

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ABDERRAZAK BOUAZIZ

Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 27, n° 5 (1994), p. 573-609

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1994_4_27_5_573_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTÉGRALES ORBITALES SUR LES GROUPES DE LIE RÉDUCTIFS

PAR ABDERRAZAK BOUAZIZ

ABSTRACT. – We give a characterization of orbital integrals and stable orbital integrals of indefinitely differentiable functions of compact support on real reductive Lie groups. This is used to prove a scalar Paley-Wiener type theorem for such functions. We also study orbital integrals on symmetric spaces of type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

Introduction

Dans cet article, on se propose de donner une caractérisation des intégrales orbitales des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur les groupes de Lie réductifs.

Soit G un groupe de Lie réductif d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Supposons dans l'introduction, pour simplifier, que G est l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique réductif connexe \mathbf{G} défini sur \mathbb{R} . Notons $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur G . L'intégrale orbitale $J_G(\varphi)$ de $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ est une fonction C^∞ G -invariante sur G_{reg} , l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de G , définie de la façon suivante. Soit $\gamma \in G_{\text{reg}}$. Notons H le sous-groupe de Cartan de G contenant γ et \mathfrak{h} son algèbre de Lie. Alors

$$J_G(\varphi)(\gamma) = |\det(1 - \text{Ad}(\gamma^{-1}))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|^{1/2} \int_{G/H} \varphi(g\gamma g^{-1}) d\dot{g},$$

où $d\dot{g}$ est une mesure G -invariante sur G/H que l'on précisera dans le texte. Les intégrales orbitales ont été étudiées par Harish-Chandra; elles vérifient les propriétés $I_1(G)$, $I_2(G)$, $I_3(G)$ et $I_4(G)$ de la section 3. Notre résultat principal (section 3) est que ces propriétés caractérisent les intégrales orbitales, c'est-à-dire, si l'on note $\mathcal{I}(G)$ l'espace des fonctions C^∞ G -invariantes sur G_{reg} vérifiant les propriétés $I_i(G)$, l'application

$$J_G : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{I}(G)$$

est surjective. L'espace $\mathcal{I}(G)$ sera muni d'une topologie d'espace LF de sorte que J_G soit continue. Notons $\mathcal{I}(G)'$ son dual topologique et $\mathcal{D}(G)'$ l'espace des distributions sur G . Nous montrons alors (section 3) que l'image de la transposée de J_G ,

$${}^t J_G : \mathcal{I}(G)' \longrightarrow \mathcal{D}(G)',$$

est l'espace des distributions invariantes sur G .

Si μ est une combinaison linéaire de racines de H , on note ξ_μ le caractère de H correspondant. Si Ψ est un système de racines positives dans l'ensemble des racines imaginaires de H dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, on introduit la fonction b_Ψ sur H_{reg} définie par

$$b_\Psi(\gamma) = \prod_{\alpha \in \Psi} \frac{1 - \xi_\alpha(\gamma^{-1})}{|1 - \xi_\alpha(\gamma^{-1})|},$$

On note $\rho_\Psi = 1/2 \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha$ et ϵ_I la signature imaginaire du groupe de Weyl W de (G, H) (voir section 3). Pour tout $w \in W$, on a

$$b_\Psi(w \cdot \gamma) = \epsilon_I(w) \xi_{\rho_\Psi - w \cdot \rho_\Psi}(\gamma) b_\Psi(\gamma), \quad \gamma \in H_{\text{reg}}.$$

On notera $\mathcal{D}(H)^\Psi$ le sous-espace de $\mathcal{D}(H)$ formé par les fonctions vérifiant cette relation.

Si H est un sous-groupe de Cartan de G , on note H_R sa partie vectorielle. Soit $j \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{I}_j(G)$ le sous-espace de $\mathcal{I}(G)$ formé des éléments dont la restriction à B_{reg} est nulle pour tout sous-groupe de Cartan B de G tel que $\dim B_R > j$. Alors, pour $\psi \in \mathcal{I}_j(G)$, pour tout sous-groupe de Cartan H de G tel que $\dim H_R = j$ et pour tout Ψ comme ci-dessus, la fonction $b_\Psi \psi_H$ se prolonge en une fonction C^∞ sur H (ψ_H désigne la restriction de ψ à H_{reg}) qui appartient donc à $\mathcal{D}(H)^\Psi$. Soient H_1, \dots, H_k des représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan dont la partie vectorielle est de dimension j , et, pour chaque H_i , fixons un système de racines positives Ψ_i dans l'ensemble de ses racines imaginaires. Nous montrons (§ 3) que l'application

$$\Pi_j : \mathcal{I}_j(G) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(H_i)^{\Psi_i},$$

définie par

$$\Pi_j(\psi) = \sum_{1 \leq i \leq k} b_{\Psi_i} \psi_{H_i},$$

est surjective; de plus, sa transposée est une bijection de $(\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(H_i)^{\Psi_i})'$ sur l'orthogonal de $\mathcal{I}_{j-1}(G)$ dans $(\mathcal{I}_j(G))'$. Tous ces résultats découlent aisément de [B-1] (dont les résultats ont été annoncés dans [B-3]) par la méthode de descente et une partition de l'unité G -invariante. Nous en donnerons une version stable dans la section 6. En particulier, la caractérisation des intégrales orbitales stables des fonctions dans $\mathcal{D}(G)$ résout le problème posé dans [L] (page 43) dont l'analogue, pour les fonctions dans l'espace de Harish-Chandra-Schwartz, a été obtenu par Shelstad [S-1]. On trouvera dans [Wa] une caractérisation (de nature différente de celle que nous obtenons) des intégrales orbitales des fonctions appartenant au sous-espace $\mathcal{D}(G, K)$ de $\mathcal{D}(G)$ des fonctions K -finis à droite et à gauche (K est un sous-groupe compact maximal de G); dans le même style, on trouvera dans [Tr] des résultats analogues pour les groupes de rang réel un.

Comme conséquence de ces résultats on obtient un théorème de type Paley-Wiener invariant (section 7). Pour H et Ψ comme ci-dessus, on note $\mathcal{PW}(H)^\Psi$ l'espace des fonctions F sur \widehat{H} , transformées de Fourier de fonctions dans $\mathcal{D}(H)$ et vérifiant

$$F((w \cdot h^*) \xi_{w \cdot \rho_\Psi - \rho_\Psi}) = \epsilon_I(w) F(h^*), \quad w \in W(G, H), h^* \in \widehat{H},$$

que l'on munit d'une topologie d'espace LF . Pour $h^* \in \widehat{H}$, on note $\Theta_{h^*, \Psi}$ la distribution induite à partir d'une distribution supertempérée associée par Harish-Chandra à (h^*, Ψ) (voir § 8). Alors si $f \in \mathcal{D}(G)$, la fonction

$$\mathcal{F}(f)_H : h^* \mapsto \Theta_{h^*, \Psi}(f)$$

appartient à $\mathcal{PW}(H)^\Psi$. Choisissons H_1, \dots, H_s des représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de G , et, pour chaque H_i , fixons un système de racines positives Ψ_i dans l'ensemble de ses racines imaginaires. Nous montrons que l'application

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{PW}(H_i)^{\Psi_i},$$

définie par $\mathcal{F}(f) = \sum_{1 \leq i \leq s} \mathcal{F}(f)_{H_i}$, est continue surjective. Nous avons préféré les distributions supertempérées aux caractères des séries principales, dans cette version du théorème de Paley-Wiener scalaire, pour des raisons de commodité et aussi parce qu'elles semblent plus naturelles du point de vue de l'analyse harmonique. Un théorème de Paley-Wiener invariant, pour l'espace $\mathcal{D}(G, K)$, a été obtenu par Clozel-Delorme [C-D]. Il nous semble qu'il n'y a pas d'implication évidente dans un sens ou dans l'autre entre notre résultat et le leur.

L'application \mathcal{F} induit une application linéaire surjective continue

$$\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{I}(G) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{PW}(H_i)^{\Psi_i}$$

qui est en fait un isomorphisme topologique. Cela avec les résultats précédents montrent la "supposition" d'Arthur ([A-1], assumption 5.2) pour les groupes réels. Notons $\mathcal{I}(G)^{[H_i]}$ l'image réciproque, par cet isomorphisme, de $\mathcal{PW}(H_i)^{\Psi_i}$. C'est un sous-espace fermé de $\mathcal{I}_j(G)$, où $j = \dim(H_i)_\mathbb{R}$. Nous montrons que l'application Π_j induit un isomorphisme topologique entre $\mathcal{I}(G)^{[H_i]}$ et $\mathcal{D}(H_i)^{\Psi_i}$, d'où les isomorphismes topologiques

$$\mathcal{I}(G) \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{I}(G)^{[H_i]} \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{D}(H_i)^{\Psi_i}.$$

Enfin, nous donnerons dans la section 9 une caractérisation des intégrales orbitales sur l'espace symétrique $\mathbf{G}(\mathbb{C})/\mathbf{G}(\mathbb{R})$.

1. Notations et conventions

1.1. Dans tout cet article, on adoptera les notations suivantes (sauf mention explicite du contraire).

Si X est un ensemble fini, on note $|X|$ son cardinal.

Si V est un espace vectoriel, on note V^* son dual. Si W est un sous-espace vectoriel de V et si A un endomorphisme de V qui laisse stable W , on note A_W la restriction de A à W . Si W_1 est un sous-espace de W stable par A , on note A_{W/W_1} l'endomorphisme de W/W_1 qui se déduit de A .

Si V est un espace vectoriel réel, on note $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié. Si A est un endomorphisme de V , son extension (par linéarité) à $V_{\mathbb{C}}$ sera aussi notée A . Le complexifié de V^* s'identifie canoniquement au dual de $V_{\mathbb{C}}$. Soit $\alpha \in V_{\mathbb{C}}^*$. On dit que α est *réelle* (resp. *imaginaire*) si sa restriction à V est réelle (resp. imaginaire); si α n'est ni réelle ni imaginaire, on dit que α est *complexe*.

Si G est un groupe opérant dans un ensemble X , H une partie de G et Y une partie de X , on note $N(H, Y) = \{h \in H \mid h \cdot Y \subset Y\}$ et $Z(H, Y) = \{h \in H \mid h \cdot y = y \text{ pour tout } y \in Y\}$. Lorsque $N(H, Y)$ est un groupe on notera $W(H, Y)$ le groupe quotient $N(H, Y)/Z(H, Y)$. On note $G[H] = \cup_{x \in G} x \cdot H$. On note X^H l'ensemble des éléments de X fixés par tout $h \in H$. Quand on parle de l'action d'un groupe sur l'une de ses parties on sous-entend toujours l'action par automorphismes intérieurs.

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie réductive, on note $\mathfrak{g}_{\text{reg}}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de \mathfrak{g} . Si A est une partie de \mathfrak{g} , on note A_{reg} l'ensemble $\mathfrak{g}_{\text{reg}} \cap A$. On note $\text{Car}(\mathfrak{g})$ l'ensemble de ses sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} . Si $\mathfrak{h} \in \text{Car}(\mathfrak{g})$, on note $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ (resp. $\Delta_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$) le système de racines (resp. racines imaginaires) de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Si G est un groupe de Lie réductif, on note G_{reg} l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de G . Si A est une partie de G , on notera A_{reg} l'ensemble $G_{\text{reg}} \cap A$. On note $\text{Car}(G)$ l'ensemble des sous-groupes de Cartan de G .

Si E est un espace vectoriel topologique, on notera E' son dual topologique.

Si X est un espace topologique et si $Y \subseteq X$, on note $\text{cl}_X(Y)$ l'adhérence de Y dans X et $\text{int}(Y)$ l'intérieur de Y . Si f est une fonction sur Y , on note $\text{supp}_X(f)$ l'ensemble $\text{cl}_X(\{y \in Y \mid f(y) \neq 0\})$.

1.2. Dans la suite de cet article, sauf mention explicite du contraire, G désignera un groupe de Lie réductif d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On supposera que G est dans la classe de Harish-Chandra, c'est-à-dire vérifiant les propriétés énoncées dans [V] (Partie II, p.16). On fixe sur \mathfrak{g} un forme bilinéaire symétrique non dégénérée et G -invariante, que l'on notera $\kappa_{\mathfrak{g}}$ (ou simplement κ lorsque aucune confusion n'est à craindre) telle que, si θ est une involution de Cartan de G dont on notera la différentielle aussi θ , la forme $-\kappa(\theta \cdot X, X)$ soit définie positive.

On adopte la normalisation de mesures de [D-V], c'est-à-dire si V est un sous-espace de \mathfrak{g} sur lequel κ est non dégénérée et si v_1, \dots, v_n est une base de $V_{\mathbb{C}}$ dont on note v_1^*, \dots, v_n^* la base duale, on munit V de la mesure de Lebesgue associée à la densité $|\det \kappa(v_i, v_j)|^{\frac{1}{2}} |v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*|$. Si M est un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie \mathfrak{m} tel que κ est non dégénérée sur \mathfrak{m} , on munit M de la mesure de Haar tangente à la mesure de Lebesgue que l'on a défini sur \mathfrak{m} . Si $M' \subset M$ sont deux sous-groupes fermés de G tels que κ est non dégénérée sur leurs algèbres de Lie, on munit M/M' de la mesure (M -invariante) quotient des mesures de Haar sur M et M' que l'on note $d\tilde{m}$.

Notons $[H]$ la classe de conjugaison d'un sous-groupe de Cartan H de G et $[\mathfrak{h}]$ la classe de conjugaison d'une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} . Rappelons que l'ensemble des classes de conjugaison de G dans $\text{Car}(\mathfrak{g})$ est muni de l'ordre de Hirai défini comme suit: $[\mathfrak{h}] \leq [\mathfrak{h}']$ si et seulement si il existe $\mathfrak{h}'' \in [\mathfrak{h}']$ telle que \mathfrak{h}'' est inclus dans \mathfrak{h}_R ; l'élément maximal est donc la classe fondamentale. L'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de G sera aussi muni de l'ordre de Hirai défini par $[H] \leq [H']$ si et seulement si $[\mathfrak{h}] \leq [\mathfrak{h}']$ où \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' désignent respectivement les algèbres de Lie de H et de H' .

2. Partition de l'unité invariante

2.1. Nous commençons par rappeler quelques résultats concernant les ouverts complètement G -invariants; pour des détails se référer par exemple à ([V], §-II-2-5 et §-II-2-6).

On notera x_s la partie semi-simple de la décomposition de Jordan d'un élément x de G . Rappelons qu'un ouvert \mathcal{U} de G est dit *complètement G -invariant* (ou tout simplement complètement invariant), s'il est G -invariant et s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes:

C-1 Pour tout $x \in \mathcal{U}$, x_s appartient à \mathcal{U} .

C-2 Pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, $\text{cl}_G(G[K])$ est inclus dans \mathcal{U} .

C-3 Pour tout $x \in \mathcal{U}$, il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathcal{U})^G$ telle que $0 \leq f(y) \leq 1$ pour tout $y \in \mathcal{U}$, $f \equiv 1$ dans un voisinage de x et $\text{supp}_G(f)$ est inclus dans \mathcal{U} .

Soit $x \in G$ semi-simple. Le centralisateur de x dans G , que l'on notera G^x , n'est pas en général dans la classe de Harish-Chandra, mais il contient un sous-groupe distingué d'indice fini qui y est (voir [V], proposition II-3-15). On voit facilement que les résultats concernant les ouverts complètement invariants, utilisés dans [B-1], sont valables pour ce genre de groupes. L'algèbre \mathfrak{g}^x des points fixes de x dans \mathfrak{g} s'identifie à l'algèbre de Lie de G^x . Nous dirons qu'un voisinage ouvert \mathcal{V} de 0 dans \mathfrak{g}^x est G -admissible (ou tout simplement admissible lorsque aucune confusion n'est craindre) si:

A-1 il est complètement G^x -invariant,

A-2 l'application $\pi : (g, Y) \mapsto gx \exp Y g^{-1}$ de $G \times \mathcal{V}$ dans G est submersive,

A-3 si $g \in G$ vérifie $gx \exp(\mathcal{V})g^{-1} \cap x \exp(\mathcal{V}) \neq \emptyset$, on a $g \in G^x$,

A-4 pour tout $Y \in \mathcal{V}_{\text{reg}}$, $x \exp Y$ appartient à G_{reg} .

Si \mathcal{V} est un voisinage admissible de 0 dans \mathfrak{g}^x , il découle de la propriété A-2 que l'ensemble $\pi(G \times \mathcal{V})$ est un ouvert de G , de plus on voit facilement par la propriété C-1 qu'il est complètement G -invariant; nous appellerons de tels ouverts bons voisinages de x dans G .

On peut construire des voisinages admissibles de x de la façon suivante. Notons \mathfrak{z} (resp. \mathfrak{c}) l'algèbre dérivée (resp. le centre) de \mathfrak{g}^x . Pour tout réel $\epsilon > 0$ on note \mathfrak{z}_ϵ l'ensemble des éléments Y de \mathfrak{z} tels que $|\lambda| < \epsilon$ pour toute valeur propre λ de $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)$. Alors si ϑ est un voisinage assez petit de 0 dans \mathfrak{c} invariant par G^x (l'action de G^x dans \mathfrak{c} se factorise par un groupe fini) et si $\epsilon > 0$ est aussi assez petit, l'ouvert $\vartheta \times \mathfrak{z}_\epsilon$ est un voisinage ouvert admissible de 0 dans \mathfrak{g}^x .

Cette construction montre que tout ouvert G -invariant contenant x contient un bon voisinage de x ; nous utiliserons cela souvent dans la suite sans le préciser à chaque fois.

2.2. Dans ce paragraphe, nous allons introduire les compacts modulo G .

Soit $L \subset G$. On dit que L est *compact modulo G* si L est un fermé G -invariant et si $L \cap H$ est compact pour tout sous-groupe de Cartan H de G . On dira qu'une partie G -invariante L' est *relativement compacte modulo G* si son adhérence est compacte modulo G .

Si $H \in \text{Car}(G)$ d'algèbre de Lie \mathfrak{h} , on note T le sous-groupe compact maximal de H . Alors tout $h \in H$ s'écrit de façon unique $h = t \exp X$, $t \in T$ et $X \in \mathfrak{h}_R$. On

pose $|h| = (\kappa(X, X))^{1/2}$. On vérifie facilement que $|h|$ ne dépend pas du sous-groupe de Cartan contenant h . On pose alors, pour $g \in G$, $|g| = |g_s|$, où g_s désigne la composante semi-simple de g . La fonction $g \mapsto |g|$ est continue. En effet comme elle est G -invariante il suffit de voir qu'elle est continue en chaque point semi-simple. Soit $x \in G$ semi-simple et soit \mathcal{V} un voisinage G -admissible de 0 dans \mathfrak{g}^x . Comme l'application π est submersive, la fonction $g \mapsto |g|$ est continue en x si et seulement sa restriction à $x \exp \mathcal{V}$ est continue en x . En prenant \mathcal{V} de la forme $\vartheta \times \mathfrak{z}_\epsilon$, on voit qu'on peut choisir ϑ et ϵ assez petits, de sorte $|x \exp Y|$ soit aussi proche que l'on veut de $|x|$ pour tout $Y \in \mathcal{V}$.

Pour $r > 0$, on note $\mathcal{U}_r = \{g \in G; |g| < r\}$; c'est un ouvert complètement G -invariant relativement compact modulo G et si l'on note $L_r = \{g \in G; |g| \leq r\}$, alors L_r est un compact modulo G et $\text{cl}_G(\mathcal{U}_r) = L_r$. Si K est une partie compacte de G , la partie $G[K]$ est relativement compacte modulo G ; cela découle de la continuité de l'application $g \mapsto |g|$.

Soit x un élément semisimple de G . Avec les notations du paragraphe précédent, si ϑ est relativement compact, alors $G[x \exp(\vartheta \times \mathfrak{z}_\epsilon)]$ est relativement compact modulo G ; en effet il est inclus dans L_r pour r assez grand. Donc tout élément semi-simple de G a une base pour les voisinages G -invariants formée par des voisinages compacts modulo G .

Comme dans le paragraphe 2.2 de [B-1], on montre facilement le lemme suivant.

