait établir.

22. Il résulte de cette proposition que, *si le degré de* $f(x)$ *est réelle* *ment égal à m, c'est-à-dire si le coefficient de x^m n'y est pas nul, l'équation* (1) *a m racines* (*égales ou inégales*) *au plus* [1].

23. On doit sentir à présent, sans qu'il soit besoin de pousser ces développements jusqu'à la prolixité, que la plupart des parties de la théorie des équations entières s'étendent presque textuellement au calcul des assemblages. Telles sont, par exemple, la recherche des racines commensurables, celle des racines communes à plusieurs équations données, des racines égales, l'élimination, etc. Je dirai plus loin un mot sur la résolution numérique des équations entières à un assemblage inconnu (n° 46, II, *inf.*).

Fonctions symétriques de plusieurs assemblages.

24. Une fonction de plusieurs assemblages variables est *symétrique*, quand elle reste identiquement égale à elle-même, de quelque manière que l'on y permute ces assemblages.

La proposition fondamentale du calcul des fonctions symétriques ordinaires s'applique aux assemblages isotaxiques.

Si l'on nomme

(1) $$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m$$

---

(1) Ici on peut se demander, comme dans l'Algèbre ordinaire, si toute équation entière de degré m a précisément m racines, ou du moins, quand cela n'a pas lieu, s'il est possible de compléter ce nombre par l'adjonction de racines fictives se formant suivant des règles conventionnelles convenables.

Il existe bien certainement des équations de degré m auxquelles on ne saurait trouver m racines, en se limitant aux assemblages *définis* (*voir* la note du n° 13); telles sont, par exemple, celles où le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue ne divise pas exactement tous les autres coefficients. Mais il peut se faire que la considération des assemblages *indéfinis* (*loc. cit.*), qui nous a déjà permis d'effectuer toutes les divisions, c'est-à-dire d'assigner une racine à toute équation du premier degré, fournisse aussi un moyen de porter à m le nombre des racines d'une équation quelconque de degré m.

Par exemple, l'équation du second degré $x^2 = (a_{1,0}, a_{0,1})$ n'a pour racine aucun assemblage défini, car la taxe du second membre est 1, tandis que celle du premier ne peut être qu'un nombre pair. Mais, en substituant au second membre l'assemblage indéfini $(a_{1,0}, a_{0,1}, 0, 0, 0, \ldots)$, on peut dire que cette équation a deux racines, savoir les assemblages indéfinis qui ont pour pièces les termes des développements des deux déterminations de $(a_{1,0} + a_{0,1})^{\frac{1}{2}}$ effectués par la formule du binôme, sans préoccupation de convergence.

m assemblages variables isotaxiques, et $-p_1, p_2, -p_3, \ldots, (-1)^m p_m$ *respectivement leur somme, celles de leurs produits* 2 *à* 2, 3 *à* 3, ..., *et leur produit, toute fonction entière et symétrique de ces assemblages est une fonction composée entière des fonctions symétriques simples*

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_m. \tag{2}$$

Pour établir cette proposition, il suffit de recommencer textuellement l'une ou l'autre des démonstrations propres à la théorie des fonctions symétriques ordinaires. Comme application des principes du paragraphe précédent, je reproduirai les méthodes de Newton et de Cauchy, en laissant de côté celle de Waring, parfois plus commode, mais moins élégante.

25. *Méthode de Newton.* — I. *En posant, pour abréger,*

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m),$$

on a l'identité

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{f(x)}{x - x_i}. \tag{3}$$

Cette relation est rendue évidente par la nature de la règle à suivre pour former la dérivée d'un produit (n° 16). On peut encore remarquer que, pour $x = x_i$, on a

$$\frac{f(x)}{x - x_1} = \ldots = \frac{f(x)}{x - x_{i-1}} = \frac{f(x)}{x - x_{i+1}} = \ldots = \frac{f(x)}{x - x_m} = 0,$$

$$\frac{f(x)}{x - x_i} = f'(x_i).$$

Il s'ensuit que l'équation entière, de degré $m - 1$ au plus,

$$f'(x) - \sum_{i=1}^{i=m} \frac{f(x)}{x - x_i} = 0$$

admet les m racines (1), d'où résulte, en vertu du théorème du n° **21**, l'identité (3), dans tous les cas où ces m quantités sont numériquement distinctes. Cette identité est donc générale, ce que l'on prouve facilement par la méthode des limites, en se souvenant que les quantités (1) sont des variables indépendantes.

