ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J.-CL. TOUGERON

Sur les ensembles semi-analytiques avec conditions Gevrey au bord

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 27, nº 2 (1994), p. 173-208
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1994_4_27_2_173_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 27, 1994, p. 173 à 208.

SUR LES ENSEMBLES SEMI-ANALYTIQUES AVEC CONDITIONS GEVREY AU BORD

PAR J.-CL. TOUGERON

ABSTRACT. – We consider a subalgrebra $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ of the algebra of germs at 0 of real C^∞ functions on $(\mathbb{R}^+)^n$; these germs are analytic on the open quadrant $(\mathbb{R}^{+*})^n$ and extend to holomorphic functions in some open set of $\mathbb{C}^n$, with Gevrey conditions near the origin. We first define this algebra and study its properties (in particular, each germ is determined by its formal expansion at the origin). Then, we consider a germ of "semi-analytic set" X at the origin of $(\mathbb{R}^+)^n$ which is defined by a finite number of functions of $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ and we prove for X the same results as for the usual analytic situation: X admits locally a finite number of connected components; if $X \neq 0$, X contains a small Gevrey arc; every function of $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ satisfies a Łojasiewicz inequality. At last, we can mix these results with Khovanskii's theory to get a large class of analytic algebras which verify good topological or metric properties.

Dans cet article, on considère une sous-algèbre (notée $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$) de l'algèbre des fonctions réelles, C^∞ au voisinage de 0 dans $(\mathbb{R}^+)^n$, analytiques dans $(\mathbb{R}^{+*})^n$; cette algèbre, précisée ultérieurement, est « quasi-analytique », *i.e.* l'application $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}} \ni f \to \hat{f} \in \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ qui à f associe son développement asymptotique en 0, est injective. Les résultats principaux sont alors les suivants :

THÉORÈME I. – *Soit* $X = \bigcup_i \bigcap_j \{x \in (\mathbb{R}^+)^n ; f_{ij}(x) ? 0\}$ *un germe semi-analytique défini à l'aide d'un nombre fini de fonctions* $f_{ij} \in \tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$.

(1) X *admet localement un nombre fini de composantes connexes* i.e. *si* $\underset{\sim}{X}$ *est un représentant de* X *et si* D_R^n *est la boule euclidienne de* $\mathbb{R}^n$: $\|x\| < R$, $\underset{\sim}{X} \cap D_R^n$ *admet un nombre fini de composantes connexes pour* R *assez petit*).

(2) *Si* X *n'est pas réduit à l'origine, il existe un arc Gevrey* ξ :

$$(\mathbb{R}^+, 0) \ni t \to \xi(t) \in ((\mathbb{R}^+)^n, 0) \qquad \textit{tel que} \quad \xi(]0, \varepsilon[) \subset \underset{\sim}{X}$$

pour un $\varepsilon > 0$ (« *arc Gevrey* » *signifie que chacune de ses composantes est Gevrey*, i.e. *appartient à* $G_1^{\mathbb{R}}$).

THÉORÈME II. – *Tout* $f \in \tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ *vérifie une inégalité de Lojasiewicz par rapport au germe de ses zéros* (*si* $\underset{\sim}{f}$ *est un représentant de* f *et si* $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{f}^{-1}(0)$, *il existe des constantes* $C > 0$ *et* $\alpha > 0$ *telles que* $|\underset{\sim}{f}(x)| \geqq C\, d(x, \underset{\sim}{X})^\alpha$, $\forall x \in (\mathbb{R}^+)^n$ *assez voisin* de 0).

Dans les deux premiers paragraphes, on étudie l'algèbre $\mathcal{G} = G_1$ des « fonctions multi-sommables dans la direction $\mathbb{R}^+$ » (*cf.* [1], [4], [6], [11] pour diverses approches de ces fonctions). Le résultat principal est la proposition 1.7 qui en donne une caractérisation à l'aide d'itérés de transformations de Borel. Une autre définition est la suivante (elle est intéressante, car c'est elle que nous retiendrons pour l'extension à plusieurs variables), *cf.* 2.9, 2.10 :

