

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHRISTIAN BONATTI

SEBASTIÃO FIRMO

Feuilles compactes d'un feuilletage générique en codimension 1

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 27, n° 4 (1994), p. 407-462

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1994_4_27_4_407_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FEUILLES COMPACTES D'UN FEUILLETAGE GÉNÉRIQUE EN CODIMENSION 1

PAR CHRISTIAN BONATTI ET SEBASTIÃO FIRMO ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. – Après avoir fait le lien entre généralité d'un feuilletage et stabilité de feuilles compactes, nous unifions en une même théorie les résultats connus (locaux ou globaux) sur la stabilité des feuilles compactes de groupe fondamental commutatif. Puis, pour une variété M de dimension 3, nous montrons la C^0 -instabilité des feuilles compactes de genre $g \geq 2$, et nous en déduisons que les feuilletages génériques (appartenant à un ouvert dense de $\mathcal{F}ol_\infty(M)$ pour la C^0 -topologie) n'ont comme feuilles compactes que des tores T^2 ou des sphères S^2 .

ABSTRACT. – We first state the relation between genericity of foliations and stability of compact leaves. Then we unify in a same theory all known results about stability of compact leaves with commutative fundamental group. Finally, on a 3-manifold M , we prove the C^0 -instability of compact leaves with genus $g \geq 2$, and we deduce that all compact leaves in a generic foliation (i. e. one which belongs to a dense open set of $\mathcal{F}ol_\infty(M)$ for the C^0 -topology) are diffeomorphic to the torus T^2 or the sphere S^2 .

Introduction

On ne peut pas, en général, décrire précisément la dynamique d'un difféomorphisme ou d'un flot quelconque. Cela a amené à introduire la notion de « généralité » : l'idée est de trouver une classe importante (ouvert ou G_δ dense) de l'ensemble des systèmes dynamiques considérés, dont les éléments ont une dynamique plus simple (ou tout au moins descriptible). La dynamique d'un feuilletage ne peut qu'être au moins aussi complexe que celle d'un difféomorphisme, puisqu'elle est celle d'un pseudo-groupe de difféomorphismes : on aimerait donc limiter l'étude à une classe générique de feuilletages. Les premières questions qui se posent sont :

- *quelle variété compacte peut être feuille compacte d'un feuilletage « générique » ?*
- *quelle est la dynamique d'un feuilletage générique au voisinage d'une feuille compacte ?*

Nous abordons ce problème dans son cadre le plus simple : les feuilletages de codimension 1 de classe C^∞ , sans singularités, transversalement orientés, d'une variété compacte M . Nous noterons $\mathcal{F}ol_\infty(M)$ l'ensemble de ces feuilletages. Par C^r -topologie,

⁽¹⁾ Recherche ayant bénéficié du soutien financier de la C.A.P.E.S. et de l'accord C.A.P.E.S.-C.O.F.E.C.U.B.

$1 \leq r \leq +\infty$, nous entendrons C^r -topologie d'Epstein (voir [E]), c'est-à-dire celle définie par la C^r -proximité des cartes feuilletées : c'est la mieux adaptée pour une théorie des déformations des feuilletages (voir [B-H]). Cependant, la C^0 -topologie d'Epstein étant trop grossière, par C^0 -topologie nous entendrons : C^0 -topologie des champs de plans.

Il est tentant de croire que les feuilles compactes d'un feuilletage (de codimension 1) générique sont stables, c'est-à-dire persistantes par petites perturbations du feuilletage. Telle quelle cette idée ne tient pas : l'ensemble des feuilletages de S^3 possédant une infinité de feuilles compactes instables est dense dans $\mathcal{Fol}_\infty(S^3)$ muni de la C^∞ -topologie (voir la remarque 3.g.6). Cependant les feuilles compactes qui apparaissent ou disparaissent, par petites perturbations d'un feuilletage générique, appartiennent toutes à un nombre fini de « paquets de feuilles compactes parallèles » chacun de ces paquets étant globalement stable. Pour formaliser cela nous définissons (en première partie) la classe d'équivalence [C] d'une feuille compacte C, l'holonomie de la classe [C], et la notion de stabilité pour une telle classe.

Nous montrons alors :

THÉORÈME 2.1. – *Soit M une variété compacte. L'ensemble des feuilletages sur M dont toute classe d'équivalence de feuilles compactes est C^0 ou C^1 -stable contient un ouvert dense de $\mathcal{Fol}_\infty(M)$ muni de la C^0 ou C^1 -topologie.*

Voici donc fait le lien entre généricité d'un feuilletage et stabilité des feuilles compactes.

Déterminer si une feuille compacte C d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}_\infty(M)$ est stable ou instable n'est pas *a priori* un problème local, mais les moyens dont on dispose pour aborder cette question sont locaux, car (à quelques exemples très particuliers près) on ne sait pas perturber globalement un feuilletage. On se contente donc de perturber le feuilletage \mathcal{F} au voisinage de la feuille compacte C. Pour cela on peut choisir deux tactiques :

- soit on considère des perturbations de la restriction du feuilletage \mathcal{F} à un petit voisinage de la feuille compacte C (ce qu'on appellera des perturbations locales), sans s'occuper de savoir si ces perturbations se prolongent en une perturbation globale de \mathcal{F} . Nous choisirons ces perturbations pour prouver la stabilité d'une feuille compacte : en effet une feuille qui résiste à toute perturbation locale résiste *a fortiori* aux perturbations globales.

- soit on se limite aux perturbations de \mathcal{F} qui ne modifient pas \mathcal{F} hors d'un petit voisinage de la feuille compacte (perturbations globales à support local) : ce sont les seules perturbations globales auxquelles ont ait accès. Il suffit bien sûr de savoir ouvrir une feuille par de telles perturbations pour prouver son instabilité.

Ces deux types de perturbations se construisent en faisant des perturbations de l'holonomie de la feuille compacte C : en effet, d'après [B-H], on peut réaliser toute C^r -perturbation ($r \geq 1$) de l'holonomie de C comme holonomie d'une C^r -perturbation du feuilletage \mathcal{F} ; en appendice (proposition A-1), nous montrons que l'on peut également réaliser les C^0 -perturbations.

Il s'agit donc de comprendre comment perturber un homomorphisme $h : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}(\mathbf{R})$, au voisinage d'un point fixe commun à tous les $h(\gamma)$, $\gamma \in \pi_1(C)$. La difficulté du problème dépend essentiellement des relations liant un système générateur $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ de $\pi_1(C)$, puisque l'on doit perturber les $h(\gamma_i)$ en préservant ces relations. On peut donc s'attendre à ce que la feuille compacte C soit instable si les γ_i sont liés

par très peu de relations (par exemple C est toujours C^∞ -instable si $\pi_1(C)$ est le groupe libre à n générateurs, $n > 1$), et au contraire qu'elle puisse être stable quand les γ_i sont liés par beaucoup de relations (par exemple si $\pi_1(C)$ est commutatif) : $\pi_1(C)$ libre, et $\pi_1(C)$ commutatif, sont les pôles opposés du problème de stabilité.

Les perturbations des feuilles compactes de groupe fondamental commutatif (en codimension 1) sont maintenant assez bien comprises : dans la partie 3 de cet article nous réunissons en une théorie cohérente et élémentaire (l'outil principal étant le nombre de translation relatif de deux difféomorphismes commutatifs de \mathbf{R}) les principaux résultats connus. Nous retrouvons en particulier les résultats suivants :

THÉORÈME (Hirsch [Hi]). – *Soit C une feuille compacte isolée, de groupe fondamental commutatif, d'un feuilletage de codimension 1. Si C possède une holonomie contractante, alors C est C^0 -stable.*

Nous montrerons la réciproque : si C n'a aucune holonomie contractante alors C est C^1 -instable. Cette condition nécessaire et suffisante se généralise à la classe d'équivalence $[C]$ (voir le théorème 3.f.1).

THÉORÈME (Plante [P]). – *Soit \mathcal{F} un feuilletage défini par une fibration de base le cercle S^1 et de fibre compacte C de groupe fondamental commutatif. Si la monodromie $A \in GL(H_1(C, \mathbf{R}))$ de la fibration n'a aucune valeur propre réelle positive, alors tout feuilletage C^0 -proche de \mathcal{F} possède une feuille compacte difféomorphe à C et proche d'une fibre.*

La démonstration que nous donnons est très différente de celle qu'en donnait Plante. De plus nous montrons que si A n'a pas de valeur propre réelle alors tout feuilletage \mathcal{G} , C^0 -proche de \mathcal{F} , possède une feuille compacte C^∞ -plate (exemple 3.g.5); si \mathcal{G} est de plus transversalement analytique, il est alors conjugué à \mathcal{F} (cela redonne un résultat de Ghys et Sergiescu).

En fait, tout se passe comme si les variations des nombres de translation relatifs des holonomies pouvaient servir d'indice (type indice de Poincaré-Hopf ou de Lefschetz) pour les feuilles compactes de groupe fondamental commutatif (voir les commentaires en fin de paragraphe 3.f).

Le cas d'une variété orientée M de dimension 3 illustre de façon remarquable la distinction que nous avons faite entre les groupes $\pi_1(C)$ « proches d'un groupe libre » ou « proche du commutatif ». En effet une feuille compacte C d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}_\infty(M)$ est alors une surface compacte orientée. Son groupe fondamental $\pi_1(C)$ ou bien est commutatif, ou bien se surjecte sur le groupe libre à g générateurs, où g est le genre de C .

Nous montrerons :

THÉORÈME 5.1. – *Soit M une variété compacte orientée de dimension 3 et soit C une feuille compacte isolée de genre $g(C) \geq 2$ d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}_\infty(M)$. Alors C est C^0 -instable.*

On en déduit :

THÉORÈME 5.2. – *Il existe un ouvert dense \mathcal{O} de $\mathcal{Fol}(M)$ muni de la C^0 -topologie tel que, si $\mathcal{F} \in \mathcal{O}$, l'une des deux propriétés suivante est vérifiée :*

- (i) M est difféomorphe à $S^1 \times S^2$ et \mathcal{F} est défini par une fibration de fibre S^2 .
 (ii) toute feuille compacte C de \mathcal{F} est difféomorphe au tore T^2 ; de plus la classe d'équivalence $[C]$ est C^0 -stable.

Le théorème 5.1 se montre bien sûr en perturbant l'holonomie de C : c'est en fait un corollaire du théorème suivant :

THÉORÈME 5.4. – Soit C une surface compacte orientée de genre $g(C) \geq 2$. Alors tout point fixe isolé d'une action de $\pi_1(C)$ sur \mathbf{R} (par C^∞ -difféomorphismes préservant l'orientation) est C^0 -stable.

Nous remercions R. Langevin et J. C. Yoccoz pour les discussions qui ont affermi les étapes clé de ce travail.

1. Classes d'équivalence de feuilles compactes

Le rôle de cette partie est de définir les notions de classes d'équivalence, de stabilité d'une classe, et de décrire les propriétés élémentaires de ces classes d'équivalence.

Cette notion est typiquement de codimension 1. La dimension de la variété M ne joue aucun rôle : M sera donc une variété compacte lisse quelconque.

a. Définitions

Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension 1 d'une variété compacte M .

DÉFINITION 1.a.1. – On dit que deux feuilles compactes C_0, C_1 du feuilletage \mathcal{F} sont équivalentes s'il existe un segment $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $a \leq b$, et une immersion $C_0 \times [a, b] \rightarrow M$ vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout $t \in [a, b]$ la restriction $i|_{C_0 \times \{t\}}$ est un plongement de C_0 dans M .
- $i(C_0 \times \{a\}) = C_0$ et $i(C_0 \times \{b\}) = C_1$.
- pour tout point $x \in C_0$ le chemin $i_x :]a, b[\rightarrow M$ défini par $i_x(t) = i(x, t)$ est transverse au feuilletage \mathcal{F} .

On dira que l'immersion i réalise l'équivalence entre C_0 et C_1 .

On vérifie facilement que l'on a bien défini ainsi une relation d'équivalence dans l'ensemble des feuilles compactes de \mathcal{F} . Si C est une feuille compacte de \mathcal{F} on notera $[C]$ sa classe d'équivalence.

LEMME 1.a.2. – La variété M étant compacte, le feuilletage \mathcal{F} ne possède qu'un nombre fini de classes d'équivalence de feuilles compactes.

Démonstration. – D'après [Hae], l'union des feuilles compactes d'un feuilletage de codimension 1 d'une variété compacte est compacte. Il suffit dès lors de remarquer que toute feuille compacte C possède un voisinage U dans M tel que toute feuille compacte C' rencontrant U est équivalente à C (la codimension 1 est là encore nécessaire).

La proposition suivante permet de localiser chaque classe d'équivalence, c'est-à-dire de lui associer un domaine connexe de M .

PROPOSITION 1.a.3. – Soit C une feuille compacte du feuilletage \mathcal{F} . L'union des images $i(C \times [a, b])$, où i parcourt l'ensemble des immersions réalisant une équivalence entre deux feuilles compactes équivalentes à C , est un compact de M saturé pour le feuilletage \mathcal{F} et contenant toute feuille compacte équivalente à C .

DÉFINITION 1.a.4. – Nous appellerons ce compact le support de la classe d'équivalence $[C]$ de la feuille C . On le notera $\text{supp } [C]$.

Idee de la démonstration : montrer que l'ensemble des images $i(C \times [a, b])$, (i immersion réalisant une équivalence entre deux feuilles équivalentes à C) est inductif pour l'inclusion; pour cela on remarque d'abord que les immersions i , ou bien sont des plongements, ou bien sont surjectives (de $C \times [a, b]$ dans M); la compacité de l'union des feuilles compactes équivalentes à C permet alors de montrer l'inductivité. Alors $\text{supp } [C]$ est l'élément maximal de l'ensemble des images $i(C \times [a, b])$ pour la relation d'ordre (le théorème de Zorn prouve l'existence d'un élément maximal, et on montre facilement qu'il est unique).

Remarques.

1.a.5. D'après la démonstration de la proposition a.3 il existe une immersion i réalisant l'équivalence entre deux feuilles C_0, C_1 équivalente à C , telle que $\text{supp } [C]$ soit l'image $i(C \times [a, b])$. En particulier $\text{supp } [C]$ est connexe. De plus, il vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

– l'immersion i est un plongement. De plus il existe un champ de vecteurs X sur M transverse à \mathcal{F} tel que chaque segment $i(\{x\} \times [a, b])$ soit contenu dans une orbite de X . On a alors $\partial(\text{supp } [C]) = C_0 \cup C_1$.

– $\text{supp } [C] = M$; dans ce cas il existe une fibration $\pi : M \rightarrow S^1$ de fibre C telle que toute feuille compacte de \mathcal{F} soit une fibre de π , et il existe un champ X transverse à la fibration et transverse à \mathcal{F} .

1.a.6. Il existe un voisinage U de $\text{supp } [C]$ dans M tel que toute feuille de \mathcal{F} rencontrant U contient dans son adhérence une feuille compacte équivalente à $[C]$.

En particulier, tout minimal du feuilletage \mathcal{F} , contenu dans $\text{supp } [C]$ est une feuille compacte équivalente à C .

1.a.7. Si C_1 et C_2 sont deux feuilles compactes non équivalentes alors :

$$\text{supp } [C_1] \cap \text{supp } [C_2] = \emptyset$$

b. Holonomie d'une classe d'équivalence de feuilles compactes

Soit $[C]$ une classe d'équivalence de feuilles compactes du feuilletage \mathcal{F} .

Soit $I = [a, b]$, $a \leq b$, un segment de \mathbf{R} .

Soit $\tau : \mathbf{R} \rightarrow M$ un chemin transverse à \mathcal{F} tel que $\tau(I)$ soit inclus dans $\text{supp } [C]$ et que $\tau(a)$ et $\tau(b)$ soient chacun sur une feuille compacte de \mathcal{F} (équivalente à C).

Notons $\text{Diff}(\mathbf{R}, I)$ le groupe des germes de difféomorphismes de \mathbf{R} définis au voisinage du segment I .

Alors l'holonomie du feuilletage \mathcal{F} sur la transversale définie par le chemin τ induit un homomorphisme contravariant $h : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}(\mathbf{R}, I)$. En d'autres termes, à tout lacet γ sur la feuille compacte C est associé un difféomorphisme d'holonomie h_γ , du feuilletage \mathcal{F} , défini sur un voisinage du segment I .

Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ un système générateur du groupe fondamental $\pi_1(C)$. Alors il existe un voisinage J du segment I et des difféomorphismes d'holonomie $h_{\gamma_1}, \dots, h_{\gamma_n}$, associés aux γ_i et définis sur l'intervalle J , tels que l'on ait la propriété suivante :

Une feuille L de \mathcal{F} coupant le segment $\tau(J)$ au point $\tau(t)$ est compacte si et seulement si t est point fixe commun des h_{γ_i} , et alors L est équivalente à C .

Soient r_1, \dots, r_k des relations liants les γ_i , telles que $(\gamma_1, \dots, \gamma_n, r_1, \dots, r_k)$ soit une présentation de $\pi_1(C)$ par générateurs et relations. Rappelons qu'une relation est un mot dont les lettres sont les γ_i ou leurs inverses, c'est-à-dire un élément du groupe libre engendré par les γ_i . Notons r'_j le mot obtenu en renversant l'ordre des lettres de r_j . Alors les h_{γ_i} vérifient les relations r'_j au voisinage de I (il a été nécessaire de remplacer les relations r_j par les r'_j , car l'application qui à un lacet associe son germe d'holonomie est un homomorphisme contravariant). Notons J_0 un segment contenu dans ce voisinage, et contenant I dans son intérieur.

Si \mathcal{G} est un feuilletage suffisamment C^r -proche de \mathcal{F} , à tout γ_i est naturellement associé un difféomorphisme d'holonomie $h_{\gamma_i}(\mathcal{G})$ de \mathcal{G} sur la transversale τ , défini sur un voisinage de J et C^r -proche de h_{γ_i} . De plus, les $h_{\gamma_i}(\mathcal{G})$ vérifient les relations r'_j au voisinage de J_0 . Enfin, les points fixes communs aux $h_{\gamma_i}(\mathcal{G})$, contenus dans J correspondent aux intersections avec $\tau(J)$ des feuilles compactes de \mathcal{G} proches d'une feuille compacte (équivalente à C) de \mathcal{F} .

Réciproquement, d'après [B-H] (théorème principal) on a la proposition suivante :

Soit $i : C \times I \rightarrow M$ un plongement réalisant l'équivalence entre les feuilles compactes passant par $\tau(a)$ et $\tau(b)$, tel que $\tau(I) \subset i(C \times I)$. Alors :

PROPOSITION 1.b.1. – *Si $h_1 \cdots h_n$ sont n difféomorphismes locaux de \mathbf{R} , définis au voisinage de J , C^r -proches des h_{γ_i} , $1 \leq r \leq \infty$, coïncidant avec les h_{γ_i} hors d'un petit voisinage de l'intervalle I et vérifiant r'_j , $j \in \{1, \dots, k\}$ sur J_0 , alors il existe un feuilletage \mathcal{G} de M , C^r -proche du feuilletage \mathcal{F} , coïncidant avec \mathcal{F} hors d'un petit voisinage de $i : (C \times I)$, et tel que les holonomies $h_{\gamma_i}(\mathcal{G})$ soient les h_i .*

Remarque 1.b.2. – Les théorèmes 5.1 et 5.2 utilisent la C^0 -topologie sur l'ensemble des feuilletages : nous ne pourrions donc pas utiliser la théorie de [B-H] ni la proposition 1.b.1. Nous aurons donc à redémontrer la proposition 1.b.1 dans le cadre de la topologie C^0 : nous le ferons à l'appendice A, proposition A.1, pour les feuilletages des variétés de dimension 3.

c. Stabilité d'une classe d'équivalence de feuilles compactes

DÉFINITION 1.c.1. – *On dira qu'une classe d'équivalence $[C]$ de feuilles compactes est C^r -stable, si tout feuilletage \mathcal{G} , C^r -proche de \mathcal{F} , possède une feuille compacte difféomorphe à C et proche d'une feuille de \mathcal{F} contenue dans $\text{supp } [C]$.*

Remarque 1.c.2. – Parler d'une feuille L « proche d'une feuille compacte contenue dans $\text{supp } [C]$ » signifie que l'on s'est fixé une fois pour toute des voisinages tubulaires associés à une feuille $C' \subset \text{supp } [C]$ et que la projection de L sur C' est un difféomorphisme proche de l'identité.

Remarque 1.c.3. – De même que pour les feuilles compactes isolées (*voir* l'introduction), il faut préciser si les perturbations du feuilletage \mathcal{F} , que l'on autorise, sont locales (définies seulement au voisinage de $\text{supp } [C]$), globales (définies sur tout M), ou globales à support locales (définies sur tout M mais coïncidant avec \mathcal{F} hors d'un voisinage arbitrairement petit de $\text{supp } [C]$).

2. Généricité des feuilletages dont les feuilles compactes sont stables

Soit M une variété compacte, et $\mathcal{F}ol(M)$ l'ensemble des feuilletages de M , de codimension 1, de classe C^∞ , transversalement orientés.

Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant, qui fait le lien entre le théorème 5.1 et le théorème 5.2.

THÉORÈME 2.1. – *Pour tout $k \in \{0, 1\}$, il existe un ouvert dense \mathcal{O}^k de $\mathcal{F}ol(M)$ muni de la C^k -topologie, tel que, pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{O}^k$ on a : toute classe d'équivalence de feuilles compactes de \mathcal{F} est C^k -stable (par perturbations globales de \mathcal{F}).*

Il est en effet naturel de penser qu'un feuilletage générique ne possède pas de feuille compacte instable, puisque il suffit de perturber le feuilletage pour « ouvrir » la feuille : la difficulté réside dans le fait de contrôler qu'une perturbation qui ouvre la feuille compacte instable ne crée pas d'autres feuilles compactes. Nous verrons que la présence d'holonomie contractante assure ou bien que la feuille compacte est stable, ou bien qu'une perturbation qui ouvre la feuille ne crée aucune nouvelle feuille compacte.

L'ouvert dense \mathcal{O}^k , dont le théorème 2-1 annonce l'existence, est construit de la façon suivante :

– Soit \mathcal{O}_0^k l'intérieur, pour la C^k -topologie, de l'ensemble des feuilletages possédant une feuille compacte C telle que $H_1(C, \mathbf{R})=0$.

– Soit \mathcal{O}_1^k l'ensemble des feuilletages possédant au moins une feuille compacte C telle que $H_1(C, \mathbf{R}) \neq 0$, et tels que toute classe d'équivalence de feuilles compactes est C^k -stable.

– Soit \mathcal{O}_2^k l'ensemble des feuilletages sans feuilles compactes et possédant au moins un difféomorphisme d'holonomie contractant.

– Soit \mathcal{O}_3^k l'intérieur, pour la C^k -topologie de l'ensemble des feuilletages à feuilles toutes denses, n'ayant aucune holonomie contractante.

$$\text{Alors } \mathcal{O}^k = \mathcal{O}_0^k \cup \mathcal{O}_1^k \cup \mathcal{O}_2^k \cup \mathcal{O}_3^k.$$

Nous montrerons que les \mathcal{O}_i^k sont des ouverts disjoints, et que \mathcal{O}^k est dense, ce qui prouvera le théorème.

Commentaires. – Nous ne savons pas s'il existe des variétés telles que \mathcal{O}_3^k soit non vide : il serait intéressant de trouver des exemples, s'ils existent. Ceci est lié à la question suivante de Rosenberg et Roussarie ([R.-R.] 1975) qui n'est toujours pas résolue :

Question. – Existe-t-il des feuilletages par plans sur le tore T^3 qui soient C^1 -structurellement stables ?

a. Feuilletages possédant une feuille compacte C telle que $H_1(C, \mathbf{R})=0$

Le but de ce paragraphe est de comprendre \mathcal{O}_0^k .

Rappelons d'abord le fait suivant, qui est un simple corollaire des théorèmes de stabilité de Reeb et de leurs généralisations par Thurston [Th].

THÉORÈME. – Soit \mathcal{F} un feuilletage transversalement orienté, de classe C^r , $r \geq 1$, d'une variété compacte M . Supposons que \mathcal{F} possède une feuille compacte C telle que $H_1(C, \mathbf{R})=0$. Alors :

(i) il existe une fibration $\pi : M \rightarrow S^1$ de fibre C qui définit le feuilletage \mathcal{F} (en particulier toute feuille de \mathcal{F} est compacte et difféomorphe à C).

(ii) tout feuilletage C^r -proche de \mathcal{F} , est défini par une submersion C^r -proche de π .

En particulier, l'ensemble des feuilletages possédant une feuille compacte C telle que $H_1(C, \mathbf{R})=0$ est ouvert pour toute C^k -topologie, $k \geq 1$, et pour chacun de ces feuilletages la classe d'équivalence $[C]$ est C^k -stable.

On peut *a priori* penser que $[C]$ peut-être C^0 -instable (si, du moins, $\pi_1(C) \neq 0$). Nous aurons alors besoin du lemme suivant :

LEMME 2.a.1. – Soit \mathcal{F} un feuilletage défini par une fibration $\pi : M \rightarrow S^1$ de fibre C telle que $H_1(C, \mathbf{R})=0$. Alors :

(i) tout feuilletage C^0 -proche de \mathcal{F} et possédant une feuille compacte de premier groupe d'homologie nul est défini par une fibration $\pi' : M \rightarrow S^1$ de fibre C telle que π' soit C^0 -proche de π .