II. Le polynôme $f(x)$ se réduit évidemment à

$$(4)\qquad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m.$$

On a donc (n° 16)

$$f'(x) = m x^{m-1} + (m-1) p_1 x^{m-2} + (m-2) p_2 x^{m-3} + \ldots + p_{m-1},$$

puis, en nommant s_1, s_2, s_3, ... les sommes des variables (1), de leurs carrés, de leurs cubes, etc.,

$$\sum_{i=1}^{i=m} \frac{f(x)}{x - x_i} = m x^{m-1} + \left.\begin{array}{l} mp_1 \\ + s_1 \end{array}\right| x^{m-2} + \left.\begin{array}{l} mp_2 \\ + p_1 s_1 \\ + s_2 \end{array}\right| x^{m-3} + \ldots.$$

En égalant donc (n° 15) les coefficients des mêmes puissances de x dans ces deux derniers polynômes, on obtient, en vertu de l'identité (3), les équations linéaires

$$\begin{array}{r} s_1 + p_1 = 0, \\ s_2 + p_1 s_1 + 2 p_2 = 0, \\ s_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_{m-1} + p_1 s_{m-2} + p_2 s_{m-3} + \ldots + (m-1) p_{m-1} = 0, \end{array}$$

dont la résolution successive fournit s_1, s_2, ..., s_{m-1} en fonctions entières de $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$.

III. Les égalités évidentes et indéfinies

$$\sum_{i=1}^{i=m} x_i^k f(x_i) = s_{m+k} + p_1 s_{m+k-1} + p_2 s_{m+k-2} + \ldots + p_m s_k$$

fournissent ensuite successivement des expressions semblables pour $s_m, s_{m+1}, \ldots, s_{m+h}, \ldots$.

IV. On établira enfin, comme en Algèbre, que toute fonction symétrique et entière des variables (1) peut être mise sous forme de fonction composée entière de quelques-unes des sommes de leurs puissances semblables s_1, s_2, s_3, ... Cette fonction composée une fois obtenue, il suffira d'y remplacer ces sommes par les valeurs ci-dessus trouvées, pour avoir la fonction symétrique dont il s'agit, exprimée en fonction entière des fonctions symétriques simples (2).

26. *Méthode de Cauchy.* — I. *Si*

$$(5)\quad \Phi_k(p_1, p_2, \ldots, p_m, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k),\quad \Phi_{k-1}(p_1, p_2, \ldots, p_m, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$$

sont deux expressions d'une même fonction symétrique et entière des assemblages variables (1) *en fonctions composées entières, la première de quelques-unes de ces variables et des fonctions symétriques simples* (2), *la seconde des mêmes quantités moins x_k, le polynôme entier en x*

$$(6)\quad \Phi_k(p_1, p_2, \ldots, p_m, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x) - \Phi_{k-1}(p_1, p_2, \ldots, p_m, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$$

est divisible (n° **17**) *par le polynôme*

$$(7)\qquad (x - x_k)(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_m).$$

Effectivement, si l'on transpose x_k successivement avec x_{k+1}, $x_{k+2}, \ldots, x_m$, les fonctions (5) restent identiquement égales chacune à elle-même, et l'une à l'autre, puisqu'elles constituent deux représentations d'une même fonction symétrique de toutes les variables (1). Ces transpositions n'altèrent même pas la forme extérieure de la seconde de ces fonctions, puisqu'elles n'atteignent pas $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, et que $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sont des fonctions symétriques. Mais elles modifient celle de la première, et la transforment précisément dans les résultats que l'on obtiendrait en posant successivement $x = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m$ dans le polynôme en x qui forme la première partie de la différence (6). Ces hypothèses annulent donc la différence en question; donc elle est divisible par le polynôme (7) tant que les valeurs numériques de x_k, $x_{k+1}, \ldots, x_m$ sont inégales (n° **20**), et par suite dans tous les cas, puisque ces quantités sont des variables indépendantes.

II. *La seconde des expressions* (5) *est le reste de la division du polynôme en x qui forme la première partie de la différence* (6), *par le polynôme X_{k-1} que l'on obtient en divisant algébriquement le polynôme* $X = x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m$ (4) *par le polynôme* $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{k-1})$.

Il résulte en effet de ce qui précède que l'expression en question est identiquement égale au reste de la division dont il s'agit, exécutée en prenant le polynôme (7) pour diviseur. Mais, calculée de cette manière, les variables $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m$ s'y montreraient explicitement, c'est-à-dire autrement que par leur présence dans $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Pour qu'il n'en soit pas ainsi, il suffit de prendre ce diviseur sous la forme équivalente X_{k-1}, dont les coefficients ne renferment que dans $p_1, p_2, \ldots, p_m$ les variables en question.

III. *Par conséquent, on obtiendra :* 1° Φ_{m-1} *en remplaçant* x_m *par* x *dans la fonction symétrique proposée, et cherchant le reste de la division du résultat par* X_{m-1} ; 2° Φ_{m-2} *en remplaçant* x_{m-1} *par* x *dans* Φ_{m-1}, *et prenant le reste de la division du résultat par* X_{m-2} ; ... ; *puis finalement* $\Phi(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, *expression de la fonction symétrique proposée en fonction composée des fonctions symétriques simples* (2), *en remplaçant* x_1 *par* x *dans* Φ_1 *et prenant le reste de la division de ce polynôme par* X.