Donnons-nous des réels $k_1 > \ldots > k_s > 1/2$, un $\eta > 0$, un $R > 0$, et considérons une suite $f_q\,(q \in \mathbb{N})$ de fonctions holomorphes dans $S_q = \bigcap_{j=1}^{s} S_{q,j}$ avec :

$$S_{q,j} = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < R\,(q+1)^{-1/k_j} \} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \,;\, |\arg z| < \frac{\pi}{2\,k_j} + \eta \,;\, 0 < |z| < R \right\}$$

et

$$\| f_q \|_{S_q} = \sup_{z \in S_q} | f_q(z) | \leqq C\,\rho^q \,(C > 0 \,;\, 0 < \rho < 1 \text{ constantes}).$$

Alors la série $\sum_{q=0}^{\infty} f_q$ converge vers une fonction holomorphe f dans le secteur $S = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, |\arg z| < (\pi/2\,k_1) + \eta \,;\, 0 < |z| < R \}$ et cette fonction f admet un développement asymptotique en 0. Une telle fonction f est multisommable dans la direction $\mathbb{R}^+$ et réciproquement, après une éventuelle ramification, toute fonction multi-sommable dans la direction $\mathbb{R}^+$ admet une représentation en série de fonctions holomorphes, de la forme précédente.

Dans le paragraphe 3, on définit G_n comme produit tensoriel complété n-fois de G_1. Cette définition est à l'évidence trop restrictive pour les applications et, par exemple, les G_n ne sont pas stables même par composition avec des fonctions holomorphes. Mais il est évident que la définition précédente à l'aide de séries, s'étend à plusieurs variables. Il suffit de remplacer les $S_{q,j}$ par ceux-ci :

$$S_{q,j} = \{ z \in D_R^n \,;\, \| g_j(z) \| < R\,(q+1)^{-1/k_j} \} \cup \left\{ z \in D_R^n \,;\, |\arg g_j(z)| < \frac{\pi}{2\,k_j} + \eta \,;\, g_j(z) \neq 0 \right\}$$

les fonctions $g_1, \ldots, g_s$ appartenant à $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ *et* $g_j(0) = 0$. En faisant varier les données R, η, s, k_j, g_j, C, ρ, on obtient les algèbres notées $G_{X,0}$; on peut imposer aux g_j d'être les monômes $z_n^{p_{j,1}} \ldots z_n^{p_{j,n}}$: on obtient alors l'algèbre $\tilde{G}_n$. D'après le théorème de désingularisation d'Hironaka, l'étude des $G_{X,0}$ se ramène à celle de $\tilde{G}_n$. Les propriétés de ces algèbres (existence de développements asymptotiques, quasi-analyticité, propriété des normes...) résultent facilement des définitions ou du cas $n = 1$. Enfin, la mention $\mathbb{R}$ en exposant ($\tilde{G}_{X,0}^{\mathbb{R}}$, $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$, ...) signifie qu'on se restreint aux fonctions f réelles, *i.e.* telles que $f(x)$ est réel si x est réel.

Dans le paragraphe 4, on étudie l'algèbre $\mathscr{G}\{y_1, \ldots, y_N\}$ des germes « Gevrey en $z \in \mathbb{C}$ et analytiques en $y_1, \ldots, y_N$ »; pour cette algèbre, on peut toujours « préparer » en les variables analytiques y_j, et en utilisant ce théorème de préparation, on montre qu'elle possède toutes les propriétés de l'anneau des séries convergentes. En particulier, $\mathscr{G}\{y_1, \ldots, y_N\}$ est un anneau local régulier de dimension N + 1 et les théorèmes I et II sont vrais pour cette algèbre.

Dans le paragraphe 5, on démontre les théorèmes I et II. Les démonstrations sont parallèles et l'idée est de se ramener, par éclatements, au cas précédent où les fonctions sont analytiques en toutes les variables, sauf une qui est Gevrey. On procède comme suit (pour le théorème I, par exemple); après éclatements de l'origine ou de plans de coordonnées, on peut supposer que tous les f_{ij} sont holomorphes en au moins une variable, par exemple x_n; supposons que les f_{ij} sont holomorphes en $x_p, \ldots, x_n$ $(2 \leqq p \leqq n)$; on procède alors par induction sur n et p : si $n=2$ ou si $p=2$, le résultat est vrai d'après le paragraphe 4. Si $p>2$, après éclatements en les variables Gevrey $x_1, \ldots, x_{p-1}$, on a deux possibilités :

– ou bien les f_{ij} sont analytiques en les variables $x_{p-1}, \ldots, x_n$, et l'on utilise l'induction sur p;

– ou bien les $f_{ij}(0, \ldots, 0, x_p, \ldots, x_n)$ sont tous $\neq 0$, mais alors après un éventuel changement linéaire de coordonnées en les variables $x_p, \ldots, x_n$, on peut préparer en x_n et supposer que les f_{ij} sont polynomiaux en x_n.