(ii) \mathcal{F} possède un voisinage \mathcal{U} dans $\mathcal{F}ol(M)$ muni de la C^0 -topologie tel que l'ensemble des feuilletages $\mathcal{G} \in \mathcal{U}$, tels que \mathcal{G} ne possède pas de feuille compacte de premier groupe d'homologie trivial, est ouvert dans \mathcal{U} .

En d'autres termes : si une feuille compacte C , telle que $H_1(C, \mathbf{R})=0$ est C^0 -instable, une C^0 -perturbation qui ouvre la feuille C ne peut pas recréer une feuille compacte C' telle que $H_1(C', \mathbf{R})=0$.

Démonstration. – Soit $\sigma : S^1 \rightarrow M$ une section de la fibration π , soit $p : \mathbf{R} \rightarrow S^1$ le revêtement universel de S^1 . La composée $\sigma \circ p$ fait de \mathbf{R} une transversale complète \mathcal{F} , et donc de tout feuilletage suffisamment C^0 -proche de \mathcal{F} .

Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ un système générateur de $\pi_1(C)$. Alors à tout feuilletage \mathcal{G} , C^0 -proche de \mathcal{F} , et à tout γ_i on associe un difféomorphisme d'holonomie g_i de \mathcal{G} « le long de γ_i », C^0 -proche de l'identité, et défini sur un voisinage du segment $[-4\pi, 4\pi]$ de \mathbf{R} (rappelons que $\sigma \circ p$ ($[-4\pi, 4\pi]$) coupe toute feuille de \mathcal{G}).

De plus, pour tout $t \in [-4\pi, 4\pi]$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\sigma \circ p(t)$ est sur une feuille compacte de \mathcal{G} difféomorphe à C et proche d'une fibre de π .
- (ii) t est point fixe commun des g_i .

De plus, si (i) ou (ii) est vérifiée, les g_i sont tous égaux à l'identité, et \mathcal{G} est défini par une fibration π' C^0 -proche de π .

Nous allons montrer le lemme suivant, qui implique facilement le lemme 2.a.1.

LEMME 2.a.2. – *On suppose que l'un des g_i au moins est différent de l'identité. Soit C' une feuille compacte de \mathcal{G} . Alors la restriction à C' de la projection $\pi : M \rightarrow S^1$, induit un morphisme $\pi_* : \pi_1(C') \rightarrow \mathbf{Z}$ dont l'image est non triviale.*

Démonstration. – On a remarqué ci-dessus que l'hypothèse que l'un des g_i est différent de l'identité entraîne que les g_i sont sans points fixes communs.

D'autre part l'intersection de C' avec $\sigma(S^1)$ est finie, et non vide. On construit une suite de points x_m de $[0, 2\pi[$, tels que $\sigma \circ p(x_m) \in C'$, de la façon suivante :

Soit $x_0 \in [0, 2\pi[$, tel que $\sigma \circ p(x_0) \in C'$.

Supposons x_m construit. Alors il existe $i_m \in \{1, \dots, n\}$, tel que $g_{i_m}(x_m) \neq x_m$. Notons $y_{m+1} = \sup \{g_{i_m}(x_m), g_{i_m}^{-1}(x_m)\}$. On a bien sûr : $y_{m+1} > x_m$. On note alors x_{m+1} le représentant de la classe, modulo 2π , de y_{m+1} , qui appartient à $[0, 2\pi[$. Le point x_{m+1} ainsi construit est tel que $\sigma \circ p(x_{m+1})$ appartient à l'intersection de C' avec $\sigma(S_1)$. De la finitude de cette intersection on déduit qu'il existe $m_1 < m_2$ tels que $x_{m_1} = x_{m_2}$.

On obtient alors un lacet γ sur la feuille C' en mettant bouts à bouts les segments s_j joignant $\sigma \circ p(x_j)$ à $\sigma \circ p(x_{j+1})$, $j \in \{m_1, \dots, m_2 - 1\}$, s_j correspondant à l'holonomie g_{i_j} .

On vérifie facilement que $\pi_*(\gamma)$ est différent de 0 dans $\pi_1(S_1) = \mathbf{Z}$, ce qui prouve le lemme 2.a.2.

Pour démontrer le lemme 2.a.1, il suffit alors de remarquer que l'ensemble des feuilletages \mathcal{G} tels que l'une des holonomies g_i est différente de l'identité est un ouvert pour la C^0 -topologie.

b. Holonomie contractante et instabilité de feuilles compactes

A priori, si l'on ouvre une feuille compacte instable par une petite perturbation du feuilletage, on peut en créer d'autres (stables ou instables). Le but de ce paragraphe est de donner des conditions simples sur l'holonomie permettant d'affirmer qu'une perturbation ouvrant une feuille compacte n'en recrée pas d'autres.

DÉFINITION. – *On dira qu'un feuilletage \mathcal{F} possède une holonomie contractante s'il existe un difféomorphisme d'holonomie φ du feuilletage \mathcal{F} , défini au voisinage d'un segment K , et tel que $\varphi(K)$ soit inclus dans l'intérieur de K .*

Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol_\infty(M)$ un feuilletage, C une feuille compacte de \mathcal{F} , et $[C]$ sa classe d'équivalence.

Soit $I = [a, b]$, $a \leq b$ un segment de \mathbf{R} , et soit $\tau : \mathbf{R} \rightarrow M$ un chemin transverse à \mathcal{F} tel que $\tau(I)$ soit inclus dans $\text{supp}[C]$, que $\tau(a)$ et $\tau(b)$ soient chacun sur une feuille compacte de \mathcal{F} (équivalente à C), et que $\tau(I)$ rencontre toute feuille de $\text{supp}[C]$.

Soit $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ un système générateur du groupe fondamental $\pi_1(C)$, soient f_1, \dots, f_n des difféomorphismes d'holonomie associés aux lacets $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (considérés comme difféomorphismes locaux de \mathbf{R}), définis au voisinage d'un segment J contenant I dans son intérieur; quitte à restreindre le segment J , on supposera que les points fixes communs des f_i , contenus dans J , correspondent aux intersections des feuilles compactes de \mathcal{F} avec $\tau(I)$, et que ces feuilles compactes sont toutes équivalentes à C .

De plus, si $\mathcal{G} \in \mathcal{F}ol_\infty(M)$ est un feuilletage, C^r -proche de \mathcal{F} , à tout γ_i est associé un difféomorphisme d'holonomie g_i de \mathcal{G} , défini au voisinage du segment J , C^r -proches de f_i , et les g_i sont tels que les points fixes communs des g_i contenus dans J correspondent aux intersections avec $\tau(J)$ des feuilles compactes de \mathcal{G} , proches d'une feuille compacte de \mathcal{F} équivalente à C .

Pour tout point $x \in J$ on notera J_x le segment $J_x = \bigcup_i [x, f_i(x)]$.

Un tel segment va servir, en quelque sorte, de domaine fondamental pour le feuilletage \mathcal{F} ; c'est ce qu'exprime le lemme facile suivant :

LEMME 2.b.1. – Soit $x \in J$ et V_x un voisinage du segment J_x . Alors, pour tout feuilletage \mathcal{G} suffisamment C^0 -proche de \mathcal{F} on a :

- ou bien toute feuille de \mathcal{G} rencontrant $\tau(J)$ s'accumule sur une feuille compacte difféomorphe à C et proche d'une feuille compacte de \mathcal{F} équivalente à C ,
- ou bien toute feuille de \mathcal{G} rencontrant $\tau(J)$ rencontre $\tau(V_x)$.

La démonstration est facile et laissée au lecteur : il suffit de remarquer que, si les difféomorphismes d'holonomie g_i sont sans points fixes communs, alors l'orbite de tout point de J , par le pseudo-groupe engendré par les g_i , rencontre V_x .

DÉFINITION. – Nous dirons que la classe d'équivalence $[C]$ vérifie l'hypothèse H si :

- il existe un difféomorphisme φ d'holonomie du feuilletage \mathcal{F} , défini au voisinage d'un segment K et tel que $\varphi(K)$ soit inclus dans l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ de K (c'est-à-dire que \mathcal{F} possède une holonomie contractante),
- il existe un point $x \in J$ tel que toute feuille de \mathcal{F} rencontrant J_x rencontre $K - \varphi(K)$.

L'intérêt de l'hypothèse H est donné par la proposition suivante :

PROPOSITION 2.b.2. – Soit $[C]$ une classe d'équivalence de feuilles compactes de \mathcal{F} , vérifiant l'hypothèse H. Alors il existe un voisinage ν de $\text{supp } [C]$ tel que, pour tout feuilletage \mathcal{G} suffisamment C^0 -proche de \mathcal{F} , on a :

- ou bien toute feuille de \mathcal{G} rencontrant ν s'accumule sur une feuille compacte difféomorphe à C et proche d'une feuille compacte de \mathcal{F} équivalente à C . De plus, si C' est une feuille compacte de \mathcal{G} rencontrant ν , alors toute feuille compacte de \mathcal{G} rencontrant ν est équivalente à C' , et la classe d'équivalence $[C']$ vérifie l'hypothèse H,
- ou bien aucune feuille de \mathcal{G} rencontrant ν n'est compacte.

Idée de la démonstration. – La proposition est un simple corollaire du lemme 2.b.1. Il faut remarquer que :

- l'hypothèse H implique l'existence d'un voisinage compact V_x de J_x tel que toute feuille de \mathcal{F} rencontrant V_x rencontre $K - \varphi(K)$,
- tout feuilletage \mathcal{G} , C^0 -proche de \mathcal{F} , possède un difféomorphisme d'holonomie ψ , C^0 -proche de φ ; en particulier $\psi(K) \subset \overset{\circ}{K}$,
- si \mathcal{G} est suffisamment C^0 -proche de \mathcal{F} , toute feuille de \mathcal{G} rencontrant V_x rencontre $K - \psi(K)$,
- une feuille l de \mathcal{G} passant par $t \in K - \psi(K)$ ne peut pas être compacte : en effet $\psi^n(t)$ est défini pour tout $n > 0$, et les $\psi^n(t)$ sont des points d'intersections, deux à deux distincts,

de la feuille l avec le segment K transverse à \mathcal{F} ; or une feuille compacte coupe un segment de transversale en un nombre fini de points !

Exemples (de feuilles compactes dont la classe d'équivalence vérifie l'hypothèse H).

2.b.3. Si une feuille compacte C possède un germe d'holonomie contractante ayant 0 comme point fixe isolé, alors sa classe d'équivalence vérifie l'hypothèse H.

2.b.4. LEMME. – Soit C une feuille compacte possédant deux germes d'holonomie f et g vérifiant :

– f est d'ordre de contact fini n avec l'identité,

– g est d'ordre de contact avec l'identité strictement supérieur à n , éventuellement infini mais (0 étant le point d'intersection de C avec la transversale) 0 est point fixe isolé, d'un côté au moins, pour g .

Alors la classe d'équivalence $[C]$ vérifie l'hypothèse H.

Démonstration. – Quitte à changer f ou g par leur inverse, ou à changer l'orientation de \mathbf{R} , on peut supposer que les restrictions de f et g à $[0, +\infty[$ sont des contractions.

On voit facilement que, pour tout $y > 0$ il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $f^{-1} \circ g^k(y) < y$. Mais, l'ordre de contact de $f^{-1} \circ g^k$ avec l'identité en 0 est le même que celui de f^{-1} , donc $f^{-1} \circ g^k(x) > z$ pour $z > 0$ assez petit : on en déduit immédiatement l'existence d'un segment K tel que $f^{-1} \circ g^k(K) \subset \mathring{K}$, et tel que l'union $\cup_{n \in \mathbf{N}} \varphi^{-n}(K)$ où $\varphi = f^{-1} \circ g^k$ contient 0 dans son adhérence.

Il est clair que pour tout $z > 0$ assez proche de 0, toute feuille de \mathcal{F} rencontrant J_x rencontre $\varphi(K) - K$, et donc $[C]$ vérifie l'hypothèse H.

c. Densité de l'ensemble des feuilletages dont les feuilles compactes vérifient l'hypothèse H

Le but de ce paragraphe est de prouver :

PROPOSITION 2.c.1. – L'ensemble des feuilletages, dont toute classe d'équivalence de feuilles compactes vérifie l'hypothèse H, est dense pour la C^1 -topologie dans l'ensemble des feuilletages de $\mathcal{Fol}(M)$ qui n'ont pas de feuille compacte de premier groupe d'homologie réelle triviale.

Idée de la démonstration.

Soit C une feuille compacte d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$, telle que $H_1(C, \mathbf{R}) \neq 0$, et ne vérifiant pas l'hypothèse H. Nous allons montrer qu'il existe un feuilletage \mathcal{G} , aussi C^1 -proche que l'on veut de \mathcal{F} , coïncidant avec \mathcal{F} hors d'un petit voisinage de $\text{supp } [C]$, et tel que C soit une feuille compacte de \mathcal{G} vérifiant H.

En effet, d'après l'exemple 2.b.3, l'holonomie linéaire de la famille C doit être triviale. On peut alors épaissir la feuille C (voir [Mu]) ce qui représente une C^1 -petite perturbation. On obtient ainsi un feuilletage \mathcal{F}_1 de classe C^∞ , C^1 -proche de \mathcal{F} , coïncidant avec \mathcal{F} hors d'un petit voisinage de C , et tel que C possède un petit voisinage U , difféomorphe à $C \times [-1, 1]$ et feuilleté trivialement par produit.

Soit $t : \pi_1(C) \rightarrow \mathbf{R}$ un homomorphisme non trivial (cela existe puisque, par hypothèse $H_1(C, \mathbf{R}) \neq 0$). Soit X un champ de vecteur de classe C^∞ sur \mathbf{R} , nul en dehors de $[-(1/2), (1/2)]$, et possédant un zéro hyperbolique en 0; notons (X_t) son flot.

Pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}$, on obtient un homomorphisme contravariant φ_ε de $\pi_1(C)$ dans $\text{Diff}([-1, 1])$ défini par : $\varphi_\varepsilon(\gamma) = X_{\varepsilon \cdot t(\gamma)}$.

Par suspension des homomorphismes φ_ε , on obtient une famille différentiable de feuilletages de $C \times [-1, 1]$, coïncidant avec le feuilletage produit hors de $C \times [-(1/2), (1/2)]$, et tels que, pour $\varepsilon \neq 0$, la feuille compacte $C \times \{0\}$ possède une holonomie contractante.

Notons \mathcal{G}_ε le feuilletage de M coïncidant avec \mathcal{F} hors de U et avec la suspension de φ_ε sur U .

Pour $\varepsilon > 0$ petit, \mathcal{G}_ε est C^∞ -proche de \mathcal{F}_1 (donc C^1 -proche de \mathcal{F}) et C est une feuille compacte de \mathcal{G}_ε , possédant une holonomie contractante, donc sa classe $[C]$ vérifie l'hypothèse H.

d. Démonstration du théorème 2.1

LEMME 2.d.1. – *L'ensemble \mathcal{O}_1^k , des feuilletages possédant au moins une feuille compacte C , $H_1(C, \mathbf{R}) \neq 0$, et tels que toute classe d'équivalence de feuilles compactes est C^k -stable, est ouvert dans $\mathcal{Fol}(M)$ muni de la C^k -topologie, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.*

LEMME 2.d.2. – *L'ensemble \mathcal{O}_2 , des feuilletages sans feuilles compactes, mais possédant une holonomie contractante, est ouvert dans $\mathcal{Fol}(M)$ muni de la C^k -topologie, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.*

Démonstration des lemmes 2.d.1 et 2.d.2. – Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_1^k \cup \mathcal{O}_2^k$. Soient $[C_1], \dots, [C_n]$ les classes d'équivalences de feuilles compactes de \mathcal{F} . Chacune de ces classes étant C^r -stable (par hypothèse), pour tout i il existe un voisinage U_i de $\text{supp } [C_i]$ tel que, pour tout feuilletage \mathcal{G} , C^r -proche de \mathcal{F} , toute feuille de \mathcal{G} rencontrant U_i possède dans son adhérence une feuille compacte difféomorphe à C_i et proche d'une feuille compacte de \mathcal{F} équivalente à C_i .

Pour prouver les lemmes d.1 et d.2, il suffit de montrer que toute feuille compacte, d'une C^r -petite perturbation de \mathcal{F} , rencontre l'un des U_i .

Pour cela nous allons montrer qu'il existe un nombre fini de segments K_j , sur une transversale du feuilletage \mathcal{F} , et, pour tout j , un difféomorphisme d'holonomie f_j , défini au voisinage de K_j , tels que l'on ait les deux propriétés suivantes :

- (i) $f_j(K_j)$ est inclus dans l'intérieur $\overset{\circ}{K}_j$ de K_j ,
- (ii) toute feuille de \mathcal{F} rencontre, ou bien l'un des ouverts U_i , ou bien l'un des intervalles transverses $K_j - f_j(K_j)$.

En effet toute feuille l de \mathcal{F} possède dans son adhérence \bar{l} un minimal du feuilletage \mathcal{F} qui peut être :

- une feuille compacte de \mathcal{F} , auquel cas l rencontre l'un des U_i ,
- un minimal exceptionnel du feuilletage \mathcal{F} ; dans ce cas le théorème de Sachsteder [Sa] assure l'existence d'un lacet, sur une feuille du minimal, d'holonomie hyperbolique (donc contractante). On en déduit la finitude du nombre des minimaux exceptionnels,

et l'existence pour chacun d'eux d'un segment transverse K et d'une holonomie tel que $f(K) \subset \overset{\circ}{K}$; bien-sûr l rencontre $K-f(K)$,

– toute la variété M , c'est-à-dire que toute feuille est dense (en particulier $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_2^k$). Dans ce cas, par hypothèse, il existe un segment K et une holonomie f telle que $f(K) \subset \overset{\circ}{K}$, et toute feuille \mathcal{F} rencontre $K-f(K)$ (par densité).

Voyons maintenant comment conclure : si \mathcal{G} est un feuilletage C^k -proche de \mathcal{F} alors les segments K_j sont transverses à \mathcal{G} , et il existe des difféomorphismes d'holonomie g_j du feuilletage \mathcal{G} , C^k -proches des f_j , et vérifiant donc $g_j(K_j) \subset \overset{\circ}{K}_j$. On vérifie facilement, par compacité de M , que toute feuille l de \mathcal{G} rencontre soit l'un des ouverts U_i , soit l'un des intervalles $K_j-g_i(K_j)$ (et dans ce cas l ne peut être compacte, car elle rencontre le segment K_j en une infinité de points). Ceci achève la démonstration des lemmes d.1 et d.2.

On a donc déjà montré :

COROLLAIRE 2.d.3. – Les \mathcal{O}_i^k , $k \in \{0, 1\}$, sont des ouverts disjoints.

Pour prouver le théorème 2.1, il reste à montrer :

LEMME 2.d.4. – $\mathcal{O}^k = \bigcup_0^3 \mathcal{O}_j^k$ est dense dans $\mathcal{Fol}(M)$ muni de la C^k -topologie, $k \in \{0, 1\}$.

Démonstration. – Nous allons voir que étant donné un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$, il existe une C^k -petite perturbation de \mathcal{F} qui appartient à \mathcal{O}^k . En fait, nous allons procéder par perturbations successives.

Si \mathcal{F} n'est pas dans l'adhérence de \mathcal{O}_0^k , le lemme 2.a.1, (ii) montre qu'il existe un feuilletage \mathcal{F}_1 , C^k -proche de \mathcal{F} , appartenant à l'intérieur de l'ensemble des feuilletages ne possédant pas de feuilles compactes de premier groupe d'homologie trivial.

Si \mathcal{F}_1 n'appartient pas à \mathcal{O}_3^k , alors il existe un feuilletage \mathcal{F}_2 , C^k -proche de \mathcal{F}_1 , tel que :

– ou bien $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{O}_2$ (auquel cas c'est fini),

– ou bien \mathcal{F}_2 possède au moins une feuille compacte de premier groupe d'homologie non trivial. Dans ce cas, d'après la proposition 2.c.1, il existe un feuilletage \mathcal{F}_3 , C^k -proche du feuilletage \mathcal{F}_2 , possédant au moins une feuille compacte, et dont toute classe d'équivalence de feuilles compactes vérifie l'hypothèse H.

On conclut grâce au lemme suivant :

LEMME 2.d.5. – Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$ un feuilletage possédant au moins une feuille compacte, et dont toute d'équivalence de feuille compacte vérifie l'hypothèse H. Alors il existe un feuilletage $\mathcal{G} \in \mathcal{O}_1^k \cup \mathcal{O}_2^k$, C^k -proche de \mathcal{F} , $k \in \{0, 1\}$.

Démonstration. – Par définition de l'hypothèse H, le feuilletage \mathcal{F} possède au moins un difféomorphisme d'holonomie f défini au voisinage d'un segment K d'une transversale de \mathcal{F} , et tel que $f(K) \subset \overset{\circ}{K}$. Tout feuilletage C^k -proche de \mathcal{F} vérifiera aussi cette propriété.

Notons $[C_1], \dots, [C_n]$ les classes d'équivalences de feuilles compactes de \mathcal{F} (elles sont en nombre fini, d'après le lemme 1.a.2).

Supposons qu'une des classes d'équivalence soit C^k -instable, $k \in \{0, 1\}$, alors il existe un feuilletage \mathcal{F}_1 C^k -proche de \mathcal{F} , possédant $n_1 \leq n-1$ classes d'équivalences de feuilles compactes, et ces classes d'équivalences vérifient toute l'hypothèse H : en effet, d'après la proposition 2.b.2, une perturbation qui ouvre une classe d'équivalence C_i instable et

vérifiant H ne recrée aucune autre classe d'équivalence de feuilles compactes, et les classes d'équivalences C_j préservées par la perturbation vérifient encore l'hypothèse H .

Si $n_1 = 0$ alors $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{O}_2^k$. Si $n_1 > 0$ et si une classe d'équivalence de \mathcal{F}_1 est instable, on recommence le procédé et on obtient un feuilletage \mathcal{F}_2 C^k -proche de \mathcal{F} , possédant $n_2 < n_1 < n$ classes d'équivalence de feuilles compactes, chacune vérifiant l'hypothèse H .

En moins de n itérations de ce procédé, on obtient un feuilletage \mathcal{G} , C^k -proche de \mathcal{F} , dont toutes les classes d'équivalences de feuilles compactes sont C^k -stables, ou ne possédant aucune feuille compacte, mais possédant une holonomie contractante ($g(K) \subset \mathring{K}$).

3. Feuilles dont le groupe fondamental est commutatif

Les connaissances actuelles sur les difféomorphismes commutants de la droite \mathbf{R} permettent de résoudre le problème de la stabilité des feuilles compactes de groupe fondamental commutatif (du moins en topologie C^0 ou C^1).

Cette partie ne contient pas de résultat originaux à proprement parler : son but est de regrouper des résultats partiels déjà connus, et parfois de faire le lien entre eux pour obtenir des énoncés généraux : par exemple nous donnerons (théorème 3.f.1) une condition nécessaire et suffisante à la C^0 ou C^1 -stabilité d'une feuille compacte C , $\pi_1(C)$ commutatif, d'un feuilletage de classe C^∞ .

Nous verrons également que toute classe d'équivalence $[C]$, $\pi_1(C)$ commutatif, peut être stabilisée par une C^∞ perturbation à support local (proposition 3.h.1).

Nous verrons également que le fait de posséder une feuille compacte C^∞ -plate (toutes les holonomies étant C^∞ tangentes à l'identité) peut être stable, et nous verrons à quelle condition.

L'originalité de cette partie est qu'elle regroupe dans une même théorie des résultats classiques de démonstrations différentes, comme le théorème de stabilité de Hirsch (pour les feuilles compactes isolées de groupe fondamental commutatif, voir [Hi]) et celui de Plante d'existence de feuilles compactes pour un feuilletage proche d'une fibration de base S^1 , dont la fibre est de groupe fondamental commutatif (voir [P]). Nous nous risquerons même à esquisser une théorie d'indice, pour les feuilles compactes de groupe fondamental commutatif (voir les commentaires 3.f.5).

Certaines idées, utilisées systématiquement dans cette partie, sont déjà en germes, plus ou moins explicitement, dans les travaux de R. Moussu, H. Rosenberg et R. Roussarie sur les feuilletages de codimension 1 (voir par exemple [M], [M-R]).

a. Rappels de résultats fondamentaux

Nous utiliserons sans démonstration les résultats suivants :

THÉORÈME. – *Soit f un difféomorphisme local de \mathbf{R} , de classe C^∞ , préservant l'orientation, soit x un point fixe isolé de f , et soit I un intervalle ouvert tel que f et f^{-1} soient définis sur I , et que $(\text{Fix } f) \cap I = \{x\}$. Alors :*

1. (Szekeres 1957, Sergeraert 1977 [Se]). *Il existe un unique champ de vecteurs X , défini sur I , de classe C^1 en x , de classe C^∞ sur $I - \{x\}$, tel que le temps 1, X_1 , du flot de X coïncide avec f sur I .*

2. (Sternberg 1957 [St], Takens 1973 [Ta]). *Si de plus f n'est pas C^∞ -tangent à l'identité en x , alors X est de classe C^∞ même en x .*

THÉORÈME (Koppel 1970 [K], lemme 1, page 168). – *Soit f un difféomorphisme local de classe C^2 de $[0, +\infty[$, défini au voisinage de 0, et tel que 0 soit l'unique point fixe de f . Soit g un difféomorphisme local de classe C^1 de $[0, +\infty[$, défini au voisinage de 0, et commutant avec f .*

Si g possède un point fixe différent de 0, alors g est l'identité.

b. Nombre de translation pour les homéomorphismes commutants

Remarque 3.b.1. – Soit f un difféomorphisme local de classe C^∞ de $[0, +\infty[$, possédant un point fixe isolé en 0, et soit X le champ de vecteurs (voir théorème de Szekeres et Sergeraert) tel que f coïncide au voisinage de 0 avec le temps 1, X_1 , du flot de X .