27. Une *fonction symétrique de m assemblages donnés* est la quantité obtenue en remplaçant par ces m assemblages les m variables indépendantes d'une fonction symétrique proprement dite. Cela posé, si l'on observe qu'une équation entière de degré m à un seul assemblage inconnu, quand elle a précisément m racines (inégales ou non) et que le coefficient de x^m s'y réduit à 1, a précisément aussi pour autres coefficients les sommes symétriques (2), on aura, en vertu de ce qui précède, la proposition suivante : *Toute fonction symétrique et entière des racines d'une semblable équation s'exprime aussi sous forme entière au moyen de ces coefficients.*

Cette remarque permet d'étendre, sans modifications extérieures, toutes les formules de la transformation des équations ordinaires aux équations symboliques dont nous nous occupons.

Fonctions symétriques de couples de variables indépendantes.

28. Toute relation intéressant des assemblages se décompose en plusieurs équations ordinaires entre les quantités qui en forment les pièces; inversement, on comprend que le calcul symbolique, dont les principes viennent d'être exposés, puisse faciliter la conception et la recherche des relations qui peuvent exister entre les éléments de groupes donnés de quantités. Je vais essayer de justifier cette assertion, en traitant quelques questions relatives au calcul des fonctions symétriques de quantités associées par couples, comme les pièces de plusieurs assemblages primordiaux.

Soient

$$(1)\qquad ({}'x_{1,0},\ {}'x_{0,1}),\ ({}''x_{1,0},\ {}''x_{0,1}),\ \ldots,\ ({}^{(m)}x_{1,0},\ {}^{(m)}x_{0,1})$$

m couples de variables indépendantes; une *fonction symétrique de ces couples* est une fonction ordinaire des $2m$ variables dont il s'agit, qui reste identiquement égale à elle-même quand on y permute d'une manière quelconque les couples (1), c'est-à-dire à la suite de toute permutation des variables ${}'x_{1,0}$, ${}''x_{1,0}$, $\ldots$, ${}^{(m)}x_{1,0}$ qui serait accompagnée d'une permutation identique de ${}'x_{0,1}$, ${}''x_{0,1}$, $\ldots$, ${}^{(m)}x_{0,1}$.

Cela posé, on a la proposition suivante :

Soient

$$(2)\qquad {}'x,\ {}''x,\ \ldots,\ {}^{(m)}x$$

les assemblages primordiaux (n° 2) *constitués par les couples de variables dont il s'agit,*

$$(3)\qquad p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m$$

leur somme, celles de leurs produits 2 à 2, 3 à 3, ..., et leur produit total, ces expressions étant précédées du signe + ou du signe − selon que l'indice correspondant est pair ou impair, puis

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{cccc} & & \ldots, & p_{m,0}, \\ & p_{2,0}, & \ldots, & p_{m-1,1}, \\ p_{1,0}, & & \ldots, & \ldots\ldots, \\ & p_{1,1}, & & \\ p_{0,1}, & & \ldots, & p_{1,m-1}, \\ & p_{0,2}, & \ldots, & p_{0,m}, \end{array}\right.$$

les pièces des assemblages (3). *Toute fonction symétrique et entière des couples* (1) *peut s'exprimer en fonction composée entière des fonctions symétriques simples* (4).

I. La chose est certaine, en vertu de ce qui a été expliqué dans le paragraphe précédent, quand la fonction symétrique proposée se réduit à quelque pièce d'un assemblage fonction symétrique des assemblages (2). C'est ce qui doit arriver le plus souvent. Dans ce cas, il suffira de calculer cet assemblage symétrique en fonction composée des *assemblages* (3), au moyen de l'une des méthodes ci-dessus indiquées, et d'y prendre la pièce voulue, qui se réduit évidemment à une fonction entière ordinaire des expressions (4).

II. Cette remarque permet de calculer immédiatement, à l'aide des formules de Newton généralisées (n° 25), l'expression $s_{p,q}$ de la fonction symétrique $\sum {}^{(i)}x_{1,0}^{p}\, {}^{(i)}x_{0,1}^{q}$. Effectivement, cette fonction symétrique est évidemment le quotient de la division par le nombre $\frac{1.2\ldots(p+q)}{1.2\ldots p.1.2\ldots q}$, de la pièce d'indices p, q dans la somme des puissances semblables d'exposant $p+q$ des assemblages primordiaux (2).

III. Désignons maintenant, pour abréger, par (g, h) le résultat obtenu en prenant un des couples (1) et formant le produit de la puissance $g^{\text{ième}}$ de son premier élément par la puissance $h^{\text{ième}}$ de son second élément, puis, k désignant un entier $\overline{\gtrless} m$, par

$$(5)\qquad (g^{(1)}, h^{(1)})(g^{(2)}, h^{(2)})\ldots(g^{(k)}, h^{(k)})$$

le produit de k monômes de cette espèce composés avec des couples différents pris dans la suite (1), et finalement par

$$(6)\qquad \sum (g^{(1)}, h^{(1)})(g^{(2)}, h^{(2)})\ldots(g^{(k)}, h^{(k)})$$

la fonction symétrique formée en ajoutant tous les produits semblables, mais non identiquement égaux, que l'on obtient en associant les couples (1) k à k de toutes les manières possibles.