LEMME 2.2.1. – (i) Soit L un compact modulo G . Si une famille d'ouverts G -invariants recouvre L , on peut en extraire une sous-famille finie qui recouvre encore L .

(ii) Dans tout ouvert $\mathcal{U} \subset G$ complètement G -invariant il existe une suite d'ouverts $\{\mathcal{W}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ complètement G -invariants qui recouvre \mathcal{U} et tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{cl}_G(\mathcal{W}_n)$ est un compact modulo G inclus dans \mathcal{W}_{n+1} .

2.3. Dans cette section, nous allons montrer l'existence de partitions de l'unité G -invariantes sur les ouverts complètement G -invariants. Soit \mathcal{U} un tel ouvert et soit $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement localement fini de \mathcal{U} par des ouverts complètement G -invariants. Nous dirons que la famille de fonctions $\{f_i\}_{i \in I}$ est une partition de l'unité G -invariante subordonnée au recouvrement $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ si:

(i) $f_i \in C^\infty(\mathcal{U})^G$, $\text{supp}_G(f_i) \subseteq \mathcal{U}_i$ et $0 \leq f_i(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathcal{U}$.

(ii) $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{U}$.

Rappelons qu'un recouvrement ouvert $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ de \mathcal{U} est dit plus fin qu'un recouvrement $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ si pour tout $j \in J$ il existe $i \in I$ tel que $\mathcal{V}_j \subset \mathcal{U}_i$.

Les mêmes arguments utilisés dans la démonstration du lemme 2.3.1 de [B-1] et de son corollaire montrent le lemme et le corollaire suivants.

LEMME 2.3.1. – Soit \mathcal{U} un ouvert complètement G -invariant et soit $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de \mathcal{U} par des ouverts complètement G -invariants. Alors il existe un recouvrement localement fini $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ de \mathcal{U} par des ouverts complètement G -invariants, plus fin que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$, et une partition de l'unité G -invariante subordonnée à $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$.

COROLLAIRE 2.3.2. – Soient $\mathcal{U} \subset G$ un ouvert complètement G -invariant et soit $L \subset \mathcal{U}$ un compact modulo G . Alors il existe une fonction $\chi \in C^\infty(\mathcal{U})^G$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{U}$, $0 \leq \chi(x) \leq 1$, $\text{supp}_G(\chi)$ est un compact modulo G inclus dans \mathcal{U} et $\chi \equiv 1$ dans un voisinage de L .

3. Intégrales orbitales

Dans cette section, nous allons introduire les intégrales orbitales et énoncer les principaux résultats.

3.1. Si A est une partie de G , on note $\mathcal{D}(A)$ l'espace des fonctions C^∞ sur G à support compact inclus dans A .

Soit $\mathcal{U} \subset G$ un ouvert complètement invariant. Soit $\gamma \in \mathcal{U}_{\text{reg}}$. On note H le sous-groupe de Cartan de G contenant γ , \mathfrak{h} son algèbre de Lie, H^0 la composante connexe de l'élément neutre de H et $d\dot{g}$ la mesure G -invariante sur $G/Z(G, \gamma H^0)$ introduite dans le paragraphe 1.2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. On définit l'intégrale orbitale de φ en γ , que l'on note $J_G(\varphi)(\gamma)$, par :

$$J_G(\varphi)(\gamma) = |\det(1 - \text{Ad}(\gamma^{-1}))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|^{\frac{1}{2}} \int_{G/Z(G, \gamma H^0)} \varphi(g\gamma g^{-1}) d\dot{g}.$$

Il est facile de voir que la fonction $\gamma \mapsto J_G(\varphi)(\gamma)$ appartient à $C^\infty(\mathcal{U}_{\text{reg}})^G$.

3.2. Dans ce paragraphe, nous allons donner les propriétés des intégrales orbitales. Soit $H \in \text{Car}(G)$ d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . On identifie $S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$ avec l'algèbre des opérateurs différentiels sur H invariants par translations. On note $\partial(u)$ l'opérateur différentiel correspondant à $u \in S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$.

On note ξ_α le caractère de H correspondant à $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$, et plus généralement, on note ξ_μ le caractère correspondant à un élément μ du réseau engendré par les racines. Soit Ψ un système de racines positives dans $\Delta_I(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$. Pour $h \in H_{\text{reg}}$, on pose

$$b_\Psi(h) = \prod_{\alpha \in \Psi} \frac{1 - \xi_\alpha(h^{-1})}{|1 - \xi_\alpha(h^{-1})|}.$$

Soit $\alpha \in \Delta_I(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$. Notons \mathfrak{s}_α la sous-algèbre de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, de dimension 3, engendrée par les sous-espaces radiciels correspondants à α et à $-\alpha$. Elle est stable par conjugaison relativement à \mathfrak{g} . On dit que α est *compacte* ou *non compacte* suivant que $\mathfrak{s}_\alpha \cap \mathfrak{g}$ est isomorphe à $\mathfrak{su}(2)$ ou à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. On note $H_{I_{\text{n-reg}}}$ l'ensemble des $h \in H$ tels que $\xi_\alpha(h) \neq 1$ pour toute racine imaginaire non compacte de \mathfrak{h} .

Soit $\mathcal{U} \subset G$ un ouvert complètement invariant. On note $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ le sous-espace des fonction $\psi \in C^\infty(\mathcal{U}_{\text{reg}})^G$ vérifiant les propriétés $I_1(G)$, $I_2(G)$, $I_3(G)$ et $I_4(G)$ ci-dessous.

$I_1(G)$: Si $H \in \text{Car}(G)$ d'algèbre de Lie \mathfrak{h} , pour toute partie compacte K de $H \cap \mathcal{U}$ et pour tout $u \in S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$, on a

$$\sup_{h \in K \cap \mathcal{U}_{\text{reg}}} |\partial(u)\psi_H(h)| < \infty,$$

où ψ_H désigne la restriction de ψ à $H \cap \mathcal{U}_{\text{reg}}$.

Cette propriété et le lemme I-3-21 de [V] impliquent que, si Γ est une composante connexe de $H \cap \mathcal{U}_{\text{reg}}$ et si $u \in S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$, la fonction $\partial(u)\psi_H$ se prolonge par continuité à l'adhérence de Γ . Cela justifie l'existence des limites dans la propriété $I_3(G)$ ci-dessous.

$I_2(G)$: Si $H \in \text{Car}(G)$, pour tout système de racines positives Ψ dans $\Delta_I(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$, la fonction $b_\Psi\psi_H$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $H_{I_{\text{n-reg}}} \cap \mathcal{U}$.

Soit s un élément semi-simple de G tel que l'algèbre dérivée de \mathfrak{g}^s soit isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Soit H un sous-groupe de Cartan fondamental de $\text{Car}(G^s)$ d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . On note $\mp\alpha$ les racines de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^s$. Elles sont imaginaires non compactes et vérifient $\xi_{\mp\alpha}(s) = 1$. Choisissons des vecteurs radiciels non nuls X_{α} et $X_{-\alpha}$ correspondant respectivement à α et à $-\alpha$ de sorte que $\overline{X_{\alpha}} = X_{-\alpha}$, $[H_{\alpha}, X_{\pm\alpha}] = \pm 2X_{\pm\alpha}$ et $[X_{\alpha}, X_{-\alpha}] = H_{\alpha}$, où H_{α} désigne la coracine correspondante à α . Alors $\text{Ker}\alpha \oplus \mathbb{R} \cdot i(X_{\alpha} - X_{-\alpha})$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}^s ; on la notera \mathfrak{h}' et on notera H' le sous-groupe de Cartan correspondant. Pour toute racine imaginaire β de H' , on a $\xi_{\beta}(s) \neq 1$. On pose $c_{\alpha} = \exp -i\frac{\pi}{4}(X_{\alpha} + X_{-\alpha})$; c'est un élément du groupe adjoint de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et on a $c_{\alpha} \cdot \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}'_{\mathbb{C}}$. L'application: $\gamma \mapsto \gamma \circ c_{\alpha}^{-1}$ envoie bijectivement $\Delta_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \cap \{\alpha\}^{\perp}$ sur $\Delta_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}'_{\mathbb{C}})$ où $\{\alpha\}^{\perp}$ désigne l'ensemble des racines β dans $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ telles que $\beta(H_{\alpha}) = 0$. Si Ψ est un système de racines positives dans $\Delta_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, l'image de $\Psi \cap \{\alpha\}^{\perp}$, que nous notons Ψ' est un système de racines positives dans $\Delta_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}'_{\mathbb{C}})$. On notera $\rho_{\Psi} = 1/2 \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha$ et τ_{Ψ} l'automorphisme d'algèbre unitaire de $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ défini par

$$\tau_{\Psi}(X) = X + \rho_{\Psi}(X) \cdot 1, \quad X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}.$$

Suivant Shelstad [S-1], on dit qu'un système de racines positives Ψ dans $\Delta_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est adapté à α si les éléments β de $\Delta_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ vérifiant $\beta(H_{\alpha}) > 0$, où H_{α} est la coracine de α , appartiennent à Ψ .

Dans la suite, pour référer à ces notations, nous dirons que $(s, H, \Psi, H', \Psi', c_{\alpha})$ est une donnée de saut (Ψ est supposé adapté à α).

$I_3(G)$: Pour toute donnée de saut $(s, H, \Psi, H', \Psi', c_{\alpha})$ et pour tout $u \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, on a

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0^+} \partial(\tau_{\Psi}(u)) b_{\Psi} \psi_H (s \exp tiH_{\alpha}) - \lim_{t \rightarrow 0^-} \partial(\tau_{\Psi}(u)) b_{\Psi} \psi_H (s \exp tiH_{\alpha}) \\ & = i d(s) \partial(\tau_{\Psi'}(c_{\alpha} \cdot u)) \psi_{H'} b_{\Psi'} (s), \end{aligned}$$

où $d(s) = 2$ ou 1 suivant que la réflexion par rapport à la racine α est réalisée dans G^s ou non.

Remarquons que, puisque $\xi_{\beta}(s) \neq 1$ pour toute racine imaginaire β de H' , le membre de droite de l'égalité ci-dessus est bien défini par $I_2(G)$.

$I_4(G)$: Pour tout $H \in \text{Car}(G)$, $\text{supp}_H(\psi_H)$ est un compact inclus dans $H \cap \mathcal{U}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, la fonction $J_G(\varphi)$ appartient à $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ (voir [V], -II-12).

Remarque. – Soit $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$ et soit $\chi \in C^{\infty}(U)^G$. Alors la fonction $\chi\psi$ appartient à $\mathcal{I}(\mathcal{U})$. Les propriétés $I_1(G)$, $I_2(G)$ et $I_4(G)$ sont faciles à vérifier. La propriété $I_3(G)$ se montre de la même façon que son analogue pour l'algèbre de Lie (voir [B-1], lemme 3.3.1); on peut aussi la déduire de ([B-1], lemme 3.3.1) en utilisant une version du lemme 5.2.1 ci-dessous valable pour l'espace des fonctions vérifiant $I_1(G)$, $I_2(G)$ et $I_3(G)$ seulement.

Si $L \subset \mathcal{U}$ est un compact modulo G , on munit $\mathcal{I}(L)$ de la topologie définie par la famille de semi-normes $\nu_{H,u}$, $H \in \text{Car}(G)$, $u \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$:

$$\nu_{H,u}(\psi) = \sup_{h \in H} |\partial(u)\psi_H(h)|.$$

Comme pour les algèbres de Lie, on voit facilement que $\mathcal{I}(L)$ est un espace de Fréchet. Il est clair que si $L \subset L'$ sont deux parties de \mathcal{U} compactes modulo G , l'inclusion naturelle

de $\mathcal{I}(L)$ dans $\mathcal{I}(L')$ est un isomorphisme de $\mathcal{I}(L)$ sur son image. Il est clair aussi que $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ est la réunion de tous les $\mathcal{I}(L)$ où L parcourt l'ensemble des sous-ensembles compacts modulo G de \mathcal{U} . On munit alors $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{I}(L)$. Comme \mathcal{U} est réunion d'une suite croissante de parties compactes modulo G (voir lemme 2.2.1), l'espace $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ est alors une limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces de Fréchet, c'est-à-dire un espace LF (terminologie de [T-1]).

L'application $J_G : \varphi \mapsto J_G(\varphi)$ de $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ dans $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ est linéaire continue, cela découle aisément de [V] (théorème II-12-6); notons ${}^t J_G : \mathcal{I}(\mathcal{U})' \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{U})'$ sa transposée. Il est clair que si $T \in \mathcal{I}(\mathcal{U})'$, alors ${}^t J_G(T)$ est G -invariante.

THÉORÈME 3.2.1. – L'application $J_G : \mathcal{D}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{U})$ est surjective et sa transposée ${}^t J_G$ est une bijection de $\mathcal{I}(\mathcal{U})'$ sur l'espace des distributions G -invariantes sur \mathcal{U} .

Ce théorème sera démontré dans la section 5.

3.3. On conserve les notations du paragraphe précédent. Rappelons que l'on a noté H_R le sous-groupe vectoriel maximal de $H \in \text{Car}(G)$. Si $j \in \mathbb{N}$, on note $\text{Car}_j(G)$ l'ensemble des sous-groupes $H \in \text{Car}(G)$ tels que $\dim(H_R) = j$ et $\text{Car}_j(\mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} dont le sous-groupe de Lie de G correspondant est dans $\text{Car}_j(G)$ (la définition de $\text{Car}_j(\mathfrak{g})$ n'est pas la même que celle de [B-1]; il y'a un décalage qui n'a évidemment aucune incidence sur les résultats).

Si \mathcal{U} est un ouvert de G complètement invariant et si $j \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{I}_j(\mathcal{U})$ le sous-espace des éléments $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$ telles que $\psi_H \equiv 0$ pour tout $H \in \text{Car}_k(G)$ avec $k > j$.

Soit $H \in \text{Car}(G)$ et soit Ψ un système de racines positives dans $\Delta_I(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$. Alors il existe un homomorphisme $\epsilon_I : N(G, \mathfrak{h}) \longrightarrow \{\pm 1\}$ qui ne dépend pas de Ψ et que nous appellerons signature imaginaire, tel que

$$(*) \quad b_\Psi(g^{-1}hg) = \epsilon_I(g)\xi_{\rho_\Psi - g \cdot \rho_\Psi} b_\Psi(h) \quad \text{pour tout } h \in H_{\text{reg}}.$$

Comme ϵ_I est triviale sur H , on notera aussi ϵ_I la signature qu'elle définit sur $W(G, H)$ ou $W(G, \mathfrak{h})$. Nous noterons $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H)^\Psi$ le sous-espace de $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H)$ des fonctions vérifiant (*). C'est un facteur direct (topologique) de $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H)$. En effet l'application $\varphi \mapsto \varphi^\Psi$ définie par

$$\varphi^\Psi(h) = \frac{1}{|W(G, H)|} \sum_{w \in W(G, H)} \epsilon_I(w)\xi_{w \cdot \rho_\Psi - \rho_\Psi}(h)\varphi(w^{-1} \cdot h)$$

est un projecteur continue de $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H)$ sur $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H)^\Psi$.

Soit $H \in \text{Car}_j(G)$ et soit Ψ un système de racines positives dans $\Delta_I(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$. Alors, pour tout $\psi \in \mathcal{I}_j(\mathcal{U})$, la fonction $b_\Psi \psi_H$ appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H)$ et donc à $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H)^\Psi$.

Soit $j \in \mathbb{N}$. On fixe H_1, \dots, H_k des représentants des classes de conjugaison de G dans $\text{Car}_j(G)$. Pour tout $1 \leq i \leq k$, on fixe un système de racines positives $\Psi_i \subset \Delta_I(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_{i\mathbb{C}})$. On introduit l'application $\Pi_j : \mathcal{I}_j(\mathcal{U}) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H_i)^{\Psi_i}$ définie par

$$\Pi_j(\psi) = \sum_{1 \leq i \leq k} b_{\Psi_i} \psi_{H_i}.$$

Avec ces notations on a le théorème suivant que l'on démontrera dans la section 5.

THÉORÈME 3.3.1. – L'application Π_j est surjective et sa transposée ${}^t\Pi_j$ est une bijection de $(\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H_i)^{\Psi_i})'$ sur l'orthogonal de $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{U})$ dans $(\mathcal{I}_j(\mathcal{U}))'$.

Une autre façon d'exprimer le théorème est de dire que Π_j est une surjection ouverte; cela découle de [T-2] (corollaire 2, p. 49) car $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H_i)^{\Psi_i}$ est un espace tonnelé puisqu'il est un facteur direct et donc un quotient de l'espace tonnelé $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap H_i)$ (voir [T-1], proposition 33.1). La même remarque vaut pour l'application J_G puisque $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ est tonnelé car c'est un espace LF (voir [T-1], corollaire 3 de la proposition 33.2).

Comme dans [B-1], on obtient facilement les conséquences suivantes des théorèmes 3.2.1 et 3.3.1.

COROLLAIRE 3.3.2. – Sur un ouvert de G complètement invariant on a :

a) l'espace vectoriel engendré par les mesures invariantes sur les orbites régulières est faiblement dense dans l'espace des distributions invariantes.

b) l'espace des fonctions C^∞ invariantes est faiblement dense dans l'espace des distributions invariantes.

c) l'espace vectoriel engendré par les caractères des représentations tempérées de G est faiblement dense dans l'espace des distributions invariantes.

d) un opérateur différentiel linéaire invariant à coefficients C^∞ , qui annule toutes les fonctions C^∞ invariantes, annule aussi les distributions invariantes.

L'assertion c) est dû à Arthur [A-2] (théorème 1.1.1); elle découle de a) et de l'analogie non stable du lemme 5.3 de [S-1].

On obtient aussi la condition suffisante de Harish-Chandra [H-C-2] (théorème 13) pour l'existence de représentations de carré intégrable de G .

COROLLAIRE 3.3.3. – Si G contient un sous-groupe de Cartan compact, sa série discrète est non vide.

Démonstration. – Il suffit de faire la démonstration pour G connexe. On fait cette hypothèse dans la suite. Soit T un sous-groupe de Cartan compact de G et soit Ψ un système de racines positives dans l'ensemble des racines de T (toutes les racines de T sont imaginaires). Soit $\Lambda \in i\mathfrak{t}^*$ la différentielle d'un caractère de T . On suppose que $\Lambda + \rho_\Psi$ est un forme linéaire régulière (i.e. $(\Lambda + \rho_\Psi)(H_\alpha) \neq 0$ pour toute racine α de T). On considère la fonction φ sur T définie par

$$\varphi(\exp X) = \sum_{w \in W(G, T)} \epsilon(w) e^{(w \cdot (\Lambda + \rho_\Psi) - \rho_\Psi)(X)}, \quad X \in \mathfrak{t};$$

elle appartient à $\mathcal{D}(T)^\Psi$ ($\epsilon(w)$ est la signature de w qui est aussi la signature imaginaire de w). Il existe donc $f \in \mathcal{D}(G)$ telle que $b_\Psi J_G(f)(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in T_{\text{reg}}$ et $J_G(f)_H \equiv 0$ pour tout sous-groupe de Cartan non compact de G . D'après [V] (théorèmes II-13-10 et II-13-13), pour tout $g \in \mathcal{D}(G)$, la fonction

$$\partial(\tau_\Psi(\prod_{\alpha \in \Psi} H_\alpha)) b_\Psi J_G(g)_T$$

se prolonge en une fonction continue sur T et il existe une constante non nulle c_G (ne dépendant pas de $g \in \mathcal{D}(G)$) telle que

$$\partial(\tau_\Psi(\prod_{\alpha \in \Psi} H_\alpha)) b_\Psi J_G(g)(1) = c_G g(1).$$

On a

$$\partial(\tau_\Psi(\prod_{\alpha \in \Psi} H_\alpha))(\varphi)(1) = |W(G, T)| \prod_{\alpha \in \Psi} (\Lambda + \rho_\Psi)(H_\alpha).$$

Donc $f(1) \neq 0$. Vu les propriétés des intégrales orbitales de f , si π est une représentation unitaire irréductible de G , $\text{tr}\pi(f) \neq 0$ seulement si le caractère infinitésimal de π correspond, via l'isomorphisme de Harish-Chandra, à $-(\Lambda + \rho_\Psi)$ ([V], théorème II. 10.11); comme il n'y a qu'un nombre fini de classes d'équivalence de telles représentations, la formule d'inversion de Plancherel (abstraite) montre qu'au moins une de ces représentations a une mesure (de Plancherel) non nulle. ■

On déduit aussi des théorèmes 3.2.1 et 3.3.1 l'existence de pseudo-coefficients de la série discrète. Pour les groupes linéaires, ce résultat a été obtenu par Clozel-Delorme [C-D] comme conséquence de leur théorème de Paley-Wiener scalaire pour les fonctions indéfiniment différentiables à support compact K -finies à droite et à gauche (K étant un sous-groupe compact maximal de G), de plus leur pseudo-coefficient est K -fini et de support "arbitrairement" petit, nous reviendrons sur la question du support (voir remarque 7.1.2). On trouvera une autre construction de pseudo-coefficients dans [Lab].