Soit g un difféomorphisme local de classe C^1 de $[0, +\infty[$, défini au voisinage de 0, et commutant avec f .

Alors il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que g coïncide, au voisinage de 0, avec X_t (temps t du flot de X).

En effet il suffit de choisir t que $X_{-t} \circ g$ possède un point fixe différent de 0, et appliquer le théorème de Koppel.

Le nombre t , dont parle la remarque, mesure en quelque sorte le rapport entre les difféomorphismes commutants f et g .

Le but de ce paragraphe est de montrer que, pour deux homéomorphismes commutants f et g , ce rapport peut être défini en tout point qui n'est pas point fixe commun de f et g : c'est ce que nous appellerons nombre de translation relatif de f et g au point x . Nous en décrivons les propriétés élémentaires.

La seule difficulté technique provient de ce que nous considérons des homéomorphismes définis sur des intervalles de \mathbf{R} : cela nous oblige à contrôler les domaines de définition lorsque l'on doit faire des compositions.

Soient f et g deux homéomorphismes locaux de \mathbf{R} , préservant l'orientation, et dont les domaines de définitions sont des intervalles.

Soit x un point vérifiant :

1. f et g sont définis au point x , et sur l'intervalle $[x, f(x)] \cup [x, g(x)]$. (Attention : les intervalles $[x, f(x)]$ et $[x, g(x)]$ ne sont pas orientés; la notation ci-dessus peut-être trompeuse si, par exemple, $f(x) < x < g(x)$. Cette notation représente seulement le plus petit segment contenant ces trois points.)

2. $f \circ g(x) = g \circ f(x)$

3. $\{f(x), g(x)\} \neq \{x\}$.

On vérifie alors facilement que, soit f soit g est sans point fixe sur $[x, f(x)] \cup [x, g(x)]$: supposons donc f sans points fixes sur $[x, g(x)] \cup [x, f(x)]$.

Notons $J = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} f^n([x, f(x)])$, l'ensemble des images $f^n(y)$, $y \in [x, f(x)]$, quand elles sont définies. Le fait que f soit défini sur $[x, f(x)]$ entraîne que J est un intervalle, et le fait que f soit sans point fixe sur $[x, g(x)]$ entraîne que $[x, g(x)]$ est inclus dans J . D'autre part J est invariant par f , et donc $[f(x), f \circ g(x)] \subset J$; on en déduit $[g(x), g \circ f(x)] \subset J$.

Soit h un homéomorphisme du segment $[x, f(x)]$ sur le segment $[0, 1]$; alors h se prolonge de manière unique en un homéomorphisme (encore noté h) de J sur un segment de \mathbf{R} , qui conjugue la restriction de f à J à la translation $t \rightarrow t+1$. Notons G l'homéomorphisme de $[0, 1]$ sur un segment de \mathbf{R} défini par $G = h \circ g|_{[x, f(x)]} \circ h^{-1}|_{[0, 1]}$.

On vérifie facilement que $G(1) = G(0) + 1$, ce qui permet de prolonger G , de façon unique, en un homéomorphisme (encore noté G) de \mathbf{R} , commutant avec la translation $t \rightarrow t+1$. Alors $\lim_{n \in \mathbf{Z}} (G^n(t)/n)$ existe pour tout $t \in \mathbf{R}$, est indépendant de t , et de l'homéomorphisme h de $[x, f(x)]$ sur $[0, 1]$.

DÉFINITION 3.b.2. – *Le nombre $\lim_{n \in \mathbf{Z}} (G^n(t)/n)$ s'appelle le nombre de translation (relatif) de g par rapport à f au point x , on le note $t_{g/f}(x)$.*

Si x vérifie (1), (2) et (3), mais si f possède un point fixe dans l'intervalle $[x, g(x)]$, on notera $t_{g/f}(x) = \infty$.

Exemple 3.b.3. – Si X est un champ de vecteurs sur \mathbf{R} , et si f et g sont respectivement les temps α et β du flot de X , alors, si x n'est pas un point singulier de X et si la condition (1) est vérifiée en x , on a $t_{g/f}(x) = \beta/\alpha$.

On en déduit :

Exemple 3.b.4. – Si f et g sont des difféomorphismes vérifiant les hypothèses de la remarque 3.b.1, alors, pour $x > 0$ assez petit, $t_{g/f}(x)$ est le temps t tel que $X_t = g$, où $X_1 = f$.

Nous allons maintenant passer en revue les principales propriétés du nombre de translations.

LEMME 3.b.5. – *Soit I un intervalle de \mathbf{R} , et soient f et g deux homéomorphismes tels que tout point de I vérifie les propriétés (1), (2) et (3). Alors $t_{g/f}$, considéré comme fonction de I dans \mathbf{R} , est une fonction constante.*

Indications pour la démonstration. – L'intervalle I est inclus dans l'intervalle J utilisé dans la définition de $t_{g/f}(x)$. L'homéomorphisme h de conjugaison de f avec la translation $s \rightarrow s+1$ applique tout intervalle $[x, f(x)]$, $x \in J$, sur l'intervalle $[h(x), h(x)+1]$. Il suffit alors de remarquer que l'homéomorphisme G coïncide avec $h \circ g \circ h^{-1}$ sur l'intervalle $\bigcup_{t \in h(I)} [t, t+1]$: le même homéomorphisme G sert donc à calculer les $t_{g/f}(x)$, $x \in I$.

LEMME 3.b.6. – *Soit f, g deux homéomorphismes locaux de \mathbf{R} , et x un point vérifiant (1), (2) et (3). Soit U un voisinage compact de $[x, f(x)] \cup [x, g(x)]$ sur lequel f et g sont définis.*

Alors, si \tilde{f} et \tilde{g} sont deux homéomorphismes locaux de \mathbf{R} , suffisamment C^0 -proches de f et g sur U , et si y est un point suffisamment proche de x vérifiant (1), (2) et (3) pour \tilde{f} et \tilde{g} , alors $t_{\tilde{g}/\tilde{f}}(y)$ est proche de $t_{g/f}(x)$ (dans $\mathbf{R} \cup \{\infty\} = \mathbf{RP}^1$).

Indications pour la démonstration. – \tilde{G} sera C^0 -proche de G .

LEMME 3.b.7. – Soient f , g et x tels que $t_{gff}(x)$ soit défini. Alors $t_{gff}(x) = 0$ si et seulement si g possède un point fixe dans l'intervalle $[x, f(x)]$.

Indication. – Il suffit de voir que G aura un point fixe.

LEMME 3.b.8. – Soient f et g deux homéomorphismes locaux de \mathbf{R} , et soit x un point tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définis et coïncident sur $[x, f(x)] \cup [x, g(x)]$. On suppose de plus que $x \notin \text{Fix } f \cap \text{Fix } g$. Alors : $t_{g/f}(x) = 1/t_{f/g}(x)$ (avec la convention $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$).

Indications pour la démonstration. – Il faut remarquer que, sous ces hypothèses et avec les notations de la définition 3.b.2, g coïncide avec $h^{-1} \circ G \circ h$ sur $[x, f(x)] \cup [x, g(x)]$. On en déduit que $t_{g/f}(x) = t_{T/g}(x)$ où F est la translation $s \rightarrow s+1$.

LEMME 3.b.9. – Soient f , g_1 et g_2 trois homéomorphismes locaux de \mathbf{R} , et soit x un point tel que $f \circ g_1$, $g_1 \circ f$, $f \circ g_2$, $g_2 \circ f$, $g_1 \circ g_2$ et $g_2 \circ g_1$ soient définis sur $[x, f(x)] \cup [x, g_1(x)] \cup [x, g_2(x)]$, et que $f \circ g_1 = g_1 \circ f$, $f \circ g_2 = g_2 \circ f$, $g_2 \circ g_1 = g_1 \circ g_2$ sur cet intervalle.

Supposons de plus que f soit sans point fixe sur cet intervalle.

Alors x vérifie les conditions (1), (2) et (3) pour f et $g_1 \circ g_2$ et l'on a :

$$t_{g_1 \circ g_2 / f}(x) = t_{g_1 / f}(x) + t_{g_2 / f}(x).$$

(l'hypothèse « f sans point fixe » sert à éviter le cas $t_{g_1 / f}(x) = t_{g_2 / f}(x) = \infty$, la somme $\infty + \infty$ étant indéterminée : en effet, les nombres de translation infinis n'ont pas de signe, on ne peut pas distinguer $+\infty$ de $-\infty$).

Indications pour la démonstration. – Les conditions sur les domaines de définition et de commutation impliquent que G_2 et G_3 coïncident avec $h \circ g_1 \circ h^{-1}$ et $h \circ g_2 \circ h^{-1}$ sur (respectivement) $[0, 1] \cup [G_2(0), G_2(0)+1]$ et $[0, 1] \cup [G_1(0), G_1(0)+1]$. On en déduit que $G_1 \circ G_2 = G_2 \circ G_1$ sur $[0, 1]$, donc sur \mathbf{R} (par commutation avec la translation $s \rightarrow s+1$).

Le nombre de translation évalue un « rapport » entre deux homéomorphismes commutants. Il est souvent plus pratique de considérer un rapport comme étant la pente d'une droite (donc un élément d'un espace projectif).

Nous allons à présent associer à n difféomorphismes, f_i , commutants deux à deux, une 1/2 droite de \mathbf{R}^n (donc un point de la sphère S^{n-1}), qui déterminera les nombres de translations t_{f_i / f_j} , et les signes $f_i(x) - x$:

Soient f_1, \dots, f_n n homéomorphismes locaux de \mathbf{R} , et soit x vérifiant les propriétés suivantes :

– les propriétés (1) et (2) sont vérifiées en tout point de $\bigcup_i [x, f_i(x)]$ pour tout les couples (f_i, f_j) .

– $x \notin \bigcup_i \text{Fix } f_i$.

Supposons par exemple que f_j soit sans point fixe sur $\bigcup_i [x, f_i(x)]$. Alors le point $(t_{f_1 / f_j}(x), \dots, 1 = t_{f_j / f_j}(x), \dots, t_{f_n / f_j}(x))$ dirige une droite de \mathbf{R}^n . On vérifie facilement que cette droite ne dépend pas du choix de j tel que f_j soit sans point fixe sur $\bigcup_i [x, f_i(x)]$ (d'après le lemme 3.b.8).

DÉFINITION 3.b.10. – On appelle direction de translation du n -uplet (f_1, \dots, f_n) au point x la demi droite de \mathbf{R}^n dirigée par le vecteur $(f_j(x) - x)(t_{f_1/f_j}(x), \dots, t_{f_n/f_j}(x))$. On la notera $\theta_{f_1, \dots, f_n}(x)$ et on considérera $\theta_{f_1, \dots, f_n}(x)$ comme un point de la sphère S^{n-1} .

D'après les lemmes 3.b.8 et 3.b.9 on montre facilement la « formule de changement de base » suivante.

LEMME 3.b.11. – Soit $A \in GL(n, \mathbf{R})$ une matrice à coefficients entiers,

$$A = (a_{i,j}), \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Soient f_1, \dots, f_n n homéomorphismes locaux de \mathbf{R} , commutants 2 à 2.

Notons $A(f_i)_i$ le n -uplet (g_1, \dots, g_n) d'homéomorphismes commutants de \mathbf{R} défini par $g_i = \prod_1^n f_j^{a_{i,j}}$ (où le produit représente la composition des homéomorphismes).

Alors, pour tout $x \notin \bigcap_i \text{Fix } f_i$, on a : $\theta_{A(f_i)_i}(x) = A \theta_{(f_i)_i}(x)$ où $A \theta_{(f_i)_i}(x)$ est la 1/2 droite de \mathbf{R}^n image par A de la 1/2 droite $\theta_{(f_i)_i}(x)$.

Remarque 3.b.12. – La formule de changement de base est bien sûr encore valide pour des homéomorphismes locaux, pourvu que les domaines commutations permettent d'appliquer (autant de fois qu'il le faut) les lemmes 3.b.8 et 3.b.9.

c. Stabilité de points fixes communs d'homéomorphismes commutants, existence de contraction et nombre de translation

Soit f un homéomorphisme local de \mathbf{R} , et soit $[a, b]$ un segment inclus dans le domaine de définition de f , tel que a et b soient des points fixes de f . On dira que f est une contraction au voisinage du segment $[a, b]$, s'il existe un voisinage U de $[a, b]$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(U) = [a, b]$.

Dans [H], Hirsch montrait la stabilité d'une feuille compacte isolée, de groupe fondamental commutatif, d'un feuilletage de codimension 1 sous l'hypothèse de l'existence d'une holonomie contractante. Le lemme suivant donne la stabilité d'une classe d'équivalence de feuilles compactes, sous les mêmes hypothèses.

LEMME 3.c.1. – Soient f_1, \dots, f_n n homéomorphismes locaux de \mathbf{R} , et $[a, b]$ un segment inclus dans l'intersection des domaines de définition des f_i , tel que a et b soient points fixes communs des f_i . On suppose de plus que les commutateurs $f_i^{-1} \circ f_j^{-1} \circ f_i \circ f_j$ sont tous définis et égaux à l'identité sur un voisinage U_0 de $[a, b]$.

Supposons de plus que f_1 soit une contraction au voisinage de $[a, b]$.

Alors, pour tout n -uplet d'homéomorphismes (g_1, \dots, g_n) , C^0 -proches des f_i , et tels que les commutateurs $g_i^{-1} \circ g_j^{-1} \circ g_i \circ g_j$ soient définis et égaux à l'identité sur U_0 , on a :

$$\bigcap_i \text{Fix } g_i \cap U_0 \neq \emptyset.$$

Démonstration. – f_1 étant une contraction au voisinage de $[a, b]$, et g_1 étant C^0 -proche de f_1 , g_1 possède au moins un point fixe proche de $[a, b]$. De plus, la commutation des g_i sur U_0 entraîne : $g_i(\text{Fix } g_1 \cap U_0) \subset \text{Fix } g_1$, pour tout i . D'autre part, f_1 étant sans

point fixe sur $U_0 - [a, b]$, g_1 sera sans point fixe sur $U_0 - U_1$, où U_1 est un petit voisinage de $[a, b]$. Enfin, pour tout i , $f_i([a, b]) = [a, b]$, et g_i est C^0 -proche de f_i : on en déduit $g_i(U_1) \subset U_0$, et donc :

$$g_i(\text{Fix } g_1 \cap U_0) \subset \text{Fix } g_1 \cap U_0.$$

Les points extrémaux $\sup(\text{Fix } g_1 \cap U_0)$ et $\inf(\text{Fix } g_1 \cap U_0)$ sont alors des points fixes communs des g_i .

Voyons à présent le lien entre l'existence d'une contraction dans le pseudo-groupe engendré par les f_i , et les nombres de translations.

Désormais f_1, \dots, f_n sont n homéomorphismes locaux de \mathbf{R} , définis au voisinage d'un segment $[a, b]$, commutants au voisinage de $[a, b]$, et tel que l'on ait :

- a et b sont points fixes communs des f_i .
- $\bigcap_i \text{Fix } f_i \subset [a, b]$.

Alors, il existe un voisinage U de $[a, b]$ tel que la direction de translation $\theta_{(f_i)_i}$ soit définie sur $U - \bigcap_i \text{Fix } f_i$: c'est une application localement constante, d'après le lemme 3.b.5.

LEMME 3.c.2. – *Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes.*

- (i) *il existe $x, y \in U - \bigcap_i \text{Fix } f_i$, tels que $\theta_{(f_i)_i}(x) \neq \theta_{(f_i)_i}(y)$.*
- (ii) *il existe $c \leq d \in \bigcap_i \text{Fix } f_i$, et il existe $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{Z}^n$ tels que $f_1^{\alpha_1} \circ \dots \circ f_n^{\alpha_n}$ soit une contraction au voisinage de $[c, d]$.*

Indications pour la démonstration. – Il faut remarquer que pour tout j , la j -ième coordonnée de $\theta_{(f_i)_i}(x)$ a (si elle est non nulle) le même signe que $f_j(x) - x$. Il suffit alors d'appliquer la formule de changement de variable : si $\theta_{(f_i)_i}(x) \neq \theta_{(f_i)_i}(y)$, on peut changer la famille $(f_i)_i$ pour les familles des combinaisons linéaires $(g_i)_i = A(f_i)_i$, $A \in \text{GL}(n, \mathbf{Z})$, de façon que la première coordonnée de $\theta_{(g_i)_i}(x)$ ait le signe opposé de celle de $\theta_{(g_i)_i}(y)$: cela implique que g_1 ou g_1^{-1} est une contraction de l'intervalle $[x, y]$.

Remarque 3.c.3. – Le lemme 3.c.2 donne une nouvelle démonstration du lemme 3.c.1 : en effet $\theta_{(f_i)_i}(x)$ et $\theta_{(f_i)_i}(y)$ dépendent continûment des homéomorphismes commutants f_i , $1 \leq i \leq n$. Si $\theta_{(f_i)_i}(x) \neq \theta_{(f_i)_i}(y)$, il en sera encore de même pour toutes perturbations des $(f_i)_i$. La fonction $\theta_{(f_i)_i}$ étant constante hors des points fixes communs au f_i l'hypothèse $\theta_{(f_i)_i}(x) \neq \theta_{(f_i)_i}(y)$ implique l'existence de points fixes communs dans $[x, y]$ pour tout n -uplet g_i , $1 \leq i \leq n$, d'homéomorphismes commutants C^0 -proches des f_i .

COROLLAIRE 3.c.4. – *Soit V un voisinage de $[a, b]$. S'il existe des homéomorphismes g_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, aussi C^0 -proches que l'on veut des f_i , tels que les commutateurs $g_i^{-1} \circ g_i^{-1} \circ g_i \circ g_j$ soient tous définis et égaux à l'identité sur V , et que $\bigcap_i \text{Fix } g_i \cap V = \emptyset$, alors la fonction $\theta_{(f_i)_i}$ est constante sur $U - \bigcap_i \text{Fix } f_i$.*

Nous allons à présent voir comment associer le point de vue différentiable (en particulier les théorèmes rappelés au paragraphe 3.a) à cette théorie élémentaire, afin de montrer que l'absence de contraction est une condition suffisante (et nécessaire) à l'instabilité.

d. Difféomorphismes commutants et nombres de translation

LEMME 3.d.1. – Soient f et g deux difféomorphismes commutants de classe C^∞ du segment $]a, b]$, tels que $\text{Fix } f \cap \text{Fix } g = \{a, b\}$.

Notons $\theta_{f,g}$ la 1/2 droite $\theta_{f,g}(x)$, $x \in]a, b[$, du plan \mathbf{R}^2 (en effet cette demi-droite ne dépend pas de $x \in]a, b[$). Alors :

(i) si $\theta_{f,g}$ contient un point à coordonnées entières, alors il existe un difféomorphisme h de classe C^∞ de $]a, b]$ et deux entiers α, β , tels que $f = h^\alpha$ et $g = h^\beta$.

(ii) dans le cas contraire, il existe un champ de vecteur X de classe C^1 sur $]a, b]$, de classe C^∞ sur $]a, b[$ et des nombres s, t de rapport s/t irrationnel, tels que f et g soient les temps s et t du flot de X ($f = X_s$ et $g = X_t$).

Si de plus f où g n'est pas C^∞ -tangent à l'identité au point a (resp. b) alors X sera de classe C^∞ en a (resp. b).

Démonstration. – Si la 1/2 droite $\theta_{f,g}$ possède un point de coordonnées $(p, q) \in \mathbf{Z}^2 - (0, 0)$.

– Si p ou q est nul, alors f ou g est l'identité : en effet le lemme 3.b.7 impliquera l'existence d'un point fixe dans $]a, b[$, il suffit alors d'appliquer le théorème de Koppel; (i) est alors trivialement vérifié.

– Si p et q sont non-nuls, on peut choisir p et q premiers entre eux : il existe donc deux entiers u et v tel que $up + vq = 1$.

Notons $h = f^u \circ g^v$. On a alors :

$$\begin{cases} t_{h/f} = u + v \cdot t_{g/f} = u + v \frac{q}{p} = \frac{1}{p} \\ t_{h/g} = v + u \cdot t_{f/g} = v + u \frac{p}{q} = \frac{1}{q} \end{cases}$$

On en déduit (lemme 3.b.8) : $t_{f \circ h^{-p}/h} = t_{g \circ h^{-q}/h} = 0$.

D'après le lemme 3.b.7 et le théorème de Koppel, on en déduit que $f = h^p$ et $g = h^q$.

– Si la 1/2 droite $\theta_{f,g}$ ne possède pas de point de coordonnée entière, cela signifie que le nombre de translation $t_{g/f}$ est irrationnel.

D'après le théorème de Szekeres et Sergeraert, il existe un unique champ de vecteur X^a (resp. X^b) de classe C^1 sur $]a, b[$ (resp. $]a, b]$), de classe C^∞ sur $]a, b[$, tel que f soit le temps 1, X_1^a (resp. X_1^b), du flot de X_1^a (resp. X_1^b).

De plus, d'après l'exemple 3.b.4, g est égal au temps $t_{g/f}$ du flot de X^a (resp. X^b). On en déduit que les flots X_t^a et X_t^b coïncident pour un ensemble dense de valeurs de t , donc pour tout t , c'est-à-dire que $X^a = X^b$, ce qui conclut la démonstration.

Remarque 3.d.2. – Ce résultat se généralise immédiatement pour n difféomorphismes commutants f_1, \dots, f_n de $]a, b]$ tels que $\bigcap_i \text{Fix } f_i = \{a, b\}$:

– si $\theta_{(f_i)_i}$ contient un point non nul de coordonnées entières, alors les f_i , sont des itérés, h^{α_i} , d'un même difféomorphisme h de $]a, b]$.

– sinon les f_i sont les temps α_i du flot d'un même champ de vecteur X de classe C^∞ sur $]a, b[$ et de classe C^1 en a et b .

e. C^1 -instabilité de points fixes communs de difféomorphismes commutants en l'absence de contraction

Soient f_1, \dots, f_n n difféomorphismes de classe C^∞ de \mathbf{R} , définis et commutants au voisinage d'un segment $[a, b]$, tel que $\{a, b\} \subset \bigcap_i \text{Fix } f_i \subset [a, b]$.

Soit U un voisinage de $[a, b]$ tel que $\theta_{(f_i)_i}$ soit définie sur $U - \bigcap_i \text{Fix } f_i$.

On suppose que l'application $\theta_{(f_i)_i}$ est constante sur $U - \bigcap_i \text{Fix } f_i$, c'est-à-dire (d'après le lemme 3.c.2) que le pseudogroupe engendré par les f_i ne contient aucune contraction.

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'avec ces hypothèses on peut, par une C^1 -petite perturbation à support local des f_i , supprimer tous les points fixes communes des f_i : c'est ce qu'exprime le lemme 3.e.1 :

LEMME 3.e.1. – Avec ces hypothèses ci-dessus, il existe n difféomorphismes de classe C^∞ , (g_1, \dots, g_n) , aussi C^1 -proches que l'on veut des f_i , coïncidant avec les f_i hors d'un voisinage V aussi petit que l'on veut de $[a, b]$, tels que tous les produits $g_i^{-1} \circ g_i^{-1} \circ g_i \circ g_j$ soient définis et égaux à l'identité sur V , et tel que :

$$\bigcap_i \text{Fix } g_i \cap V = \phi.$$

Démonstration. – Par hypothèse $\theta_{(f_i)_i}$ est constante sur $U - \bigcap_i \text{Fix } f_i$.

La démonstration du lemme 3.e.1 est très simple dans le cas où $\theta_{(f_i)_i}$ contient un point de coordonnée entière. En effet, à partir du lemme 3.d.1 on montre facilement qu'il existe un difféomorphisme h de classe C^∞ et des entiers α_i tel que, pour tout i , $h = f_i^{\alpha_i}$. De plus $h(x) - x$ garde un signe constant sur U , car h appartient par construction au pseudo-groupe engendré par les f_i , et donc, par hypothèse, n'est une contraction ou une dilatation au voisinage d'aucun segment inclus dans U . Donc tous les points fixes de h sont instables; on construit alors une C^∞ -petite perturbation à support local des f_i de la façon suivante : soit \tilde{h} un difféomorphisme C^∞ -proche de h , coïncidant avec h hors d'un voisinage aussi petit que l'on veut de $[a, b]$, et sans points fixes dans U . Posons $g_i = \tilde{h}^{\alpha_i}$, et la famille $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la perturbation annoncée.

Nous supposons donc désormais que $\theta_{(f_i)_i}$ ne contient aucun point à coordonnées entières. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un point de $\theta_{(f_i)_i}$. On construit alors, en 3 étapes, la perturbation $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ annoncée :

1^{re} étape : Soit $\varepsilon > 0$, petit. Notons g_i^ε les homéomorphismes locaux de \mathbf{R} obtenus en remplaçant les f_i par l'identité sur tout intervalle $[x, y]$, $x, y \in \bigcap_i \text{Fix } f_i$, $|x - y| \leq \varepsilon$.

Remarque 1. – Si ε est assez petit, les f_i sont C^∞ -proches de l'identité sur ces intervalles.