Si $k = m$, on peut évidemment remplacer dans chaque terme de (6) le dernier monôme $(g^{(k)}, h^{(k)})$ par l'excès de $s_{g^{(k)},h^{(k)}}$ sur la somme $\sum (g^{(k)}, h^{(k)})$ étendue seulement aux couples différents de celui qui a fourni ce dernier monôme, et par conséquent à tous ceux qui ont donné les $k-1$ premiers facteurs du terme en question; moyennant quoi, la somme (6) devient

$$
\begin{aligned}
s_{g^{(k)},h^{(k)}} & \sum (g^{(1)}, h^{(1)}) (g^{(2)}, h^{(2)}) \ldots (g^{(k-1)}, h^{(k-1)}) \\
& - \sum (g^{(1)} + g^{(k)}, h^{(1)} + h^{(k)}) (g^{(2)}, h^{(2)}) \ldots (g^{(k-1)}, h^{(k-1)}) \\
& - \sum (g^{(1)}, h^{(1)}) (g^{(2)} + g^{(k)}, h^{(2)} + h^{(k)}) \ldots (g^{(k-1)}, h^{(k-1)}) \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& - \sum (g^{(1)}, h^{(1)}) (g^{(2)}, h^{(2)}) \ldots (g^{(k-1)} + g^{(k)}, h^{(k-1)} + h^{(k)}),
\end{aligned}
$$

et son calcul revient à celui des k sommes qui figurent dans cette expression (quelques-unes peuvent être identiques), dont *chaque terme ne contient plus que* $k - 1$ *facteurs* (g, h).

Quand $k < m$, on procède d'une manière semblable, à cela près qu'il faut réunir dans la somme (6) tous les termes dans lesquels les $k - 1$ premiers monômes sont les mêmes, mettre en facteur dans chaque groupe de cette espèce la somme des derniers monômes, et la remplacer par l'excès de $s_{g^{(k)},h^{(k)}}$ sur la somme $\sum (g^{(k)}, h^{(k)})$ étendue seulement à ceux des couples (1) qui ont donné les $k - 1$ premiers facteurs de chaque terme du groupe. Le calcul de la fonction symétrique (6) revient toujours à celui de $s_{g^{(k)},h^{(k)}}$ et de k sommes analogues (distinctes ou non) dans lesquelles le nombre des couples distincts qui fournissent chaque terme est réduit à $k - 1$.

Maintenant il est clair que l'exécution de cette transformation, répétée jusqu'à ce que les termes des sommes symétriques restant à transformer ne dépendent plus que d'un seul couple, donnera pour la fonction symétrique (6) une expression entière par rapport aux sommes $s_{p,q}$ (II) ; il suffira donc d'y remplacer ces sommes par leurs expressions en fonctions entières des quantités (4) pour avoir la fonction symétrique proposée, exprimée en fonction entière des mêmes quantités.

IV. Toute fonction symétrique et entière des couples (1) est évidemment décomposable en sommes analogues à (6) ; elle est donc, en vertu de ce qui précède, exprimable en fonction composée entière des fonctions symétriques simples (4), ce qui achève la démonstration de la proposition que nous avions en vue.

Il est clair que, suivant le cas, tel artifice conduira plus rapidement que la méthode ci-dessus expliquée à la transformation d'une fonction symétrique des couples (1) en une fonction composée des fonctions symétriques simples (4). On pourra, par exemple, suivre une marche analogue à celle indiquée par Waring pour le calcul des fonctions symétriques ordinaires, etc. Mais de plus amples développements seraient évidemment prématurés. Toutefois, j'exposerai dans le paragraphe suivant une méthode toute différente, reposant sur des considérations qui me semblent avoir une certaine importance théorique.

29. On a dû remarquer déjà que les quantités (4) jouent ici le même rôle que les coefficients d'une équation entière dans la théorie des fonctions symétriques de ses racines. Il importe toutefois de noter, contrairement à ce qui a lieu pour les fonctions symétriques de variables isolées, *que ces quantités ne sont pas indépendantes les unes des autres, et que leurs valeurs ne peuvent être prises au hasard.*