COROLLAIRE 3.3.4. – Soit δ_0 une représentation de la série discrète de G . Alors il existe $f \in \mathcal{D}(G)$ telle que

- (i) $\text{tr}\delta_0(f) = 1$,
- (ii) $\text{tr}\delta(f) = 0$ pour toute représentation irréductible tempérée δ non équivalente à δ_0 .

Démonstration. – Soit T un sous-groupe de Cartan compact de G et soit Ψ un système de racines positives dans l'ensemble des racines de T . On suppose que δ_0 est associée (par la paramétrisation de Harish-Chandra) à $\Gamma_0 \in \widehat{T}$ de différentielle $\lambda_0 \in i\mathfrak{t}^*$ avec $\lambda_0 + \rho_\Psi$ régulier (voir [V], théorème II-15-8). On note $\epsilon(\Gamma_0)$ le signe de $\prod_{\alpha \in \Psi} (\lambda_0 + \rho_\Psi)(H_\alpha)$. On note $q = 1/2 \dim(G/K)$ où K désigne un sous-groupe compact maximal de G . Alors

$$\prod_{\alpha \in \Psi} (1 - \xi_\alpha(t)) \text{tr}\delta_0(t) = (-1)^q \epsilon(\Gamma_0) \sum_{w \in N(G, T)/T} \epsilon(w) \text{tr}\Gamma_0(w^{-1} \cdot t) \xi_{w \cdot \rho_\Psi - \rho_\Psi}(t), \quad t \in T_{\text{reg}}.$$

On considère la fonction $\psi_{\Gamma_0} \in \mathcal{D}(T)^{-\Psi}$ définie par

$$\psi_{\Gamma_0}(t) = (-1)^q \epsilon(\Gamma_0) \frac{|T/Z(G, tT^0)|}{\text{vol}(T)} \sum_{w \in N(G, T)/T} \epsilon(w) \overline{\text{tr}\Gamma_0(w^{-1} \cdot t) \xi_{w \cdot \rho_\Psi - \rho_\Psi}(t)}, \quad t \in T,$$

où $\text{vol}(T)$ désigne le volume de T pour la mesure dt . Soit $f \in \mathcal{D}(G)$ telle que $b_{-\Psi} J_G(f)(t) = \psi_{\Gamma_0}(t)$ pour tout $t \in T_{\text{reg}}$ et $J_G(f)_H \equiv 0$ pour tout $H \in \text{Car}(G)$ non conjugué à T . Alors un calcul simple donne $\text{tr}\delta_0(f) = 1$ et $\text{tr}\delta(f) = 0$ pour toute représentation δ dans la série discrète de G non équivalente à δ_0 . Si π est une représentation irréductible tempérée de G telle que $\text{tr}\pi(f) \neq 0$, alors π a le même caractère infinitésimal que δ_0 et la restriction de sa trace à T_{reg} est une combinaison linéaire des restrictions à T_{reg} des caractères des représentations de la série discrète de G qui ont le même caractère infinitésimal que δ_0 . Le théorème d'unicité de Harish-Chandra (voir [V], théorème II-5-2) montre alors que le caractère de π est une combinaison linéaire

des caractères de ces représentations de la série discrète. L'indépendance linéaire des caractères de représentations irréductibles implique alors que π est dans la série discrète, donc π est équivalente à δ_0 . ■

4. Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie

Dans cette section, nous allons montrer que les résultats de [B-1] se prolongent aux groupes ayant un sous-groupe distingué d'indice fini appartenant à la classe de Harish-Chandra.

4.1. Soit M un groupe de Lie réductif, d'algèbre de Lie \mathfrak{m} , qui contient un sous-groupe distingué d'indice fini M^1 dans la classe de Harish-Chandra. On fixe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée M -invariante $\kappa_{\mathfrak{m}}$ sur \mathfrak{m} , dont on se servira pour le choix des mesures comme dans le paragraphe 1.2. Le centralisateur de $X \in \mathfrak{m}$ dans M (resp. M^1) sera noté M^X (resp. $(M^1)^X$), son centralisateur dans \mathfrak{m} sera noté \mathfrak{m}^X .

Soit $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{m})$. Dans [B-1], nous avons défini l'intégrale orbitale (sous l'action de M^1) de f en $X \in \mathfrak{m}_{\text{reg}}$, que nous notons ici $J_{\mathfrak{m}}^1(f)$, par

$$J_{\mathfrak{m}}^1(f)(X) = |\det(\text{ad}X)_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^X}|^{\frac{1}{2}} \int_{M^1/(M^1)^X} f(m \cdot X) dm.$$

Comme M^1 est dans la classe de Harish-Chandra, on a $(M^1)^X = Z(M^1, \mathfrak{m}^X)$. On définit alors, pour $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{m})$ et $X \in \mathfrak{m}_{\text{reg}}$,

$$J_{\mathfrak{m}}(f)(X) = |\det(\text{ad}X)_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^X}|^{\frac{1}{2}} \int_{M/Z(M, \mathfrak{m}^X)} f(m \cdot X) dm.$$

On a donc

$$(1) \quad J_{\mathfrak{m}}(f)(X) = \sum_{m \in M^1 \backslash M/Z(M, \mathfrak{m}^X)} J_{\mathfrak{m}}^1(f)(m \cdot X)$$

Pour un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathfrak{m}$ complètement M -invariant, on définit les espaces $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ et $\mathcal{I}^1(\mathcal{U})$ des fonctions appartenant respectivement à $C^\infty(\mathcal{U}_{\text{reg}})^M$ et à $C^\infty(\mathcal{U}_{\text{reg}})^{M^1}$ et vérifiant les propriétés $I_1(\mathfrak{m})$, $I_2(\mathfrak{m})$, $I_3(\mathfrak{m})$ et $I_4(\mathfrak{m})$ de [B-1] (§.3.2), évidemment la propriété $I_3(\mathfrak{m})$ n'est pas la même suivant que l'on considère les intégrales orbitales pour M ou pour M^1 (dans [B-1], l'espace $\mathcal{I}^1(\mathcal{U})$ est notée $\mathcal{ID}(\mathcal{U})$). Ces espaces seront munis de la topologie définie dans le paragraphe 3.2 de [B-1].

Rappelons les notations de [B-1]. Si $\mathfrak{h} \in \text{Car}(\mathfrak{m})$ et si Ψ est un système de racines positives dans $\Delta_I(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, on note

$$a_{\Psi}(X) = \prod_{\alpha \in \Psi} \frac{\alpha(X)}{|\alpha(X)|} \quad (X \in \mathfrak{h}_{\text{reg}}).$$

On définit la signature imaginaire de $w \in W(M, \mathfrak{h})$ par

$$a_{\Psi}(w^{-1} \cdot X) = \epsilon_I(w) a_{\Psi}(X) \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{h}_{\text{reg}}.$$

On notera ϵ_I^1 la restriction de ϵ_I à $W(M^1, \mathfrak{h})$.

Si $\mathfrak{h} \in \text{Car}(\mathfrak{m})$, on note \mathfrak{h}_R le sous-espace des $X \in [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \cap \mathfrak{h}$ tels que toutes les valeurs propres de $\text{ad}X$ sont réelles. Si $j \in \mathbb{N}$, on note $\text{Car}_j(\mathfrak{m})$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h} \in \text{Car}(\mathfrak{m})$ telles que $\dim \mathfrak{h}_R = j$ et $\mathcal{I}_j(\mathcal{U})$ le sous-espace des $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$ tels que $\psi_{\mathfrak{h}} \equiv 0$ si $\mathfrak{h} \in \text{Car}_k(\mathfrak{m})$ avec $k > j$. Si $\mathfrak{h} \in \text{Car}(\mathfrak{m})$ et si U est un ouvert de \mathfrak{h} , on note $\mathcal{D}(U)^{\epsilon_I}$ (resp. $\mathcal{D}(U)^{\epsilon_I^1}$) l'ensemble des $f \in \mathcal{D}(U)$ telles que $f(w^{-1} \cdot Y) = \epsilon_I(w)f(Y)$ pour tout $w \in W(M, \mathfrak{h})$ (resp. $W(M^1, \mathfrak{h})$). Soit $\psi \in \mathcal{I}_j(\mathcal{U})$, soit $\mathfrak{h} \in \text{Car}_j(\mathfrak{m})$ et soit Ψ un système de racines positives dans $\Delta_I(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. Alors la fonction $a_{\Psi}\psi_{\mathfrak{h}}$ appartient à $\mathcal{D}(U \cap \mathfrak{h})^{\epsilon_I}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$. Fixons $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_k$ des représentants des classes de conjugaison de M dans $\text{Car}_j(\mathfrak{m})$. Pour tout $1 \leq i \leq k$, fixons un système de racines positives Ψ_i dans $\Delta_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{i\mathbb{C}})$. Notons $\epsilon_{I,i}$ la signature imaginaire de $W(M, \mathfrak{h}_i)$ et considérons l'application

$$\pi_i : \mathcal{I}_j(\mathcal{U}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1, \dots, k} \mathcal{D}(U \cap \mathfrak{h}_i)^{\epsilon_{I,i}}$$

définie par

$$\pi_j(\psi) = \sum_{i=1, \dots, k} a_{\Psi_i} \psi_{\mathfrak{h}_i}.$$

Avec ces notations on a l'analogie du théorème 4.1.1 de [B-1].

THÉORÈME 4.1.1. – (i) L'application $J_m : \mathcal{D}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{U})$ est surjective.

(ii) L'application ${}^t J_m$ est une bijection de $\mathcal{I}(\mathcal{U})'$ sur l'espace des distributions M -invariantes sur \mathcal{U} .

(iii) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'application $\pi_j : \mathcal{I}_j(\mathcal{U}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1, \dots, k} \mathcal{D}(U \cap \mathfrak{h}_i)^{\epsilon_{I,i}}$ est surjective.

(iv) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, ${}^t \pi_j$ est une bijection de $(\bigoplus_{i=1, \dots, k} \mathcal{D}(U \cap \mathfrak{h}_i)^{\epsilon_{I,i}})'$ sur l'orthogonal de $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{U})$ dans $\mathcal{I}_j(\mathcal{U})'$.

Démonstration. – Pour $j \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{D}_j(\mathcal{U})$ l'image réciproque par J_m de $\mathcal{I}_j(\mathcal{U})$. Commençons par montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'application

$$\pi_j \circ J_m : \mathcal{D}_j(\mathcal{U}) \longrightarrow \bigoplus_{i=1, \dots, k} \mathcal{D}(U \cap \mathfrak{h}_i)^{\epsilon_{I,i}}$$

est surjective. On fixe $j \in \mathbb{N}$ et on utilise les notations ci-dessus. Dans la suite les notations avec 1 en exposant (par exemple π_j^1) désignent les mêmes objets que les notations sans exposants, déjà introduites, sauf que l'on a remplacé M par M^1 dans leurs définitions. Pour tout $1 \leq i \leq k$, soient $m_{i,1}, \dots, m_{i,r_i} \in M$ tels que les sous-algèbres de Cartan $m_{i,s} \cdot \mathfrak{h}_i$ forment un ensemble de représentants des classes de conjugaison de M^1 dans $\text{Car}_j(\mathfrak{m})$. On note $\mathfrak{h}_{i,s} = m_{i,s} \cdot \mathfrak{h}_i$. Alors $m_{i,s} \cdot \Psi_i$ est un système de racines positives dans $\Delta_I(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, (\mathfrak{h}_{i,s})_{\mathbb{C}})$, on le note $\Psi_{i,s}$. On note $\epsilon_{i,s}$ (resp. $\epsilon_{i,s}^1$) la signature imaginaire de $W(M, \mathfrak{h}_{i,s})$ (resp. $W(M^1, \mathfrak{h}_{i,s})$).

Pour $\mathfrak{h} \in \text{Car}(\mathfrak{m})$, $f \in \mathcal{D}(\mathfrak{h})$ et $m \in M$, on définit $m \cdot f \in \mathcal{D}(m \cdot \mathfrak{h})$ par $m \cdot f(X) = f(m^{-1} \cdot X)$.

On considère l'application

$$p_j : \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq s \leq r_i}} \mathcal{D}(U \cap \mathfrak{h}_{i,s})^{\epsilon_{i,s}^1} \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(U \cap \mathfrak{h}_i)^{\epsilon_{I,i}}$$

définie par

$$p_j \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq s \leq r_i}} f_{i,s} \right) = \sum_{1 \leq i \leq k} \left(\sum_{1 \leq s \leq r_i} m_{i,s}^{-1} \cdot \left(\sum_{w \in W(M, \mathfrak{h}_{i,s}) / W(M^1, \mathfrak{h}_{i,s})} \epsilon_{i,s}(w) w \cdot f_{i,s} \right) \right)$$

Il est facile de voir qu'elle est surjective et, d'après (1), que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_j(\mathcal{U})$, on a

$$p_j \circ \pi_j^1 \circ J_m^1(\varphi) = \pi_j \circ J_m(\varphi).$$

On déduit alors de [B-1] (théorème 4.1.1) que si $\psi \in \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}_i)^{\epsilon_{I,i}}$, il existe $\varphi \in \mathcal{D}_j^1(\mathcal{U})$ (image réciproque par J_m^1 de $\mathcal{I}_j^1(\mathcal{U})$) telle que $\pi_j \circ J_m(\varphi) = \psi$. Comme $\mathcal{D}_j^1(\mathcal{U}) \subset \mathcal{D}_j(\mathcal{U})$, on obtient la surjectivité de $\pi_j \circ J_m$. D'où l'on déduit que l'application π_j est surjective et, comme dans la démonstration du lemme 10.1.1 de [B-1], que J_m induit une application surjective du gradué associé à la filtration $\{\mathcal{D}_j(\mathcal{U})\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ sur le gradué associé à la filtration $\{\mathcal{I}_j(\mathcal{U})\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}(\mathcal{U})$. Donc J_m est surjective car les filtrations sont finies. Pour démontrer les assertions (ii) et (iv), il suffit de montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, si Θ est une distribution M -invariante sur \mathcal{U} nulle sur $\mathcal{D}_{j-1}(\mathcal{U})$, il existe $\theta \in \left(\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}_i)^{\epsilon_{I,i}} \right)'$ telle que

$$(2) \quad \Theta(\varphi) = \theta(\pi_j \circ J_m(\varphi)) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}_j(\mathcal{U}).$$

En effet, on prolonge ${}^t\pi_j(\theta)$ par le théorème de Hahn-Banach en une forme linéaire continue T sur $\mathcal{I}(\mathcal{U})$, alors ${}^tJ_m(T) - \Theta$ est une distribution M -invariante nulle sur $\mathcal{D}_j(\mathcal{U})$; on obtient ainsi l'assertion (ii) par récurrence sur j . De même si $S \in (\mathcal{I}_j(\mathcal{U}))'$ est nulle sur $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{U})$, on prend un prolongement \tilde{S} de S à $\mathcal{I}(\mathcal{U})$, il existe alors $\theta \in \left(\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}_i)^{\epsilon_{I,i}} \right)'$ telle que ${}^tJ_m(\tilde{S})(\varphi) = \theta(\pi_j \circ J_m(\varphi))$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_j(\mathcal{U})$, comme J_m envoie surjectivement $\mathcal{D}_j(\mathcal{U})$ sur $\mathcal{I}_j(\mathcal{U})$, on voit que ${}^t\pi_j(\theta) = S$.

Montrons l'existence de θ vérifiant (2). Comme $\mathcal{D}_j^1(\mathcal{U}) \subset \mathcal{D}_j(\mathcal{U})$, on déduit de [B-1] (théorème 4.1.1) qu'il existe

$$\theta^1 \in \left(\bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq s \leq r_i}} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}_{i,s})^{\epsilon_{i,s}^1} \right)'$$

tel que

$$\Theta(\varphi) = \theta^1(\pi_j^1 \circ J_m^1(\varphi)) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}_j^1(\mathcal{U}).$$

Si $\mathfrak{h} \in \text{Car}(\mathfrak{m})$ et si U est un ouvert de \mathfrak{h} invariant par le groupe de Weyl $W(M, \mathfrak{h})$, de même que pour les groupes de Cartan (voir paragraphe 3.3), l'espace $\mathcal{D}(U)^{\epsilon_I}$ est un facteur direct (topologique) de $\mathcal{D}(U)$. Donc l'espace $(\mathcal{D}(U)^{\epsilon_I})'$ s'identifie canoniquement à l'espace $(\mathcal{D}(U)')^{\epsilon_I}$ des distributions T sur \mathfrak{h} vérifiant $w \cdot T = \epsilon_I(w)T$ pour tout $w \in W(M, \mathfrak{h})$. La même remarque vaut pour $(\mathcal{D}(U)^{\epsilon_I^1})'$. On écrit

$$\theta^1 = \sum_{i,s} \theta_{i,s}^1, \quad \theta_{i,s}^1 \in (\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}_{i,s})')^{\epsilon_{i,s}^1}.$$

Soit $m \in N(M, \mathfrak{h}_{i,s})$. Pour tout $f \in \mathcal{D}_j^1(\mathcal{U})$ et pour tout $X \in \mathcal{U}_{\text{reg}} \cap \mathfrak{h}_{i,s}$, on a

$$(3) \quad \pi_j^1 \circ J_m^1(m \cdot f)(X) = \epsilon_{i,s}(m)(\pi_j^1 \circ J_m^1(f))(m^{-1} \cdot X)$$

et

$$(4) \quad m \cdot \theta_{i,s}^1 = \epsilon_{i,s}(m)\theta_{i,s}^1.$$

Soient s_1 et s_2 appartenant à $\{1, \dots, r_i\}$. Posons $m_{1,2} = m_{i,s_1} m_{i,s_2}^{-1}$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{D}_j^1(\mathcal{U})$ et pour tout $X \in \mathcal{U}_{\text{reg}} \cap \mathfrak{h}_{i,s_1}$, on a

$$(5) \quad \pi_j^1 \circ J_m^1(m_{1,2} \cdot f)(X) = \pi_j^1 \circ J_m^1(f)(m_{1,2} \cdot X).$$

Puisque Θ est invariante par M , on déduit de (3), (4) et (5) que

$$m \cdot \theta_{i,s}^1 = \epsilon_{i,s}(m)\theta_{i,s}^1, \quad \text{pour } m \in N(M, \mathfrak{h}_{i,s}),$$

et

$$m_{1,2} \cdot \theta_{i,s_2}^1 = \theta_{i,s_1}^1.$$

En particulier $m_{i,s} \cdot \theta_{i,s}^1$ ne dépend pas de $s \in \{1, \dots, r_i\}$. On pose alors

$$\theta_i = \frac{|W(M^1, \mathfrak{h}_{i,s})|}{|W(M, \mathfrak{h}_{i,s})|} m_{i,s} \cdot \theta_{i,s}^1,$$

et

$$\theta = \sum_{1 \leq i \leq k} \theta_i.$$

On vérifie facilement que $\theta \in (\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}_i)^{\epsilon_{1,i}})'$ et que $\theta^1 = {}^t p_j(\theta)$. D'où le théorème. ■

Remarque. – Pour $\psi \in \mathcal{I}^1(\mathcal{U})$, on définit la fonction ψ^M sur \mathcal{U}_{reg} par

$$\psi^M(X) = \sum_{m \in M^1 \backslash M/Z(M, m^X)} \psi(m \cdot X).$$

On voit alors facilement que ψ^M appartient à $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ et que l'application $\psi \mapsto \psi^M$ est continue; la démonstration du théorème montre qu'elle est surjective.