2^e étape : $\mathbf{R} - \bigcap_i \text{Fix } g_i^\varepsilon$ est alors formé d'un nombre fini d'intervalles, $I_1^\varepsilon, \dots, I_{n_\varepsilon}^\varepsilon$. Du lemme 3.d.1 et de la remarque 3.d.2, on déduit facilement qu'il existe un unique champ de vecteur X^ε continu sur \mathbf{R} tels que pour tout i , g_i^ε coïncide avec le temps α_i , $X_{\alpha_i}^\varepsilon$, du flot de X^ε (en particulier X^ε est nul hors des I_i^ε).

Remarque 2. – Pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$, I_i^ε sera une composante connexe de $\mathbf{R} - \bigcap_i \text{Fix } g_i^{\varepsilon'}$, et $X^{\varepsilon'}|_{I_i^\varepsilon} = X^\varepsilon|_{I_i^\varepsilon}$.

Remarque 3. – Le champ X^ε a un signe constant, positif ou nul.

Remarque 4. – Le champ X^ε est de classe C^∞ sauf aux extrémités des intervalles I_i^ε . De plus, si ε est assez petit, pour tout point $x \in \partial I_i^\varepsilon$ qui est un point de discontinuité de la dérivée de X^ε , les dérivées, à droite et à gauche, de X^ε existent et sont aussi proches que l'on veut de 0 (en fait X^ε est nul d'un côté au moins de x).

Des remarques 2, 3 et 4 on déduit que, pour ε assez petit, il existe un champ de vecteurs \tilde{X}^ε ayant les propriétés suivantes :

- \tilde{X}^ε est de classe C^∞ .
- \tilde{X}^ε coïncide avec X^ε hors d'un voisinage arbitrairement petit de $[a, b]$.
- \tilde{X}^ε est positif ou nul.
- \tilde{X}^ε est nul en dehors des I_i^ε .
- pour tout i , la restriction de \tilde{X}^ε à l'adhérence de I_i^ε est C^1 -proche de celle de X^ε .

De la remarque 1, on déduit alors que, pour tout i , $\tilde{g}_i = \tilde{X}_{\alpha_i}^\varepsilon$ (temps α_i du flot de \tilde{X}^ε) est C^1 -proche de f_i .

3^e étape : il existe alors un champ de vecteurs Y , non nul, de classe C^∞ , aussi C^1 -proche que l'on veut de \tilde{X}^ε et coïncidant avec \tilde{X}^ε (donc avec X^ε) hors d'un voisinage arbitrairement petit de $[a, b]$. Posons, pour tout i , $g_i = Y_{\alpha_i}$: la famille $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la perturbation annoncée.

f. Stabilité et instabilité des classes d'équivalence de feuilles compactes de groupe fondamental commutatif

D'après la proposition 1.b.1, le lemme 3.c.1 et le lemme 3.e.1, nous avons déjà démontré le théorème suivant, qui donne une condition nécessaire est suffisante à la C^0 ou C^1 -stabilité d'une classe d'équivalence de feuilles compactes de groupe fondamental commutatif, pourvu que le feuilletage ne soit pas défini par une fibration de base S^1 .

THÉORÈME 3.f.1. – Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$ un feuilletage de codimension 1 transversalement orientable, et soit C une feuille compacte de \mathcal{F} , de groupe fondamental commutatif. On suppose de plus que \mathcal{F} n'est pas une fibration de fibre C (c'est-à-dire que \mathcal{F} possède au moins une feuille non compacte).

On peut alors trouver un segment $\tau : [-2, 2] \rightarrow M$, transverse au feuilletage \mathcal{F} , tel que $\tau([-1, 1]) \subset \text{supp } [R]$, que l'ensemble $[C] \cap \tau$ des points t , tels que $\tau(t)$ soit sur une feuille compacte équivalente à C , soit inclus dans $[-1, 1]$ et contienne $\{-1, 1\}$. On a alors :

1. (Théorème de Hirsch) s'il existe un segment $[a, b] \subset [-1, 1]$, $a, b \in [C] \cap \tau$ et un difféomorphisme d'holonomie de \mathcal{F} qui soit une contraction au voisinage de $[a, b]$, alors $[C]$ est C^0 -stable.

2. Dans le cas contraire $[C]$ est C^1 -instable.

Remarque 3.f.2. – Le point 1 du théorème n'utilise pas le fait que \mathcal{F} soit de classe C^∞ ($\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$). Par contre le point 2 utilise le théorème de Sergeraert et Szekeres, ainsi

que celui de Koppel, et nécessite donc que \mathcal{F} soit de classe C^∞ ; il est faux pour des feuilletages C^0 .

Remarque 3.f.3. – Sous les hypothèses du point 2 du théorème (absence d'holonomie contractante); s'il existe de plus une feuille non compacte, et non localement dense, adhérente à $\text{supp } [C]$, alors $[C]$ est C^∞ -instable.

Question 3.f.4. – Existe-t-il des feuilles compactes, de groupe fondamental commutatif, qui soient C^1 -instables et C^∞ -stables ?

Il reste à présent un cas résolu par le théorème 3.f.1 : celui d'un feuilletage défini par une fibration. Ce cas est résolu par le théorème de Plante (voir [P]).

THÉORÈME. – Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$ un feuilletage défini par une fibration $P : M \rightarrow S^1$ de fibre C , telle que $\pi_1(C)$ soit commutatif. Soit $L : H_1(C, \mathbf{R}) \rightarrow H_1(C, \mathbf{R})$ l'isomorphisme de monodromie de la fibration. Alors on a :

1. (Plante) Si L ne possède pas de valeur propre réelle positive, alors $[C]$ est C^0 -stable (c'est-à-dire que tout feuilletage C^0 -proche de \mathcal{F} possède une feuille compacte proche d'une fibre).

2. Si L possède une valeur propre positive alors $[C]$ est C^∞ -instable.

Démonstration du point 1 : théorème de Plante.

Par hypothèse $\pi_1(C)$ est commutatif. Nous supposons ici que $\pi_1(C) = \mathbf{Z}^n$ (la démonstration s'adapte sans difficulté au cas où $\pi_1(C)$ possède un sous-groupe de torsion).

Fixons $s : S^1 \rightarrow M$ une section de la fibration P . Cette section fait de S^1 une transversale complète du feuilletage \mathcal{F} . Soit $\Pi : \mathbf{R} \rightarrow S^1$ le recouvrement universel du cercle (on prend la convention $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$). Alors $s \circ \Pi$ fait de \mathbf{R} une transversale complète de \mathcal{F} . On identifiera souvent $t \in \mathbf{R}$ avec le point $(s \circ \Pi)(t)$ (ce qui amène l'ambiguïté $t = t + 1$), et on notera C^t la fibre de p passant par t .

Soit $(\gamma_1^0, \dots, \gamma_n^0)$ un système générateur du groupe fondamental $\pi_1(C^0, 0)$. Notons $A = (a_{i,j})$ la matrice de monodromie de la fibration P , dans cette base; bien sûr $A \in \text{GL}(n, \mathbf{Z})$.

Il existe alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, une unique famille $\{\gamma_i^t\}_{t \in \mathbf{R}}$, $\gamma_i^t \in \pi_1(C^t, t)$, telle que les γ_i^t dépendent continûment de t au sens suivant : pour t variant dans un petit intervalle, γ_i^t peut être représenté par un lacet dans la fibre C^t variant continûment avec t . Pour t , $(\gamma_1^t, \dots, \gamma_n^t)$ est alors une base de $\pi_1(C^t, t)$.

De plus on a la relation (\star) suivante :

$$(\star) \quad \gamma_i^{t+1} = \prod_1^n (\gamma_j^t)^{a_{i,j}}.$$

Soit à présent \mathcal{G} un feuilletage C^0 -proche de \mathcal{F} . Alors l'holonomie de \mathcal{G} , le long des lacets γ_i^t , définit pour tout i un difféomorphisme local de \mathbf{R} , f_i , C^0 -proche de l'identité : le domaine de définition des f_i sera un intervalle d'autant plus grand que \mathcal{G} sera C^0 -proche de \mathcal{F} (l'intervalle tendant vers $] - \infty, +\infty[$ quand \mathcal{G} tend vers \mathcal{F}); de plus f_i tend vers l'identité quand \mathcal{G} tend vers \mathcal{F} .

De même les commutateurs $f_i^{-1} \circ f_j^{-1} \circ f_i \circ f_j$ seront définis et égaux à l'identité sur des intervalles tendant vers $] - \infty, +\infty[$ quand \mathcal{G} tend vers \mathcal{F} .

L'application direction de translation θ_{f_1, \dots, f_n} est donc définie sur $] - n, n[- \cap_i \text{Fix } f_i$, pour $n \in \mathbf{N}$ aussi grand que l'on veut (quand \mathcal{G} est suffisamment proche des \mathcal{F}).

Si $t \in [0, 1]$ est un point fixe commun aux f_i , alors la feuille de \mathcal{G} passant par t est compacte, et proche de la fibre C' : pour prouver le théorème de Plante il suffit donc de prouver l'existence d'un tel point fixe commun.

De la relation (\star) vérifiée par les γ_i^t , on, déduit que les f_i vérifient la relation suivante (là où les deux membres sont définis).

$$f_i(t+1) = \left(\prod_1^n f_j^{\alpha_{i,j}} \right)(t) + 1.$$

(Le produit représentant ici la composition des applications).

D'après le lemme 3.b.1, pour tout point $t \in \mathbf{R} - \bigcap_i \text{Fix } f_i$ où les fonctions $\theta_{(f_i)_i}$ et $\theta_{A(f_i)_i}$ sont définies, on a alors :

$$\theta_{(f_i)_i}(t+1) = A \theta_{(f_i)_i}(t).$$

L'hypothèse « A sans valeur propre réelle positive » implique donc :

$$\theta_{(f_i)_i}(t+1) \neq \theta_{(f_i)_i}(t).$$

Donc les f_i possèdent un point fixe commun dans tout intervalle $[t, t+1]$, ce qui conclut la démonstration du théorème de Plante.

Démonstration du point 2 du théorème. – Inversement, si A possède une valeur propre $\lambda > 0$, on considère un champ de vecteurs X sur \mathbf{R} , non nul, et tel que $X(t+1) = \lambda^{-1} X(t)$.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un vecteur propre de A pour la valeur propre λ . Posons pour $s \in [0, 1]$ et pour tout i , $f_{i,s} = X_{s\alpha_i}$ (temps $s\alpha_i$ du flot de X); le flot de X n'est pas complet, donc les $f_{i,s}$ ne sont définis que sur des intervalles de \mathbf{R} : cependant les intervalles de définition tendent vers $] - \infty, +\infty[$ quand s tend vers 0.

Pour tous s , les $f_{i,s}$ commutent deux à deux. De plus on a :

$$A(f_{i,s}) = (X_{s\lambda\alpha_1}, \dots, X_{s\lambda\alpha_n}) = ((\lambda X)_{s\lambda\alpha_1}, \dots, (\lambda X)_{s\lambda\alpha_n})$$

De la relation $X(t+1) = \lambda^{-1} X(t)$ on déduit alors la relation :

$$f_{i,s}(t+1) = \left(\prod_1^n f_{i,s}^{\alpha_{i,j}} \right)(x) + 1.$$

Alors la famille à 1 paramètre $(f_{i,s}, \dots, f_{n,s})_{s \in [0,1]}$ représente une déformation de l'holonomie du feuilletage \mathcal{F} , au sens de [B-H]; il existe donc une déformation $(\mathcal{F}^s)_{s \in [0,1]}$ du feuilletage \mathcal{F} telle que $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}$, et telle que pour tout s , l'holonomie du feuilletage \mathcal{F}^s soit engendrée par les $f_{i,s}$: en particulier, les $f_{i,s}$, $s \neq 0$, étant sans points fixes communs, les feuilletages \mathcal{F}^s , $s \neq 0$, sont sans feuilles compactes proches d'une fibre.

Commentaires. 3.f.5. – 1. Vers une théorie d'indice pour les feuilles compactes de groupe fondamental commutatif.

Pour les feuilles compactes de groupe fondamental commutatif des feuilletages de codimension 1, le point de vue local (feuille compactes isolées) et le point de vue global (fibration) du problème de stabilité sont désormais résolus par une même théorie : nous sommes donc très près d'une théorie d'indice (pour ces feuilles compactes) du type indice de Poincaré-Hopf ou de Lefschetz, ou indice de Fuller. Nous proposons la définition suivante :

DÉFINITION. – *On appellera indice d'une feuille compacte isolée C , telle que $\pi_1(C) = \mathbf{Z}^n$, la donnée du couple $(\theta^-(C), \theta^+(C))$, où $\theta^+, \theta^- \in S^{n-1}$ sont les directions de translations des holonomies de C , de part et d'autres de C .*

On considère $S^{n-1} \times S^{n-1}$ comme un groupoïde pour la loi $(a, b)(b, c) = (a, c)$. La feuille C est donc stable si (et seulement si) son indice n'est pas une unité.

On définit de même l'indice d'une classe d'équivalence $[C]$ telle que $\text{supp}[C] \neq M$. En effet, pour une telle classe d'équivalence, le feuilletage \mathcal{F} étant transversalement orienté, on a la notion de première et dernière feuille. On peut donc considérer les directions de translations $\theta^- [C], \theta^+ [C]$ des holonomies de $[C]$, avant la première feuille et après la dernière. Si la classe d'équivalence est constituée d'un nombre fini de feuille compacte, son indice sera égal au produit (dans le groupoïde) des indices des feuilles qui la constitue.

Enfin, si \mathcal{F} est défini par une fibration de fibre C , pour toute perturbation \mathcal{G} de \mathcal{F} l'indice de $[C]$ sera du type $(\theta, A\theta)$ où A est la matrice de monodromie.

2. Les théorèmes de Hirsch et de Plante sont vrais sous des hypothèses plus faibles que $\pi_1(C)$ commutatif. (voir [H], théorème 1.4) et [P]). De plus leurs hypothèses sans être exactement les mêmes, sont très similaires. Il serait intéressant de savoir si l'on peut unifier leurs résultats dans une même théorie, pour des feuilles compactes de groupe fondamental non commutatif.

g. Généricité de feuilles C^∞ -plates

LEMME 3.g.1. – *Soit f_1, \dots, f_n n difféomorphismes commutants de \mathbf{R} , et soient x et $y \in \mathbf{R} - \bigcap_i \text{Fix } f_i$ tels que les directions de translation $\theta_{(f_i)_i}(x)$ et $\theta_{(f_i)_i}(y)$ ne sont ni égales ni opposée (comme points de S^{n-1}); on notera $\theta_{(f_i)_i}(x) \neq \pm \theta_{(f_i)_i}(y)$.*

Alors il existe un point $z \in]x, y[$, $z \in \bigcap_i \text{Fix } f_i$, tel que f_i est C^∞ -tangent à l'identité en z , pour tout i .

De plus l'existence d'un point fixe commun C^∞ -plat est stable par C^0 -perturbation :

LEMME 3.g.2. – *Si de plus g_1, \dots, g_n sont n difféomorphismes commutants de \mathbf{R} , g_i C^0 -proche de f_i pour tout i , alors il existe un point fixe communs au g_i , $z \in]x, y[$, tel que tous les g_i soient C^∞ tangents à l'identité en z .*

Démonstration des lemmes 3.g.1 et 3.g.2. – Pour tout point fixe commun z non C^∞ -plat, les nombres de translations t_{f_i/f_j} sont défini de part et d'autre de z , et valent $f_i^{(k)}(z)/f_j^{(k)}(z)$, où $(k-1)$ est l'ordre de contact des f_i avec l'identité en 0 (cet ordre ne dépend pas de i tel que $f_i \neq \text{id}$), et où $f_i^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de f_i .

En particulier $\theta_{(f_i)_i}(t)$ ne varie pas quand t franchit un point fixe non C^∞ -plat : on en déduit aisément le lemme 3.g.1.

Le lemme 3.g.2 est alors conséquence triviale de la continuité de $\theta_{(f_i)_i}(x)$ et $\theta_{(f_i)_i}(y)$ par rapport au n -uplet $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de difféomorphismes commutants (lemme 3.b.6).

3.g.3. *Traduction en termes de feuilletages.* – Soit C une feuille compacte de groupe fondamental commutatif d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$, soit $[C]$ sa classe d'équivalence, et soit $h : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}(\mathbf{R}, [a, b])$ l'homomorphisme d'holonomie du feuilletage \mathcal{F} au voisinage d'un segment $[a, b] \subset \text{supp}[C]$ de transversale, $[a, b]$ coupant toute feuille de $[C]$. Notons $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ un système générateur de $\pi_1(C)$.

La fonction direction de translation des holonomies, $\theta_{(h(\gamma_1), \dots, h(\gamma_n))}$, est alors définie sur $U - (U \cap \bigcup_{C' \in [C]} C')$, où U est un voisinage du segment $[a, b]$: en effet $\bigcup_{C' \in [C]} C' \cap U$ est l'ensemble des points fixes communs aux $h(\gamma_i)$.

On a alors : s'il existe $x, y \in U - \bigcup_{C' \in [C]} C'$ tels que $\theta_{(h(\gamma_i)_i)}(x) \neq \pm \theta_{(h(\gamma_i)_i)}(y)$, alors il existe une feuille compacte équivalente à C dont toutes les holonomies sont C^∞ -tangentes à l'identité (on dira : une feuille C^∞ -plate). De plus l'existence de cette feuille C^∞ -plate est persistante par C^0 -perturbation du feuilletage \mathcal{F} .

Exemple 3.g.4. – Soit \mathcal{F} le feuilletage de Reeb de la sphère S^3 , et soit C l'unique feuille compacte (difféomorphe à T^2) de \mathcal{F} . On peut choisir un système générateur de $\pi_1(C)$ de façon que les holonomies associées f et g aient un nombre de translation $t_{g/f}$ égal à 0 ou ∞ suivant le côté de la feuille T^2 ou l'on se place.

C'est en fait, un phénomène général sur S^3 :

Tout feuilletage de S^3 , de classe C^∞ , possède au moins une feuille compacte C difféomorphe au tore T^2 , et bordant une composante de Reeb, avec la propriété suivante : soient f et g les difféomorphismes d'holonomie de la classe d'équivalence $[C]$ associés à deux générateurs de $\pi_1(C)$. Alors $\theta_{f,g}^+[C] \neq \pm \theta_{f,g}^- [C]$, (où $\theta_{f,g}^+[C]$, et $\theta_{f,g}^- [C]$ sont les directions de translations de f et g de part et d'autre de $\text{supp}[C]$).

La démonstration consiste à reprendre un argument de H. Rosenberg et R. Roussarie (voir [R.-R]) : par une chirurgie, on peut supprimer une classe d'équivalence $[C]$ telle que $\theta_{f,g}^+[C] = \theta_{f,g}^- [C]$, la chirurgie ne créant aucune nouvelle feuille compacte. En utilisant la finitude de l'ensemble des classes d'équivalence (lemme 1.a.2) on crée facilement une contradiction avec le théorème de Novikov.

Exemple 3.g.5. – Soit \mathcal{F} un feuilletage défini par une fibration $P : M \rightarrow S_1$ de fibre C , $\pi_1(C) = \mathbf{Z}^n$. Supposons que l'homomorphisme de monodromie L de la fibration, n'a pas de valeurs propres réelles.

Alors tout feuilletage \mathcal{G} , C^0 -proche de \mathcal{F} , possèdera au moins une feuille compacte (proche d'une fibre) C^∞ -plate : en effet, on aura $\theta_{(f_i)_i}(t+1) \neq \pm \theta_{(f_i)_i}(t)$ pour tout $t \in \bigcap_i \text{Fix}(f_i)$ où, les f_i sont les holonomies du feuilletage \mathcal{G} .

Cette idée a déjà été utilisée par Ghys et Sergiescu (voir [G.-S.]), pour montrer que tout feuilletage transversalement analytique, C^0 -proche de \mathcal{F} , est conjugué à \mathcal{F} .

Remarque 3.g.6. – Si un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$ possède une feuille compacte C C^∞ -plate, alors on peut, par une C^∞ -petite perturbation à support local, épaissir la feuille C , puis (si $H_1(C, \mathbf{R}) \neq 0$) perturber le nouveau feuilletage dans l'ouvert feuilleté trivialement de façon à garder un fermé arbitraire de feuilles compactes.

Nous venons de voir qu'il peut exister un ouvert $\mathcal{Fol}(M)$ possédant une feuille compacte C^∞ -plate. L'ensemble des feuilletages possédant une infinité de feuilles compactes instables est dense dans cet ouvert : un feuilletage générique n'a donc pas toute ses feuilles compactes stables. Cependant cette instabilité semble peu importante : la notion de classe d'équivalence de feuilles compactes nous a permis de passer outre ce phénomène.

h. Stabilisation d'une feuille compacte

Le but de ce paragraphe est de prouver :

PROPOSITION 3.h.1. – *Soit C une feuille compacte d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$, telle que $\pi_1(C)$ soit commutatif.*

Alors il existe \mathcal{G} , C^∞ -proche de \mathcal{F} , coïncidant avec \mathcal{F} hors d'un voisinage arbitraire de C , tel que C soit une feuille compacte de \mathcal{G} et que $[C]$ soit stable par C^0 -perturbation de \mathcal{G} .

Démonstration. – Supposons donc que C soit instable pour \mathcal{F} .

– si C n'est pas C^∞ -plate (c'est-à-dire si elle possède une holonomie dont l'ordre de contact avec l'identité est fini) : d'après le lemme 3.d.1 et le théorème de Takens (voir paragraphe *a*) il existe un champ de vecteurs X de classe C^∞ et un homéomorphisme $\tau : \pi_1(C) \rightarrow \mathbf{R}$ tel que pour tout $\gamma \in \pi_1(C)$ l'holonomie de \mathcal{F} le long de γ coïncide avec $X_{\tau(\gamma)}$ au voisinage de 0, où 0 est le point d'intersection avec C de la transversale. Il suffit alors de choisir un champ de vecteur Y , C^∞ -proche de X et coïncidant avec X hors d'un voisinage arbitraire de 0, et tel que 0 soit zéro hyperbolique de Y . L'application $\gamma \rightarrow X_{\tau(\gamma)}$ est alors une C^∞ -petite perturbation à support local de l'holonomie \mathcal{F} , et donc, d'après la proposition 1.b.1, il existe un feuilletage \mathcal{G} admettant les $X_{\tau(\gamma)}$ comme holonomies : il est clair que \mathcal{G} est la perturbation annoncée.

– si la feuille C est C^∞ -plate, on épaissit C par une C^∞ -petite perturbation à support local de \mathcal{F} . Il est alors facile de créer une feuille compacte isolée ayant une holonomie contractante, par une C^∞ -perturbation à support dans le voisinage de C feuilleté trivialement.

4. Densité de l'ensemble des feuilletages possédant un nombre fini de feuilles compactes

Notons $\mathcal{O} \subset \mathcal{Fol}(M)$ l'ensemble des feuilletages possédant une feuille compacte C telle que $H_1(C, \mathbf{R})=0$. Nous avons vu au paragraphe 2.a, d'après un résultat de Thurston, qu'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{O}$ est défini par une fibration de fibre C , et que, de plus \mathcal{O} est ouvert dans $\mathcal{Fol}(M)$ muni de la C^r -topologie, $r \geq 1$.

Le but de cette partie est de prouver :

THÉORÈME 4.1. – *L'ensemble des feuilletages n'ayant qu'un nombre fini de feuilles compactes est dense dans $\mathcal{Fol}(M) - \mathcal{O}$ muni de la C^∞ -topologie.*

Remarque 4.2. – L'ensemble des feuilletages n'ayant qu'un nombre fini de feuilles compactes peut être d'intérieur vide : c'est le cas par exemple dans $\mathcal{Fol}(S^3)$ (voir exemple 3.g.4).

Plus généralement, on ne peut pas espérer que cet ensemble contienne un ouvert dense : voir la remarque 3.g.6.

La démonstration du théorème 4.1 se présente comme une suite de réductions, la démonstration de chacun des lemmes consistant essentiellement à se ramener au lemme suivant. La partie subtile de la démonstration est le lemme 4.b.2, où plus exactement le lemme de M. P. Muller présenté en appendice.

PROPOSITION 4.3. – *Soit C une feuille compacte d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$, telle que $H_1(C, \mathbf{R}) \neq 0$.*

Alors il existe un feuilletage \mathcal{G} , C^∞ -proche de \mathcal{F} , et coïncidant avec \mathcal{F} hors de $\text{supp}[C]$, tel que \mathcal{G} possède une feuille compacte C' difféomorphe à C et coïncidant avec une feuille de \mathcal{F} équivalente à C , et tel que la classe d'équivalence $[C']$ soit formée d'un nombre fini de feuilles compactes.

Comme toujours, pour perturber le feuilletage \mathcal{F} , nous allons perturber son holonomie.

On suppose que $\text{supp}[C] \neq C$ (sinon il n'y a rien à faire), et on choisit un segment $I = [a, b]$ sur une transversale du feuilletage \mathcal{F} tel que l'on ait :

- $[a, b] \subset \text{supp}[C]$.
- $[a, b]$ rencontre toute feuille compacte équivalente à C .
- $[a, b]$ rencontre toute feuille compacte en au plus 1 point.

L'holonomie du feuilletage \mathcal{F} définit un homomorphisme contravariant

$$h : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}([a, b]).$$

Fixons $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ un système générateur de $\pi_1(C)$.