D'après le théorème de Tarski-Seidenberg et l'induction sur n, on obtient le résultat.

Dans le dernier paragraphe, on remarque que les résultats précédents peuvent être conjugués avec la théorie de Kovanskii; l'algèbre $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ est « topologiquement nœthérienne » et « de Łojasiewicz », au sens de [9], [10]; on peut donc lui appliquer les résultats de ces articles et en particulier la compléter en une algèbre stable pour diverses opérations (composition, adjonction de solutions d'équations différentielles du premier ordre, etc.) et ayant les mêmes propriétés.

On peut aussi globaliser les résultats précédents; si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et si le bord de Ω est une variété à coins, on peut considérer l'algèbre des fonctions Gevrey dans Ω (*i.e.* analytiques dans Ω et Gevrey au voisinage de tout point de $\partial\Omega$). Un semi-analytique défini à l'aide d'un nombre fini de fonctions de cette algèbre, admet un nombre fini de composantes connexes; on peut enfin dans ce contexte plus général étudier les variétés de Pfaff (considérées par Khovanskii, Moussu, Roche dans le cas où les fonctions sont analytiques au voisinage de $\bar{\Omega}$) : on obtiendrait des résultats analogues.

1. Développements asymptotiques Gevrey et transformation de Borel-Laplace

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques résultats sur la multisommabilité (*cf.* [1], [4]; *voir* aussi [6] pour une autre approche n'utilisant pas la transformation de Borel-Laplace). On choisit la direction privilégiée $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$: les résultats restent valables, avec des modifications évidentes, quand on remplace $\mathbb{R}^+$ par n'importe quelle demi-droite réelle issue de l'origine. Enfin, on a légèrement modifié la définition de la transformation de Borel-Laplace, de manière à éviter les masses de Dirac à l'origine.

1.1. Soient

$$k \in]0, \infty], \qquad R>0, \qquad \eta>0;$$

on note $S^k_{R,\eta}$ le secteur $\{z \in \mathbb{C};\, 0<|z|<R;\, |\arg z|<(\pi/2\,k)+\eta\}$: si $k \geqq 1/2$, ce secteur est en fait un secteur du revêtement universel de $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Soit $\mathscr{A}_{k,R,\eta}$ l'algèbre des fonctions f holomorphes dans $S^k_{R,\eta}$, continues sur $\bar{S}^k_{R,\eta}$, admettant un développement asymptotique $\hat{f}=\sum a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, en 0. On posse $\mathscr{A}_k = \lim\limits_{\substack{R \to 0 \\ \eta \to 0}} \mathscr{A}_{k, R, \eta}$ et on note $\mathscr{G}_k$ l'algèbre des $f \in \mathscr{A}_k$ qui admettent un développement asymptotique Gevrey d'ordre k en 0. Cela signifie qu'il existe des constantes $C>0$, $A>0$ telles que sur un secteur $S^k_{R, \eta}=S$ convenable on ait, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sup_{z \in S} \frac{|f^{(n)}(z)}{n!} \leqq CA^n . \Gamma\left(\frac{n}{k}\right).$$

Si $h \in]0, \infty]$, on note aussi $\mathscr{A}_{k, h}$ la sous-algèbre de $\mathscr{A}_k$ formée des $f \in \mathscr{A}_k$ qui se prolongent analytiquement à un secteur infini $S^k_{\infty, \eta}$ avec croissance exponentielle d'ordre h à l'infini ($\mathscr{A}_{k, \infty} = \mathscr{A}_k$) ; enfin, on note $\mathscr{A}_{k, \omega}$ la sous-algèbre de chaque $\mathscr{A}_{k, h}$ formée des f qui sont holomorphes à l'infini ; $\mathscr{O} = \mathscr{G}_\infty$ est l'anneau des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}$.