5. Démonstration des théorèmes 3.2.1 et 3.3.1

L'idée de la démonstration est la suivante : on utilise la partition de l'unité invariante pour montrer que les résultats sont de nature locale puis on se ramène aux algèbres de Lie par la méthode de descente et on utilise les résultats de [B-1].

5.1. Commençons par voir que le théorème 3.2.1 est de nature locale, c'est-à-dire qu'il suffit de l'établir pour une famille d'ouverts complètement invariants recouvrant \mathcal{U} .

D'abord, si $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ sont deux ouverts complètement invariants et si J_G est surjective sur \mathcal{W} , sa restriction à \mathcal{V} est surjective aussi. En effet, soit $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{V})$ et soit $\chi \in C^\infty(\mathcal{V})^G$ telle que $\chi \equiv 1$ dans un voisinage du support de ψ et $\text{supp}_G(\chi)$ est un compact modulo G inclus dans \mathcal{V} (voir corollaire 2.3.2). Alors si $\psi = J_G(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{W})$, on a $\psi = J_G(\chi\varphi)$ et $\chi\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$; d'où l'assertion.

Supposons que le théorème soit établi pour une famille d'ouverts complètement invariants $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ recouvrant \mathcal{U} . Soit $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ un recouvrement de \mathcal{U} par des ouverts complètement invariants, plus fin que le recouvrement $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ tel qu'il existe une partition de l'unité G -invariante $\{\chi_j\}_{j \in J}$ qui lui est subordonnée (voir lemme 2.3.1). Soit $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$. Comme le support de ψ est compact modulo G et il est inclus dans \mathcal{U} , il ne rencontre qu'un nombre fini de \mathcal{V}_j ; notons-les $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_n$. Alors $\psi = \chi_1\psi + \dots + \chi_n\psi$. Pour tout $1 \leq j \leq n$, soit $\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathcal{V}_j)$ telle que $J_G(\varphi_j) = \chi_j\psi$, alors $J_G(\varphi_1 + \dots + \varphi_n) = \psi$; d'où la surjectivité de J_G sur \mathcal{U} . Soit Θ une distribution G -invariante sur \mathcal{U} . Pour tout $i \in I$, il existe une forme linéaire unique $\theta_i \in \mathcal{I}(\mathcal{U}_i)'$ telle que $\Theta(\varphi) = \theta_i(J_G(\varphi))$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{U}_i)$. Soit $j \in J$ et soit $i \in I$ tels que $\mathcal{V}_j \subset \mathcal{U}_i$. Il est clair que la restriction de θ_i à $\mathcal{I}(\mathcal{V}_j)$ est continue, c'est donc un élément de $\mathcal{I}(\mathcal{V}_j)'$; on le note θ_j . Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{V}_j)$, on a $\theta_j(J_G(\varphi)) = \Theta(\varphi)$. Pour $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$, on pose $\theta(\psi) = \sum_{j \in J} \theta_j(\chi_j\psi)$, dans cette somme il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls puisque, comme nous l'avons remarqué plus haut, le support de ψ ne rencontre qu'un nombre fini de \mathcal{V}_j . On vérifie alors facilement que θ appartient à $\mathcal{I}(\mathcal{U})'$ et que ${}^tJ_G(\theta) = \Theta$. Enfin l'injectivité de tJ_G découle de la surjectivité de J_G . De même on voit que le théorème 3.3.1 est de nature locale.

Si l'on choisit pour chaque élément semi-simple de \mathcal{U} un bon voisinage inclus dans \mathcal{U} , on obtient un recouvrement de \mathcal{U} . Donc il suffit de prouver les théorèmes 3.2.1 et 3.3.1 dans un bon voisinage de chaque élément semi-simple de \mathcal{U} .

5.2. Les propriétés des intégrales orbitales sur G se déduisent de celles des intégrales orbitales sur les algèbres de Lie par la méthode de descente de Harish-Chandra que nous rappelons brièvement. Soit $x \in G$ semi-simple. On note $M = G^x$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^x$; \mathfrak{m} s'identifie avec l'algèbre de Lie de M . On reprend les notations de la section 4.

Soit \mathcal{V} un voisinage G -admissible de 0 dans \mathfrak{m} . On note $\mathcal{U} = G[x \exp \mathcal{V}]$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(G \times \mathcal{V})$. On définit la fonction $\pi_*(\varphi)$ sur \mathcal{U} par :

$$\pi_*(\varphi)(gx \exp Y g^{-1}) = |\det(1 - \text{Ad}(x^{-1} \exp -Y))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}|^{-\frac{1}{2}} \int_M \varphi(gm^{-1}, m \cdot Y) dm.$$

Elle appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{U})$. L'application $\varphi \mapsto \pi_*(\varphi)$ de $\mathcal{D}(G \times \mathcal{V})$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ est surjective (car π est une submersion surjective). Rappelons la fonction $j_{\mathfrak{m}}$ définie sur \mathfrak{m} par :

$$j_{\mathfrak{m}}(Y) = \det\left(\frac{1 - \exp(\text{ad}Y)}{\text{ad}Y}\right)$$

On définit la fonction $p_*(\varphi)$ sur \mathcal{V} par :

$$p_*(\varphi)(Y) = |j_{\mathfrak{m}}(Y)|^{\frac{1}{2}} \int_G \varphi(g, Y) dg;$$

elle appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ et l'application $\varphi \mapsto p_*(\varphi)$ de $\mathcal{D}(G \times \mathcal{V})$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ est surjective.

Considérons l'application $R_{\mathcal{U}|\mathcal{V}} : C^\infty(\mathcal{U}_{\text{reg}})^G \longrightarrow C^\infty(\mathcal{V}_{\text{reg}})^M$ définie par

$$R_{\mathcal{U}|\mathcal{V}}\psi(Y) = \psi(x \exp Y).$$

Il est clair qu'elle est bijective.

LEMME 5.2.1. – (i) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(G \times \mathcal{V})$, on a

$$R_{\mathcal{U}|\mathcal{V}} \circ J_G \circ \pi_*(\varphi) = J_m \circ p_*(\varphi)$$

(ii) L'application $R_{\mathcal{U}|\mathcal{V}}$ induit un isomorphisme topologique entre $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ et $\mathcal{I}(\mathcal{V})$

Démonstration. – Analogue aux démonstrations des lemmes 5.1.1 et 5.1.2 de [B-1]. ■

Signalons que c'est à partir de l'assertion (i) du lemme que l'on obtient les propriétés des intégrales orbitales sur G et que l'on pourrait utiliser l'assertion (ii) comme définition de $\mathcal{I}(\mathcal{U})$; c'est-à-dire on le définit comme l'image réciproque de $\mathcal{I}(\mathcal{V})$ par $R_{\mathcal{U}|\mathcal{V}}$.

Les théorèmes 3.2.1 et 3.3.1 découlent facilement de ce lemme et du théorème 4.1.1 (comme dans la section 5 de [B-1]).

6. Intégrales orbitales stables

Notre objectif, dans cette section, est de caractériser les intégrales orbitales stables des fonctions indéfiniment différentiables à support compact. On se place donc dans la situation où G est le groupe des points réels d'un groupe algébrique \mathbf{G} réductif connexe défini sur \mathbb{R} . On identifie \mathbf{G} avec le groupe de ses points complexes et on note σ la conjugaison complexe de \mathbf{G} .

6.1. Si $x \in G$, l'ensemble $\mathbf{G}[x] \cap G$ sera appelé l'orbite stable de x ; c'est une réunion finie de G -orbites. Une partie de G est dite *stablement invariante* si elle contient l'orbite stable de chacun de ses éléments, en particulier si A est une partie stablement invariante et si $T \in \text{Car}(G)$, la partie $A \cap T$ est invariante par $W(\mathbf{G}, T)$. On dit qu'un ouvert de G est stablement complètement invariant s'il est à la fois complètement invariant et stablement invariant.

Notons $n = \dim \mathfrak{g}$ et introduisons le polynôme caractéristique

$$\det(\lambda - \text{ad}X)_{\mathfrak{g}} = \lambda^n + a_{n-1}(X)\lambda^{n-1} + \dots + a_\ell(X)\lambda^\ell$$

de $X \in \mathfrak{g}$. Pour tout $\ell \leq i \leq n-1$, la fonction a_i est polynomiale homogène de degré $n-i$ et G -invariante. On pose $d = 2(n-\ell)!$, et, pour tout $\ell \leq i \leq n-1$, on pose $r_i = \frac{d}{2(n-i)}$. On fixe une norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur le centre \mathfrak{c} de \mathfrak{g} . Si $X \in \mathfrak{g}$, on écrit $X = X_1 + X_2$, $X_1 \in \mathfrak{c}$ et X_2 dans l'algèbre dérivée de \mathfrak{g} . On pose

$$q(X) = \|X_1\|^d + \sum_{i=\ell, \dots, n} a_i^{2r_i}(X_2).$$

Alors q est une fonction polynomiale G -invariante et si X et X' sont deux éléments réguliers de \mathfrak{g} dans la même orbite sous \mathbf{G} , on a $q(X) = q(X')$; de plus, si $Y \in \mathfrak{g}$, $q(Y) = 0$ si et seulement si Y est nilpotent.

Soit x un élément semi-simple de G . Choisissons $x_1 = x, x_2, \dots, x_k$ des représentants des G -orbites dans $\mathbf{G}[x] \cap G$. On note $M_i = G^{x_i}$ et $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{g}^{x_i}$. Pour $\epsilon > 0$, on note $\mathcal{V}_{i,\epsilon}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{m}_i$ tels que $q(X) < \epsilon$. Alors si ϵ est assez petit, $\mathcal{V}_{i,\epsilon}$ est un voisinage admissible de 0 dans \mathfrak{m}_i ; de plus, si l'on note $\mathcal{U}_{i,\epsilon} = G[x_i \exp(\mathcal{V}_{i,\epsilon})]$, on a $\mathcal{U}_{i,\epsilon} \cap \mathcal{U}_{j,\epsilon} = \emptyset$ si $i \neq j$. On vérifie facilement que pour tout $1 \leq i \leq k$, si $0 < \eta < \epsilon$, l'ensemble $L_{i,\eta} = G[x_i \exp \text{cl}_{\mathfrak{m}_i}(\mathcal{V}_{i,\eta})]$ est un compact modulo G et son intérieur est l'ouvert complètement invariant $\mathcal{U}_{i,\eta}$. Posons $L_{x,\eta}^{\text{st}} = \cup_{i=1,\dots,k} L_{i,\eta}$ et $\mathcal{U}_{x,\eta}^{\text{st}} = \cup_{i=1,\dots,k} \mathcal{U}_{i,\eta}$. Alors $L_{x,\eta}^{\text{st}}$ est un compact modulo G stablement invariant et son intérieur $\mathcal{U}_{x,\eta}^{\text{st}}$ est un ouvert stablement complètement invariant. Tout ce que l'on a à vérifier est que $L_{x,\eta}^{\text{st}}$ et $\mathcal{U}_{x,\eta}^{\text{st}}$ sont stablement invariants. Soit $gx_i \exp(X)g^{-1} \in L_{x,\eta}^{\text{st}}$ et soit $y \in \mathbf{G}$ tels que $ygx_i \exp(X)g^{-1}y^{-1} \in G$. Alors $g^{-1}y^{-1}\sigma(yg)$ commute avec $x_i \exp(X)$. Mais vu le choix de ϵ ci-dessus, le centralisateur de $x_i \exp(X)$ dans \mathbf{G} est inclus dans celui de x_i (voir [V], proposition II-2-11). Donc $ygx_i g^{-1}y^{-1}$ appartient à G et comme $q(yg \cdot X) = q(X)$, on déduit que $ygx_i \exp(X)g^{-1}y^{-1}$ appartient à L_{η}^{st} . De la même façon on voit que $\mathcal{U}_{x,\eta}^{\text{st}}$ est stablement invariant.

Soit $\mathcal{U} \subset G$ un ouvert stablement complètement invariant. On dira qu'une fonction appartenant à $C^\infty(\mathcal{U})^G$ est *stablement invariante* si elle est constante sur l'orbite stable de chaque élément de \mathcal{U} ; on notera $C^\infty(\mathcal{U})^{G,\text{st}}$ l'espace de ces fonctions.

LEMME 6.1.1. – Soit $L \subset G$ un compact modulo G stablement invariant et soit $\{\mathcal{W}_i\}_{i=1,\dots,r}$ un recouvrement de L par des ouverts stablement complètement G -invariants. Alors pour tout $1 \leq i \leq r$, il existe une fonction $\chi_i \in C^\infty(\mathcal{W}_i)^{G,\text{st}}$ à support compact modulo G inclus dans \mathcal{W}_i telles que $\sum_{i=1,\dots,r} \chi_i \equiv 1$ au voisinage de L .

Démonstration. – Nous allons nous inspirer de la démonstration du théorème 1.4.4 de [Ho]. Pour tout $x \in L$, on choisit $\epsilon_x > 0$ assez petit de telle sorte que $\mathcal{U}_{x,\epsilon_x}^{\text{st}}$ (que l'on notera simplement $\mathcal{U}_{\epsilon_x}^{\text{st}}$) soit inclus dans l'un des ouverts \mathcal{W}_i . Soit $f_x \in C^\infty(\mathbb{R})$ positive, de support inclus dans l'intervalle $]-\frac{3}{4}\epsilon_x, \frac{3}{4}\epsilon_x[$ et qui vaut 1 sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}\epsilon_x, \frac{1}{2}\epsilon_x]$. Avec les notations ci-dessus, on définit la fonction ϕ_x sur $\mathcal{U}_{\epsilon_x}^{\text{st}}$ par

$$\phi_x(gx_i \exp(X)g^{-1}) = f_x(q(X)), \quad g \in G, X \in \mathcal{V}_{i,\epsilon_x}.$$

Il est clair qu'elle appartient à $C^\infty(\mathcal{U}_{\epsilon_x}^{\text{st}})^G$ et que son support est un compact modulo G inclus dans $\mathcal{U}_{\epsilon_x}^{\text{st}}$. Comme ci-dessus, si $gx_i \exp(X)g^{-1} \in \mathcal{U}_{\epsilon_x}^{\text{st}}$ et si $y \in \mathbf{G}$ sont tels que $ygx_i \exp(X)g^{-1}y^{-1} \in G$, on voit que $\phi_x(ygx_i \exp(X)g^{-1}y^{-1}) = f_x(q(yg \cdot X)) = f_x(q(X)) = \phi_x(gx_i \exp(X)g^{-1})$. Donc ϕ_x est stablement invariante. D'après le lemme 2.2.1, il existe une partie finie $\{x_1, \dots, x_s\}$ de L telle que les ouverts $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}\epsilon_{x_j}}^{\text{st}}$ recouvrent L . On introduit les fonctions

$$\chi_{x_1} = \phi_{x_1}, \chi_{x_2} = \phi_{x_2}(1 - \phi_{x_1}), \dots, \chi_{x_s} = \phi_{x_s}(1 - \phi_{x_1}) \cdots (1 - \phi_{x_{s-1}}).$$

La fonction χ_{x_j} appartient à $C^\infty(\mathcal{U}_{\epsilon_{x_j}}^{\text{st}})^{G,\text{st}}$. De plus, on a

$$\sum_{j=1,\dots,s} \chi_{x_j} - 1 = - \prod_{j=1,\dots,s} (1 - \phi_{x_j}).$$

Comme pour tout $x \in L$, il existe $1 \leq j \leq s$ tel que $\phi_{x_j} \equiv 1$ au voisinage de x , cela montre que $\sum_{j=1,\dots,s} \chi_{x_j} \equiv 1$ au voisinage de L . Le lemme découle alors du fait que chaque ouvert $\mathcal{U}_{\epsilon_{x_j}}^{\text{st}}$ est inclus dans l'un des ouverts \mathcal{W}_i . ■

6.2. Soit $\mathcal{U} \subset G$ un ouvert stablement complètement invariant. Si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$, on définit l'intégrale orbitale stable de f en $\gamma \in \mathcal{U}_{\text{reg}}$, que l'on note $J_G^{\text{st}}(f)(\gamma)$ de la façon suivante. On note \mathbf{T} le sous-groupe de Cartan de \mathbf{G} contenant γ et $T = \mathbf{T} \cap G$. Alors

$$(1) \quad J_G^{\text{st}}(f)(\gamma) = \frac{1}{|W(\mathbf{G}, T)|} \sum_{w \in W(\mathbf{G}, T)} J_G(f)(w \cdot \gamma).$$

Remarquons que, si $\gamma \in T_{\text{reg}}$, l'ensemble $\bigcup_{w \in W(\mathbf{G}, T)} G[w \cdot \gamma]$ n'est pas en général égal à l'orbite stable de γ , il est appelé dans [C] l'orbite superstable de γ . On renvoie à (*loc. cit.*) pour plus de détails concernant ces notions.

Comme pour les intégrales orbitales (non stables), il est clair que la fonction $\gamma \mapsto J_G^{\text{st}}(f)(\gamma)$ est C^∞ sur \mathcal{U}_{reg} , de plus elle est stablement invariante. Ses propriétés ont été étudiées par Shelstad [S-1], nous allons les rappeler brièvement et nous renvoyons à [S-1] pour les détails. Nous utilisons les notations du paragraphe 3.2. Nous introduisons l'espace $\mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})$ des fonctions C^∞ sur \mathcal{U}_{reg} , stablement invariantes et vérifiant les propriétés $I_1(G)$, $I_4(G)$ et les deux propriétés $I_2^{\text{st}}(G)$ et $I_3^{\text{st}}(G)$ suivantes. La propriété $I_3^{\text{st}}(G)$ est la même que $I_3(G)$ sauf que le facteur $d(\alpha)$ est remplacé par 2; pour $I_2^{\text{st}}(G)$, il faut remplacer l'ensemble $T_{I_{n-\text{reg}}}$ par l'ensemble $T_{I_{n-\text{reg}}}^{\text{st}}$ des $x \in T_{I_{n-\text{reg}}}$ dont l'orbite sous $W(\mathbf{G}, T)$ est incluse dans $T_{I_{n-\text{reg}}}$. Alors la fonction $J_G^{\text{st}}(f)$ appartient à $\mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})$; en effet il est clair qu'elle vérifie $I_1^{\text{st}}(G)$, $I_2^{\text{st}}(G)$ et $I_4^{\text{st}}(G)$, pour $I_3^{\text{st}}(G)$ voir [S-1], lemme 4.3.

Si $L \subset \mathcal{U}$ est un compact modulo G stablement invariant, on note $\mathcal{I}^{\text{st}}(L)$ le sous espace des éléments de $\mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})$ dont le support est inclus dans L . On munit $\mathcal{I}^{\text{st}}(L)$ de la topologie définie par la famille de semi-normes $\nu_{T,u}$, $T \in \text{Car}(G)$, $u \in S(\mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$:

$$\nu_{T,u}(\psi) = \sup_{t \in T_{\text{reg}}} |\partial(u)\psi_T(t)|;$$

c'est un espace de Fréchet. L'espace $\mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})$ sera muni de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{I}^{\text{st}}(L)$, $L \subset \mathcal{U}$ compact modulo G stablement invariant. C'est un espace LF . On déduit de la continuité de J_G et de (1) que l'application J_G^{st} est continue.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{I}_j^{\text{st}}(\mathcal{U})$ le sous-espace des éléments $\psi \in \mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})$ tels que $\psi_T \equiv 0$ pour tout $T \in \text{Car}_k(G)$ avec $k > j$.