D'après la proposition 1.b.1, la proposition 4.3 et donc le théorème 4.1 sont conséquences faciles du lemme suivant :

LEMME 4.4. – *Avec les notations ci-dessus, il existe un homomorphisme contravariant $\tilde{h} : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}([a, b])$ avec les propriétés suivantes :*

- (i) *pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\tilde{h}(\gamma_i)$ est aussi C^∞ -proche de $h(\gamma_i)$ que l'on veut,*
- (ii) *pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, a et b sont des points fixes de $\tilde{h}(\gamma_i)$ et le jet infini de $\tilde{h}(\gamma_i)$ en a et en b est égal à celui de $h(\gamma_i)$,*
- (iii) $\bigcap_i^n \text{Fix } \tilde{h}(\gamma_i)$ *est fini.*

(L'hypothèse (ii) sert à raccrocher l'holonomie perturbée \tilde{h} à l'holonomie du feuilletage \mathcal{F} hors de $[a, b]$.)

Le reste de cette partie consiste en la démonstration du lemme 4.4.

La démonstration se fait en deux étapes.

a. Première perturbation

Soit $h : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}([a, b])$ un homéomorphisme contravariant.

On note :

$$\text{Fix } h = \bigcap_i^n \text{Fix } h(\gamma_i).$$

$$\text{Fix}_\infty h = \{t \in \text{Fix } h / \forall i, h(\gamma_i) \text{ est } C^\infty\text{-tangent à l'identité en } t\}.$$

LEMME 4.a.1. – *Il existe un homomorphisme contravariant $\bar{h} : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}([a, b])$ avec les propriétés suivantes :*

(i) *pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\bar{h}(\gamma_i)$ est aussi C^∞ -proche que l'on veut de $h(\gamma_i)$, et le jet d'ordre infini de $\bar{h}(\gamma_i)$ aux points a et b coïncide avec celui de $h(\gamma_i)$.*

(ii) *$\text{Fix}_\infty \bar{h}$ est fini.*

Démonstration. – Fixons $\epsilon < 0$. On définit n difféomorphismes H_i^ϵ de la façon suivante :

– $H_i^\epsilon(t) = t$, s'il existe $t_1, t_2 \in \text{Fix}_\infty(h)$ tels que $t \in [t_1, t_2]$ et $|t_1 - t_2| < \epsilon$.

– $H_i^\epsilon(t) = h(\gamma_i)(t)$ sinon.

On voit, facilement qu'il existe un unique homomorphisme contravariant H^ϵ défini par $H^\epsilon(\gamma_i) = H_i^\epsilon$, et que, pour ϵ assez petit, le point i du lemme est vérifié.

De plus $\text{Fix}_\infty H^\epsilon$ est formé d'un nombre fini d'intervalles, I_1, \dots, I_k .

Choisissons X un champ de vecteurs de classe C^∞ , nul sur $[a, b] - \bigcup_j I_j$, C^∞ -plat en a et en b , et tel que $X(x) \neq 0, \forall x \in \bigcup_j \text{Int}(I_j)$.

L'hypothèse $H_1(C, \mathbf{R}) \neq 0$ implique l'existence d'un homomorphisme non trivial $\tau : \pi_1(C) \rightarrow \mathbf{R}$.

Pour tout $\mu > 0$ on pose alors $H^{\epsilon, \mu}$ l'homomorphisme contravariant de $\pi_1(C)$ dans $\text{Diff}([a, b])$ défini par $H^{\epsilon, \mu}(\gamma) = X_{\mu, r(\gamma)} \circ H^\epsilon(\gamma)$.

On vérifie facilement que, pour ϵ et μ assez petit $H^{\epsilon, \mu}$ est l'homomorphisme \bar{h} annoncé.

b. Démonstration du lemme 4.4

D'après le lemme 4.a.1, on peut supposer que $\text{Fix}_\infty(h)$ est fini; quitte à couper en morceaux le segment $[a, b]$, on peut alors supposer que $\text{Fix}_\infty h \subset \{a, b\}$.

Avec ces hypothèses, l'ensemble des points d'accumulation de $\text{Fix } h$ est inclus dans $\{a, b\}$: supposons par exemple qu'il existe une suite $a_k \in \text{Fix } h$, $a_k \neq a$, convergeant vers a .

Le lemme 4.4 est alors un corollaire du lemme suivant :

LEMME 4.b.1. – *Avec les hypothèses ci-dessus pour tout $\mu > 0$, il existe un homomorphisme contravariant $\tilde{h} : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}[a, b]$ tel que $\text{Fix}_\infty \tilde{h} \subset \{a, b\}$, que a n'est pas point d'accumulation de $\text{Fix}_\infty \tilde{h}$, et que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\tilde{h}(\gamma_i)$ est C^∞ -proche de $h(\gamma_i)$, coïncide avec $h(\gamma_i)$ sur $[a + \mu, b]$, et a le même jet d'ordre infini que $h(\gamma_i)$ en a (c'est-à-dire est C^∞ -tangent à l'identité en a).*

Démonstration. – La suite a_k convergeant vers a , on peut choisir une suite ζ_k de difféomorphismes du segment $[a_k, b]$ sur $[a, b]$, de classe C^∞ , égaux à l'identité sur $[a + \mu, b]$ et convergeant vers l'identité pour la topologie C^∞ .

Notons h_k l'homomorphisme de $\pi_1(C)$ dans $\text{Diff}[a, b]$ défini par

$$h_k(\gamma) = \zeta_k \circ h(\gamma) \circ \zeta_k^{-1}.$$

Pour i assez grand, h_k vérifie toutes les propriétés désirées sauf une : $h_k(\gamma_i)$ n'est pas *a priori* C^∞ -plat en a . On en conclut alors grâce à un lemme d'aplatissement, du essentiellement à une idée de M. P. Muller [Mu] :

LEMME 4.b.2. – Soient $f_{i,k}$; $f_i \in \text{Diff}([a, b])$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \mathbf{N}$ tels que :

– Pour tout i , la suite $(f_{i,k})_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers f_i pour la topologie C^∞ .

– Pour tout i , f_i est C^∞ -tangent à l'identité en a .

Fixons $\mu > 0$ petit). Alors il existe une suite d'homéomorphismes ψ_j de $[a, b]$, de classe C^∞ sur $]a, b]$, égaux à l'identité sur $[a + \mu, b]$, et il existe une suite k_j , avec les propriétés suivantes :

(i) pour tout i, j , $\psi_j \circ f_{i,k_j} \circ \psi_j^{-1}$ est C^∞ -plat en a .

(ii) pour tout i , la suite $\psi_j \circ f_{i,k_j} \circ \psi_j^{-1}$ converge vers f_i pour la topologie C^∞ , quand j tend vers l'infini.

Démonstration du lemme 4.b.2. – Nous utiliserons le lemme suivant, dû à M. P. Muller :

Soient $\mu > 0$ et $\varphi \in \text{Diff}(]0, +\infty[)$ tels que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \geq \mu$, et $\varphi(x) = -1/\text{Log } x$ pour x proche de zéro.

Pour tout $\lambda \in]0, +\infty[$ notons φ_λ l'homéomorphisme de $[0, \infty[$ dans \mathbf{R} défini par :

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right), & \text{si } x \in]0, \infty[\\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On parlera de C^k -topologie pour parler de la C^k -topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

LEMME (Muller). – Soient f_n ; $f \in \text{Diff}([0, +\infty[)$, $n \in \mathbf{N}$ tels que la suite f_n converge vers f pour la C^∞ -topologie. Alors :

(i) $\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ est de classe C^∞ et $(\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1})'(0) = 1$.

(ii) si $f'(0) = 1$ alors $\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ est C^∞ -tangent à l'identité en 0.

(iii) $\varphi_\lambda \circ f_n \circ \varphi_\lambda^{-1}$ converge vers $\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ pour la topologie C^∞ .

De plus, si f est C^k -tangent à l'identité en 0, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, alors :

(iv) $\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ converge vers f sur la C^k -topologie quand λ tend vers 0.

Ce lemme de Muller [Mu] n'ayant pas été publié, nous en présentons une démonstration en appendice B.

Voyons à présent comment en déduire le lemme 4.b.2 (on supposera que le segment $[a, b]$ est le segment $[0, 1]$) :

On a : $(\varphi_\lambda \circ f_{i,k} \circ \varphi_\lambda^{-1})'(0) = 1$. De (iii) et de (iv), on conclut qu'il existe des suites $(\lambda_l), (k'_l)$ telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la suite $g_{i,l} = \varphi_{\lambda_l} \circ f_{i,k'_l} \circ \varphi_{\lambda_l}^{-1}$ converge vers f_i dans la topologie C^∞ .

En appliquant à nouveau le lemme de Muller, cette fois à la suite $g_{i,l}$, on obtient que $\varphi_\lambda \circ g_{i,l} \circ \varphi_\lambda^{-1}$ est C^∞ -tangente à l'identité en zéro, et qu'il existe des suites $(\lambda'_j), (l_j)$ telles que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la suite $\varphi_{\lambda'_j} \circ g_{i,l_j} \circ \varphi_{\lambda'_j}^{-1}$ converge vers f_i dans la topologie C^∞ .

Pour achever la démonstration, il suffit de définir $\psi_j = \varphi_{\lambda'_j} \circ \varphi_{\lambda_{l_j}}$ et $k_j = k'_{l_j}$.

5. Feuilletages des variétés de dimension 3

Désormais M est une variété de dimension 3, orientée, compacte connexe, et $\mathcal{Fol}(M)$ est l'ensemble des feuilletages sur M , de codimension 1, de classe C^∞ , transversalement orientés. Les feuilles compactes d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$ sont donc des surfaces compactes orientées.

Nous allons montrer :

THÉORÈME 5.1. – *Soit C une feuille compacte isolée de genre $g(C) \geq 2$ d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$. Alors C est C^0 -instable par perturbations globales à support local du feuilletage \mathcal{F} .*

En fait nous allons détruire la feuille compacte C sans introduire de nouvelles feuilles compactes (voir la remarque 5.b.2).

On déduit alors facilement des théorèmes 2.1, 4.1 et 5.1 le résultat suivant.

THÉORÈME 5.2. – *Il existe un ouvert dense \mathcal{O} de $\mathcal{Fol}(M)$ muni de la C^0 -topologie des champs de plans, tel que, si $\mathcal{F} \in \mathcal{O}$, alors l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée :*

- (i) M est difféomorphe à $S^1 \times S^2$ est défini par une fibration de fibre S^2 .
- (ii) toute feuille compacte C de \mathcal{F} est difféomorphe au tore T^2 . De plus, la classe d'équivalence $[C]$ est stable par C^0 -perturbations.

Comme toujours, pour prouver l'instabilité d'une feuille compacte isolée C nous allons faire des perturbations à support local de son holonomie. Cependant nous allons considérer ici des C^0 -perturbations de l'holonomie de C : nous ne pourrions donc pas utiliser la proposition 1.b.1 (valable pour des C^r -perturbations, $r \geq 1$), qui nous permettrait de réaliser toute perturbation d'holonomie comme l'holonomie d'une perturbation du feuilletage. Cette difficulté nous a amenés à redémontrer cette proposition pour des C^0 -perturbations : voir l'appendice A, proposition A.1.

Le théorème 5.1 est alors corollaire du lemme 5.3 et du théorème 5.4 suivants :

LEMME 5.3. – *Soit C une feuille compacte isolée de genre $n \geq 2$ d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$ ($\dim M=3$). Soit $\tau : \mathbf{R} \rightarrow M$ une transversale du feuilletage \mathcal{F} rencontrant C en $\tau(0)$.*

Alors il existe un homomorphisme contravariant $h : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}(\mathbf{R})$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) pour tout $\gamma \in \pi_1(C)$, $h(\gamma)$ coïncide, au voisinage de 0, avec l'holonomie du feuilletage \mathcal{F} le long de γ .

(ii) 0 est le seul point fixe commun à tous les $h(\gamma)$, $\gamma \in \pi_1(C)$.

Le lemme 5.3 est démontré au paragraphe c, en même temps que les lemmes techniques de la démonstration du théorème 5.4.

THÉORÈME 5.4. – Soit C une surface compacte orientée de genre $n \geq 2$ soit $h : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}_+ \mathbf{R}$ un homomorphisme tel que 0 est l'unique point fixe commun à tous les $h(\gamma)$, $\gamma \in \pi_1(C)$ (c'est-à-dire que 0 est l'unique point fixe de l'action de $\pi_1(C)$ sur \mathbf{R} engendrée par h).

Fixons $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$ un système générateur de $\pi_1(C)$.

Alors, pour tout voisinage U de 0, il existe un homomorphisme $\tilde{h} : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}_+ (\mathbf{R})$ tel que, pour tout i , $\tilde{h}(\gamma_i)$ coïncide avec $h(\gamma_i)$ en dehors de U , et que les $\tilde{h}(\gamma_i)$, $i \in \{1, \dots, 2n\}$, soient sans points fixes communs (c'est-à-dire que l'action de $\pi_1(C)$ sur \mathbf{R} engendrée par \tilde{h} est sans point fixe).

Remarque 5.5. – Si le voisinage U de 0 est suffisamment petit, $\tilde{h}(\gamma_i)$ est C^0 -proche de $h(\gamma)$ pour tout i .

Remarque 5.6. – Par commodité, le théorème est énoncé pour des homomorphismes au lieu d'homomorphismes contravariant. Rappelons que $\gamma \rightarrow h(\gamma^{-1})$ est alors un homomorphisme contravariant.

La suite de cette partie a donc pour objet principal la démonstration du théorème 5.4 : nous allons montrer que l'on peut « supprimer » un point fixe isolé d'une action de $\pi_1(C)$ sur \mathbf{R} , par une C^0 -petite perturbation à support dans un voisinage arbitrairement petit du point fixe.

On fixe désormais $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ un système générateur de $\pi_1(C)$ tel que $\pi_1(C)$ soit le quotient du groupe libre engendré par les a_i, b_i , $i \in \{1, \dots, 2n\}$ par la relation $\prod_1^n [a_i b_i] = 1$, où $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Pour pouvoir supprimer le point fixe de l'action de $\pi_1(C)$ engendrée par h , nous allons faire de nombreuses perturbations, préservant le point fixe sans en créer d'autres, afin de simplifier la dynamique de l'action au voisinage du point fixe : le but (dernière étape avant la suppression) est que la dynamique locale (au voisinage du point fixe) devienne commutative, tous les germes de difféomorphismes associés aux a_i, b_i , $i \neq 1$, étant réduits à l'identité.

Pour les perturbations préservant le point fixe, il sera plus commode de travailler d'un seul côté du point fixe : nous allons donc considérer des actions de $\pi_1(C)$ sur $[0, +\infty[$ ayant un unique point fixe en 0.

Nous rencontrerons deux difficultés : la première est de simplifier la dynamique sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$; la seconde est de conserver la différentiabilité au point 0. Cette seconde difficulté est le point délicat de ce travail. Nous serons amenés à perdre la différentiabilité en 0 pour les étapes intermédiaires, et nous devons la reconstruire lors de la dernière étape.

a. Actions de $\pi_1(\mathbb{C})$ sur $[0, +\infty[$

La donnée d'un homomorphisme de $\pi_1(\mathbb{C})$ dans $\text{Diff}([0, +\infty[)$ est équivalente à la donnée de $2n$ difféomorphismes $f_1, g_1, \dots, f_n, g_n \in \text{Diff}([0, +\infty[)$ vérifiant :

$$\prod_1^n [f_i, g_i] = \text{id}, \quad \text{où } [f, g] = f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Les points fixes de l'action de $\pi_1(\mathbb{C})$ sur $[0, +\infty[$ sont les points fixes communs à tous les $f_1, g_1, \dots, i \in \{1, \dots, n\}$.

Le but de ce paragraphe est de prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 5.a.1. – Soient $f_1, g_1 \in \text{Diff}([0, +\infty[)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $2n$ difféomorphismes tels que :

- a) $\prod_1^n [f_i, g_i] = \text{id}$.
 b) $\{0\} = \bigcap_i (\text{Fix } f_i \cap \text{Fix } g_i)$.

Alors, pour tout $\alpha > 0$, il existe $2n$ difféomorphismes

$$\tilde{f}_i, \tilde{g}_i \in \text{Diff}([0, +\infty[), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

tels que :

- (i) $\prod_1^n [\tilde{f}_i, \tilde{g}_i] = \text{id}$.
 (ii) les \tilde{f}_i, \tilde{g}_i coïncident avec les f_i, g_i sur $[\alpha, +\infty[$.
 (iii) $\{0\} = \bigcap_i (\text{Fix } \tilde{f}_i \cap \text{Fix } \tilde{g}_i)$.
 (iv) pour tout $i \neq 1$, \tilde{f}_i et \tilde{g}_i coïncident avec l'identité au voisinage de 0.
 (v) 0 est point fixe isolé de f_1 et de g_1 .
 (vi) f_1 et de g_1 sont C^∞ -tangents à l'identité en 0.

Démonstration. – (Plutôt qu'une véritable démonstration, voici comment réduire la proposition à une succession de lemmes qui feront l'objet du paragraphe c).

Le fait que 0 soit le seul point fixe communs aux $f_i, g_i, i \in \{1, \dots, n\}$, n'implique pas qu'il soit point fixe isolé pour l'un de ces difféomorphismes. Nous faisons une première perturbation pour remédier à cette difficulté.

Notons $H = [f_1, g_1]$, et remarquons que cette relation peut se traduire par $f_1 \circ g_1 \circ f_1^{-1} = H \circ g_1$, c'est-à-dire que f_1 conjugue g_1 à $H \circ g_1$.

LEMME 5.a.2. – Il existe F et G , homéomorphisme de $[0, +\infty[$, et $0 < v < \alpha$, vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) F et G sont des difféomorphismes C^∞ de $]0, +\infty[$.
 (ii) F et G coïncident avec f_1, g_1 sur $[v, +\infty[$.
 (iii) $[F, G] = H$.
 (iv) F ou G admet 0 comme unique point fixe dans $[0, v[$.
 (Remarquons que nous avons perdu la différentiabilité en 0).

Bien sûr, $F, G, f_2, g_2, \dots, f_n, g_n$ vérifient encore la relation

$$[F, G] \circ [f_2, g_2] \circ \dots \circ [f_n, g_n] = \text{id},$$

et 0 continue d'être le seul point fixe commun aux $F, G, f_2, g_2, \dots, f_n, g_n$.

Remarquons que l'on a également la relation :

$$[G, F] \circ [g_n, f_n] \circ \dots \circ [g_2, f_2] = \text{id}.$$

Donc, quitte à échanger la famille $F, G, f_2, g_2, \dots, f_n, g_n$ pour la famille $G, F, g_n, f_n, \dots, g_2, f_2$ on peut supposer désormais que G possède un point fixe isolé en 0.

On en déduit le lemme suivant :

LEMME 5.a.3. – Soit $\beta < \alpha$ tel que G n'ait que 0 comme point fixe sur l'intervalle $[0, \beta]$. Alors :

(i) $H \circ G$ possède 0 comme unique point fixe sur $[0, F(\beta)]$.

(ii) pour tout \tilde{H} coïncidant avec H sur $[G \circ F(\beta), +\infty[$ tel que $\tilde{H} \circ G$ admette 0 comme unique point fixe sur $[0, F(\beta)[$, il existe un unique homéomorphisme \tilde{F} de $[0, +\infty[$, coïncidant avec F sur $[\beta, +\infty[$, et tel que $[\tilde{F}, G] = h$. De plus \tilde{F} est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, si \tilde{H} est de classe C^∞ .

(iii) de plus \tilde{F} varie continûment avec \tilde{H} pour la C^0 -topologie, ainsi que pour la C^∞ -topologie, de la convergence uniforme sur les compacts de $]0, +\infty[$.

Nous allons maintenant perturber les $f_i, g_i, i \geq 2$, de façon qu'ils coïncident avec l'identité au voisinage de 0.

LEMME 5.a.4. – Il existe 2 $(n-1)$ difféomorphismes

$$F_i, G_i \in \text{Diff}([0, +\infty[), \quad i \in \{2, \dots, n\},$$

ayant les propriétés suivantes :

(i) F_i et G_i coïncident avec f_i et g_i sur $[\beta, +\infty[$.

(ii) F et G coïncident avec l'identité au voisinage de 0.

(iii) notons $\tilde{H} = ([F_2, G_2] \circ \dots \circ [F_n, G_n])^{-1}$; alors \tilde{H} coïncide avec H sur $[G \circ F(\beta), +\infty[$ et $\tilde{H} \circ G$ n'a que 0 comme point fixe sur $[0, F(\beta)[$.

Du lemme 5.a.3 on déduit alors l'existence d'un $\tilde{F} \in \text{Diff}(]0, +\infty[)$ tel que \tilde{F} coïncide avec F sur $[\beta, +\infty[$ et tel que $[\tilde{F}, G] = \tilde{H}$.

La famille $(\tilde{F}, G, F_2, G_2, \dots, F_n, G_n)$ vérifie alors toutes les propriétés annoncées à la proposition 5.a.1 sauf que \tilde{F} n'a éventuellement pas un point fixe isolé en 0, et que \tilde{F} et G ne sont pas différentiable en 0.

Fixons un réel $\gamma \in]0, \beta[$, tel que les $F_i, G_i, i \geq 2$, coïncident avec l'identité sur $[0, \gamma]$.

On se demande s'il existe un difféomorphisme $\varphi \in \text{Diff}(]0, +\infty[)$, égal à l'identité sur $[\gamma, +\infty[$ et tel que $\varphi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1} \circ G \circ \varphi^{-1}$ soient différentiables (de classe C^∞) en 0, et C^∞ -plats en 0. Alors la famille $(\varphi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \tilde{G} \circ \varphi^{-1}, F_2, G_2, \dots, F_n, G_n)$ serait celle annoncée par la proposition a.1 (il faut remarquer que, pour $i \geq 2$, $\varphi \circ F_i \circ \varphi^{-1} = F_i$ et $\varphi \circ G_i \circ \varphi^{-1} = G_i$).

Il y a cependant une obstruction à l'existence d'un tel difféomorphisme φ .

Remarquons d'abord que $\tilde{H} = [\tilde{F}, G]$ coïncide avec l'identité sur $[0, \gamma]$, car

$$\tilde{H} = \left(\prod_{i \geq 2} [F_i, G_i] \right)^{-1},$$

où les F_i et les G_i , $i \geq 2$ coïncident avec l'identité sur $[0, \gamma]$. Donc \tilde{F} et G commutent au voisinage de 0.

Comme G est sans point fixe sur $]0, \beta[$, on peut alors passer au quotient : $]0, \beta[/ G$ est difféomorphe au cercle S^1 , et \tilde{F} induit $]0, \beta[/ G$ un difféomorphisme du cercle que l'on notera \tilde{F}/G . Remarquons que le nombre de rotation $\rho(\tilde{F}/G)$ est égal à la classe modulo \mathbf{Z} du nombre de transition $t_{\tilde{F}/G}$ (voir le paragraphe 3.b).

On montre alors :

LEMME 5.a.5. – *Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe $\varphi \in \text{Diff}(]0, +\infty[)$ tel que $\varphi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$ soient de classe C^∞ en 0, et C^∞ -tangents à l'identité en 0 (dans ce cas, on peut toujours supposer que φ coïncide avec l'identité hors d'un voisinage arbitraire de 0);*
2. *il existe $\varphi \in \text{Diff}(]0, +\infty[)$ tel que $\varphi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$ soient de classe C^∞ en 0;*
3. *il existe un champ de vecteurs X de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ tel que \tilde{F} et G coïncident chacun, au voisinage de 0, avec un temps du flot $(X_t)_{t \in \mathbf{R}}$ de X ;*
4. *le difféomorphisme \tilde{F}/G est conjugué à une rotation par un difféomorphisme de $]0, \beta[/ G$ sur S^1 de classe C^∞ .*

L'idée est alors la suivante :

Nous allons faire une déformation $(\tilde{F}_t, G, (F_2)_t, (G_2)_t, F_3, G_3, \dots, F_n, G_n)$, $t \in [0, 1]$, de telle façon que pour tout $t \in [0, 1]$ la famille obtenue vérifie toutes les propriétés annoncées par la proposition a.1, sauf que \tilde{F}_t et G ne sont pas différentiables en 0, et que \tilde{F}_t n'a éventuellement pas de point fixe isolé en 0.

La famille \tilde{F}_t/G , de difféomorphismes du cercle $]0, \beta[/ G$, est continue (pour la C^0 -topologie). Le nombre de rotation $\rho(\tilde{F}_t/G)$ varie alors continûment avec t . Le but est d'utiliser le théorème suivant, dû à Herman [He].

THÉORÈME (Herman). – *Il existe une partie dense A de $\mathbf{R}/\mathbf{Z} = S^1$ telle que tout difféomorphisme ψ du cercle S^1 , dont le nombre de rotation $\rho(\psi)$ appartient à A , est conjugué à la rotation $R_{\rho(\psi)}$ par un difféomorphisme de classe C^∞ .*

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE 5.a.6. – *Avec les hypothèses ci-dessus, si $\rho(\tilde{F}_0/G)$ est différent de $\rho(\tilde{F}_1/G)$, alors :*

1. *il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\rho(\tilde{F}_{t_0}/G) \in A$, et donc \tilde{F}_{t_0}/G est C^∞ -conjugué à une rotation (en particulier, 0 est point fixe isolé de \tilde{F}_{t_0});*
2. *d'après le lemme 5.a.5, il existe alors un difféomorphisme φ égal à l'identité hors d'un petit voisinage $[0, \delta]$ de 0 où les $(F_2)_{t_0}, (G_2)_{t_0}, F_3, G_3, \dots, F_n, G_n$ sont égaux à l'identité, et tel que $\varphi \circ \tilde{F}_{t_0} \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$ soient de classe C^∞ en 0, et C^∞ -tangents à l'identité en 0.*

La famille $(\varphi \circ \tilde{F}_{t_0} \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ G \circ \varphi^{-1}, (F_2)_{t_0}, (G_2)_{t_0}, F_3, (G_3, \dots, F_n, G_n)$ est alors la famille $(\tilde{f}_1, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{f}_n, \tilde{g}_n)$ annoncée à la proposition a.1.