Il est évident, en effet, que $p_{1,0}, p_{2,0}, \ldots, p_{m,0}$ sont les coefficients d'une équation de degré m

$$X_{m,0} = 0 \tag{7}$$

qui a pour racines les premiers éléments des couples (1); que $p_{0,1}$, $p_{0,2}, \ldots, p_{0,m}$ sont semblablement les coefficients d'une équation de même degré

$$X_{0,m} = 0 \tag{8}$$

qui a pour racines les seconds éléments des mêmes couples. Il en résulte que la fixation des valeurs numériques de ces $2m$ quantités, détermine l'ensemble des valeurs numériques des premiers éléments des couples (1), et aussi l'ensemble de celles de leurs seconds éléments. Les couples eux-mêmes ne sont pas déterminés pour autant, car rien ne dit de quelle manière il faut accoupler les éléments fournis par la résolution des équations (7), (8); mais ils ne sont plus susceptibles que de $M = 1.2.3\ldots m$ systèmes distincts de déterminations, à chacun desquels correspond un système particulier de valeurs de celles des quantités (4) dont aucun indice ne se réduit à zéro.

D'un autre côté, la valeur de l'une quelconque de ces quantités détermine (sauf exceptions particulières) le choix à faire entre les M systèmes possibles pour les couples (1), et par suite la valeur correspondante de chacune des autres quantités de cette espèce. Ceci indique : 1° *que chacune des quantités* $p_{1,1}, p_{2,1}, p_{1,2}, \ldots$, *dont aucun indice ne se réduit à zéro, est liée à celles où l'un des indices est nul* $p_{1,0}, \ldots, p_{0,m}$, *par une équation entière qui la contient au degré* M ; 2° *que deux quelconques de ces quantités s'expriment rationnellement l'une au moyen de l'autre.*

Ces deux points s'établiraient facilement en toute rigueur par l'étude directe de la nature des fonctions (4) ; il en résulte qu'une fonction symétrique des couples (1) peut s'exprimer encore, mais *irrationnellement*, au moyen de $p_{1,0}, \ldots, p_{0,m}$ seulement. Il n'y aura toutefois aucun avantage à le faire, du moins en général, car ce serait détruire toutes les analogies conductrices, rompre la régularité des formules, toujours si nécessaire à la bonne conduite d'un calcul, et s'embarrasser en définitive d'irrationnelles peu maniables. Il faut donc, et malgré leur apparence parasite, laisser dans les formules ces quantités $p_{1,1}, \ldots$ au même titre que les dérivées *complexes* $\frac{d^2u}{dx\,dy}, \frac{d^3u}{dx^2\,dy}, \frac{d^3u}{dx\,dy^2}, \cdots$ dans la théorie des fonctions de deux variables, bien que ces dérivées ne soient pas indépendantes les unes des autres, ni des dérivées *simples* $\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}, \ldots, \frac{d^2u}{dy^2}, \frac{d^3u}{dy^3}, \cdots$. Il me serait d'ailleurs facile d'indiquer un certain nombre de questions plus ou moins importantes qui ont été obscurcies par l'élimination inopportune de relations ou de quantités jugées trop légèrement surabondantes.

Autre extension de la méthode de Cauchy.

30. Pour simplifier le langage, je dirai dans ce qui suit qu'une fonction entière de deux variables indépendantes $f(x, y)$ est *divisible* par plusieurs fonctions de même nature $f_1, f_2, \ldots, f_n$, quand on peut assigner des polynômes entiers en x, y : $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, qui donnent lieu à l'identité

$$f(x, y) = f_1 Q_1 + f_2 Q_2 + \ldots + f_n Q_n.$$

Quelquefois aussi, je nommerai $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les *diviseurs*, et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les *quotients* de cette sorte de division complexe.

Cela posé, on a le théorème suivant :

Soient

$$(1)\qquad (x', y'), (x'', y''), \ldots, (x^{(i)}, y^{(i)}), \ldots, (x^{(m)}, y^{(m)})$$

des couples de variables indépendantes constituant des assemblages primordiaux inégaux (n° 4) *et* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_m$ *des nombres entiers correspondants. Si, pour toute valeur de* i, *la fonction entière* $f(x, y)$ *et ses dérivées partielles d'ordres inférieurs à* μ_i *s'annulent toutes quand on y fait à la fois* $x = x^{(i)}, y = y^{(i)}$, *cette fonction est divisible par les* $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m + 1$ *pièces du produit des puissances* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_m$ *des* m *assemblages primordiaux*

$$(2)\qquad \begin{cases} (x - x', y - y'), \quad (x - x'', y - y''), \quad \ldots, \\ (x - x^{(i)}, y - y^{(i)}), \quad \ldots, \quad (x - x^{(m)}, y - y^{(m)}) \text{ (}^1\text{)}. \end{cases}$$

Pour moins embarrasser le raisonnement, je supposerai

$$\mu_1 = \ldots = \mu_i = \ldots = \mu_m = 1,$$

seul cas du théorème que nous aurons à appliquer.