Soit $T \in \text{Car}(G)$ et soit Ψ un système de racines positives dans l'ensemble des racines imaginaires de T . L'homomorphisme ϵ_I se prolonge naturellement à $N(\mathbf{G}, \mathfrak{t})$. Nous noterons $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T)^{\Psi, \text{st}}$ le sous-espace des fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T)$ vérifiant

$$(*) \quad f(g^{-1}tg) = \epsilon_I(g)\xi_{\rho_{\Psi} - \rho_{g \cdot \Psi}} f(t) \quad t \in T_{\text{reg}}, \quad g \in N(\mathbf{G}, \mathfrak{t}).$$

Soit $T \in \text{Car}_j(G)$ et soit $\psi \in \mathcal{I}_j^{\text{st}}(\mathcal{U})$, alors la fonction $b_{\Psi}\psi_T$ appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T)$ et donc à $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T)^{\Psi, \text{st}}$.

Soit $j \in \mathbb{N}$. On fixe T_1, \dots, T_k des représentants des classes de conjugaison de G dans $\text{Car}_j(G)$. Pour tout $1 \leq i \leq k$, on fixe un système de racines positives Ψ_i dans l'ensemble des racines imaginaires de T_i . On introduit l'application $\Pi_j^{\text{st}} : \mathcal{I}_j^{\text{st}}(\mathcal{U}) \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T_i)^{\Psi_i, \text{st}}$ définie par

$$\Pi_j^{\text{st}}(\psi) = \sum_{1 \leq i \leq k} b_{\Psi_i}\psi_{T_i}.$$

Rappelons (voir [L], p. 9) qu'une distribution sur \mathcal{U} est dite stablement invariante si elle se trouve dans la clôture pour la topologie faible de l'espace vectoriel engendré par les distributions $f \mapsto J_G^{\text{st}}(f)(\gamma)$, $\gamma \in \mathcal{U}_{\text{reg}}$.

Avec ces notations on a

THÉORÈME 6.2.1. – (i) L'application $J_G^{\text{st}} : \mathcal{D}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})$ est surjective.

(ii) Sa transposée ${}^t J_G^{\text{st}}$ est une bijection de $\mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})'$ sur l'espace des distributions stablement invariantes sur \mathcal{U} .

(iii) L'application Π_j^{st} est surjective.

(iv) Sa transposée Π_j^{st} est une bijection de $(\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T_i)^{\Psi_i, \text{st}})'$ sur l'orthogonal de $\mathcal{I}_{j-1}^{\text{st}}(\mathcal{U})$ dans $(\mathcal{I}_j^{\text{st}}(\mathcal{U}))'$.

Démonstration. – Soit $j \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{D}_j^{\text{st}}(\mathcal{U})$ l'image réciproque par J_G^{st} de $\mathcal{I}_j^{\text{st}}(\mathcal{U})$. Pour montrer (i) et (iii), il suffit, comme dans la démonstration du théorème 4.1.1, de montrer que $\Pi_j^{\text{st}} \circ J_G^{\text{st}}$ envoie surjectivement $\mathcal{D}_j^{\text{st}}(\mathcal{U})$ sur $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T_i)^{\Psi_i, \text{st}}$.

Pour tout $1 \leq i \leq k$, on introduit l'application

$$p_{T_i} : \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T_i)^{\Psi_i} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T_i)^{\Psi_i, \text{st}},$$

définie par

$$p_{T_i}(f) = \frac{1}{|W(G, T)|} \sum_{w \in W(G, T)} \epsilon_I(w) f(w \cdot \gamma) \xi_{w \cdot \rho_{\Psi} - \rho_{\Psi}}.$$

Il est clair que p_{T_i} est une application linéaire continue surjective de $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T_i)^{\Psi_i}$ sur $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T_i)^{\Psi_i, \text{st}}$.

Soit $(f_1, \dots, f_k) \in \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T_i)^{\Psi_i, \text{st}}$. Pour tout $1 \leq i \leq k$, il existe $\tilde{f}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap T_i)^{\Psi_i}$ telle que $p_{T_i}(\tilde{f}_i) = f_i$. D'après le théorème 3.2.1, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}_j(\mathcal{U})$ telle que $b_{\Psi_i} J_G(\varphi)_{T_i} = \tilde{f}_i$. Il est clair, d'après les définitions, que $b_{\Psi_i} J_G^{\text{st}}(\varphi)_{T_i} = p_{T_i}(b_{\Psi_i} J_G(\varphi)_{T_i})$, c'est-à-dire $\Pi_j^{\text{st}} \circ J_G^{\text{st}}(\varphi) = (f_1, \dots, f_k)$. Il reste à s'assurer que φ appartient à $\mathcal{D}_j^{\text{st}}(\mathcal{U})$; cela découle du fait que $\mathcal{D}_j(\mathcal{U}) \subset \mathcal{D}_j^{\text{st}}(\mathcal{U})$.

On déduit de (i) que si $\psi \in \mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})$ et si $\chi \in C^\infty(\mathcal{U})^{G, \text{st}}$, la fonction $\chi\psi$ appartient à $\mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})$. En effet, soit $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ telle que $J_G^{\text{st}}(f) = \psi$, alors $\chi\psi = \chi J_G^{\text{st}}(f) = J_G^{\text{st}}(\chi f)$, d'où l'assertion. Si $\theta \in \mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})'$ et si $\chi \in C^\infty(\mathcal{U})^{G, \text{st}}$, on définit la forme linéaire $\chi\theta$ sur $\mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})$ par $\chi\theta(\psi) = \theta(\chi\psi)$; il est clair qu'elle est continue. On déduit alors du lemme 6.1.1, comme dans les démonstrations des théorèmes 2.2.1 et 2.2.4 de [Ho], que la correspondance

$$\mathcal{V} \mapsto \mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{V})',$$

\mathcal{V} parcourant les ouverts stablement complètement invariants de \mathcal{U} , est un faisceau sur \mathcal{U} que l'on notera $\underline{\mathcal{I}}^{\text{st}}(\mathcal{U})'$.

Montrons l'assertion (ii). L'espace des distributions stablement invariantes coïncide avec $(\text{Ker } J_G^{\text{st}})^\perp$ et il est clair que ce dernier contient l'image de ${}^t J_G^{\text{st}}$. Il nous reste donc à montrer que l'image de ${}^t J_G^{\text{st}}$ contient $(\text{Ker } J_G^{\text{st}})^\perp$, c'est-à-dire si $\Theta \in \mathcal{D}(\mathcal{U})'$ est nulle sur $\text{Ker } J_G^{\text{st}}$, il existe $\theta \in \mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})'$ telle que ${}^t J_G^{\text{st}}(\theta) = \Theta$. Nous allons utiliser des arguments déjà employés dans [B-1]. Supposons que l'on ait une famille \mathcal{K} de compacts modulo G stablement invariants inclus dans \mathcal{U} , dont les intérieurs sont des ouverts stablement complètement invariants qui recouvrent \mathcal{U} , tels que, pour tout $L \in \mathcal{K}$, l'application J_G^{st}

envoie surjectivement $\mathcal{D}(L)$ (l'espace des fonctions appartenant à $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ dont le support est inclus dans L) sur $\mathcal{I}^{\text{st}}(L)$. La restriction de J_G^{st} à $\mathcal{D}(L)$ sera notée J_L^{st} . Pour chaque $L \in \mathcal{K}$, on choisit un ouvert $U_L \subset \mathcal{U}$ qui rencontre l'orbite de tout élément de L et dont l'adhérence $\overline{U_L}$ est un compact inclus dans \mathcal{U} ; en effet, il suffit de prendre, pour tout $1 \leq i \leq k$, un ouvert $U_i \subset \mathcal{U}$ qui contient $L \cap T_i$ et dont l'adhérence dans \mathcal{U} est compacte, alors la réunion des U_i répond à la question. La même démonstration que celle du lemme 10.2.1 de [B-1] montre que tout élément de $\mathcal{D}(L)$ s'écrit comme la somme d'un élément de $\mathcal{D}(L \cap \overline{U_L})$ et d'une somme finie d'éléments de la forme $g \cdot \varphi - \varphi$, $g \in G$ et $\varphi \in \mathcal{D}(L)$, c'est-à-dire $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L \cap \overline{U_L}) + \text{Ker} J_L^{\text{st}}$. On voit alors que la restriction de J_L^{st} ,

$$J_{L,U_L}^{\text{st}} : \mathcal{D}(L \cap \overline{U_L}) \longrightarrow \mathcal{I}^{\text{st}}(L),$$

est surjective. S'agissant d'espaces de Fréchet, le théorème 17.1 de [T-2] implique que tout élément de $(\mathcal{D}(L \cap \overline{U_L}))'$ nul sur $\text{Ker} J_{L,U_L}^{\text{st}}$ est dans l'image de ${}^t J_{L,U_L}^{\text{st}}$. Il existe donc un unique $\theta_L \in \mathcal{I}^{\text{st}}(L)'$ tel que ${}^t J_{L,U_L}^{\text{st}}(\theta_L)$ coïncide avec la restriction de Θ à $\mathcal{D}(L \cap \overline{U_L})$. La restriction de Θ à $\mathcal{D}(L)$ est alors égale à ${}^t J_L^{\text{st}}(\theta)$. Pour tout $L, L' \in \mathcal{K}$, les restrictions de θ_L et $\theta_{L'}$ à $\mathcal{I}^{\text{st}}(L \cap L')$ coïncident; en effet si $\psi \in \mathcal{I}^{\text{st}}(L \cap L')$, $f \in \mathcal{D}(L)$ et $f' \in \mathcal{D}(L')$ sont tels que $J_G(f) = J_G(f') = \psi$, on a $J_G(f - f') = 0$, donc $\Theta(f - f') = 0$, d'où l'on déduit que $\theta_L(\psi) = \theta_{L'}(\psi)$. Comme les intérieurs des $L \in \mathcal{K}$ recouvrent \mathcal{U} et que $\underline{\mathcal{I}}^{\text{st}}(\mathcal{U})'$ est un faisceau, il existe un unique $\theta \in \mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})'$ dont la restriction à chaque espace $\mathcal{I}^{\text{st}}(\text{int}(L))$ coïncide avec celle de θ_L . Il est clair que ${}^t J_G^{\text{st}}(\theta) = \Theta$. Il nous reste donc à montrer l'existence de la famille \mathcal{K} .

Soit x un élément semi-simple de \mathcal{U} . On utilise les notations du paragraphe précédent. Rappelons $J_{\mathfrak{m}_i}(\varphi)$ l'intégrale orbitale de $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{m}_i)$ (voir section 4). Alors, d'après le théorème 4.1.1, l'application $J_{\mathfrak{m}_i}$ envoie surjectivement $\mathcal{D}(\mathcal{V}_{i,\epsilon})$ sur $\mathcal{I}(\mathcal{V}_{i,\epsilon})$. On en déduit, comme dans le corollaire 11.2.3 de [B-1], que si $0 < \eta < \epsilon$, l'application $J_{\mathfrak{m}}$ envoie surjectivement $\mathcal{D}(\text{cl}_{\mathfrak{m}_i}(\mathcal{V}_{i,\eta}))$ sur $\mathcal{I}(\text{cl}_{\mathfrak{m}_i}(\mathcal{V}_{i,\eta}))$. Le raisonnement du paragraphe 5.2 montre que J_G envoie surjectivement $\mathcal{D}(L_{i,\eta})$ sur $\mathcal{I}(L_{i,\eta})$. En effet, si l'on utilise les notations du paragraphe 5.2, l'argument standard suivant montre que l'application π_* envoie $\mathcal{D}(G \times \text{cl}_{\mathfrak{m}_i}(\mathcal{V}_{i,\eta}))$ sur $\mathcal{D}(L_{i,\eta})$: soit $\varphi \in \mathcal{D}(L_{i,\eta})$, $\chi \in \mathcal{D}(\mathcal{U}_{i,\epsilon})$ qui vaut 1 au voisinage du support de φ et $f \in \mathcal{D}(G \times \mathcal{V}_{i,\epsilon})$ tel que $\pi_*(f) = \chi$, alors $\pi_*(f \cdot \varphi \circ \pi) = \varphi \pi_*(f) = \varphi \chi = \varphi$; de plus, le support de $f \cdot \varphi \circ \pi$ est un compact inclus dans $G \times \text{cl}_{\mathfrak{m}_i}(\mathcal{V}_{i,\eta})$. Il est clair que l'application p_* envoie $G \times \text{cl}_{\mathfrak{m}_i}(\mathcal{V}_{i,\eta})$ sur $\mathcal{D}(\text{cl}_{\mathfrak{m}_i}(\mathcal{V}_{i,\eta}))$ et que l'application $R_{\mathcal{U}_{i,\epsilon}, \mathcal{V}_{i,\epsilon}}$ induit une bijection entre $\mathcal{I}(L_{i,\eta})$ et $\mathcal{I}(\text{cl}_{\mathfrak{m}_i}(\mathcal{V}_{i,\eta}))$. Notre assertion découle alors du lemme 5.2.1. Ensuite on procède comme dans la démonstration des assertions (i) et (iii) pour montrer que J_G^{st} envoie surjectivement $\mathcal{D}(L_{x,\eta}^{\text{st}})$ sur $\mathcal{I}^{\text{st}}(L_{x,\eta}^{\text{st}})$. On fixe, pour tout élément semi-simple x de \mathcal{U} , un réel $\eta_x > 0$ assez petit, on peut alors prendre pour \mathcal{K} la famille des L_{x,η_x}^{st} , x parcourant l'ensemble des éléments semi-simples de \mathcal{U} .

Pour démontrer (vi), on procède de la même façon que pour (ii); nous omettons les détails. ■

Remarques. – 1. Pour $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$, on définit la fonction ψ^{st} sur \mathcal{U}_{reg} de la façon suivante. Si $\gamma \in \mathcal{U}_{\text{reg}}$, on note $\mathbf{T} = \mathbf{G}^\gamma$ et $T = \mathbf{T} \cap G$, alors

$$\psi^{\text{st}}(\gamma) = \frac{1}{|W(G, T)|} \sum_{w \in W(G, T)} \psi(w \cdot \gamma)$$

On voit facilement que ψ^{st} appartient à $\mathcal{I}^{\text{st}}(\mathcal{U})$ et que l'application $\psi \mapsto \psi^{\text{st}}$ est continue; la démonstration du théorème montre qu'elle est surjective.

2. Soit H le groupe des points réels d'un groupe réductif connexe quasi-déployé \mathbf{H} . On suppose que \mathbf{H} est une forme intérieure de \mathbf{G} , un groupe endoscopique pour la L-indiscernabilité ou un groupe endoscopique pour le changement de base \mathbb{C}/\mathbb{R} . Dans les trois situations Shelstad a établi une correspondance $\phi \rightarrow \phi_H$ de $\mathcal{S}(G)$ (espace de Harish-Chandra-Chwartz de G) dans $\mathcal{S}(H)$ appelée transfert (voir [S-1], [S-2] et [S-3]); avec les arguments de Shelstad, on déduit facilement du théorème 6.2.1 que si $\phi \in \mathcal{D}(G)$, on peut prendre ϕ_H dans $\mathcal{D}(H)$. En fait la correspondance, au moins dans les deux premières situations, provient d'une application

$$\text{Transf} : \mathcal{I}(G) \longrightarrow \mathcal{I}^{\text{st}}(H).$$

Il n'est pas difficile d'établir que Transf est continue. On obtient donc par dualité une application de $\mathcal{I}^{\text{st}}(H)'$ dans $\mathcal{I}(G)'$. Cela induit, par le théorème 3.2.1 et le théorème 6.2.1, une application $\Theta \mapsto \text{Rel}(\Theta)$, appelée relèvement, de l'espace des distributions stablement invariantes sur H dans l'espace des distributions invariantes sur G de sorte que

$$\text{Rel}(\Theta)(\phi) = \Theta(\phi_H).$$

En fait le relèvement a été défini par cette égalité et, pour montrer que c'est une distribution, on fait appel au théorème de Banach-Steinhaus. Dans les applications, Θ est souvent limite d'une suite d'éléments de l'espace vectoriel engendré par les distributions $\varphi \mapsto J_G^{\text{st}}(\varphi)(\gamma)$, $\gamma \in T_{\text{reg}}$, donc on peut vérifier facilement les hypothèses du théorème de Banach-Steinhaus, mais en général il n'est pas toujours aisé de le faire; cela a été remarqué par L. Clozel. Nos résultats permettent donc d'éviter cette difficulté.

7. Théorème de Paley-Wiener invariant

Dans cette section on se propose d'établir un théorème de type Paley-Wiener invariant pour $\mathcal{D}(G)$.

7.1. On commence par donner, dans ce paragraphe, une version plus précise du théorème 3.3.1 qui tient compte des supports. On reprend les notations des sections 2 et 3.

Soit $r > 0$ et soit $j \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{I}_j(L_r)$ le sous espace des éléments de $\mathcal{I}_j(G)$ à support dans L_r et, pour tout $1 \leq i \leq k$, notons $\mathcal{D}(L_r \cap H_i)^{\Psi_i}$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{D}(H_i)^{\Psi_i}$ à support dans $L_r \cap H_i$. Avec ces notations, on a

PROPOSITION 7.1.1. – *L'application Π_j envoie surjectivement $\mathcal{I}_j(L_r)$ sur $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(L_r \cap H_i)^{\Psi_i}$.*

Démonstration. – On commence par montrer l'assertion suivante. Soient $\psi \in \mathcal{I}(G)$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $H \in \text{Car}_n(G)$, $\text{supp}_H(\psi_H) \subset L_r \cap H$. Alors il existe $\psi' \in \mathcal{I}_{n-1}(G)$ tel que, pour tout $B \in \text{Car}_{n-1}(G)$, $\text{supp}_B(\psi - \psi')_B \subset L_r \cap B$.

Soit $B \in \text{Car}_{n-1}(G)$ et soit Ψ un système de racines positives dans le système de racines imaginaires de B . L'hypothèse sur ψ implique que la fonction $b_{\Psi}\psi_B$ se prolonge

en une fonction C^∞ sur $B \setminus (L_r \cap B)$ avec, évidemment, toutes ses "dérivées" continues sur l'adhérence de cet ensemble. Notons T (resp. A) le sous-groupe compact (resp. vectoriel) maximal de B et $S_r = \{a \in A; |a| = r\}$. Donc $T \times S_r$, le bord de l'adhérence de $B \setminus (L_r \cap B)$ est lisse. On déduit alors facilement de [W], théorème I, qu'au voisinage de chaque point de $T \times S_r$, la restriction de la fonction $b_\psi \psi_B$ à $B \setminus (L_r \cap B)$ se prolonge en une fonction C^∞ . On obtient donc, par une partition de l'unité, une fonction $f \in \mathcal{D}(B)$ qui coïncide sur $B \setminus (L_r \cap B)$ avec $b_\psi \psi_B$. La fonction

$$\frac{1}{|W(G, B)|} \sum_{w \in W(G, B)} \epsilon_I(w) \xi_{\rho_w \cdot \psi - \rho_\psi} w \cdot f$$

coïncide aussi sur $B \setminus (L_r \cap B)$ avec $b_\psi \psi_B$, de plus elle appartient à $\mathcal{D}(B)^\Psi$. Il existe alors, d'après le théorème 3.3.1, $f' \in \mathcal{I}_{n-1}(G)$ telle que $b_\psi f'_B = f$ et $f'_H \equiv 0$ pour tout $H \in \text{Car}_{n-1}(G)$ non conjugué à B . Evidemment $\text{supp}(\psi_B - f'_B) \subset L_r \cap B$. On refait le même raisonnement pour la restriction de ψ à un représentant de chaque classe de conjugaison de G dans $\text{Car}_{n-1}(G)$ pour obtenir la fonction ψ' cherchée. La proposition en découle par une récurrence évidente. ■

Remarques. - 1. L'application J_G de $\mathcal{D}(L_r)$ dans $\mathcal{I}(L_r)$ n'est pas en général surjective. Par exemple, si G contient un sous-groupe de Cartan compact T qui est donc inclus dans L_0 , la fonction φ de la démonstration du corollaire 3.3.3 est l'image par Π_0 d'un élément ψ de $\mathcal{I}_0(L_0)$, d'après la proposition 7.1.1; de plus, si $f \in \mathcal{D}(G)$ et $J_G(f) = \psi$, on a $f(1) \neq 0$. Donc on ne peut pas choisir f de sorte que son support soit inclus dans L_0 , autrement on aurait $f(1) = 0$ car 1 est dans l'adhérence de $G \setminus L_0$. Cependant, si $\psi \in \mathcal{I}(L_r)$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in \mathcal{D}(U_{r+\epsilon})$ tel que $J_G(f) = \psi$; cela découle du fait que L_r est compact modulo G inclus dans $U_{r+\epsilon}$, ouvert complètement G -invariant.