Il reste donc à construire la déformation $(\tilde{F}_t, G, (F_2)_t, (G_2)_t, F_3, \dots, G_n)_{t \in [0, 1]}$.

Soit $\mu \in]0, \min\{\beta, G \circ \tilde{F}(\beta)\}[$, tel que les $F_i, G_i, i \geq 2$ soient tous égaux à l'identité sur $[0, \max\{\mu, G(\mu)\}]$.

LEMME 5.a.7. – *Il existe un intervalle compact $I \subset]0, \min\{\mu, G(\mu)\}[$, et une famille $(f_2^t, g_2^t)_{t \in [0, 1]}$ de paires de difféomorphismes de classe C^∞ de $[0, \mu]$, vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i) les $f_2^t, g_2^t, t_0 \in [0, 1]$ coïncident avec l'identité en dehors de I .
- (ii) f_2^t et g_2^t varient continûment avec t .
- (iii) $f_2^0 = g_2^0 = \text{id}$.
- (iv) notons $h_t = [f_2^t, g_2^t]^{-1}$. Alors, pour tout $t_0 \in [0, 1[$, $h_t \circ G$ admet 0 comme unique point fixe sur $[0, \mu]$; par contre $h_1 \circ G$ possède un point fixe dans I .

On notera alors F_2^t et G_2^t les difféomorphismes de $[0, +\infty[$ coïncidant avec f_2^t et g_2^t sur $[0, \mu]$ et avec F_2, G_2 sur $[\mu, +\infty[$. Notons $\tilde{h}_t = ([F_2^t, G_2^t] \circ \prod_{i \geq 3} [F_i, G_i])^{-1}$.

Alors \tilde{h}_t coïncide avec \tilde{H} sur $[G \circ \tilde{F}(\beta), +\infty[$ et, pour $t \neq 0$, $\tilde{h}_t \circ G$ n'admet que 0 comme point fixe dans $[0, \tilde{F}(\beta)]$, et $\tilde{h}_1 \circ G$ a un point fixe dans $]0, \tilde{F}(\beta)[$.

D'après le lemme 5.a.3, pour tout $t \neq 1$, il existe un unique difféomorphisme \tilde{F}_t de $]0, +\infty[$ coïncidant avec \tilde{F} sur $[\beta, +\infty[$ et vérifiant $[\tilde{F}_t, G] = \tilde{h}_t$. De plus, \tilde{F}_t dépend continûment de t . Enfin, pour tout $t_0 \in [0, 1[$, $(\tilde{F}_t, G, (F_2)_t, (G_2)_t, F_3, \dots, G_n)$, vérifie toutes les propriétés annoncées par la proposition a.1, sauf (v) et (vi).

On conclut alors la proposition 5.a.1 en appliquant le corollaire 5.a.6 grâce au lemme suivant :

LEMME 5.a.8. – *Il existe $t_1 \in]0, 1[$ tel que $\rho(\tilde{F}_{t_1}/G) \neq \rho(\tilde{F}_0/G) = \rho(\tilde{F}/G)$.*

La preuve de la proposition 5.a.1 est donc achevée. Il reste à démontrer les lemmes a.2, a.3, a.4, a.5, a.7 et a.8.

Avant de démontrer ces lemmes (parfois techniques) voyons comment déduire le théorème 5.4 de la proposition 5.a.1.

b. Instabilité de points fixes d'action de $\pi_1(\mathbf{C})$ sur \mathbf{R} : démonstration du théorème 5.4

Soit $\pi_1(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Diff}_+(\mathbf{R})$ un homomorphisme tel que l'action induite de $\pi_1(\mathbf{C})$ sur \mathbf{R} admette 0 comme unique point fixe.

Notons $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ un système générateur de $\pi_1(\mathbf{C})$, lié par la seule relation $\prod [a_i, b_i] = 1$.

Notons h_+ et h_- les homomorphismes de $\pi_1(\mathbf{C})$ dans $\text{Diff}([0, +\infty[)$ obtenus par restriction à $[0, +\infty[$ et $] - \infty, +0]$ des éléments de $\text{Diff}_+(\mathbf{R})$. La proposition 5.a.1 construit des perturbations des $h_+(a_i), h_+(b_i), h_-(a_i), h_-(b_i)$ à support dans un voisinage arbitrairement petit de 0, de façon à obtenir deux morphismes \tilde{h}_+ et \tilde{h}_- tels que, pour tout $\gamma \in \pi_1(\mathbf{C})$, $\tilde{h}_+(\gamma)$ et $\tilde{h}_-(\gamma)$ soient C^∞ tangents à l'identité en 0 : ceci permet de

recoller \tilde{h}_+ et \tilde{h}_- en un homomorphisme $\tilde{h} : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}_+(\mathbf{R})$. Nous avons donc montré la proposition suivante.

PROPOSITION 5.b.1. – Soit $h : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}_+(\mathbf{R})$ un homomorphisme tel que l'action induite de $\pi_1(C)$ sur \mathbf{R} ait 0 comme unique fixe. Fixons $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ un système générateur de $\pi_1(C)$, liés par la relation $\prod_1^n [a_i, b_i] = 1$.

Alors, pour tout voisinage U de 0 il existe un homomorphisme $\tilde{h} : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}_+(\mathbf{R})$ avec les propriétés suivantes :

- (i) pour tout i , $\tilde{h}(a_i)$ et $\tilde{h}(b_i)$ coïncident avec $h(a_i)$ et $h(b_i)$ sur $\mathbf{R}-U$;
- (ii) $\bigcap_i \text{Fix } \tilde{h}(a_i) \cap \bigcap_i \text{Fix } \tilde{h}(b_i) = \{0\}$;
- (iii) pour tout $i \geq 2$, $\tilde{h}(a_i)$ et $\tilde{h}(b_i)$ coïncident avec l'identité au voisinage de 0;
- (iv) 0 est point fixe isolé de $\tilde{h}(a_i)$ et de $\tilde{h}(b_i)$;
- (v) il existe $p, q \in \mathbf{Z}$ tel que $\tilde{h}(a_1^p b_1^q)$ soit une contraction au voisinage de 0.

Démonstration. – Seul le point v reste à démontrer : il résulte de la démonstration de la proposition 5.a.1. En effet dans cette démonstration nous avons eu à faire un choix des nombres de rotations $\rho(\tilde{h}_+(a_1)/\tilde{h}_+(b_1))$ et $\rho(\tilde{h}_-(a_1)/\tilde{h}_-(b_1))$: on peut donc les supposer distincts; il en va alors de même des nombres de translations $t_{\tilde{h}_+(a_1)/\tilde{h}_+(b_1)}$ et $t_{\tilde{h}_-(a_1)/\tilde{h}_-(b_1)}$. D'après le lemme 3.c.2, il existe alors une combinaison linéaire de $\tilde{h}(a_i)$ et de $\tilde{h}(b_i)$ qui soit une contraction au voisinage de 0.

Remarque 5.b.2. – Si l'on pense à h comme à l'holonomie d'une feuille compacte isolée C d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{Fol}(M)$, et si l'on réalise \tilde{h} (par la proposition A.1) comme l'holonomie d'une C^0 -perturbation à support local \mathcal{G} de \mathcal{F} , alors la feuille compacte C de \mathcal{G} vérifie l'hypothèse H (voir paragraphe 2.b); nous allons à présent ouvrir cette feuille par une C^∞ -perturbation. La proposition 2.b.2 nous assure que cette nouvelle perturbation ne peut créer aucune feuille compacte.

Démonstration du théorème 5.4. – Soit \tilde{h} une perturbation de l'homomorphisme $h : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}_+(\mathbf{R})$ donnée par la proposition 5.b.1.

Soit $\mu > 0$ tel que $[-\mu, \mu] \subset U$ et que tous les $\tilde{h}(a_i)$, $\tilde{h}(b_i)$, $i \geq 2$, soient égaux à l'identité sur $[-\mu, \mu]$, et que 0 soit le seul point fixe de $\tilde{h}(a_i)$ et de $\tilde{h}(b_i)$ dans $[-\mu, \mu]$. Soit $f \in \text{Diff}_+(\mathbf{R})$ un difféomorphisme égal à l'identité sur $\mathbf{R}-[-\mu, \mu]$, et tel que $f(0) \neq 0$. On peut bien sûr choisir f C^∞ -proche de l'identité. On définit alors un homomorphisme $\bar{h} : \pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}_+(\mathbf{R})$ de la façon suivante :

- $\bar{h}(a_i) = \tilde{h}(a_i)$ pour tout $i \neq 2$.
- $\bar{h}(b_i) = \tilde{h}(b_i)$ pour tout i .
- $\bar{h}(a_2) = f \circ \tilde{h}(a_2)$.

On vérifie facilement que l'on peut définir ainsi un homomorphisme, et que l'action de $\pi_1(C)$ sur \mathbf{R} induite par \bar{h} est sans point fixe, ce qui achève la démonstration du théorème 5.4.

c. Démonstration des lemmes techniques

Dans ce paragraphe, nous donnons les démonstrations des lemmes 5.3, 5.a.2, 5.a.3, 5.a.4, 5.a.5, 5.a.7 et 5.a.8.

Nous utiliserons souvent (sans le dire) dans les démonstrations qui suivent, la remarque élémentaire suivante :

Remarque 5.c.1. – Soient φ et ψ deux difféomorphismes locaux de \mathbf{R} , de classe C^r ($0 \leq r \leq \infty$), définis chacun sur un intervalle ouvert et préservant l'orientation. Notons $\text{Def}(\varphi)$ et $\text{Def}(\psi)$ leur domaine de définition.

Soient a et b deux nombres réels tels que $\varphi^j(a) \in \text{Def}(\varphi)$, $\psi^j(b) \in \text{Def}(\psi)$ pour tout $j \in \mathbf{N} \cap [-2, 2]$, et tels que $\varphi(a) \neq a$, $\psi(b) \neq b$.

Soit ξ un difféomorphisme de classe C^r , du segment $[\varphi(a), \varphi^{-1}(a)]$ sur le segment $[\psi(b), \psi^{-1}(b)]$, tel que $\xi \circ \varphi = \psi \circ \xi$ sur $[\varphi(a), \varphi^{-1}(a)]$.

Alors ξ s'étend d'une façon unique en un difféomorphisme $\bar{\xi}$ du segment $[\varphi^2(a), \varphi^{-2}(a)]$ sur le segment $[\psi^2(b), \psi^{-2}(b)]$, de classe C^r , satisfaisant la relation :

$$\bar{\xi} \circ \varphi = \psi \circ \bar{\xi} \quad \text{sur } [\varphi(a), \varphi^{-2}(a)].$$

5.c.2. Démonstration du lemme 5.3. – (Il s'agit de réaliser l'holonomie d'une feuille compacte C comme un homomorphisme $\pi_1(C) \rightarrow \text{Diff}_+(\mathbf{R})$).

Rappelons que C est une surface compacte orientable, sans bord, connexe et de genre $n \geq 2$.

Fixons $(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n)$ un système générateur de $\pi_1(C)$ tel que $\pi_1(C)$ soit isomorphe au quotient du groupe libre engendré par les a_i, b_i , par la relation : $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1$.

Afin d'alléger les notations, nous noterons f_i, g_i les holonomies du feuilletage \mathcal{F} le long de a_i^{-1}, b_i^{-1} respectivement. Ainsi $[f_1, g_1] \circ \dots \circ [f_n, g_n] = \text{Id}$ sur un voisinage de $0 \in \mathbf{R}$. De plus, C étant une feuille compacte isolée, le point $0 \in \mathbf{R}$ est l'unique point fixe commun aux $f_1, g_n, \dots, f_n, g_n$, dans un voisinage de 0 .

Choisissons, pour tout $2 \leq i \leq n$, des difféomorphismes $F_i, G_i \in \text{Diff}(\mathbf{R})$ tels que $F_i = f_i$ et $G_i = g_i$ au voisinage de 0 . Notons $H = [F_n, G_n]^{-1} \dots [F_2, G_2]^{-1}$.

Alors on a : $[f_1, g_1] = H$ sur un voisinage de zéro; autrement dit, f_1 conjugué g_1 et $H \circ g_1$ (c'est-à-dire $f_1 \circ g_1 \circ f_1^{-1} = H \circ g_1$) au voisinage de 0 .

Le lemme 5.3 est à présent une conséquence simple du lemme suivant :

LEMME 5.c.3. – Soient f et g deux difféomorphismes locaux de $[0, +\infty[$ laissant fixes l'origine, et soit $H \in \text{Diff}([0, +\infty[)$ tel que $[f, g] = H$ au voisinage de 0 .

Alors il existe $\mu > 0$ et il existe $F, G \in \text{Diff}([0, +\infty[)$ tels que :

- (i) $F = f$ et $G = g$ sur $[0, \mu]$.
- (ii) $\text{Fix}(F) \cap \text{Fix}(G) = \text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) \cap [0, \mu]$.
- (iii) $[F, G] = H$.

Démonstration. – Supposons d'abord que f et g coïncident avec l'identité au voisinage de 0 .

Fixons $0 < \mu < \nu$ tels que $f = g = H = \text{Id}$ sur $[0, \nu]$.

Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur $[0, +\infty[$ tel que $X \equiv 0$ sur $[0, \mu]$ et tel que $X < 0$ sur $] \mu, +\infty[$. Choisissons un difféomorphisme G de $[0, +\infty[$ tel que :

- $G = X_1$ sur $[0, \nu]$ (où X_1 est le temps 1 du flot de X),
- $G < \text{Id}$ sur $] \mu, +\infty[$,
- $G < H^{-1}$ sur $] \mu, +\infty[$.

En conséquence, $G = g$ sur $[0, \mu]$, G et $H \circ G$ sont des contractions sur $] \mu, +\infty[$ et $G \equiv H \circ G$ sur un voisinage de $[0, \nu]$. Ainsi, la restriction de X_1 à $[0, \nu]$ s'étend d'une façon unique en un difféomorphisme F de $[0, +\infty[$ de classe C^∞ , conjuguant G et $H \circ G$ (c'est-à-dire $F \circ G \circ F^{-1} = H \circ G$). Il est clair que μ , F et G satisfont les conditions du lemme.

On suppose désormais que f ou g ne représentent pas le germe de l'identité en 0.

La relation $[f, g] = H$ peut encore s'écrire $[g, f] = H^{-1}$. Les rôles de f et g sont donc symétriques (qui à remplacer H par H^{-1}), ce qui nous permet de réduire la preuve aux cas (a), (b) et (c) suivants :

(a) Supposons que 0 est un point fixe isolé de g .

Supposons de plus que g est une contraction au voisinage de 0. La relation $f \circ g \circ f^{-1} = H \circ g$ implique que $H \circ g$ est aussi une contraction sur un voisinage de 0; on a donc $g(x) < H^{-1}(x)$ pour x proche de 0.

Choisissons un difféomorphisme G de $[0, +\infty[$ vérifiant :

- $G = g$ au voisinage de 0,
- $G < \text{Id}$ sur $]0, +\infty[$,
- $G < H^{-1}$ sur $]0, +\infty[$.

Alors G et $H \circ G$ sont des contractions et $f \circ G \circ f^{-1} = H \circ G$ au voisinage de 0. On en déduit que la restriction de f à un petit voisinage de 0 s'étend en un difféomorphisme F de classe C^∞ conjuguant G et $H \circ G$. Il suffit alors de choisir μ assez petit pour que μ , F et G vérifient les conditions du lemme.

Le cas où g est une dilatation se traite de façon analogue.

(b) Supposons qu'il existe des points fixes de f , arbitrairement proches de zéro, qui ne sont pas fixes pour g .

Soit x_0 l'un de ces points fixes, et supposons $g(x_0) < x_0$. On a alors $H \circ g(x_0) < x_0$, c'est-à-dire $g(x_0) < H^{-1}(x_0)$.

Choisissons un difféomorphisme G de $[0, +\infty[$ satisfaisant :

- $G = g$ sur $[0, x_0]$,
- $G < \text{Id}$ sur $[x_0, +\infty[$,
- $G < H^{-1}$ sur $[0, +\infty[$.

Alors $H \circ G = H \circ g$ sur $[0, x_0]$ et $H \circ G < \text{Id}$ sur $[x_0, +\infty[$.

On en déduit que la restriction de f à $[0, x_0]$ s'étend en un difféomorphisme F conjuguant G et $H \circ G$, comme dans le cas (a). Ainsi $\mu = x_0$, F et G satisfont les conditions du lemme.

Le cas $g(x_0) > x_0$ se traite de façon analogue.

(c) Supposons enfin que f et g ont les mêmes points fixes dans un voisinage de 0.

Nous allons nous ramener aux hypothèses du cas (a). Pour cela, il suffit de choisir x_0 proche de 0, tel que x_0 soit fixe isolé de g sur $[x_0, \infty[$.

5.c.4 *Démonstration du lemme 5.a.2.* – (Il s'agit de trouver F et G de même commutateur que f_1 et g_1 , admettant 0 comme point fixe isolé. Pour cela, on sera amené à perdre la différentiabilité en 0).

La démonstration est du même type que celle du lemme 5.c.3 :

Supposons d'abord que f_1 et g_1 coïncident avec l'identité sur un segment $[0, \nu]$, où $0 < \nu < \alpha$.

Soit X un champ de vecteurs de classe C^∞ sur $[0, \infty[$ tel que $X \equiv 0$ sur $\{0\} \cup [\nu, +\infty[$, et tel que $X < 0$ sur $]0, \nu[$. Notons F et G les difféomorphismes de $[0, +\infty[$ définis par

$$\begin{cases} F = G = X_1 \text{ (temps 1 du flot de } X) & \text{sur } [0, \nu] \\ F = f_1 \quad \text{et} \quad G = g_1 & \text{sur } [\nu, +\infty[\end{cases}$$

Il est clair que ν, F et G vérifient les conditions du lemme.

Supposons à présent que f_1 ou g_1 ne représentent pas le germe de l'identité en 0. La symétrie des rôles de f_1 et g_1 (voir la démonstration du lemme 5.c.3) permet de réduire la preuve aux trois cas suivants :

(a) Si zéro est point fixe isolé de g_1 , alors il n'y a rien à faire, $F = f_1$ et $G = g_1$ convient.

(b) S'il existe des points fixes de f_1 , arbitrairement proches de 0, qui ne sont pas fixes pour g_1 .

Soit $0 < x_0 < \alpha$ un tel point fixe.

Supposons que $g_1(x_0) < x_0$. Étant donné que f_1 conjugue g_1 à $H \circ g_1$, il s'ensuit que $H \circ g_1(x_0) < x_0$.

Soit $\lambda \in]0, 1[$ assez petit, tel que :

– $\lambda x < g_1(x_0)$

– $x \mapsto H(\lambda x)$ est une contraction sur $[0, x_0]$.

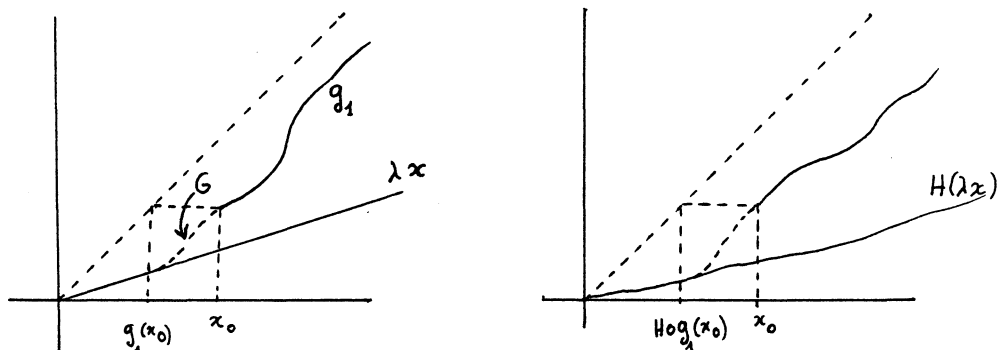


Fig. I.

Notons $\delta = \max\{g_1(x_0), H \circ g_1(x_0)\}$. Soit G un difféomorphisme de $]0, \infty[$ de classe C^∞ , tel que :

$$G(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \geq x_0 \\ \lambda x & \text{si } 0 \leq x \leq \delta \end{cases}$$

Alors $H \circ G = H \circ g_1$ sur $[x_0, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]\delta, x_0]$, on a :

$$\begin{aligned} G(x) &\leq g_1(x_0) \leq \delta < x \\ H \circ G(x) &\leq H \circ g_1(x_0) \leq \delta < x \end{aligned}$$

En particulier, G et $H \circ G$ sont des contractions sur $[0, x_0]$. On en déduit que la restriction de f_1 à $[x_0, \infty[$ s'étend d'une façon unique en un difféomorphisme de classe C^∞ de $]0, +\infty[$ conjuguant G à $H \circ G$. Alors, $\nu = x_0$, F et G vérifient les conditions désirées.

Supposant à présent que $g_1(x_0) > x_0$.

Choisissons $\lambda > 1$ suffisamment grand, et δ' ($0 < \delta' < x_0$) assez petit pour que :

$$- H(\lambda \delta') = x_0.$$

- $x \rightarrow H(\lambda x)$ est une dilatation sur $[0, \delta']$.

Comme f_1 conjugue g_1 à $H \circ g_1$, on a : $H \circ g_1(x_0) > x_0$ et donc $\lambda \delta' = H^{-1}(x_0) < g_1(x_0)$.

Notons $\delta = \max\{\delta', x_0/\lambda\}$ et choisissons un difféomorphisme G de $]0, \infty[$ de classe C^∞ , vérifiant :

$$G(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \geq x_0 \\ \lambda x & \text{si } 0 \leq x \leq \delta \end{cases}$$

Alors $H \circ G = H \circ g_1$ sur $[x_0, +\infty[$. De plus on a :

$$\begin{aligned} G(x) &> G(\delta) = \lambda \delta \geq x_0 \geq x \quad \text{pour tout } x \in]\delta, x_0] \\ H \circ G(x) &> H \circ G(\delta') = H(\lambda \delta') = x_0 \geq x \quad \text{pour tout } x \in]\delta', x_0]. \end{aligned}$$

Donc G et $H \circ G$ sont dilatantes sur $[0, x_0]$; on en déduit que la restriction de f_1 à $[x_0, +\infty[$ s'étend de façon unique en un difféomorphisme C^∞ de $]0, +\infty[$ conjuguant G à $H \circ G$. Ainsi $\nu = x_0$, F et G vérifient les conditions du lemme.

(c) Si f_1 et g_1 ont les mêmes points fixes au voisinage de zéro.

Soient x_0, y_0 deux points fixes communs de f_1 et g_1 , suffisamment proches de 0 et tels que :

$$\begin{aligned} 0 &< x_0 < y_0 < \alpha \\ f_1(x) &\neq x \quad \text{et} \quad g_1(x) \neq x \quad \text{pour tout } x \in]x_0, y_0[\end{aligned}$$

Comme f_1 conjugue g_1 à $H \circ g_1$, les difféomorphismes g_1 et $H \circ g_1$ sont tous les deux des contractions ou des dilatations sur $[x_0, y_0]$.

Fixons $z_0 \in]x_0, y_0[$.

En répétant les mêmes arguments qu'au (b), on construit un difféomorphisme G de $]0, +\infty[$, de classe C^∞ , satisfaisant :

$$- G = g_1 \text{ sur } [z_0, \infty[$$

- G et $H \circ G$ sont tous les deux des contractions ou des dilatations sur $[0, z_0]$. (On remarque que, dans la construction du difféomorphisme G du point (b) le point fixe x_0 de f_1 n'a servi qu'à garantir que $g_1(x_0)$ et $H \circ g_1(x_0)$ sont tous les deux, soit plus grand, soit plus petit, que x_0 .)

Alors, en fixant $\nu < y_0$ assez près de y_0 , la restriction de f_1 à $[\nu, \infty[$ s'étend d'une façon unique en un difféomorphisme F de $]0, +\infty[$, de classe C^∞ , conjuguant G à $H \circ G$.

Ainsi ν , F et G vérifient les conditions désirées.

5.c.5. Démonstration du lemme 5.a.3. - (Il s'agit de montrer que, à G fixé, F dépend continûment du commutateur $H = [F, G]$).

Comme $G \circ F^{-1} = F^{-1} \circ (H \circ G)$ et que 0 est le seul point fixe de G dans $[0, \beta]$, on a : 0 est le seul point fixe de $H \circ G$ dans $[0, F(\beta)]$.

Soit \tilde{H} un homéomorphisme de $[0, +\infty[$ qui coïncide avec H sur $[G \circ F(\beta), +\infty[$; donc $\tilde{H} \circ G = H \circ G$ sur $[F(\beta), +\infty[$. De plus, si $\tilde{H} \circ G$ n'a pas de points fixes sur $]0, F(\beta)[$, alors $G|_{[0, \beta]}$ et $\tilde{H} \circ G|_{[0, F(\beta)]}$ sont tous les deux soit des contractions soit des dilatations. On en déduit que la restriction de F à $[\beta, +\infty[$ s'étend en un homéomorphisme \tilde{F} de $[0, +\infty[$, de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et conjuguant G à $\tilde{H} \circ G$.