I. *Si* $f(x, y)$ *s'annule pour* $x = a, y = b$, *cette fonction est divisible par* $x - a, y - b$; car le développement de $f[a + (x - a), b + (y - b)]$ par la formule de Taylor est un polynôme entier en $x - a, y - b$, dont le terme constant $f(a, b)$ est nul par hypothèse. Tous les autres termes contiennent en facteur, une fois au moins, soit $x - a$, soit $y - b$, et leur somme est évidemment de la forme

$$\mathrm{A}(x - a) + \mathrm{B}(x - b),$$

où A, B sont des polynômes entiers en $x - a, y - b$, et par suite en x, y.

Les quotients A, B ne sont pas entièrement déterminés; car, si

---

[1] Cette proposition subsiste dans le cas où, sans être entière, $f(x, y)$ serait simplement ce que j'ai appelé *olotrope*, c'est-à-dire développable par la série de Taylor pour les valeurs des variables que l'on a à considérer. (*Voir* mon *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale*.) Seulement, au lieu d'être entiers, les quotients de la division ne seraient plus que des fonctions olotropes.

A_0, B_0 désignent une des formes dont leur système est susceptible, et λ, une fonction entière absolument indéterminée, on peut prendre évidemment

$$A = A_0 + \lambda(y-b), \quad B = B_0 - \lambda(x-a).$$

On s'assurerait facilement que ces formules renferment toutes les déterminations possibles des quotients.

II. *Si $f(x,y)$ s'annule toutes les fois que x, y prennent un des couples de valeurs* (1), *on peut poser identiquement*

$$f(x,y) = P(x - x^{(m)}) + Q(y - y^{(m)}),$$

P, Q *désignant deux polynômes entiers qui s'annulent eux-mêmes pour toutes les valeurs simultanées de x, y qui constituent les $m-1$ premiers de ces couples.*

D'après ce qui précède, on peut poser

$$\begin{aligned} f(x,y) &= p(x - x^{(m)}) + q(y - y^{(m)}) \\ &= [p + \lambda(y - y^{(m)})](x - x^{(m)}) + [q - \lambda(x - x^{(m)})](y - y^{(m)}), \end{aligned}$$

p, q, λ désignant certains polynômes entiers dont le troisième est absolument indéterminé. En faisant $x = x^{(i)}$, $y = y^{(i)}$ dans la première identité, et nommant p_i, q_i, λ_i les valeurs correspondantes de nos trois polynômes, il vient d'abord

$$p_i(x^{(i)} - x^{(m)}) + q_i(y^{(i)} - y^{(m)}) = 0.$$

A cause de l'inégalité supposée des assemblages primordiaux (1), on ne peut avoir à la fois $x^{(i)} - x^{(m)} = 0$, $y^{(i)} - y^{(m)} = 0$; l'une au moins des quantités

$$-\frac{p_i}{y^{(i)} - y^{(m)}}, \quad \frac{q_i}{(x^{(i)} - x^{(m)})}$$

existe donc, et, quand aucune n'est illusoire, leurs valeurs sont égales en vertu de la relation précédente; désignons par $\rho^{(i)}$, suivant le cas, la valeur de celle qui existe ou la valeur commune de l'une et de l'autre.

Il est clair que, si $\lambda_i = \rho^{(i)}$, les polynômes $p + \lambda(y - y^{(m)})$, $q - \lambda(x - x^{(m)})$ s'évanouissent tous deux à la fois, et dans tous les cas, pour $x = x^{(i)}$, $y = y^{(i)}$. Or il est visible, sans qu'il soit nécessaire d'en développer la démonstration catégorique, que *l'on peut toujours, cela même d'une infinité de manières, assigner une fonction entière de x, y, dont les valeurs, répondant à des valeurs de variables formant des assemblages inégaux en tel nombre qu'on voudra, se réduisent à des quantités données quelconques*. Donc, en nommant ρ', ρ'', ..., $\rho^{(m-1)}$ les quantités analogues à $\rho^{(i)}$ pour les $m - 1$ premiers couples (1), et en prenant pour λ un polynôme qui donne

$$\lambda_1 = \rho', \quad \lambda_2 = \rho'', \quad \ldots, \quad \lambda_{m-1} = \rho^{(m-1)},$$

les fonctions entières $P = p + \lambda(y - y^{(m)})$, $Q = q - \lambda(x - x^{(m)})$ satisferont, en vertu de la dernière des identités ci-dessus posées, aux conditions voulues par notre énoncé.

III. *Si notre proposition est vraie pour une certaine valeur k du nombre des couples* (1), *elle l'est aussi pour la valeur $k + 1$.*

Pour plus de clarté, nous prendrons $k = 3$, ce qui montrera suffisamment la marche du raisonnement général; nous supposerons aussi $x^{(m)} = y^{(m)} = 0$, ce que l'on peut toujours réaliser par un changement de variables.