2. Soit $\epsilon > 0$ et soit U un ouvert de G relativement compact qui rencontre l'orbite de chaque élément de L_ϵ . On voit comme dans le lemme 10.2.1 de [B-1] que tout $\varphi \in \mathcal{D}(L_\epsilon)$ s'écrit comme la somme d'une fonction $\varphi_U \in \mathcal{D}(L_\epsilon \cap \text{cl}_G(U))$ et d'une somme finie de fonctions de la forme $g \cdot \varphi - \varphi$, $g \in G$ et $\varphi \in \mathcal{D}(L_\epsilon)$. On en déduit que l'on peut choisir la fonction f du corollaire 3.3.4 dans $\mathcal{D}(L_\epsilon \cap \text{cl}_G(U))$.

7.2. Si ℓ est le rang de G , on note D_G la fonction sur G définie par

$$\det(\lambda + 1 - \text{Ad}(g)) = \lambda^\ell D_G(g) \quad \text{modulo } (\lambda^{\ell+1}).$$

Si $H \in \text{Car}(G)$, on note $W'(G, H) = N(G, H)/H$ (si l'on note \mathfrak{h} l'algèbre de Lie de H , on a $W'(G, H) = W(G, \mathfrak{h})$) et $c_{G,H}$ la fonction localement constante sur H définie par

$$c_{G,H}(\gamma) = |H/Z(G, \gamma H^0)|.$$

Soit $H \in \text{Car}(G)$ d'algèbre de Lie \mathfrak{h} . On note $M = Z(G, \mathfrak{h}_R)$. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de G contenant M , N son radical nilpotent, et soit K un sous-groupe compact maximal de G . On note \mathfrak{n} l'algèbre de Lie de N . Les groupes M et K se trouvent, suivant nos conventions, munis de mesures de Haar, on munit alors N de la mesure de Haar telle que l'on ait la formule intégrale

$$\int_G f(g) dg = \int_{K \times M \times N} f(kmn) |\det(\text{Ad}(m)_\mathfrak{n})| dk dm dn \quad f \in \mathcal{D}(G).$$

Suivant Harish-Chandra (voir par exemple [V], proposition II-6-30), on définit l'application linéaire continue $\iota_P : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \mathcal{D}(M)$ par

$$\iota_P(f)(m) = |\det(\text{Ad}(m)_n)|^{\frac{1}{2}} \int_N \int_K f(kmnk^{-1}) dk dn.$$

Pour toute distribution M -invariante sur M , on note $I_M^G(\theta) = {}^t \iota_P(\theta)$; c'est une distribution G -invariante sur G qui, comme le suggère la notation, ne dépend pas du sous-groupe parabolique ayant M pour composante de Lévi, on l'appellera l'induite de M à G de θ car si π est une représentation admissible de M de caractère θ_π , alors $I_M^G(\theta_\pi)$ est le caractère de la représentation induite

$$\text{Ind}_{MN}^G(\pi \otimes \text{Id}_N),$$

où Id_N désigne la représentation triviale de N .

On note \hat{H} (resp. \hat{H}_u) l'ensemble des classes de représentations (resp. représentations unitaires) irréductibles de H , T (resp. A) le sous groupe compact (resp. vectoriel) maximal de H de telle sorte que $H = TA$, \mathfrak{t} et \mathfrak{a} les algèbres de Lie respectives de T et A ($\mathfrak{a} = \mathfrak{h}_R$). Si $\Gamma \in \hat{T}$ (l'ensemble des classes de représentations (unitaires) irréductibles de T) et si $\nu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, on définit la représentation (Γ, ν) de H par $(\Gamma, \nu)(t \exp(Y)) = e^{i\nu(Y)} \Gamma(t)$. On obtient ainsi toutes les représentations irréductibles de \hat{H} . La représentation (Γ, ν) est unitaire si et seulement si $\nu \in \mathfrak{a}^*$.

On écrit $M = {}^0MA$ la décomposition de Langlands de M . Soit Ψ un système de racines positives dans l'ensemble des racines imaginaires de H et soit $h^* = (\Gamma, \nu) \in \hat{H}$, on note $\Theta_{\Gamma, \Psi}^0 M$ la distribution invariante associée à (Γ, Ψ) par Harish-Chandra ([H-C-1], 24.); elle est tempérée et vérifie

$$\prod_{\alpha \in \Psi} (1 - \xi_\alpha(t^{-1})) \Theta_{\Gamma, \Psi}^0 M(t) = \sum_{W' \in ({}^0M, T)} \epsilon(w) \text{tr} \Gamma(w^{-1} \cdot t) \xi_{w \cdot \rho_\Psi - \rho_\Psi}(t) \quad t \in T_{\text{reg}}.$$

(On pourra aussi voir [H-C-4] où il est montré que ces distributions sont supertempérées.)

Il existe $\mu \in i\mathfrak{t}^*$ tel que $\Gamma(\exp(X)) = e^{\mu(X)} \text{Id}$ pour tout $X \in \mathfrak{t}$. On pose $\lambda = \mu + \rho_\Psi$. On note $W_\mathbb{C}$ le groupe de Weyl du système de racines $\Delta(\mathfrak{m}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ et $W_\mathbb{C}(\lambda)$ l'ensemble des $w \in W_\mathbb{C}$ tels que $w \cdot \lambda = \lambda$. Soit Ψ^+ un système de racines positives dans $\Delta(\mathfrak{m}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ pour lequel λ est dominant. Alors λ est dominant pour $w \cdot \Psi^+$, $w \in W_\mathbb{C}(\lambda)$. Pour $w \in W_\mathbb{C}(\lambda)$, on note $\Pi(\Gamma, w \cdot \Psi^+)$ la représentation de la limite de série discrète de 0M associée à $(\Gamma, w \cdot \Psi^+)$ et $\Theta(\Gamma, w \cdot \Psi^+)$ son caractère. On a (voir [H-S], -2)

$$\Theta_{\Gamma, \Psi}^0 M = \frac{\epsilon(\Psi, \Psi^+)}{|W_\mathbb{C}(\lambda)|} \sum_{w \in W_\mathbb{C}(\lambda)} \epsilon(w) \Theta(\Gamma, w \cdot \Psi^+);$$

où $\epsilon(\Psi, \Psi^+)$ est un signe qui ne dépend que de Ψ et Ψ^+ . On pose

$$\Theta_{h^*, \Psi}^G = I_M^G(\Theta_{\Gamma, \Psi}^0 M \otimes e^{i\nu}).$$

Quand il n'y a aucune ambiguïté sur le groupe G , on notera cette distribution simplement $\Theta_{h^*, \Psi}$. Elle est tempérée quand $\nu \in \mathfrak{a}^*$ parcequ'elle est une combinaison linéaire de

caractères de représentations induites unitaires à partir de représentations dans la limite de la série discrète. Un calcul simple (voir [B-2], lemme 7.1.3) donne

$$b_\Psi(\gamma)|D_G(\gamma)|^{\frac{1}{2}}\Theta_{h^*,\Psi}(\gamma) = \sum_{w \in W'(G,H)} \epsilon_I(w)\text{tr}h^*(w^{-1} \cdot \gamma)\xi_{w,\rho_\Psi-\rho_\Psi}(\gamma) \quad \gamma \in H_{\text{reg}}.$$

Si $g \in G$, on note $g \cdot h^*$ la représentation de gHg^{-1} image par $\text{Ad}(g)$ de h^* et $g \cdot \Psi$ l'image de Ψ . Alors on a $\Theta_{g \cdot h^*,g \cdot \Psi} = \Theta_{h^*,\Psi}$. Pour $x \in N(G,H)$, on pose $x \bullet_\Psi h^*(h) = h^*(x^{-1}hx)\xi_{x,\rho_\Psi-\rho_\Psi}(h)$. Si $x \in H$, on a $x \bullet_\Psi h^* = h^*$. On peut donc définir $w \bullet_\Psi h^*$ pour tout élément w de $W(G,H)$ ou de $W'(G,H)$. D'après ([H-C-3], § 27, lemme 3), on a

$$(1) \quad \Theta_{x \bullet_\Psi h^*,\Psi}^G = \epsilon_I(x)\Theta_{h^*,\Psi}^G \quad x \in W'(G,H).$$

On vérifie alors facilement que $\Theta_{h^*,\Psi}$ est nulle si et seulement si il existe $w \in W'(G,H)$ tel que $w \bullet_\Psi h^* = h^*$ et $\epsilon_I(w) = -1$.

On prolonge la restriction de κ à \mathfrak{a} en une forme hermitienne (définie positive) sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$, elle induit une structure hilbertienne sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$. On fait de même pour $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ et $\mathfrak{t}_\mathbb{C}^*$ en remplaçant κ par $-\kappa$. Si $\Gamma \in \widehat{T}$ et si $\mu \in \mathfrak{t}^*$ vérifient $\Gamma(\exp(X)) = e^{i\mu(X)}\text{Id}$ pour tout $X \in \mathfrak{t}$, on pose $\|\Gamma\| = \|\mu\|$ et $\|(\Gamma,\nu)\| = \|\Gamma\| + \|\nu\|$.

Si $\varphi \in \mathcal{D}(H)$, on définit sa transformée de Fourier que l'on note $\hat{\varphi}$ par

$$\hat{\varphi}(h^*) = \int_H \varphi(h)\text{tr}h^*(h)dh.$$

On définit l'espace de Paley-Wiener de H , que l'on note $\mathcal{PW}(H)$, comme suit. Si $r > 0$, on note $\mathcal{PW}(H)_r$ l'espace des fonctions F sur \widehat{H} telles que :

- $\mathcal{PW}_1(H)$ pour tout $\Gamma \in \widehat{T}$, la fonction $\nu \mapsto F(\Gamma,\nu)$ est entière sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}$,
- $\mathcal{PW}_2(H)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_N telle que

$$|F(\Gamma,\nu)| \leq C_N(1 + \|\Gamma\| + \|\nu\|)^{-N}e^{r\|\text{Im}\nu\|}, \quad (\Gamma,\nu) \in \widehat{H};$$

où $\text{Im}\nu$ désigne la partie imaginaire de ν .

L'espace $\mathcal{PW}(H)$ est la réunion des $\mathcal{PW}(H)_r$, $r \in \mathbb{R}_+^\times$. On munit $\mathcal{PW}(H)_r$ de la topologie définie par les semi-normes

$$S_k(F) = \sup_{\substack{\Gamma \in \widehat{T} \\ \nu \in \mathfrak{a}^*}} (1 + \|\Gamma\| + \|\nu\|)^k |F(\Gamma,\nu)|.$$

Si Ψ est un système de racines imaginaires positives de H , on note $\mathcal{PW}(H)^\Psi$ (resp. $\mathcal{PW}(H)_r^\Psi$) le sous-espace des $F \in \mathcal{PW}(H)$ (resp. $\mathcal{PW}(H)_r$) vérifiant

$$F(w \bullet_\Psi h^*) = \epsilon_I(w)F(h^*), \quad w \in W'(G,H).$$

La première partie du lemme suivant doit être bien connue, mais faute de références, nous allons donner une esquisse de la démonstration.

LEMME 7.2.1. – (i) Pour tout $r \in \mathbb{R}_+^\times$, l'espace $\mathcal{PW}(H)_r$ est de Fréchet et l'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est continue surjective de $\mathcal{D}(L_r \cap H)$ sur $\mathcal{PW}(H)_r$.

(ii) Si Ψ est un système de racines imaginaires positives de H , la transformée de Fourier réalise une bijection entre $\mathcal{D}(H)^{-\Psi}$ et $\mathcal{PW}(H)^\Psi$.

Démonstration. – Supposons $H = A$. Alors la transformée de Fourier réalise une isomorphisme topologique de $\mathcal{D}(A_r)$ sur $\mathcal{PW}(A)_r$; c'est un résultat classique sur \mathbb{R}^n . La démonstration du lemme repose sur l'observation suivante. Pour $F \in \mathcal{PW}(A)_r$, on pose

$$S'_k(F) = \sup_{\nu \in \mathfrak{a}_c^*} (1 + \|\nu\|)^k |e^{-r\|\text{Im}\nu\|} F(\nu)|.$$

Alors la famille de semi-normes $\{S'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ définit sur $\mathcal{PW}(A)_r$ la même topologie que la famille $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. En effet il est clair que la famille $\{S'_k\}$ définit sur $\mathcal{PW}(A)_r$ une topologie d'espace de Fréchet plus fine que celle définie par la famille $\{S_k\}$. Il découle alors de [T-1] (corollaire 1 du théorème 17.1) que les deux topologies coïncident. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $k' \in \mathbb{N}$ et une constante $C_k > 0$ tels que

$$(2) \quad S'_k(F) \leq C_k S_{k'}(F), \quad \text{pour tout } F \in \mathcal{PW}(A)_r.$$

Revenons à la situation générale. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{PW}(H)_r$. Pour tout $\Gamma \in \hat{T}$, la suite de fonctions $\nu \mapsto F_n(\Gamma, \nu)$ est de Cauchy dans $\mathcal{PW}(A)_r$. Elle converge donc vers une fonction $F_\Gamma \in \mathcal{PW}(A)_r$. La fonction

$$F : (\Gamma, \nu) \mapsto F_\Gamma(\nu)$$

vérifie évidemment $PW_1(H)$ et on déduit facilement de (2) qu'elle vérifie aussi $PW_2(H)$. Le fait que la suite F_n soit de Cauchy implique alors qu'elle converge dans $\mathcal{PW}(H)_r$ vers F . Donc $\mathcal{PW}(H)_r$ est un espace de Fréchet. La continuité de l'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est élémentaire. On munit \mathfrak{a}^* de la mesure de Lebesgue duale de celle de \mathfrak{a} , c'est-à-dire pour tout $\psi \in \mathcal{D}(A)$ on a

$$\varphi(a) = \int_{\mathfrak{a}^*} \hat{\varphi}(\nu) e^{-i\nu(\log a)} d\nu, \quad \text{pour tout } a \in A.$$

On vérifie alors que si $F \in \mathcal{PW}(H)_r$, la fonction

$$\tilde{F}(ta) = \frac{1}{\text{vol}(T)} \sum_{\Gamma \in \hat{T}} \overline{\text{tr}\Gamma(t)} \int_{\mathfrak{a}^*} F(\Gamma, \nu) e^{-i\nu(\log a)} d\nu$$

appartient à $\mathcal{D}(L_r \cap H)$ et $\hat{\tilde{F}} = F$. De l'assertion (i) on déduit que la transformée de Fourier est surjective de $\mathcal{D}(H)$ sur $\mathcal{PW}(H)$. On vérifie qu'elle envoie $\mathcal{D}(H)^{-\Psi}$ dans $\mathcal{PW}(H)^\Psi$ et que si $F \in \mathcal{PW}(H)^\Psi$, la fonction \tilde{F} appartient à $\mathcal{D}(H)^{-\Psi}$. Donc elle est surjective de $\mathcal{D}(H)^{-\Psi}$ dans $\mathcal{PW}(H)^\Psi$. Elle est injective aussi, cela provient du fait que la transformée de Fourier est injective sur le sous-espace de $\mathcal{D}(H)$ des fonctions H -invariantes (par automorphismes intérieurs) et du fait que celui-ci contient $\mathcal{D}(H)^{-\Psi}$. ■

On munit l'espace $\mathcal{PW}(H)$ de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{PW}(H)_r, r \in \mathbb{R}_+^\times$. C'est un espace LF et l'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est continue surjective de $\mathcal{D}(H)$ sur $\mathcal{PW}(H)$. Si $f \in \mathcal{D}(G)$, on définit

$$\mathcal{F}(f)_H(h^*) = \Theta_{h^*, \Psi}^G(f), \quad h^* \in \hat{H}.$$

LEMME 7.2.2. – Soit $r > 0$.

- (i) Pour tout $f \in \mathcal{D}(L_r)$, la fonction $\mathcal{F}(f)_H$ appartient à $\mathcal{PW}(H)_r^\Psi$.
- (ii) L'application $f \mapsto \mathcal{F}(f)_H$ de $\mathcal{D}(L_r)$ dans $\mathcal{PW}(H)_r$ est continue.

Démonstration. – On utilise les notations ci-dessus. On remarque que pour $k \in K, m \in M$ et $n \in N$, on a $|kmnk^{-1}| = |m|$. En effet, comme l'application $g \mapsto |g|$ est continue et G -invariante, il suffit de voir que m appartient à l'adhérence de l'orbite de mn . Soit $X \in \mathfrak{a}$ tel que toutes les valeurs propres de $\text{ad}X$ dans \mathfrak{n} sont strictement négatives. Alors, comme pour tout $t \in \mathbb{R}, \exp(tX)$ commute avec m , on voit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(tX)mn \exp(-tX) = m.$$

Donc si $f \in \mathcal{D}(L_r)$, le support de $\iota_P(f)$ est inclus dans $L_r \cap M$. Il suffit donc de considérer le cas où $G = M$. Supposons cela et écrivons $G = {}^0G \times A$, où 0G est l'intersection des noyaux des homomorphismes continus de G dans \mathbb{R}_+^\times . Alors T est un sous-groupe de Cartan compact de 0G et $L_r \subset {}^0G \times A_r$. Si $f \in \mathcal{D}({}^0G \times A_r)$ et si $\Gamma \in \hat{T}$, il est bien connu que la fonction $a \mapsto \Theta_{\Gamma, \Psi}^G(f(\cdot, a))$ appartient à $\mathcal{D}(A_r)$, cela montre que $\mathcal{F}(f)_H$ vérifie $\text{PW}_1(H)$.

Il découle du corollaire du lemme 60 de [H-C-1] qu'il existe une constante C telle que, pour tout $\Gamma \in \hat{T}$, on a

$$|D_{{}^0G}(\gamma)|^{1/2} |\Theta_{\Gamma, \Psi}^G(\gamma)| \leq C.$$

Si $f \in \mathcal{D}({}^0G \times A_r)$, la formule d'intégration de Weyl sur 0G donne

$$\Theta_{\Gamma, \Psi}^G(f(\cdot, a)) = \sum_{[B]} \frac{1}{|W'({}^0G, B)|} \int_B c_{G, B}(\gamma)^{-1} |D_{{}^0G}(\gamma)|^{1/2} \Theta_{\Gamma, \Psi}^G(\gamma) J_{{}^0G}(f(\cdot, a))(\gamma) d\gamma,$$

où la somme est prise sur l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de 0G . Si L est un compact de 0G tel que $\text{supp}(f) \subset L \times A_r$, il existe d'après la continuité de $J_{{}^0G}$, une semi norme continue p sur $\mathcal{D}(L)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(L)$ et pour tout $B \in \text{Car}({}^0G)$, on ait

$$\sup_{\gamma \in (B)_{\text{reg}}} |J_{{}^0G}(\varphi)(\gamma)| \leq p(\varphi).$$

Cela montre qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$|\Theta_{\Gamma, \Psi}^G(f(\cdot, a))| \leq C' p(f(\cdot, a)) \quad \text{pour tout } \Gamma \in \hat{T}.$$

Si l'on note $\hat{\psi}$ la transformée de Fourier d'une fonction $\psi \in \mathcal{D}(A_r)$, on a

$$|\hat{\psi}(\nu)| \leq \text{vol}(A_r) \sup_{a \in A} |\psi(a)| e^{r\|\text{Im}\nu\|}.$$

Donc, pour tout $f \in \mathcal{D}(L \times A_r)$, on a

$$(3) \quad |\Theta_{\Gamma, \Psi}^0(f(\cdot, a))| \leq C' \text{vol}(A_r) \sup_{a \in A} p(f(\cdot, a)) e^{r\|\text{Im}\nu\|}.$$

Notons ω l'élément de Casimir du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de 0G , que l'on regarde comme un opérateur différentiel sur 0G . Pour tout $\Gamma \in \widehat{T}$, il existe une constante $\chi_{\Gamma}(\omega)$ telle que

$$\omega \cdot \Theta_{\Gamma, \Psi} = \chi_{\Gamma}(\omega) \Theta_{\Gamma, \Psi}.$$

Si $u \in S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$, on note \hat{u} le polynôme sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ définie par

$$(\partial(u) \cdot \psi)^{\wedge}(\nu) = \hat{u}(\nu) \hat{\psi}(\nu), \quad \psi \in \mathcal{D}(A).$$

On déduit alors de (3) que

$$(4) \quad |\mathcal{F}(f)_H(\Gamma, \nu)| \leq C' \text{vol}(A_r) \chi_{\Gamma}(\omega)^{-k} \hat{u}(\nu)^{-1} \sup_{a \in A} p((\omega^k \otimes \partial(u))f(\cdot, a)) e^{r\|\text{Im}\nu\|}.$$

En remarquant que $\chi_{\Gamma}(\omega)$ est équivalent à $\|\Gamma\|$ quand $\|\Gamma\|$ tend vers l'infini, on voit alors que la fonction $\mathcal{F}(f)_H$ vérifie $\text{PW}_2(H)$. Donc, d'après (1), $\mathcal{F}(f)_H$ appartient à $\mathcal{PW}(H)_r^{\Psi}$. L'assertion (ii) du lemme découle aisément de (4). ■

7.3. On fixe H_1, \dots, H_s des représentants des classes de conjugaison de G dans $\text{Car}(G)$ et, pour chaque $1 \leq i \leq s$, on fixe un système de racines positives Ψ_i dans l'ensemble des racines imaginaires de H_i . Pour $f \in \mathcal{D}(G)$, on définit, comme ci-dessus, les fonctions $\mathcal{F}(f)_{H_i} \in \mathcal{PW}(H_i)^{\Psi_i}$.