Il reste à démontrer le point (iii). Pour cela, on considère le domaine fondamental $[\beta, \bar{\beta}]$ de G , où $\bar{\beta} = \max \{G(\beta), G^{-1}(\beta)\}$. Étant donné $n \in \mathbf{Z}$ et $x \in [G^n(\beta), G^n(\bar{\beta})]$, nous avons :

$$F(x) = (H \circ G)^n \circ F \circ G^{-n}(x)$$

$$\tilde{F}(x) = (\tilde{H} \circ G)^n \circ F \circ G^{-n}(x)$$

Ainsi, si \tilde{H} est C^r -proche de H ($0 \leq r \leq \infty$), alors \tilde{F} est C^r -proche de F sur $[G^n(\beta), G^n(\bar{\beta})]$. Comme $\tilde{F} = F$ sur $[\beta, +\infty[$, on conclut que \tilde{F} est C^r -proche de F sur $[G^n(\beta), +\infty[$.

Il suffit maintenant de constater que tout compact $K \subset]0, \infty[$ est contenu dans un intervalle $[G^n(\beta), +\infty[$ pour en déduire que \tilde{F} varie continûment avec \tilde{H} pour la C^r -topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $]0, +\infty[$.

D'autre part, étant donné $\varepsilon > 0$ fixons $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que $(H \circ G)^{n_0}(F(\beta)) < \varepsilon$. Si \tilde{H} est C^0 -proche de H , alors $(\tilde{H} \circ G)^{n_0}(F(\beta)) < \varepsilon$. Comme $\tilde{F}(G^k(\beta)) = (\tilde{H} \circ G)^k(F(\beta))$, on a : $\tilde{F}([0, G^{n_0}(\beta)]) = ([0, (\tilde{H} \circ G)^{n_0}(F(\beta))]) \subset [0, \varepsilon]$.

En utilisant le fait que \tilde{F} est C^0 -proche de F sur les compacts de $]0, +\infty[$, on en déduit que \tilde{F} est C^0 -proche de F sur $[0, +\infty[$.

5.c.6. Démonstration du lemme 5.a.4. - (Il s'agit de perturber les $f_i, g_i, i \geq 2$, de façon à ce qu'ils coïncident avec l'identité près de 0).

Rappelons que 0 est le seul point fixe de G sur $[0, \beta]$ et de $H \circ G$ sur $[0, F(\beta)]$, et que $H = (|f_2, g_2| \circ \dots \circ |f_n, g_n|)^{-1}$.

Fixons $0 < x_0 < y_0$ et $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow [x_0, +\infty[$ un difféomorphisme de classe C^∞ tel que $\varphi = \text{Id}$ sur $[y_0, +\infty[$.

Soient $F_i, G_i, i \geq 2$ les homéomorphismes définis par

$$F_i = \varphi \circ f_i \circ \varphi^{-1} \quad \text{et} \quad G_i = \varphi \circ g_i \circ \varphi^{-1} \quad \text{sur } [x_0, +\infty[.$$

$$F_i = G_i = \text{Id} \quad \text{sur } [0, x_0].$$

On notera $\tilde{H} = ([F_2, G_2] \circ \dots \circ [F_n, G_n])^{-1}$, qui vérifie bien sûr : $\tilde{H} = \varphi \circ H \circ \varphi^{-1}$ sur $[x_0, +\infty[$ et $\tilde{H} = \text{Id}$ sur $[0, x_0]$.

Les F_i, G_i sont de classe C^∞ en dehors du point x_0 : nous nous occuperons de la différentiabilité en ce point à la fin de cette démonstration.

On voit facilement que si x_0 et y_0 sont choisis assez petits, alors les F_i, G_i vérifient les conditions (i) et (ii) du lemme, et \tilde{H} coïncide avec H sur $[G \circ F(\beta), +\infty[$.

Voyons à présent que l'on peut choisir x_0 et y_0 , aussi proches que l'on veut de zéro, et tels que $\tilde{H} \circ G$ n'ait pas de points fixes sur $]0, F(\beta)[$:

Supposons d'abord que G est une contraction sur $[0, \beta]$, et donc $H \circ G$ est une contraction sur $[0, F(\beta)]$, c'est-à-dire $G < H^{-1}$ sur $]0, F(\beta)[$.

Fixons $y_0, a \in \mathbf{R}$ tels que $0 < y_0 < G^{-1}(y_0) < a < \min\{\beta, F(\beta)\}$. Alors $y_0 < \min\{G^{-1}(y_0), H^{-1} \circ G^{-1}(y_0)\}$. Maintenant on choisit x_0 proche de y_0 et vérifiant :

$$0 < x_0 < y_0 < \min\{G^{-1}(x_0), H^{-1} \circ G^{-1}(x_0)\}.$$

Comme $\varphi \circ H^{-1} \circ \varphi^{-1}$ coïncide avec H^{-1} sur l'intervalle $[\max\{y_0, H(y_0)\}, +\infty[$, on a donc $\varphi \circ H^{-1} \circ \varphi^{-1} = H^{-1}$ sur $[G^{-1}(x_0), +\infty[$. Ainsi $G < H^{-1} = \varphi \circ H^{-1} \circ \varphi^{-1} = \tilde{H}^{-1}$ sur $[G^{-1}(x_0), F(\beta)[$. De plus, sur l'intervalle $]x_0, G^{-1}(x_0)[$, on a :

$$\tilde{H}^{-1}(x) = \varphi \circ H^{-1} \circ \varphi^{-1}(x) > \varphi \circ h^{-1} \circ \varphi^{-1}(x) = x_0 > G(x).$$

Bien sûr, $\tilde{H}^{-1} > G$ sur $]0, x_0]$. On a donc que $G < \tilde{H}^{-1}$ sur $]0, F(\beta)[$, c'est-à-dire que $\tilde{H} \circ G$ est une contraction sur $[0, F(\beta)]$.

Comme x_0 et y_0 peuvent être choisis aussi petits que l'on veut, on a en fait montré : étant donné a', a tels que $0 < a' < a < \min\{\beta, F(\beta)\}$, il existe x_0, y_0 aussi petit que l'on veut tels que :

- $\tilde{H}^{-1} > G$ sur $]0, a]$.
- $\tilde{H}^{-1} = H$ sur $[a', +\infty[$.

Voyons à présent le cas où G est une dilatation sur $[0, \beta]$, et donc $H \circ G$ est une dilatation sur $[0, F(\beta)]$, c'est-à-dire $G > H^{-1}$ sur $]0, F(\beta)[$. Autrement dit, G^{-1} est une contraction sur $[0, G(\beta)]$ et $G^{-1} < H$ sur $]0, H^{-1} \circ F(\beta)[$.

Soient $0 < a < \min\{G(\beta), H^{-1} \circ F(\beta)\}$ et $a' = H^{-1} \circ G^{-1}(a)$. Comme $G^{-1} < H$ sur $]0, H^{-1} \circ F(\beta)[$, on a : $0 < a' < a$. A présent, en appliquant la conclusion du cas précédent à G^{-1} et H , on obtient : il existe x_0, y_0 aussi petits que l'on veut tels que :

- $\tilde{H} > G^{-1}$ sur $]0, a]$,
- $\tilde{H} = H^{-1}$ sur $[a', +\infty[$.

Ainsi $G > \tilde{H}^{-1}$ sur $]0, G^{-1}(a)[$ et $\tilde{H}^{-1} = H^{-1}$ sur $[H(a'), \infty[$ c'est-à-dire sur $[G^{-1}(a), \infty[$. Comme $G > H^{-1}$ sur $]0, F(\beta)[$, on en déduit $G > \tilde{H}^{-1}$ sur $]0, F(\beta)[$, c'est-à-dire que $\tilde{H} \circ G$ est dilatante sur $]0, F(\beta)[$.

Pour conclure la démonstration du lemme, il suffit de faire une C^∞ -petite perturbation des applications F_i, G_i , dans un petit voisinage de x_0 dans $[x_0, +\infty[$, de façon que les nouvelles applications soient des difféomorphismes de classe C^∞ de $[0, +\infty[$. Ainsi nous avons modifié \tilde{H} et $\tilde{H} \circ G$ seulement dans un voisinage aussi petit que l'on veut de x_0 et $G^{-1}(x_0)$ respectivement. On en déduit facilement que, si la perturbation des F_i, G_i est suffisamment petite, alors la perturbation correspondante de $\tilde{H} \circ G$ n'aura pas de points fixes sur $]0, F(\beta)]$. Ceci conclut la démonstration du lemme.

5.c.7. *Démonstration du lemme 5.a.5.* – (Il s'agit de donner des conditions nécessaires et suffisantes à ce que deux difféomorphismes commutants de $]0, +\infty[$ soient conjugués à deux difféomorphismes commutants de $[0, +\infty[$).

Rappelons que G est sans point fixe sur $]0, \beta]$, et que \tilde{F} commute avec G au voisinage de zéro. De plus, on voit facilement dans l'énoncé du lemme 5.a.5 que l'on peut considérer, sans perte de généralité, que G et \tilde{F} sont des difféomorphismes de $]0, \infty[$ satisfaisant : G est sans point fixe et commute avec \tilde{F} .

(1) \Rightarrow (2) est élémentaire.

Montrons (2) \Rightarrow (3) :

Supposons que $\varphi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi \circ G \circ \varphi^{-1}$ sont de classe C^∞ en 0. D'après les théorèmes de Szekeres et Sergeraert et Koppel (voir le paragraphe 3.a) il existe un champ de vecteurs Y sur $]0, +\infty[$ de classe C^1 en 0, de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et un nombre $\eta \in \mathbf{R}$, tel que $\varphi \circ G \circ \varphi^{-1} = Y_1$ et $\varphi \circ \tilde{F} \circ \varphi^{-1} = Y_\eta$ (où Y_1 et Y_η sont les temps 1 et η du flot de Y).

Notons $X = \varphi^*(Y)$ le champ de vecteurs de $]0, \infty[$; on a alors : $G = X_1$ et $\tilde{F} = Y_\eta$.

Montrons (3) \Rightarrow (4).

Si un tel champ X existe, alors, quitte à multiplier X par une constante non nulle, on peut supposer $X_1 = G$ et $X_\eta = \tilde{F}$, pour un certain $\eta \in \mathbf{R}$.

Pour tout $a \in \mathbf{R}$ nous noterons T_a la translation par a .

Soit $\phi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ un difféomorphisme de classe C^∞ tel que $\varphi \circ G \circ \varphi^{-1} = T_1$. Ainsi, $T = \phi \circ \tilde{F} \circ \phi^{-1}$ commute avec T_1 . En passant ϕ au quotient par les actions de G sur $]0, +\infty[$ et de T_1 sur \mathbf{R} , on obtient un C^∞ -difféomorphisme $\tilde{\phi} :]0, +\infty[/ G \rightarrow \mathbf{R} / \mathbf{Z}$ tel que $\tilde{\phi} \circ (\tilde{F}/G) \circ \tilde{\phi}^{-1} = T / T_1$. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que T est C^∞ -conjugué à T_η par une conjugaison commutant avec T_1 .

Pour cela, notons $Y = \varphi_*(Y)$. Fixons un point $\xi \in \mathbf{R}$, et notons H le difféomorphisme de \mathbf{R} défini par :

$$H(Y_t(\xi)) = T_t(\xi).$$

C'est un difféomorphisme de classe C^∞ , vérifiant :

$$H_*(Y) = \frac{\partial}{\partial t}$$

D'autre part on a :

$$T_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_1 = Y_1 \quad \text{et} \quad T = Y_\eta.$$

On en déduit :

$$H \circ T_1 \circ H^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = T_1,$$

et

$$H \circ T \circ H^{-1} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_\eta = T_\eta.$$

Le difféomorphisme H est donc la conjugaison souhaitée.

Pour finir, montrons (4) \Rightarrow (1).

Soit $\tilde{\phi} :]0, +\infty[/ G \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ un difféomorphisme de classe C^∞ qui conjugue \tilde{F}/G à une rotation, et soit $\phi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ l'un de ses relèvements. On voit facilement que les projections, de $\phi \circ G \circ \phi^{-1}$ et de $\phi \circ \tilde{F} \circ \phi^{-1}$ sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} sont l'identité et $\tilde{\phi} \circ (\tilde{F}/G) \circ \tilde{\phi}^{-1}$ respectivement. En conséquence $\phi \circ G \circ \phi^{-1}$ et $\phi \circ \tilde{F} \circ \phi^{-1}$ sont des translations.

Soit X un champ de vecteurs de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, tel que $X > 0$ sur $]0, +\infty[$, et tel que X est C^∞ -plat en 0.

Fixons $\xi > 0$, et notons $\psi :]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ défini par $\psi(X_t(\xi)) = T_t(\xi), \forall t \in \mathbf{R}$, où T_t est la translation par t . Alors ψ est un difféomorphisme de classe C^∞ et $\psi \circ X_s = T_s \circ \psi$, pour tout s .

On en déduit que $(\psi^{-1} \circ \phi) \circ G \circ (\psi^{-1} \circ \phi)^{-1}$ et $(\psi^{-1} \circ \phi) \circ \tilde{F} \circ (\psi^{-1} \circ \phi)^{-1}$ coïncident chacun avec un temps du flot $(X_t)_{t \in \mathbf{R}}$ de X , ce qui conclut la démonstration du lemme 5.a.5.

5.c.8. *Démonstration du lemme 5.a.7.* – Rappelons que $0 < \mu < \beta$ et que G n'a pas de points fixes dans $]0, \beta]$.

Supposons d'abord que G est une contraction sur $[0, \beta]$.

Fixons $c \in]G^2(\mu), G(\mu)[$ et $I = [G^3(\mu), G(\mu)]$.

Nous allons construire deux familles $f_2^t, g_2^t, t \in [0, 1]$, de difféomorphismes satisfaisant les hypothèses (i), (ii) et (iii), et vérifiant de plus :

$$(iv') \quad [f_2^t, g_2^t] \leq \text{Id} \quad \text{sur } I$$

$$(v') \quad [f_2^t, g_2^t](c) = G(c).$$

Alors, en reparamétrisant ces familles, nous pouvons supposer que :

– $G < [f_2^t, g_2^t] \leq \text{Id}$ sur I , pour tout $t \in [0, 1]$.

– $\exists x_0 \in I$ tel que $[f_2^1, g_2^1](x_0) = G(x_0)$.

Avec ces conditions, on vérifie facilement que $h_t = [f_2^t, g_2^t]^{-1}$ satisfait la condition (iv) du lemme.

Pour démontrer le lemme dans le cas où G est une dilatation, il suffit de passer à G^{-1} et de refaire la construction ci-dessus.

Il reste donc à prouver l'existence des familles f_2^t, g_2^t satisfaisant les conditions (i), (ii), (iii), (iv') et (v), ce qui est une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 5.c.9. – *Étant donnés $a < b < c < d$ et $0 < \varepsilon < d - c$, il existe un champ de vecteurs $Z \geq 0$ sur \mathbf{R} et un difféomorphisme φ de \mathbf{R} , de classe C^∞ , vérifiant les conditions suivantes :*

- (i) $\varphi = \text{Id}$ et $Z = 0$ hors de $]a - \varepsilon, d + \varepsilon[$.
- (ii) $[\varphi, Z_t] = \text{Id}$ hors de $]a, d[$ pour tout $t \in [0, 1]$.
- (iii) $[\varphi, Z_t] \leq \text{Id}$ sur $[a, d]$ pour tout $t \in [0, 1]$.
- (iv) $[\varphi, Z_t](c) = b$.

Démonstration. – Fixons ξ tel que $a < \xi < b$. Soit Z un champ de vecteurs C^∞ sur \mathbf{R} vérifiant :

- $Z = 0$ en dehors de $]a - \varepsilon, d + \varepsilon[$.
- $Z > 0$ sur $]a - \varepsilon, d + \varepsilon[$.

Quitte à multiplier Z par une constante positive, nous admettons que $Z_1(\xi) = c$.

Quitte à modifier Z dans $]d - \varepsilon, d + \varepsilon[$, nous admettons également que :

$$(1) Z_1(d - \varepsilon) = d.$$

Soit Y un champ de vecteurs sur \mathbf{R} de classe C^∞ tel que :

- (2) $Y = Z$ en dehors de $]a, d - \varepsilon[$;
- (3) $0 < Y < Z$ sur $]a, d - \varepsilon[$.

On peut choisir Y de façon que $Y_1(\xi) = b$.

Notons $\psi_t = Y_t \circ Z_{-t}$, pour tout $t \in [0, 1]$. On déduit de (1), (2) et (3) le fait que $\psi_t = \text{Id}$ hors de $[a, b]$, et que $\psi_t = \text{Id}$ sur $[a, b]$. De plus $\psi_1(c) = b$.

Pour construire φ , on fixe $\omega \in]a - \varepsilon, d + \varepsilon[$ et on définit :

- $\varphi(Z_s(\omega)) = Y_s(\omega)$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.
- $\varphi = \text{Id}$ en dehors de $]a - \varepsilon, d + \varepsilon[$.

Ainsi, $\varphi \circ Z_t = Y_t \circ \varphi$, et donc $\psi_t = [\varphi, Z_t]$.

Pour que la démonstration du lemme soit complète, il reste à montrer que φ est de classe C^∞ aux points $a - \varepsilon$ et $d + \varepsilon$. Nous montrerons la différentiabilité de φ au voisinage de $d + \varepsilon$; le même argument prouverait la différentiabilité au voisinage de $a - \varepsilon$.

Fixons $\lambda, r \in \mathbf{R}$ tels que $Y_\lambda(\omega) \in]d, d + \varepsilon[$ et $Z_{r+\lambda}(\omega) = Y_\lambda(\omega)$. Comme $Y = Z$ sur $[d, d + \varepsilon]$, on a :

$$\varphi(Z_s \circ Z_\lambda(\omega)) = Y_s(Y_\lambda(\omega)) = Z_s(Y_\lambda(\omega)) = Z_s(Z_r \circ Z_\lambda(\omega)) = Z_r(Z_s \circ Z_\lambda(\omega))$$

pour tout $s > 0$.

Donc $\varphi = Z_r$ au voisinage de $d + \varepsilon$, donc est de classe C^∞ .

5.c.10. *Démonstration du lemme 5.a.8.* – (Il s'agit de vérifier que la perturbation construite au lemme 5.a.7 a bien modifié le nombre de rotation $\rho(\tilde{F}/G)$).

Supposons que G est une contraction sur $[0, \beta]$ et fixons $0 < \varepsilon < \beta$ et que $\tilde{h}_t \circ G = G$ sur $[0, \varepsilon]$.

Fixons $p \in \mathbf{N}$ tel que $G^p(\beta) \in [0, \varepsilon]$ et $(\tilde{h}_t \circ G)^p(\tilde{F}_0(\beta)) \in [0, \varepsilon]$.

Alors on a :

$$\tilde{F}_0(G^{p+2}(\beta)) = (\tilde{h}_0 \circ G)^{p+2}(\tilde{F}_0(\beta)) = G^2((\tilde{h}_0 \circ G)^p(\tilde{F}_0(\beta))).$$

Comme $\tilde{h}_1 \circ G$ possède par hypothèse un point fixe dans $[\varepsilon, \tilde{F}_0(\beta)]$, on en déduit qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que :

- $\tilde{F}_t(G^{p+2}(\beta)) \in]0, \varepsilon[$ pour tout $t \in [0, t_0]$.
- $\tilde{F}_{t_0}(G^{p+2}(\beta)) = (\tilde{h}_0 \circ G)^p(\tilde{F}_0(\beta))$.

De plus, \tilde{F}_0 et \tilde{F}_{t_0} commutent avec G sur $[0, (G^{p+2}(\beta))]$; on en déduit que leurs nombres de translation relatifs à G sont distincts.

Enfin, $\tilde{F}_t, t \in [0, t_0]$ commute avec G sur $[0, G^{p+2}(\beta)]$ et $\rho(\tilde{F}_t/G)$ varie continûment : on conclut qu'il existe $t_1 \in]0, t_0[$ tel que $\rho(\tilde{F}_0/G) \neq \rho(\tilde{F}_{t_1}/G)$.

Le cas où G est une dilatation sur $[0, \beta]$ est une adaptation facile de l'argument ci-dessus.

APPENDICE A

Réalisation des perturbations de l'holonomie

Dans tout cet appendice, M sera une variété de dimension 3, munie d'un feuilletage \mathcal{F} de codimension 1 et de classe C^∞ , et $C \subset \text{Int } M$ sera une feuille compacte de \mathcal{F} avec un point base x_0 .

On fixe un voisinage tubulaire $\eta(C)$, de C dans M , muni d'une projection $p : \eta(C) \rightarrow C$ dont les fibres sont transverses à \mathcal{F} , et on identifiera la fibre pointée $(p^{-1}(x_0), x_0)$ au segment pointé $] - 1, 1[, 0)$.

Fixons $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ des lacets sur C , de points base x_0 , et dont les classes d'homotopie $\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n$ engendrent $\pi_1(C, x_0)$. On note r_1, \dots, r_n des relations entre les $\bar{\gamma}_i$, de façon que $(\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n, r_1, \dots, r_n)$ soit une présentation de $\pi_1(C, x_0)$ par générateurs et relations.

Fixons à présent un segment compact $I \subset] - 1, 1[$, contenant zéro dans son intérieur, et tel que les holonomies $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$ soient définies sur I , par les relèvements (le long des fibres de p) des lacets γ_i sur les feuilles de \mathcal{F} . Fixons $I_0 \subset I$ un intervalle compact contenant zéro dans son intérieur, et tel que les holonomies $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$ vérifient les relations r_j sur I_0 . Le but de cet appendice est de prouver :

PROPOSITION A.1. – *Soit \mathcal{U} un voisinage de C dans M . Alors il existe un voisinage J_0 de zéro dans I_0 , ayant la propriété suivante :*

Soient h_1, \dots, h_n n difféomorphismes locaux de \mathbf{R} , de classe C^∞ , définis sur I , C' -proches des $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$, $0 \leq r \leq \infty$, satisfaisant les relations r_1, \dots, r_k sur I_0 , et coïncidant avec les $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$ hors de J_0 ; alors il existe un feuilletage \mathcal{G} de M , de classe C^∞ , C' -proche de \mathcal{F} dans la topologie des champs de plans, coïncidant avec \mathcal{F} hors de \mathcal{U} , et tel que les holonomies $h_{\gamma_i}(\mathcal{G})$ soient les h_i .

La démonstration de cette proposition se décompose en trois étapes :

1^{re} étape : construire le feuilletage \mathcal{G} sur chaque $p^{-1}(\text{Im}(\gamma_i))$.

2^e étape : étendre le feuilletage de l'étape 1 à un feuilletage sur $p^{-1}(W')$ où W' est un voisinage de $\bigcup_i \text{Im}(\gamma_i)$ dans C .

3^e étape : étendre le feuilletage de l'étape 2 à toute la variété M.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME A.2. – Soient $\delta > 0$, $0 \leq r \leq \infty$, \mathcal{F}_∂ (resp. \mathcal{F}) le feuilletage de $\partial D^2 \times \mathbf{R}$ (resp. $D^2 \times \mathbf{R}$) par le facteur ∂D^2 , (resp. D^2), et soit \mathcal{G}_∂ un feuilletage de $\partial D^2 \times \mathbf{R}$ de classe C^∞ et vérifiant :

(A.2.a) \mathcal{G}_∂ est un feuilletage en cercles, qui coïncide avec \mathcal{F}_∂ en dehors de $\partial D^2 \times [-\delta, \delta]$.

(A.2.b) \mathcal{G}_∂ est proche de \mathcal{F}_∂ dans la C^r -topologie des champs de plans.

Alors \mathcal{G}_∂ s'étend à un feuilletage \mathcal{G} de $D^2 \times \mathbf{R}$ de classe C^∞ et vérifiant :

(A.2.i) \mathcal{G} coïncide avec \mathcal{F} en dehors de $D^2 \times [-\delta, \delta]$.

(A.2.ii) \mathcal{G} coïncide avec l'extension radiale de \mathcal{G}_∂ dans un voisinage de $\partial D^2 \times \mathbf{R}$.

(A.2.iii) \mathcal{G} est proche de \mathcal{F} dans la C^r -topologie des champs de plans.

(l'extension radiale de \mathcal{G}_∂ est celle obtenue en tirant en arrière \mathcal{G}_∂ par la rétraction standard de $(D^2 - \{0\}) \times \mathbf{R}$ sur $\partial D^2 \times \mathbf{R}$).

Démonstration. – Fixons $p_0 \in \partial D^2$. Les hypothèses (A.2.a) et (A.2.b) permettant de définir une application F de classe C^∞ ,

$$\begin{aligned} F : \partial D^2 \times \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R} \\ (p, x) &\rightarrow F_p(x) \end{aligned}$$

de la façon suivante :

$(p, F_p(x))$ est sur la feuille de \mathcal{G}_∂ passant par (p_0, x) .

L'application F vérifie alors :

(A.2.1) $F_p \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{R})$ et $F_p \equiv \text{Id}_\mathbf{R}$ hors de $[-\delta, \delta]$.

(A.2.2) F_p est C^r -proche de $\text{Id}_\mathbf{R}$, uniformément en p.

Le feuilletage \mathcal{G}_∂ est donné par les graphes des applications :

$$\begin{aligned} F_x : \partial D^2 &\rightarrow \mathbf{R} \\ p &\rightarrow F_x(p) = F(p, x). \end{aligned}$$

On déduit alors de (A.2.b) la propriété suivante :

(A.2.3) $\partial F / \partial p(p, x)$ est C^r -proche de zéro, uniformément en p et en x.

Pour construire l'extension de \mathcal{G}_∂ , on considère $0 < \varepsilon < 1/2$, et $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de classe C^∞ , tels que $h(x) = 0$ si $0 \leq x \leq \varepsilon$ et $h(x) = 1$ si $1 - \varepsilon \leq x \leq 1$. On définit alors $\psi : (D^2 - \{0\}) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ par :

$$\psi(q, x) = (1 - h(\|q\|))x + h(\|q\|) \cdot F(q/\|q\|, x)$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme standard de \mathbf{R}^2 .