Puisque $f(x, y)$ s'annule quand les variables prennent les valeurs qui composent l'un ou l'autre des couples donnés, on peut poser (II)

$$f(x,y) = Px + Qy, \tag{3}$$

les polynômes P, Q s'annulant tous deux à la fois pour x, y égaux aux éléments des trois premiers couples. On peut donc, par hypothèse, écrire aussi

$$\left\{ \begin{aligned} P &= P_{3,0} Z_{3,0} + P_{2,1} Z_{2,1} + P_{1,2} Z_{1,2} + P_{0,3} Z_{0,3}, \\ Q &= Q_{3,0} Z_{3,0} + Q_{2,1} Z_{2,1} + Q_{1,2} Z_{1,2} + Q_{0,3} Z_{0,3}, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

$Z_{3,0}$, $Z_{2,1}$, ... désignant les pièces du produit des trois assemblages primordiaux $(x - x', y - y')$, ..., et $P_{3,0}$, ..., $Q_{3,0}$, ... certains polynômes entiers.

On ne change pas le second membre de l'identité (3) en ajoutant à P le produit de y par le polynôme

$$\lambda_{3,0} Z_{3,0} + \lambda_{2,1} Z_{2,1} + \lambda_{1,2} Z_{1,2} + \lambda_{0,3} Z_{0,3},$$

$\lambda_{3,0}$, ... désignant des fonctions entières tout à fait indéterminées, pourvu que l'on retranche en même temps de Q le produit du même polynôme par x.

D'un autre côté, et pour une raison analogue, on peut, sans altérer les seconds membres des formules (4), y modifier simultanément, suivant certaines lois, les coefficients de $Z_{3,0}$, ... L'une au moins des quatre fonctions $Z_{3,0}$, ... ne s'annule pas pour $x = 0, y = 0$; en supposant, pour fixer les idées, que la première jouisse de cette propriété, nous ajouterons à $P_{2,1}$, $P_{1,2}$, $P_{0,3}$ respectivement les produits de $Z_{3,0}$ par trois fonctions entières indéterminées μ_1, μ_2, μ_3, et nous retrancherons de $P_{3,0}$ l'expression $\mu_1 Z_{2,1} + \mu_2 Z_{1,2} + \mu_3 Z_{0,3}$. Nous modifierons les fonctions $Q_{2,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{0,3}$ et $Q_{3,0}$ de la même manière à l'aide de trois autres polynômes indéterminés ν_1, ν_2, ν_3.

Cela posé, en portant dans le second membre de l'identité (3) les fonctions P, Q mises sous la forme nouvelle qui résulte de cette double opération, puis en effectuant les calculs, on verra sans peine que l'exactitude du point dont nous nous occupons dépend de la possibilité de satisfaire aux équations

$$(5)\quad \begin{cases} \lambda_{3,0} x + \lambda_{2,1} y = Q_{3,0} - P_{2,1} - \mu_1 Z_{3,0} - \nu_1 Z_{2,1} - \nu_2 Z_{1,2} - \nu_3 Z_{0,3}, \\ \lambda_{2,1} x + \lambda_{1,2} y = Q_{2,1} - P_{1,2} + (\nu_1 - \mu_2) Z_{3,0}, \\ \lambda_{1,2} x + \lambda_{0,3} y = Q_{1,2} - P_{0,3} + (\nu_2 - \mu_3) Z_{3,0}, \end{cases}$$

par la substitution aux indéterminées λ, μ, ν de quelques polynômes entiers en x, y.

Pour les résoudre, nous donnerons d'abord aux termes constants de $\nu_1, \mu_2, \nu_2, \mu_3$, puis à ceux de ν_3, μ_1, des valeurs telles, que les seconds membres de ces équations s'annulent tous trois pour $x = y = 0$, ce qui est évidemment possible, puisque cette supposition ne réduit pas $Z_{3,0}$ à zéro. En réunissant aux premières parties des seconds membres $Q_{3,0} - P_{2,1}$, ... les produits de $Z_{3,0}$, ... par ces termes constants ainsi déterminés, on obtient trois polynômes divisibles par x, y, que nous représenterons par $P_{2,0}x + Q_{2,0}y$, $P_{1,1}x + Q_{1,1}y$, $P_{0,2}x + Q_{0,2}y$. Les autres termes du second membre contiennent en facteur l'une ou l'autre des quantités μ_1, ... privées de leurs termes constants, c'est-à-dire des fonctions de la forme $\mu'_1 x + \mu''_1 y$, ..., où μ'_1, μ''_1, ... sont des polynômes absolument indéterminés.