THÉORÈME 7.3.1. – *L'application linéaire*

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}(G) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{PW}(H_i)^{\Psi_i},$$

définie par $\mathcal{F}(f) = \sum_{1 \leq i \leq s} \mathcal{F}(f)_{H_i}$, est continue et surjective.

Démonstration. – La continuité découle du lemme 7.2.2 car $\mathcal{D}(G)$ est la limite inductive stricte des $\mathcal{D}(L_r)$. Soit $j \in \mathbb{N}$. Notons H_{i_1}, \dots, H_{i_k} les sous-groupes de Cartan H_i qui appartiennent à $\text{Car}_j(G)$. Soit $F = \sum_{1 \leq i \leq s} F_i \in \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{PW}(H_i)^{\Psi_i}$ tel que, pour $t > j$, $F_i = 0$ si $H_i \in \text{Car}_t(G)$. D'après le lemme 7.2.1, il existe une fonction $\varphi_{i_1} \in \mathcal{D}(H_{i_1})^{-\Psi_{i_1}}$ telle que $\hat{\varphi}_{i_1} = F_{i_1}$. La fonction $c_{G, H_{i_1}} \varphi_{i_1}$ appartient aussi à $\mathcal{D}(H_{i_1})^{-\Psi_{i_1}}$. Il existe donc par les théorèmes 3.2.1 et 3.3.1 une fonction $f \in \mathcal{D}_j(G)$ telle que $b_{-\Psi_{i_1}} J_G(f)_{H_{i_1}} = c_{G, H_{i_1}} \varphi_{i_1}$. Soit $1 \leq i \leq s$. D'après les formules donnant les caractères des représentations induites (voir, par exemple, [B-2], lemme 7.1.3), si $H \in \text{Car}(G)$ vérifie $[H] \not\leq [H_i]$, alors pour tout $h^* \in \widehat{H_i}$, la restriction de Θ_{h^*, Ψ_i} à H_{reg} est nulle. D'où, par un calcul simple,

$(c_{G, H_{i_1}}^{-1} b_{-\Psi_{i_1}} J_G(f)_{H_{i_1}}) = \mathcal{F}(f)_{H_{i_1}}$. Le théorème en découle par une récurrence évidente sur j . ■

7.4. On conserve les notations des paragraphes précédents. On note $\theta_{h^*, \Psi}$ l'élément de $\mathcal{I}(G)'$ défini par $\theta_{h^*, \Psi}(J_G(f)) = \Theta_{h^*, \Psi}(f)$, $f \in \mathcal{D}(G)$, dont l'existence est assurée par le théorème 3.2.1. Si $\psi \in \mathcal{I}(G)$, on définit

$$\overline{\mathcal{F}}(\psi)_H(h^*) = \theta_{h^*, \Psi}(\psi), \quad h^* \in \widehat{H}.$$

THÉORÈME 7.4.1. – *L'application linéaire*

$$\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{I}(G) \longrightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{PW}(H_i)^{\Psi_i},$$

définie par $\overline{\mathcal{F}}(\psi) = \sum_{1 \leq i \leq s} \overline{\mathcal{F}}(\psi)_{H_i}$, est un isomorphisme (topologique) qui induit, pour tout $r > 0$, un isomorphisme (topologique) de $\mathcal{I}(L_r)$ sur $\bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{PW}(H_i \cap L_r)^{\Psi_i}$.

Démonstration. – D'après les propriétés des espaces LF , il suffit d'établir la seconde assertion. D'après le lemme 7.2.2, l'application $\overline{\mathcal{F}}$ est continue, il suffit alors de montrer qu'elle établit une bijection entre $\mathcal{I}(L_r)$ et $\bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{PW}(H_i \cap L_r)^{\Psi_i}$ car une application linéaire continue et bijective entre deux espaces de Fréchet est un isomorphisme [T-1] (corollaire 1 du théorème 17.1). Vu la proposition 7.1.1, la démonstration de la surjectivité est la même que celle du théorème 7.3.1. L'injectivité découle du lemme 7.2.1. ■

Pour $H \in \text{Car}(G)$, on note $\mathcal{I}(G)^{[H]}$ le sous-espace des $\psi \in \mathcal{I}(G)$ tels que $\overline{\mathcal{F}}(\psi)_B \equiv 0$ pour tout $B \in \text{Car}(G)$ non conjugué à H , c'est-à-dire l'image réciproque par l'application $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{PW}(H_i)^{\Psi_i}$ où $H_i \in [H]$. Pour $r > 0$, on note $\mathcal{I}(L_r)^{[H]} = \mathcal{I}(G)^{[H]} \cap \mathcal{I}(L_r)$. On déduit alors du théorème 7.4.1.

COROLLAIRE 7.4.2. – *On a les isomorphismes (topologiques)*

$$\mathcal{I}(G) \cong \bigoplus_{[H]} \mathcal{I}(G)^{[H]},$$

et

$$\mathcal{I}(L_r) = \bigoplus_{[H]} \mathcal{I}(L_r)^{[H]},$$

où $[H]$ parcourt l'ensemble des classes de conjugaison de G dans $\text{Car}(G)$.

Le problème de décrire explicitement ces isomorphismes est le même que celui de l'inversion des intégrales orbitales.

Les arguments de la démonstration du théorème 7.3.1 montrent que si $\psi \in \mathcal{I}(G)^{[H]}$, alors $\psi_B \equiv 0$ pour tout $B \in \text{Car}(G)$ tel que $[B] \not\cong [H]$, donc si $H \in \text{Car}_j(G)$, l'espace $\mathcal{I}(G)^{[H]}$ est inclus dans $\mathcal{I}_j(G)$. Il est clair aussi que si Ψ est un système de racines positives dans l'ensemble des racines imaginaires de H , l'application $\psi \mapsto b_{\Psi} \psi_H$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{I}(G)^{[H]}$ sur $\mathcal{D}(H)^{\Psi}$. On obtient donc

COROLLAIRE 7.4.3. – *On a un isomorphisme topologique*

$$\mathcal{I}(G) \cong \bigoplus_{[H]} \mathcal{D}(H)^{\Psi}.$$

7.5. Dans ce paragraphe, nous allons présenter certains des résultats ci-dessus sous la forme énoncée par Arthur [A-1] ("assumption 5.2") pour les groupes réels. Nous continuons à supposer que G est dans la classe de Harish-Chandra (pas nécessairement linéaire).

On note \mathcal{L}^G l'ensemble des sous-groupes de Lévi de G . Si $M \in \mathcal{L}^G$, on note \mathfrak{a}_M l'algèbre de Lie de sa composante déployée, $\Pi_{\text{temp}}(M)$ l'ensemble des classes de représentations tempérées irréductibles de M et, pour $\pi \in \Pi_{\text{temp}}(M)$ et $\nu \in \mathfrak{a}_M^*$, on note

$$\pi_\nu = \text{Ind}_{MN}^G(\pi \otimes e^{i\nu} \otimes \text{Id}_N);$$

où N est le radical nilpotent d'un sous-groupe parabolique de G ayant M pour composante de Lévi. La représentation π_ν est tempérée de longueur finie et ne dépend pas de N .

Pour $\pi \in \Pi_{\text{temp}}(M)$, on note $\|\pi\|$ la plus petite valeur propre de $\pi(\omega_M - 2\omega_{K_M})$, où ω_M (resp. ω_{K_M}) désigne l'élément de Casimir de M (resp. K_M), K_M étant un sous-groupe compact maximal de M . Soit $r > 0$. On note $\mathcal{J}_r(G)$ l'ensemble des fonctions

$$F : \Pi_{\text{temp}}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

satisfaisant les conditions suivantes:

J.1. Pour tout $M \in \mathcal{L}^G$, la fonction $\nu \mapsto F(\pi_\nu)$ est C^∞ sur \mathfrak{a}_M^* et, pour tout $u \in S((\mathfrak{a}_M^*)_{\mathbb{C}})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|F\|_{u,n} = \sup_{\pi \in \Pi_{\text{temp}}(M)} (1 + \|\pi\|)^n |\partial(u)F(\pi_0)| < \infty;$$

où $F(\pi_\nu) = \sum_{i=1, \dots, n} F(\pi_i)$, si $\pi_\nu = \bigoplus_{i=1, \dots, n} \pi_i$ est la décomposition de π_ν en somme de représentations irréductibles.

J.2. Pour tout $M \in \mathcal{L}^G$ et pour tout $\pi \in \Pi_{\text{temp}}(M)$, la fonction

$$X \mapsto \int_{\mathfrak{a}_M^*} F(\pi_\nu) e^{-i\nu(X)} d\nu$$

(qui appartient à $\mathcal{S}(\mathfrak{a}_M)$ d'après J-1) est à support dans la boule de \mathfrak{a}_M (muni de la norme définie par la restriction de $\kappa_{\mathfrak{g}}$) de centre 0 et de rayon r .

On munit $\mathcal{J}_r(G)$ de la topologie définie par les semi-normes $\|\cdot\|_{u,n}$. On introduit l'espace $\mathcal{J}(G)$, réunion des $\mathcal{J}_r(G)$, que l'on munit de la topologie de la limite inductive.

Si $f \in \mathcal{D}(G)$, on définit la fonction $\phi(f)$ sur $\Pi_{\text{temp}}(G)$ par $\phi(f)(\pi) = \text{tr}\pi(f)$. Alors on voit facilement, comme dans le lemme 7.2.2, que $\phi(f) \in \mathcal{J}(G)$ et que l'application $\phi : \mathcal{D}(G) \rightarrow \mathcal{J}(G)$ est continue.

COROLLAIRE 7.5.1. – *L'application ϕ est surjective et l'image de sa transposée ${}^t\phi$ est l'ensemble des distributions invariantes sur G .*

Nous avons besoin du lemme suivant dont on esquisse la démonstration faute de références.

LEMME 7.5.2. – *L'espace vectoriel engendré par les distributions $\Theta_{h^*, \Psi}$, $H \in \text{Car}(G)$, $h^* \in \hat{H}_w$, Ψ un système de racines imaginaires positives de H , coïncide avec l'espace vectoriel engendré par les caractères des représentations irréductibles tempérées.*

Démonstration. – Vu que chaque $\Theta_{h^*, \Psi}$ (h^* unitaire) est une combinaison linéaire de caractères de représentations tempérées de longueur finie, il suffit de montrer que le caractère de chaque représentation irréductible tempérée appartient à l'espace vectoriel \mathcal{T} engendré par les $\Theta_{h^*, \Psi}$. En fait on va montrer que \mathcal{T} contient l'espace \mathcal{T}' des distributions Θ sur G invariantes par automorphismes intérieurs tempérées vecteurs propres de l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à droite et à gauche sur G et telles que, pour tout $H \in \text{Car}(G)$, la fonction $|D_G|^{\frac{1}{2}}\Theta$ sur H_{reg} est localement une combinaison linéaire de caractères de représentations (de dimension finie) de H . Le caractère d'une représentation irréductible tempérée vérifie ces propriétés; la dernière découle du théorème 1 de [F-S]. Suivant Hiraï [Hi], si $\Theta \in \mathcal{T}'$, on introduit l'ensemble C_Θ des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan H telles que la restriction de Θ à H_{reg} est non nulle et on appelle hauteur de Θ , que l'on note $ht(\Theta)$, l'ensemble des éléments maximaux pour l'ordre de Hiraï de C_Θ . On introduit un ordre sur les hauteurs des éléments de \mathcal{T}' : on dit que $ht(\Theta) \leq ht(\Theta')$ si pour tout $[H] \in ht(\Theta)$ il existe $[H'] \in ht(\Theta')$ tel que $[H] \leq [H']$. Si $\Theta \in \mathcal{T}'$ et si la classe de $H \in \text{Car}(G)$ appartient à $ht(\Theta)$, alors, pour tout système de racines imaginaires positives Ψ de H , la fonction

$$b_\Psi |D_G|^{\frac{1}{2}}\Theta$$

se prolonge en une fonction analytique sur H (voir [Hi], théorème 2). Donc c'est une somme finie

$$\sum_i a_i \text{tr}(h_i^*), \quad h_i^* \in \widehat{H}, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Du fait que Θ est tempérée on déduit que les h_i^* appartiennent à \widehat{H}_u (voir [V], proposition II-13-5 et lemme I-7-6). Par un calcul simple, on voit que la restriction à H_{reg} de $\Theta - \frac{1}{|W'(G, H)|} \sum_i a_i \Theta_{h_i^*, \Psi}$ est nulle. De plus sa hauteur est strictement inférieure à la hauteur de Θ . On achève donc la démonstration par récurrence sur la hauteur. ■

Montrons le corollaire 7.5.1. Il existe une application naturelle $R : F \mapsto R(F)$ de $\mathcal{J}(G)$ dans $\bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{PW}(H_i)^{\Psi_i}$ (notations du paragraphe précédent), définie de la façon suivante. Soit $1 \leq i \leq s$. On utilise les notations du paragraphe 7.2 avec i en indice pour désigner les objets construits à partir de H_i à la place de H . Donc si $h^* = (\Gamma, \nu) \in (\widehat{H}_i)_u$, on a

$$\Theta_{h^*, \Psi_i} = \frac{\epsilon(\Psi_i, \Psi_i^+)}{|(W_{\mathbb{C}})_i(\lambda)|} \sum_{w \in (W_{\mathbb{C}})_i(\lambda)} \epsilon(w) \text{tr} \text{Ind}_{M_i N_i}^G (\Pi(\Gamma, w \cdot \Psi_i^+) \otimes e^{i\nu} \otimes \text{Id}_{N_i}).$$

On pose alors

$$R(F)(h^*) = \frac{\epsilon(\Psi_i, \Psi_i^+)}{|(W_{\mathbb{C}})_i(\lambda)|} \sum_{w \in (W_{\mathbb{C}})_i(\lambda)} \epsilon(w) F(\text{Ind}_{M_i N_i}^G (\Pi(\Gamma, w \cdot \Psi_i^+) \otimes e^{i\nu} \otimes \text{Id}_{N_i})).$$

La propriété J-2 de F implique que $R(F)$ ainsi définie se prolonge à \widehat{H}_i et on vérifie aisément qu'elle appartient à $\mathcal{PW}(H_i)^{\Psi_i}$. On voit aussi sans difficulté que l'application R est continue. Le lemme 7.5.2 implique qu'elle est injective. Il découle du corollaire

3.3.2 que $\text{Ker } J_G = \text{Ker } \phi$, il existe alors une application $\bar{\phi} : \mathcal{I}(G) \mapsto \mathcal{J}(G)$ telle que $\bar{\phi} \circ J_G = \phi$; elle est continue puisque l'application J_G est ouverte (on peut aussi vérifier cela facilement sans faire appel au fait que J_G soit ouverte) et elle envoie $\mathcal{I}(L_r)$ dans $\mathcal{J}_r(G)$. Il est clair que $R \circ \bar{\phi}(\psi) = \bar{\mathcal{F}}(\psi)$. Le théorème 7.4.1 implique alors que R envoie $\mathcal{J}_r(G)$ sur $\bigoplus_{1 \leq i \leq s} \mathcal{PW}(H_i \cap L_r)^{\Psi_i}$, donc elle réalise un isomorphisme topologique entre ces deux espaces de Fréchet puisqu'elle est aussi injective (voir [T-1], corollaire 1 du théorème 17.1). Donc R et $\bar{\phi}$ sont des isomorphismes (topologiques). Le corollaire découle alors des théorèmes 3.2.1 et 7.3.1.

Remarque. – La définition de $\mathcal{J}_r(G)$ donnée par Arthur [A-1] est légèrement différente de celle donnée ci-dessus. Le corollaire implique l'équivalence des deux définitions.

8. Intégrales orbitales sur les espaces symétriques \mathbf{G}/G

On reprend les notations de la section 6 et on identifie \mathbf{G} avec le groupe de ses points complexes. Notre objectif ici est de caractériser les intégrales orbitales des fonctions indéfiniment différentiables à support compact sur \mathbf{G}/G . Nous nous contentons d'énoncer les résultats; les démonstrations utilisent les mêmes arguments que ceux déjà rencontrés dans le cas des groupes.

8.1. On note p la projection canonique de \mathbf{G} sur \mathbf{G}/G . Rappelons que, si $g \in \mathbf{G}$, $p(g)$ est dit semi-simple (resp. unipotent, semi-simple régulier) si l'élément $\sigma(g)g^{-1}$ de \mathbf{G} est semi-simple (resp. unipotent, semi-simple régulier). On notera $(\mathbf{G}/G)_{\text{reg}}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de \mathbf{G}/G et plus généralement on notera $A_{\text{reg}} = A \cap (\mathbf{G}/G)_{\text{reg}}$ pour toute partie A de \mathbf{G}/G . Si $g \in \mathbf{G}$ et si $\sigma(g)g^{-1} = su$ est la décomposition de Jordan de $\sigma(g)g^{-1}$ dans \mathbf{G} , il existe $x, v \in \mathbf{G}$ (dont les classes modulo G sont uniquement déterminées) tels que $\sigma(x)x^{-1} = s$ et $\sigma(v)v^{-1} = u$ [M-O] (§ 5, proposition 2). On dira que $p(x)$ (resp. $p(v)$) est la composante semi-simple (resp. unipotente) de $p(g)$.

On dira qu'un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbf{G}/G$ est complètement G -invariant s'il est G -invariant et s'il contient la composante semi-simple de chacun de ses éléments. Comme pour les groupes, on va construire des voisinages complètement G -invariants des éléments semi-simples de \mathbf{G}/G .

Soit $x \in \mathbf{G}$ tel que $s = \sigma(x)x^{-1}$ est semi-simple. On note $M = G^s$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}^s$. Comme pour les groupes on dit que \mathcal{V} voisinage ouvert de 0 dans \mathfrak{m} est \mathbf{G}/G -admissible (ou tout simplement admissible) si:

- A.1. il est complètement G -invariant,
- A.2. l'application $\pi : (g, Y) \mapsto p(g \exp(iY)x)$ de $G \times \mathcal{V}$ dans \mathbf{G}/G est submersive,
- A.3. si $g \in G$ vérifie $p(g \exp(i\mathcal{V})x) \cap p(\exp(i\mathcal{V})x) \neq \emptyset$, on a $g \in M$,
- A.4. pour tout $Y \in \mathcal{V}_{\text{reg}}$, $p(\exp(iY)x)$ appartient $(\mathbf{G}/G)_{\text{reg}}$.