On notera $\psi(q, \cdot)$ l'application $x \rightarrow \psi(q, x)$, et $\psi(\cdot, x)$ l'application $q \rightarrow \psi(q, x)$.

Observons d'abord que, pour tout $p \in \partial D^2$ et $\lambda \in]0, 1]$, on a :

$$\psi(\lambda p, \cdot) = (1 - h(\lambda)) \text{Id}_\mathbf{R} + h(\lambda) F_p.$$

On sait que $F_p \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{R})$, on en déduit $\psi(\lambda p, \cdot) \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{R})$. En conséquence, les graphes des applications $\psi(\cdot, x)$, $x \in \mathbf{R}$, définissent un feuilletage \mathcal{G} de classe C^∞ de $(\mathbf{D}^2 - \{0\}) \times \mathbf{R}$, qui prolonge \mathcal{G}_∂ .

On vérifie de plus :

$$\psi(\lambda p, \cdot) \equiv \text{Id}_{\mathbf{R}} \text{ en dehors de } [-\delta, \delta]$$

$$\psi(\lambda p, \cdot) \equiv F_p \text{ pour tout } \lambda \in [1 - \varepsilon, 1].$$

On en déduit que \mathcal{G} satisfait A.2.i et A.2.ii. De plus $\psi(\lambda p, \cdot) \equiv \text{Id}_{\mathbf{R}}$ pour tout $\lambda \in]0, \varepsilon]$; donc \mathcal{G} se prolonge en un feuilletage de $\mathbf{D}^2 \times \mathbf{R}$, qui coïncide avec \mathcal{F} au voisinage de $\{0\} \times \mathbf{R} \subset \mathbf{D}^2 \times \mathbf{R}$.

D'autre part, les dérivées partielles de $\psi(\cdot, x)$ dans les directions polaires sont données par :

$$\begin{aligned} & \frac{h(\|q\|)}{\|q\|} \cdot \frac{\partial F}{\partial p}(q/\|q\|, x) && \text{pour } \|q\| = \text{Cte} \\ & \{F(q/\|q\|, x) - x\} \cdot h'(\|q\|) && \text{pour } q/\|q\| = \text{Cte}. \end{aligned}$$

Pour conclure que \mathcal{G} vérifie également A.2.iii, il suffit de remarquer que les expressions ci-dessus sont uniformément proches de zéro (en q et en x), ce qui est une conséquence directe de A.2.2 et A.2.3.

Lors de la construction (ci-dessus) de l'extension \mathcal{G} et \mathcal{G}_∂ , nous avons également prouvé :

LEMME A.3. – Soient $\delta > 0$, $0 \leq r \leq \infty$, \mathcal{F} le feuilletage de $[0, 1] \times \mathbf{R}$ par le facteur $[0, 1]$, et $f \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbf{R})$ tels que :

(A.3.a) $f \equiv \text{Id}_{\mathbf{R}}$ en dehors de $[-\delta, \delta]$.

(A.3.b) f est C^r -proche de l'identité.

Alors il existe un feuilletage \mathcal{G} de $[0, 1] \times \mathbf{R}$, de classe C^∞ , vérifiant :

(A.3.i) \mathcal{G} coïncide avec \mathcal{F} en dehors de $[0, 1] \times [-\delta, \delta]$, et dans un voisinage de $\{0, 1\} \times \mathbf{R}$.

(A.3.ii) les feuilles de \mathcal{G} passant par $(0, x)$ et par $(1, f(x))$ coïncident.

(A.3.iii) \mathcal{G} est proche de \mathcal{F} pour la C^r -topologie des champs de plans.

Dans toute la suite, pour simplifier les notations, nous identifierons les lacets avec leurs images.

A.4. *Démonstration de la proposition.* – Rappelons que C est une surface compacte, sans bord, et que la proposition est évidente si $C = S^2$.

Supposons donc que $C \neq S^2$. On peut alors, sans perte de généralité, modifier la présentation de $\pi_1(C, x_0)$: ainsi on considère que $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sont des lacets sur C , disjoints deux à deux dans $L - x_0$, et tels que, lorsqu'on coupe C le long des γ_i , on obtient un polygone P de $2n$ arêtes. La relation entre les $\bar{\gamma}_i$ est décrite par : le bord de P , projeté dans C est nul dans $\pi_1(C, x_0)$.

1^{re} étape : Fixons un petit 2-disque compact B dans C , centré en x_0 , et tel que $\gamma_i \cap B$ soit un segment, pour tout i .

Du lemme A.3, on déduit facilement que, si h_i coïncide avec $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$ hors d'un petit voisinage de zéro dans I , et est C^r -proche de $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$, alors on peut construire un feuilletage \mathcal{G}_i sur $p^{-1}(\gamma_i)$ de classe C^∞ , et vérifiant :

(A.4.1) \mathcal{G}_i coïncide avec $\mathcal{F}|_{p^{-1}(\gamma_i)}$ en dehors d'un petit voisinage de γ_i dans $p^{-1}(\gamma_i)$.

(A.4.2) $h_{\gamma_i}(\mathcal{G}_i) = h_i$.

(A.4.3) \mathcal{G}_i est proche de $\mathcal{F}|_{p^{-1}(\gamma_i)}$ pour la C^r -topologie des champs de plans.

(A.4.4) \mathcal{G}_i coïncide avec $\mathcal{F}|_{p^{-1}(\gamma_i)}$ sur $p^{-1}(B \cap \gamma_i)$.

2^e étape : Revenons au feuilletage \mathcal{F} et au voisinage tubulaire $p : \eta(C) \rightarrow C$.

Pour tout i , on considère un voisinage V_i de γ_i , dans $p^{-1}(\gamma_i)$, relativement compact dans $p^{-1}(\gamma_i)$, et on choisit un petit voisinage tubulaire W_i dans C . En relevant par p les fibres de w_i sur les feuilles de \mathcal{F} , on construit un voisinage tubulaire $\eta(V_i)$ de V_i dans M , avec une projection $q : \eta(V_i) \rightarrow V_i$ dont les fibres sont les relèvements des fibres de W_i . Le feuilletage \mathcal{F} sur $\eta(V_i)$ est donné par $\mathcal{F} = q^*(\mathcal{F}|_{V_i})$.

A présent, notons \tilde{G}_i l'extension C^∞ de \mathcal{G}_i définie par $\tilde{G}_i = q^*(\mathcal{G}_i)$. De la définition de \tilde{G}_i et de A.4.1, A.4.3 et A.4.4, on déduit que \tilde{G}_i vérifie :

(A.5.1) \tilde{G}_i coïncide avec \mathcal{F} hors d'un petit voisinage de γ_i dans $\eta(V_i)$.

(A.5.2) \tilde{G}_i est proche de \mathcal{F} pour la C^r -topologie des champs de plans.

(A.5.3) \tilde{G}_i coïncide avec \mathcal{F} dans un voisinage ouvert de $p^{-1}(\tilde{B})$ où \tilde{B} est un disque compact, centré en x_0 , et contenu dans B .

En diminuant si nécessaire les voisinages tubulaires W_i , on conclut de A.5.3 que les feuilletages \tilde{G}_i , $1 \leq i \leq n$, se recollent pour donner un feuilletage \tilde{G} sur $\bigcup_i \eta(V_i)$.

3^e étape : Considérons à présent un disque compact D' , contenu dans l'intérieur du polygone P , et dont le bord est proche du bord de P . On notera D la projection de D' sur la feuille C . On peut choisir ce disque de façon que le bord ∂D soit contenu dans $\bigcup_i W_i$, et que ∂D soit transverse, en dehors de \tilde{B} , aux fibres des voisinages tubulaires W_i .

Soit W un petit semi-voisinage tubulaire de ∂D dans D , dont les fibres sur $\partial D - B$ sont contenues dans les fibres des W_i .

De même que dans l'étape 2, on relève par p le semi-voisinage tubulaire W sur les feuilles de \mathcal{F} , de façon à construire un semi-voisinage tubulaire $\eta_+(\tilde{V})$ de V dans M , où V est un voisinage ouvert de ∂D dans $p^{-1}(\partial D)$ relativement compact dans $p^{-1}(\partial D)$.

On déduit facilement des définitions de \tilde{G} et de $\eta_+(\tilde{V})$, que \tilde{G} coïncide sur $\eta_+(\tilde{V})$ avec le pull-back de $\tilde{G}|_{p^{-1}(\partial D)}$ par la projection de $\eta_+(\tilde{V})$ sur \tilde{V} .

Nous allons à présent prolonger $\tilde{G}|_{p^{-1}(C - \text{Int}(D))}$ à $p^{-1}(\partial D)$.

Pour cela, remarquons que \mathcal{F} induit sur $p^{-1}(\partial D)$ un feuilletage par 2-disques, dans un voisinage de D dans $p^{-1}(\partial D)$. D'autre part, les propriétés A.5.1 et A.5.2 impliquent que le feuilletage $\tilde{G}|_{p^{-1}(\partial D)}$ coïncide avec $\mathcal{F}|_{p^{-1}(\partial D)}$ en dehors d'un petit voisinage V' de ∂D dans $p^{-1}(\partial D)$ (que l'on peut supposer saturé par les feuilles de $\mathcal{F}|_{p^{-1}(\partial D)}$), et est proche de $\mathcal{F}|_{p^{-1}(\partial D)}$ dans la C^r -topologie des champs de plans. De plus, $\tilde{G}|_{\tilde{V}}$ est un feuilletage en cercles, car les h_i vérifient la relation de la présentation de $\pi_1(C, x_0)$ fixée à l'étape 1, et que $\partial D'$ a été choisi proche de ∂P .

Pour achever la démonstration, on se ramène à $D^2 \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$ par un difféomorphisme local ϕ qui envoie le feuilletage \mathcal{F} par disques de $p^{-1}(\partial D)$ sur le feuilletage de $D^2 \times \mathbf{R}$ défini par le facteur D^2 , et qui envoie le semi-voisinage tubulaire de $\tilde{V} \subset p^{-1}(D)$ sur le

semi-voisinage tubulaire de $(\partial D^2) \times \mathbf{R}$ dans $D^2 \times \mathbf{R}$, défini par la rétraction radiale sur chaque disque.

Pour prolonger \tilde{G} à toute la variété M , il suffit alors d'appliquer le lemme A.2 sur $D^2 \times \mathbf{R}$ et de retourner sur $p^{-1}(\partial D)$ grâce à ϕ . Le feuilletage \mathcal{G} obtenu vérifie toutes les propriétés annoncées par la proposition A.1.

Dans la construction ci-dessus, la condition que les difféomorphismes h_i coïncident avec les holonomies $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$ hors d'un petit voisinage de 0, avait pour but de permettre de construire le feuilletage \mathcal{G} sur toute la variété M . En l'absence de cette hypothèse, les démonstrations ci-dessus garantissent l'existence d'un feuilletage \mathcal{G} , défini seulement sur un voisinage \mathcal{U}_0 de la feuille compacte C . Ce voisinage ne dépend pas des perturbations h_i de $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$, dès que les h_i sont suffisamment proches des $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$.

Voyons à présent comment adapter la proposition A.1 pour des perturbations de l'holonomie, non pas d'une feuille compacte mais d'une classe d'équivalence de feuilles compactes :

Supposons que $M = C \times \mathbf{R}$, et que le feuilletage \mathcal{F} est transverse au facteur \mathbf{R} , et que $C \times \{a\}$ et $C \times \{b\}$ sont des feuilles de \mathcal{F} , $a \leq b$. Notons $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$ les holonomies de \mathcal{F} définies sur un intervalle compact I contenant $[a, b]$ dans son intérieur, et satisfaisant les relations r_1, \dots, r_k sur un intervalle compact I_0 tel que $[a, b] \subset \text{Int}(I_0) \subset I$.

Une adaptation évidente de la démonstration de la proposition A.1 permet de démontrer :

PROPOSITION A.5. – *Étant donné un voisinage de \mathcal{U} de $C \times [a, b]$ dans M , il existe un voisinage J_0 de $[a, b]$ dans I_0 avec la propriété suivante :*

Soient h_1, \dots, h_n des C^∞ -difféomorphismes locaux de \mathbf{R} définis sur I , C^r -proches des $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$, $0 \leq r \leq \infty$, satisfaisant les relations r_1, \dots, r_k sur I_0 et coïncidant avec les $h_{\gamma_i}(\mathcal{F})$ en dehors de J_0 . Alors il existe un feuilletage \mathcal{G} de M , de classe C^∞ , proche de \mathcal{F} dans la C^r -topologie des champs de plans, coïncidant avec \mathcal{F} hors de \mathcal{U} , et dont les holonomies $h_{\gamma_i}(\mathcal{G})$ sont les h_i .

APPENDICE B

Le lemme d'applatissage des difféomorphismes

Le but de l'appendice B est de donner une démonstration d'un lemme d'applatissage de difféomorphismes de l'intervalle $[0, \infty[$ dû à M. P. Muller, et que nous avons utilisé au paragraphe 4.b. C'est le lemme fondamental de l'article [Mu], qui n'a pas été publié.

Dans cet appendice, la C^k -topologie sera la C^k -topologie de la convergence uniforme sur les compacts, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

Soit $\varphi \in \text{Diff}_+^\infty(]0, \infty[)$ tel que :

$$\begin{cases} \varphi(x) = x & \text{pour tout } x \geq b, (b > 0) \\ \varphi(x) = -\frac{1}{\text{Log } x} & \text{pour tout } x \in]0, a], (0 < a < 1). \end{cases}$$

Alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi^{-1}(x) = x & \text{si } x \geq b \\ \varphi^{-1}(x) = e^{-(1/x)}, & \text{si } x \in \left] 0, -\frac{1}{\text{Log } a} \right] \end{array} \right.$$

Pour tout $\lambda \in]0, \infty[$, on notera φ_λ l'homéomorphisme de $[0, \infty[$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_\lambda(x) = \lambda \cdot \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right), & \text{si } x > 0 \\ \varphi_\lambda(0) = 0. \end{array} \right.$$

Évidemment φ_λ converge vers l'identité, sur $[0, \infty[$ pour la C^0 -topologie, et sur $]0, \infty[$ pour la C^∞ -topologie, quand λ tend vers 0.

LEMME B.1 (Muller). – Soient $f_n, f \in \text{Diff}_+^\infty([0, \infty[)$, $n \in \mathbb{N}$ des difféomorphismes tels que f_n converge vers f pour la C^∞ -topologie quand $n \rightarrow +\infty$. Alors :

- (i) $\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ est de classe C^∞ , et $(\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1})'(0) = 1$.
- (ii) si $f'(0) = 1$ alors le jet infini $J_0^\infty(\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1})$ est égal à $J_0^\infty(\text{Id})$.
- (iii) $\varphi_\lambda \circ f_n \circ \varphi_\lambda^{-1} \xrightarrow{n} \varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ pour la C^∞ -topologie.

De plus, si $J_0^k(f) = J_0^k(\text{Id})$, alors :

- (iv) $\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1} \rightarrow f$ pour la C^k -topologie, quand $\lambda \rightarrow 0$.

La démonstration que nous donnons des points (i), (ii) et (iii) est essentiellement la démonstration de Muller.

Démonstration. – Fixons $\lambda \in]0, \infty[$. Il est évident que $\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$, et que $\varphi_\lambda \circ f_n \circ \varphi_\lambda^{-1} \xrightarrow{n} \varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ sur $]0, \infty[$ pour la C^∞ -topologie. La difficulté des points (i), (ii) et (iii) est bien sûr le comportement de $\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ et de $\varphi_\lambda \circ f_n \circ \varphi_\lambda^{-1}$ au voisinage de 0.

L'application f s'écrit de la forme $f(x) = f'(0) \cdot x + x \cdot r(x)$ où r est de classe C^∞ et $r(0) = 0$. En conséquence, pour tout $x > 0$ assez petit, $\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}(x)$ prend la forme :

$$(B.2) \quad \varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}(x) = \frac{\lambda x}{\lambda - x \text{Log}(f'(0) + r(\lambda e^{-\lambda/x}))}$$

On en déduit que $\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ est de classe C^∞ au voisinage de $0 \in [0, \infty[$, et que $(\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1})'(0) = 1$. D'autre part, le jet infini $J_0^\infty(\varphi_\lambda^{-1})$ étant nul, $J_0^\infty(\text{Log}(1 + r \circ \varphi_\lambda)) = 0$.

Ainsi, si $f'(0) = 1$, on obtient de (B.2) que $J_0^\infty(\varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}) = J_0^\infty(\text{Id})$.

En écrivant $f_n(x) = f_n'(0) \cdot x + x \cdot r_n(x)$, on a que $r_n \rightarrow r$ dans la C^∞ -topologie. On déduit alors de B.2 le fait que $\varphi_\lambda \circ f_n \circ \varphi_\lambda^{-1} \xrightarrow{n} \varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$ pour la C^∞ -topologie, ce qui conclut la preuve des points (i), (ii) et (iii).

On supposera désormais que $J_0^k(f) = J_0^k(\text{Id})$, et on notera $P_\lambda = \varphi_\lambda \circ f \circ \varphi_\lambda^{-1}$. On sait $\varphi_\lambda \rightarrow \text{Id}$ pour la C^∞ -topologie, donc $P_\lambda \rightarrow f$ pour la C^0 -topologie. On supposera donc $k \geq 1$.

De même, $\varphi_\lambda \rightarrow \text{Id}$ sur $]0, \infty[$ pour la C^∞ -topologie, donc $P_\lambda \rightarrow f$ sur $]0, \infty[$ pour la C^∞ -topologie. D'après (ii), il suffit pour prouver (iv) de montrer :

$$(B.3) \quad \lim_{\lambda, x \rightarrow 0} P_\lambda^{(j)}(x) = (\text{Id})^{(j)}(0), \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq k, \quad \text{où } x, \lambda > 0.$$

Par hypothèse $J_0^k(f) = J_0^k(\text{Id})$. Donc $f(x) = x + x^{k+1}s(x)$ où s est de classe C^∞ . En conséquence, $P_\lambda(x)$ prend la forme :

$$(B.4) \quad P_\lambda(x) = \lambda \varphi \left(\varphi^{-1} \left(\frac{x}{\lambda} \right) + \lambda^k \left(\varphi^{-1} \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right)^{k+1} \cdot s \left(\lambda \varphi^{-1} \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right) \right).$$

Pour démontrer B.3 nous allons considérer 3 cas :

1^{er} cas :

$$\frac{x}{\lambda} \geq b' > b.$$

On sait $\varphi \equiv \text{Id}$ sur $[b', \infty[$; donc, de B.4 on déduit :

$$P_\lambda(x) = \lambda \varphi \left(\frac{x}{\lambda} [1 + x^k s(x)] \right).$$

Si x est suffisamment proche de 0 alors : $x/\lambda [1 + x^k s(x)] > b$, et donc

$$P_\lambda(x) = x [1 + x^k s(x)],$$

ce qui démontre B.3 pour $x/\lambda \geq b'$.

2^e cas :

$$\text{On a :} \quad \frac{x}{\lambda} \leq -\frac{1}{\text{Log } a'} < -\frac{1}{\text{Log } a} \quad (0 < a' < a < 1).$$

$$\varphi^{-1}(x) = e^{-1/x} \quad \text{sur} \quad \left] 0, -\frac{1}{\text{Log } a} \right[.$$

Dans ce cas, B.4 devient donc :

$$P_\lambda(x) = \lambda \varphi \left(e^{-\lambda/x} (1 + \lambda^k e^{-k\lambda/x} s(\lambda e^{-\lambda/x})) \right).$$

Si λ est suffisamment proche de 0, alors :

$$e^{-\lambda/x} (1 + \lambda^k e^{-k\lambda/x} s(\lambda e^{-\lambda/x})) < a.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P_\lambda(x) &= -\frac{\lambda}{\text{Log} [e^{-\lambda/x} (1 + \lambda^k e^{-k\lambda/x} s(\lambda e^{-\lambda/x}))]} \\ &= \frac{\lambda x}{\lambda - x \text{Log} [1 + \lambda^k e^{-k\lambda/x} s(\lambda e^{-\lambda/x})]}. \end{aligned}$$

Soient h et H les applications C^∞ définies par :

$$h(0) = 0 \quad \text{et} \quad h(x) = e^{-1/x}, \quad x > 0$$

$$H(x) = \text{Log}(1+x) \quad x \geq 0.$$

On a alors $P_\lambda(x) = Q(\lambda, x/\lambda)$ ou

$$Q(\lambda, z) = \frac{\lambda z}{1 - z H[\lambda^k (h(z))^k s(\lambda h(z))]}$$

est de classe C^∞ pour $0 \leq z \leq a'$ et $\lambda \in [0, \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit.

Pour montrer B.3, il suffit à présent de montrer :

$$(B.5) \quad \frac{1}{\lambda^j} Q_\lambda^{(j)} \rightarrow (\text{Id})^{(j)}(0) \quad \text{pour la } C^0\text{-topologie, } \forall i \leq j \leq k.$$

Cependant, B.5 est une conséquence immédiate du développement de Taylor de Q suivant le paramètre λ , qui nous donne

$$Q(\lambda, z) = \lambda z + \lambda^{k+1} \psi(\lambda, z)$$

ou ψ est de classe C^∞ sur $[0, \varepsilon] \times [0, a']$.

Ceci achève la démonstration de B.3 pour $x/\lambda \leq -(1/\text{Log } a')$.

3^e cas :

$$-\frac{1}{\text{Log } a'} \leq \frac{x}{\lambda} \leq b'.$$

Posons $P_\lambda(x) = R(\lambda, x/\lambda)$, où

$$R(\lambda, z) = \lambda \varphi[\varphi^{-1}(z) + \lambda^k (\varphi^{-1}(z))^{k+1} s(\lambda \varphi^{-1}(z))],$$

ce qui est bien défini pour $-(1/\text{Log } a') \leq z \leq b'$ et $\lambda \in [0, \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit.

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :

$$0 < a'' \leq \varphi^{-1}\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \lambda^k \left(\varphi^{-1}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)^{k+1} \cdot s\left(\lambda \varphi^{-1}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) \leq b'.$$

Ainsi, dans l'expression de R nous n'utiliserons pas les valeurs de φ ou de φ^{-1} proches de 0. En conséquence, R est de classe C^∞ sur $[0, \varepsilon] \times [-(1/\text{Log } a'), b']$.

De même que dans le 2^e cas, pour démontrer B.3 il suffit que $(1/\lambda^j) R_\lambda^{(j)} \rightarrow (\text{Id})^{(j)}(0)$ dans la C^∞ -topologie, $\forall 1 \leq j \leq k$.

La démonstration est alors la répétition exacte de la fin du 2^e cas.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] C. BONATTI, *Sur l'existence de feuilles compactes pour les feuilletages proches d'une fibration* (Thèse, Paris-VII, 1989).
- [B-H] C. BONATTI et A. HAEFLIGER, *Déformations de feuilletages* (Topology, Vol. 29, n° 2, 1990, p. 205-229).
- [G-S] E. GHYS et V. SERGIESCU, *Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages* (Topology, Vol. 19, 1980, p. 179-197).
- [Hae] A. HAEFLIGER, *Variétés feuilletées* (Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. 16, 1962, p. 367-397).

- [He] M. HERMAN, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations* (Thèse, Orsay, 1976).
- [Hi] M. W. HIRSCH, *Stability of compact leaves of foliations, Dynamical Systems*, Bahia, 1971, Academic Press, 1973, p. 135-153.
- [K] N. KOPPEL, *Commuting Diffeomorphisms, Global Analysis (Proc. Symposium Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, 1968, Am. Math. Soc., 1970, p. 165-184).*
- [M] R. MOUSSU, *Sur les feuilletages de codimension un* (Thèse, Orsay, 1971).
- [M-R] R. MOUSSU et R. ROUSSARIE, *Relations de conjugaison et de cobordisme entre certains feuilletages* (*Public. Math. de l'I.H.E.S.*, n° 43, 1974, p. 143-168).
- [Mu] M. P. MULLER, *Sur l'approximation et l'instabilité des feuilletages*, Prépublication de l'I.R.M.A., Strasbourg, 1982.
- [P] J.-F. PLANTE, *Stability of codimension one foliations by compact leaves* (*Topology*, Vol. 22, n° 2, 1983, p. 173-177).
- [R-R] H. ROSENBERG et R. ROUSSARIE, *Some remarks on stability of foliations* (*J. of Diff. Geometry*, Vol. 10, n° 2, 1975, p. 207-219).
- [Se] F. SERGERAERT, *Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité* (*Inventiones Math.*, 39, 1977, p. 253-275).
- [St] S. STERNBERG, *Local contractions and a theorem of Poincaré* (*Amer. J. of Math.*, Vol. LXXIX, 1957, p. 809-824).
- [Ta] F. TAKENS, *Normal forms for certain singularities of vector fields* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, Vol. 23, n° 2, 1973, p. 163-195).
- [Th] W. THURSTON, *A generalization of the Reeb stability theorem* (*Topology*, Vol. 13, 1974, p. 347-352).

(Manuscrit reçu le 28 février 1992;
révisé le 8 avril 1993).

C. BONATTI,
Laboratoire de Topologie,
Université de Bourgogne,
URA 755 du C.N.R.S.,
B.P. 138,
21004 Dijon Cedex,
France.

S. FIRMO,
U.F.F. – Instituto de Matemática
Rua São Paulo – Valonguinho
24020-005 Niteroi-RJ,
Brasil.