On satisfera donc aux équations (5) en prenant

$$\begin{aligned}
\lambda_{3,0} &= P_{2,0} - \mu'_1 Z_{3,0} - \nu'_1 Z_{2,1} - \nu'_2 Z_{1,2} - \nu'_3 Z_{0,3} + \lambda_{2,0} y, \\
\lambda_{2,1} &= Q_{2,0} - \mu''_1 Z_{3,0} - \nu''_1 Z_{2,1} - \nu''_2 Z_{1,2} - \nu''_3 Z_{0,3} - \lambda_{2,0} x \\
&= P_{1,1} + (\nu'_1 - \mu'_2) Z_{3,0} \qquad\qquad\qquad\qquad + \lambda_{1,1} y, \\
\lambda_{1,2} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \lambda_{1,1} x \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_{0,2} y, \\
\lambda_{0,3} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \lambda_{0,2} x,
\end{aligned}$$

pourvu que les indéterminées $\lambda_{2,0}$, $\lambda_{1,1}$, $\lambda_{0,2}$ vérifient les deux conditions

$$(6) \qquad \begin{cases} \lambda_{2,0} x + \lambda_{1,1} y = Q_{2,0} - P_{1,1} - (\mu''_1 - \nu'_1 + \mu'_2) Z_{3,0} - \nu''_1 Z_{2,1} - \ldots, \\ \lambda_{1,1} x + \lambda_{0,2} y = Q_{1,1} - P_{0,2} + \ldots. \end{cases}$$

Or, ces équations sont visiblement de même nature que les équations (5); donc, en les traitant de la même manière, on les ramènera à une équation unique

$$\lambda_{1,0} x + \lambda_{0,1} y = \ldots,$$

d'où l'on tirera des valeurs entières pour les nouvelles indéterminées $\lambda_{1,0}$, $\lambda_{0,1}$, en prenant les fonctions qui multiplient x, y dans le second membre, rendu préalablement divisible par x, y au moyen de l'attribution de valeurs convenables aux termes constants des fonctions indéterminées que la transformation des équations (6) y a introduites.

IV. Notre proposition, ayant été démontrée pour un seul couple (I), s'étendra par le raisonnement précédent à 2, 3, ... couples; elle est donc générale.

31. Nommons z et z', z'', ..., $z^{(m)}$ les assemblages primordiaux qui ont pour pièces les éléments du couple x, y et des couples (1), puis Z

le produit $(z - z')(z - z'')\ldots(z - z^{(m)})$. Quand on sait que la fonction $f(x, y)$ est divisible par les pièces de Z, les quotients s'obtiennent par la méthode des coefficients indéterminés, en identifiant avec $f(x, y)$ la somme des produits des diviseurs par des polynômes entiers indéterminés. On est conduit ainsi à un système d'équations linéaires entre les coefficients du dividende et des diviseurs qui sont donnés, et ceux des quotients qui sont inconnus. Ce système d'équations est possible, puisque la division est supposée l'être, mais il est essentiellement indéterminé, ce dont nous avons vu ci-dessus des exemples.

Quand, sans être possible, la division peut être faite de manière à laisser un *reste* constant, ce reste est essentiellement déterminé; car, si R_1, R_2 désignent deux constantes rendant $f(x, y) - R_1$, $f(x, y) - R_2$ divisibles toutes deux par les pièces de Z, la différence $R_1 - R_2$ de ces fonctions est aussi divisible par les mêmes polynômes, ce qui entraîne $R_1 - R_2 = 0$, puisque toutes les pièces en question s'annulent toutes à la fois pour quelque système de valeurs particulières de x, y, par exemple pour $x = x'$, $y = y'$.

La valeur R de ce reste constant s'obtient en identifiant à $f(x, y) - R$ la somme des produits des pièces de Z par des polynômes indéterminés. Les équations de condition, tout en n'étant pas déterminées relativement aux coefficients inconnus des quotients, le sont nécessairement relativement à la nouvelle inconnue R.

32. Maintenant on établira sans peine la proposition suivante, en raisonnant comme au nº 26 :

Soient, comme au nº 28,

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{lll} & & \ldots, \\ & p_{2,0}, & \\ p_{1,0}, & & \ldots, \\ & p_{1,1}, & \\ p_{0,1}, & & \ldots, \\ & p_{0,2}, & \\ & & \ldots, \end{array}\right.$$

les pièces des fonctions symétriques simples $-\Sigma z'$, $\Sigma z'z''$, $\ldots$, $(-1)^m z'z''\ldots z^{(m)}$, *et* Φ_k *l'expression d'une fonction entière et symétrique quelconque des couples de variables* (1) *en fonction composée des fonctions* (7) *et des éléments des* k *premiers de ces couples.*

Soient encore $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{m-1}$ *les quotients de l'assemblage* Z *divisé successivement par les assemblages* $(z - z')$, $[(z - z')(z - z'')]$, $\ldots$, $[(z - z')(z - z'')\ldots(z - z^{(m-1)})]$. *L'expression* Φ_{k-1} *est le reste constant de la division par les pièces de* Z_{k-1}, *du polynôme obtenu en écrivant* x, y *au lieu de* $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ *dans* Φ_k. *L'expression définitive de la fonction symétrique proposée en fonction composée des quantités* (7) *seulement s'obtiendra donc en poussant ces divisions jusqu'à celle où les diviseurs sont les pièces de* Z.

(*A suivre.*)