Si \mathcal{V} est un voisinage admissible de 0 dans \mathfrak{m} , l'ensemble $\pi(G \times \mathcal{V})$ est un ouvert complètement G -invariant de \mathbf{G}/G ; nous appellerons de tels ouverts bons voisinages de x dans \mathbf{G}/G .

Pour tout $\epsilon > 0$, on note $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_\epsilon$ l'ensemble des éléments Y de l'algèbre dérivée de \mathfrak{m} tels que $|\lambda| < \epsilon$ pour toute valeur propre λ de $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(Y)$. Alors si $\epsilon > 0$ est assez petit et si

ϑ est un voisinage assez petit de 0 dans le centre de \mathfrak{m} , l'ouvert $\mathcal{V}_{\vartheta,\epsilon} = \vartheta \times [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_\epsilon$ est un voisinage \mathbf{G}/G -admissible de 0 dans \mathfrak{m} . En effet, il est clair qu'il vérifie A-1 et A-4, il vérifie A-2 d'après [H] (Lemme 1.13 et corollaire 1.15), pour A-3, soient $g \in G, X, Y \in \mathcal{V}$ tels que $p(g \exp(iY)x) = p(\exp(iX)x)$, alors on a $\sigma(g \exp(iY)x)(g \exp(iY)x)^{-1} = \sigma(\exp(iX)x)(\exp(iX)x)^{-1}$, donc $gs \exp(-2iY)g^{-1} = s \exp(-2iX)$, d'où $g \in M$ d'après [V] (II-2, proposition 11). On note $\mathcal{U}_{\vartheta,\epsilon} = \pi(G \times \mathcal{V}_{\vartheta,\epsilon})$.

On voit facilement que si \mathcal{U} est un ouvert complètement G -invariant contenant x , il existe un ouvert $\mathcal{U}_{\vartheta,\epsilon} = \pi(G \times \mathcal{V}_{\vartheta,\epsilon})$ inclus dans \mathcal{U} . On en déduit que les ouverts complètement G -invariants vérifient les propriétés C-2 et C-3 de la section 2.

Rappelons qu'une partie A de \mathbf{G}/G est appelé sous-ensemble de Cartan s'il existe un sous-groupe de Cartan \mathbf{T} de \mathbf{G} stable par σ tel que l'on ait $p(a) \in A$ si et seulement si $\sigma(a)a^{-1} \in \mathbf{T}$. On note $Car(\mathbf{G}/G)$ l'ensemble des sous-ensembles de Cartan de \mathbf{G}/G . On a une correspondance bijective $\mathfrak{h} \mapsto A_{\mathfrak{h}} = p(N(\mathbf{G}, \mathfrak{h}))$ de $Car(\mathfrak{g})$ sur $Car(\mathbf{G}/G)$; on dira que $A_{\mathfrak{h}}$ est le sous-ensemble de Cartan associé à \mathfrak{h} . Alors l'ensemble des éléments semi-simples de \mathbf{G}/G coïncide avec la réunion des sous-ensembles de Cartan et $(\mathbf{G}/G)_{reg} = \cup_{A \in Car(\mathbf{G}/G)} A_{reg}$, de plus un élément de $(\mathbf{G}/G)_{reg}$ appartient à un unique sous-ensemble de Cartan.

De ces considérations on déduit facilement, comme au paragraphe 2.2, l'existence de partitions de l'unité invariantes sur \mathbf{G}/G .

LEMME 8.1.1. – Soit \mathcal{U} un ouvert complètement G -invariant de \mathbf{G}/G et soit $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de \mathcal{U} par des ouverts complètement G -invariants. Alors il existe un recouvrement localement fini $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$ de \mathcal{U} par des ouverts complètement G -invariants, plus fin que $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$, et une partition de l'unité G -invariante subordonnée à $\{\mathcal{V}_j\}_{j \in J}$.

8.2. Introduisons les intégrales orbitales sur $Car(\mathbf{G}/G)$. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbf{G}/G$ un ouvert complètement G -invariant. Soit $\gamma \in \mathbf{G}$ tel que $p(\gamma) \in \mathcal{U}_{reg}$. Soient A l'unique sous-ensemble de Cartan contenant $p(\gamma)$ et \mathfrak{h} la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} associée à A . On note H le sous-groupe de Cartan de G associé à \mathfrak{h} . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$. On définit l'intégrale orbitale de φ en $p(\gamma)$, que l'on note $J_{\mathbf{G}/G}(\varphi)(p(\gamma))$, par:

$$J_{\mathbf{G}/G}(\varphi)(p(\gamma)) = |\det(1 - \text{Ad}(\gamma\sigma(\gamma^{-1})))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|^{\frac{1}{2}} \int_{G/H} \varphi(g \cdot p(\gamma)) dg.$$

Comme pour les groupes il est facile de voir que $J_{\mathbf{G}/G}(\varphi)$ appartient à $C^\infty(\mathcal{U}_{reg})^G$; en outre elle vérifie des propriétés analogues aux propriétés $I_1(G), I_2(G), I_3(G)$ et $I_4(G)$ du paragraphe 3.2, que l'on déduit des propriétés des intégrales orbitales sur les algèbres de Lie par la méthode de descente mais nous n'allons pas les expliciter.

Soit $x \in \mathbf{G}$ tel que $s = \sigma(x)x^{-1}$ est semi-simple. On utilise les notations du paragraphe précédent. Soit \mathcal{V} un voisinage ouvert de 0 dans \mathfrak{m} , \mathbf{G}/G -admissible tel que $\mathcal{W} = \pi(G \times \mathcal{V})$ est inclus dans \mathcal{U} . Il est clair que l'application $R_{\mathcal{W},\mathcal{V}} : C^\infty(\mathcal{W}_{reg})^G \rightarrow C^\infty(\mathcal{V}_{reg})^M$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels).

On dit qu'une partie $L \subset \mathcal{U}$ fermée G -invariante est compacte modulo G si $L \cap A$ est compact pour tout $A \in Car(\mathbf{G}/G)$.

On introduit l'espace $\mathcal{I}^{sym}(\mathcal{U})$ des fonctions $\psi \in C^\infty(\mathcal{U}_{reg})^G$ telles que $\text{supp}_{\mathbf{G}/G}(\psi)$ est un compact modulo G inclus dans \mathcal{U} et pour tout élément semi-simple $p(x)$ ($x \in \mathbf{G}$) de

\mathbf{G}/G , utilisant les notations ci-dessus, la fonction $R_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\psi)$ appartient à l'espace $\mathcal{I}^\infty(\mathcal{V})$ (notation de [B-1],-3.2). La fonction $J_{\mathbf{G}/G}(\varphi)$ appartient donc à l'espace $\mathcal{I}^{\text{sym}}(\mathcal{U})$; cela découle aisément de l'assertion (i) du lemme ci-dessous et de la partition de l'unité invariante.

On considère l'application $\pi_* : \mathcal{D}(G \times \mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{W})$ définie par

$$\pi_*(\varphi)(p(g \exp(iY)x)) = |\det(1 - \text{Ad}(x\sigma(x^{-1}) \exp 2iY))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}|^{-\frac{1}{2}} \int_M \varphi(gm^{-1}, m \cdot Y) dm.$$

Elle appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{W})$ et l'application $\varphi \mapsto \pi_*(\varphi)$ de $\mathcal{D}(G \times \mathcal{V})$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{W})$ est surjective (car π est une submersion surjective). On définit aussi la fonction $\rho_*(\varphi)$ sur \mathcal{V} par:

$$\rho_*(\varphi)(Y) = |j_{\mathfrak{m}}(Y)|^{\frac{1}{2}} \int_G \varphi(g, Y) dg,$$

elle appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ et l'application $\varphi \mapsto \rho_*(\varphi)$ de $\mathcal{D}(G \times \mathcal{V})$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{V})$ est surjective.

Soit $A \in \text{Car}(\mathbf{G}/G)$ associé à $\mathfrak{h} \in \text{Car}(\mathfrak{g})$. Tout élément $X \in \mathfrak{h}$ définit un champ de vecteurs $\partial(X)$ sur A par

$$\partial(X)f(p(a)) = \frac{d}{dt} f(p(\exp(iX)a))|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}(A).$$

Donc tout élément de $u \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ définit un opérateur différentiel sur A que nous noterons $\partial(u)$.

Soit $L \subset \mathcal{U}$ un compact modulo G . On note $\mathcal{I}^{\text{sym}}(L)$, le sous espaces des éléments de $\mathcal{I}^{\text{sym}}(\mathcal{U})$ à support dans L . Comme pour les groupes, on munit $\mathcal{I}^{\text{sym}}(L)$ de la topologie définie par la famille de semi-normes $\nu_{A,u}, A \in \text{Car}(\mathbf{G}/G)$ associée à $\mathfrak{h} \in \text{Car}(\mathfrak{g})$ et $u \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$:

$$\nu_{A,u}(\psi) = \sup_{a \in A} |\partial(u)\psi_A(a)|;$$

où ψ_A désigne la restriction de ψ à A . On vérifie sans peine, vu qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-ensembles de Cartan, que, muni de cette topologie, $\mathcal{I}^{\text{sym}}(L)$ est un espace de Fréchet. Si $L \subset L'$ sont deux compacts modulo G , l'injection canonique de $\mathcal{I}^{\text{sym}}(L)$ dans $\mathcal{I}^{\text{sym}}(L')$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{I}^{\text{sym}}(L)$ sur son image muni de la topologie induite. On munit alors $\mathcal{I}^{\text{sym}}(\mathcal{U})$ de la topologie limite inductive des $\mathcal{I}^{\text{sym}}(L)$, $L \subset \mathcal{U}$ compact modulo G . C'est un espace LF.

Rappelons (voir section 5) que l'on a noté $J_{\mathfrak{m}}$ l'intégrale orbitale sur \mathfrak{m} . Avec ces notations, on obtient par les arguments des lemmes 5.1.1 et 5.1.2 de [B-1].

LEMME 8.2.1. – (i) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(G \times \mathcal{V})$, on a

$$R_{\mathcal{W}|\mathcal{V}} \circ J_{\mathbf{G}/G} \circ \pi_*(\varphi) = J_{\mathfrak{m}} \circ \rho_*(\varphi)$$

(ii) L'application $R_{\mathcal{W}|\mathcal{V}}$ induit un isomorphisme topologique entre $\mathcal{I}^{\text{sym}}(\mathcal{W})$ et $\mathcal{I}(\mathcal{V})$.

Comme on l'a déjà vu pour les groupes, le théorème suivant est une conséquence facile de [B-1], théorème 4.1.1, et des lemmes 8.1.1 et 8.2.1.

THÉORÈME 8.2.2. – *L'application $J_{\mathbf{G}/G}$ est surjective de $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ sur $\mathcal{I}^{\text{sym}}(\mathcal{U})$ et sa transposée ${}^t J_{\mathbf{G}/G}$ est une bijection de $\mathcal{I}^{\text{sym}}(\mathcal{U})'$ sur l'espace des distributions G -invariantes sur \mathcal{U} .*

La surjectivité de $J_{\mathbf{G}/G}$ pour $GL(n, \mathbb{C})/GL(\times, \mathbb{R})$ a été annoncée dans [La].

Explicitons l'analogie de $I_2(G)$ pour \mathbf{G}/G . Soit $A \in \text{Car}(\mathbf{G}/G)$ associé à $\mathfrak{h} \in \text{Car}(\mathfrak{g})$. Soit Ψ un système de racines positives dans $\Delta_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. Pour $a \in A_{\text{reg}}$, on pose

$$c_{\Psi}(h) = \prod_{\alpha \in \Psi} \frac{1 - \xi_{\alpha}(a\sigma(a^{-1}))}{|1 - \xi_{\alpha}(a\sigma(a^{-1}))|}.$$

Alors si $\psi \in \mathcal{I}^{\text{sym}}(\mathcal{U})$, la fonction $c_{\Psi}\psi_A$ se prolonge en une fonction C^{∞} sur l'ensemble des $a \in A$ tels que $\prod_{\alpha \in \Psi} (1 - \xi_{\alpha}(a\sigma(a^{-1}))) \neq 0$. On munit l'ensemble des classes de conjugaison de G dans $\text{Car}(\mathbf{G}/G)$ de la relation d'ordre de Hirai obtenue par transport de celle de $\text{Car}(\mathfrak{g})$. Si $j \in \mathbb{N}$, on note $\text{Car}_j(\mathbf{G}/G)$ l'ensemble des $A \in \text{Car}(\mathbf{G}/G)$ dont la sous-algèbre de Cartan associée appartient à $\text{Car}_j(\mathfrak{g})$. On note $\mathcal{I}_j^{\text{sym}}(\mathcal{U})$ l'ensemble des $\psi \in \mathcal{I}^{\text{sym}}(\mathcal{U})$ tels que, si $k > j$, $\psi_A \equiv 0$ pour tout $A \in \text{Car}_j(\mathbf{G}/G)$. On voit alors facilement que si $\psi \in \mathcal{I}_j^{\text{sym}}(\mathcal{U})$ et si $A \in \text{Car}_j(\mathbf{G}/G)$, la fonction $c_{\Psi}\psi_A$ se prolonge en une fonction C^{∞} sur A , appartenant donc à $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap A)$. De plus, si \mathfrak{h} désigne la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} associée à A , on a

$$c_{\Psi}\psi_A(w^{-1} \cdot a) = \epsilon_I(w)\xi_{\rho_{\Psi} - w \cdot \rho_{\Psi}}(\sigma(a)a^{-1})c_{\Psi}\psi_A(a) \quad w \in W(G, \mathfrak{h}).$$

On notera $\mathcal{D}(\mathcal{U} \cap A)^{\Psi}$ l'espace des $f \in \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap A)$ vérifiant cette relation.

Soit $j \in \mathbb{N}$. On fixe A_1, \dots, A_k des représentants des classes de conjugaison de G dans $\text{Car}_j(\mathbf{G}/G)$. Pour tout $1 \leq i \leq k$, on fixe un système de racines positives $\Psi_i \subset \Delta_I(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{i\mathbb{C}})$. On introduit l'application $\Pi_j^{\text{sym}} : \mathcal{I}_j^{\text{sym}}(\mathcal{U}) \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap A_i)^{\Psi_i}$ définie par

$$\Pi_j^{\text{sym}}(\psi) = \sum_{1 \leq i \leq k} c_{\Psi_i}\psi_{A_i}.$$

Avec ces notations on a

THÉORÈME 8.2.3. – *L'application Π_j^{sym} est surjective et sa transposée ${}^t \Pi_j^{\text{sym}}$ est une bijection de $(\bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}(\mathcal{U} \cap A_i)^{\Psi_i})'$ sur l'orthogonal de $\mathcal{I}_{j-1}^{\text{sym}}(\mathcal{U})$ dans $(\mathcal{I}_j^{\text{sym}}(\mathcal{U}))'$.*

Comme pour les algèbres et les groupes de Lie, on déduit des théorèmes 8.2.2 et 8.2.3 les conséquences suivantes:

COROLLAIRE 8.2.4. – *Sur un ouvert \mathcal{U} complètement G -invariant, on a*

a) *l'espace vectoriel engendré par les mesures invariantes sur les orbites régulières est faiblement dense dans l'espace des distributions invariantes.*

b) *l'espace des fonctions C^{∞} G -invariantes est faiblement dense dans l'espace des distributions invariantes.*

c) un opérateur différentiel linéaire G -invariant à coefficients C^∞ , qui annule toutes les fonctions C^∞ G -invariantes, annule aussi les distributions G -invariantes.

BIBLIOGRAPHIE

- [A-1] J. ARTHUR, *The Trace Formula in Invariant Form* (Ann. of Math., Vol. 114, 1981, p. 1-74).
- [A-2] J. ARTHUR, *On Some Problems Suggested by the Trace Formula* (Lect. Notes Math., Vol. 1041, p. 1-49) Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag, 1983.
- [B-1] A. BOUAZIZ, *Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives* (Invent. math., Vol. 115, 1994, p. 163-207).
- [B-2] A. BOUAZIZ, *Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes* (J. Funct. Anal., Vol. 70, 1987, p. 1-79).
- [B-3] A. BOUAZIZ, *Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives* (C. R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série I, 1991, p. 919-922).
- [C] L. CLOZEL, *Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 15, 1982, p. 45-115).
- [C-D] L. CLOZEL et P. DELORME, *Le Théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 23, 1990, p. 193-228).
- [D-V] M. DUFLO et M. VERGNE, *La Formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels* (Adv. Studies in Pure Math., Vol. 14, 1988, p. 289-336).
- [F-S] A. I. FOMIN et N. N. SHAPOVALOV, *A Property of the Characters of Real Semisimple Lie Groups* (Func. Anal. and Appl., Vol. 8, 1974, p. 270-271).
- [H] P. HARINCK, *Fonctions généralisées sphériques sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 23, 1990, p. 1-38).
- [H-C-1] HARISH-CHANDRA, *Discrete Series for Semisimple Lie Groups I* (Acta. Math., Vol. 113, 1966, p. 241-318).
- [H-C-2] HARISH-CHANDRA, *Discrete Series for Semisimple Lie Groups II* (Acta. Math., Vol. 116, 1966, p. 1-111).
- [H-C-3] HARISH-CHANDRA, *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups I* (J. Funct. Anal., Vol. 19, 1975, p. 104-204).
- [H-C-4] HARISH-CHANDRA, *Supertempered Distributions on Real Reductive Groups* (Adv. in Math. [Supplementary studies], Vol. 8, 1983, p. 139-153).
- [H-S] R. A. HERB et P. J. SALLY, *Singular Invariant Eigendistributions as Characters in the Fourier Transform of Invariant Distributions* (J. Funct. Anal., Vol. 33, 1979, p. 195-210).
- [Hi] T. HIRAI, *Explicit Form of the Characters of Discrete Series Representations of Semisimple Lie Groups* (Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Vol. 26, 1973, p. 281-288).
- [Ho] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* (Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag, 1983).
- [Lab] J. P. LABESSE, *Pseudo-coefficients très cuspidaux et K -théorie* (Math. Ann., Vol. 291, 1991, p. 607-616).
- [La] K. F. LAI, *Orbital Integrals on Symmetric Spaces* (C. R. Acad. Sci. Paris, t. 312, Série I, 1991, p. 913-917).
- [L] R. P. LANGLANDS, *Les débuts d'une formule des traces stable* (Paris, Publications mathématiques de l'université Paris VII, 1979).
- [M-O] T. MATSUKI et T. OSHIMA, *Orbits on Affine Symmetric Spaces Under the Action of the Isotropy Subgroups* (J. Math. Soc. Jpn., Vol. 32, 1980, p. 399-414).
- [S-1] D. SHELSTAD, *Characters and Inner Forms of a Quasi-split Group over \mathbb{R}* (Compositio Math., Vol. 39, 1979, p. 11-45).
- [S-2] D. SHELSTAD, *L -indistinguishability for Real Groups* (Math. Ann., Vol. 259, 1982, p. 385-430).
- [S-3] D. SHELSTAD, *Endoscopic Groups and Base Change \mathbb{C}/\mathbb{R}* (Pac. J. of Math., Vol. 110, 1984, p. 397-416).
- [T-1] F. TRÈVES, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels* (New York-London, Academic Press, 1967).
- [T-2] F. TRÈVES, *Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations* (Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1967).

- [Tr] P. C. TROMBI, *Invariant Harmonic Analysis on Split Rank one Groups with Applications* (*Pacific J. of Math.*, Vol. 101, N° 1, 1982, p. 223-245).
- [V] V. S. VARADARAJAN, *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups* (*Lect. Notes Math.*, Vol. 576, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1977).
- [Wa] G. WARNER, *A Characterization of the Stable Invariant Integral* (*Tôhuku Math. Journ.*, Vol. 38, 1986, p. 179-197).
- [W] H. WHITNEY, *Analytic Extentions of Differentiable Functions Defined in Closed Sets* (*Trans. A.M.S.*, Vol. 36, 1934, p. 63-89).

(Manuscrit reçu le 10 septembre 1992;
révisé le 15 janvier 1993.)

A. BOUAZIZ,
Université de Poitiers,
Laboratoire de Mathématiques,
40, avenue du Recteur-Pineau,
86022 Poitiers Cedex, France.