LEMME 1.2. – *Si $k > 1/2$, on a une décomposition :*

$$\mathscr{A}_k = \mathscr{O} + \mathscr{A}_{k, \omega}.$$

Preuve. – Soit $f \in \mathscr{A}_{k, R, \eta}$; le bord de $S^k_{R, \eta}$, orienté dans le sens direct, se décompose en un arc de cercle de rayon R : ∂_1 et une union de deux segments ∂_2. Par Cauchy, si $z \in S^k_{R, \eta}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_1} \frac{f(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial_2} \frac{f(t)}{t-z} dt = f_1(z) + f_2(z)$$

avec $f_1 \in \mathscr{O}$ et $f_2 \in \mathscr{A}_{k, \omega}$.

1.3. Si $f \in \mathscr{A}_{1, R, \eta}$, on définit sa transformée de Borel $\mathscr{B}_1 f = \varphi$ comme suit ; $\mathscr{B}_1$ est $\mathbb{C}$-linéaire ; $\mathscr{B}_1 1 = 1$; si $f(0)=0$:

$$\varphi(\zeta) = \mathscr{B}_1 f(\zeta) = \frac{\zeta}{2\pi i} \int_{\partial S^1_{R, \eta}} f(z) e^{\zeta/z} \frac{dz}{z^2} = \zeta . \mathscr{B} f(\zeta).$$

Cette transformation est un isomorphisme de $\mathscr{A}_1$ sur $\mathscr{A}_{\infty, 1}$; si $\varphi \in \mathscr{A}_{\infty, 1}$ et $\varphi(0)=0$, on retrouve f par la formule :

$$f(z) = \mathscr{L}_1 \varphi(z) = \int_0^\infty \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} e^{\zeta/z} d\zeta$$

Si $\hat{f}=\sum a_n z^n$, on a $\hat{\varphi} = \sum a_n (\zeta^n/\Gamma(n))$ [on convient que $\Gamma(0)=1$].

Plus généralement, on définit la transformation de Borel d'ordre $k\, \mathscr{B}_k (k>0)$ en transmuant $\mathscr{B}_1$ par $f(z) \to f(z^k)$, *i.e.* $\mathscr{B}_k f(\zeta) = \mathscr{B}_1 (f(z^{1/k}))(\zeta^k)$; $\mathscr{B}_k$ est donc un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathscr{A}_k$ sur $\mathscr{A}_{\infty, k}$. Si $f \in \mathscr{A}_k$ admet $\sum a_n z^n$ comme développement asymptotique $\hat{f}$, et si $\varphi = \mathscr{B}_k f$, on a $\hat{\varphi} = \sum a_n (z^n/\Gamma(n/k))$.

LEMME 1.4. – *Soient $0 < k_1 \leqq k < \infty$, $h_1 \in]0, \infty]$; la transformation $\mathscr{B}_k$ induit des isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires :*

$$\mathscr{A}_{k_1, h_1} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_{k_2, h_2}$$

avec $(1/k_1)-(1/k)=1/k_2$; $(1/h_1)+(1/k)=1/h_2$. *Si* $\mathcal{G}_{k,h}=\mathcal{G}_k \cap \mathcal{A}_{k,h}$, *ces isomorphismes induisent des isomorphismes*

$$\mathcal{G}_{k_1,h_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{k_2,h_2}.$$

En particulier $\mathcal{G}_{k_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{k_2,k}$; $\mathcal{G}_k \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{\infty,k}$.

Preuve. — Par transmutation, on se ramène à $k=1$. Les propriétés de régularité à l'origine sont vérifiées par exemple dans [11]; regardons la croissance à l'infini.

Supposons que $f(0)=0$ et que $|f(z)| \leqq C'|z|e^{C|z|^{h_1}}$, $C>0$, $C'>0$; vérifions que $2\pi i.\varphi(\zeta)/\zeta=\int_{\partial S^1_{R,\eta}} f(z)/z.e^{\zeta/z}.dz/z$ est à croissance exponentielle d'ordre $h_1/(1+h_1)$ si $|\arg\xi|<\eta/2$. On a $\forall R>0$:

$$\left|\int_{\partial_1} \frac{f(z)}{z}.e^{\zeta/z}.\frac{dz}{z}\right| \leqq (\pi+2\eta).C'.e^{C|z|^{h_1}+|\zeta|/R}.$$

Choisissons R de manière à minimiser l'exposant de e; on trouve que $R^{h_1+1}=|\zeta|/h_1 C$ et l'intégrale est majorée par $(\pi+2\eta).C'.e^{C''|\zeta|^{h_1/1+h_1}}$, $C''>0$ constante convenable. Pour ce choix de R, on majore facilement $\left|\int_{\partial_2}\right|$ et l'on trouve que $\varphi(\zeta)/\zeta$ et donc $\varphi(\zeta)$ est à croissance exponentielle d'ordre $h_1/(1+h_1)$ à l'infini dans le secteur $|\arg\zeta|<\eta/2$. Pour démontrer la majoration dans tout le secteur $|\arg\zeta|<(\pi/2k_2)+\eta'$, $\eta'>0$ convenable, on remplace $\mathbb{R}^+$ par une direction quelconque du secteur $|\arg z|\leqq\pi/2k_2$.

Réciproquement, soit $\varphi(\zeta)$ telle que $\varphi(0)=0$ et $\varphi(\zeta)$ est à croissance exponentielle d'ordre h_2, $0<h_2<1$; soit z tel que $|\arg z|\leqq(\pi/2)-\eta$. Si

$$|\varphi(\zeta)| \leqq C'|\zeta|e^{(C-\varepsilon)|\zeta|^{h_2}}, C'>0, C-\varepsilon>0, \varepsilon>0 :$$

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\int_0^\infty \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}.e^{-\zeta/z}.d\zeta\right| \\ &\leqq C'.\int_0^\infty e^{Ct^{h_2}-(t/|z|)\sin\eta}.e^{\varepsilon t^{h_2}}dt \\ &\leqq C'.\int_0^\infty e^{-\varepsilon t^{h_2}}dt.\sup_{t\in\mathbb{R}} e^{Ct^{h_2}-(t/|z|)\sin\eta}\end{aligned}$$

et il suffit de chercher le maximum de cette dernière fonction. Pour démontrer la majoration dans tout le secteur $|\arg z|<(\pi/2k_1)+\eta'$, $\eta'>0$ convenable, on remplace $\mathbb{R}^+$ par une direction quelconque du secteur $|\arg\zeta|\leqq(\pi/2k_2)+\eta''$, $\eta''>\eta'$ convenable.

Remarques 1.5.

1.5.1. Supposons que $f \in \mathscr{A}_{k_1}$ est à croissance polynomiale d'ordre $\alpha \geqq 0$ à l'infini, *i.e.* $|f(z)| \leqq C(1+|z|^\alpha)$; alors sa transformée $\mathscr{B}_k f$ $(k_1 \leqq k)$ est aussi à croissance polynomiale d'ordre α à l'infini et réciproquement.

1.5.2. Si $\omega \in \mathbb{C}$, on note $\mathscr{B}_{k,\omega}$ la transmuée de $\mathscr{B}_k$ par l'application $f(z) \mapsto z^{-\nu}.f(z)$ avec $\omega = \nu/k$; cette transformation envoie z^n sur $z^n/\Gamma(n/k)+\omega)$. Elle a les mêmes propriétés que $\mathscr{B}_k$; soit $f \in \mathscr{A}_{k_1}$: alors $\mathscr{B}_{k,\omega}(f)$ est Gevrey d'ordre k_2 ssi f est Gevrey d'ordre k_1; $\mathscr{B}_{k,\omega}(f)$ a une croissance exponentielle d'ordre h_2 à l'infini ssi f a une croissance exponentielle d'ordre h_1 à l'infini (k_1, k_2, h_1, h_2 sont comme dans le lemme 1.4); enfin $\mathscr{B}_{k,\omega}(f)$ a une croissance polynomiale à l'infini ssi f a une croissance polynomiale à l'infini.

1.5.3. Soient $k_1, \ldots, k_s$; $k'_1, \ldots, k'_{s'}$ des réels >0; $\omega_1, \ldots, \omega_s$, $\omega'_1, \ldots, \omega'_{s'}$ des nombres complexes, et supposons que $1/k_1 + \ldots + 1/k_s = 1/k'_1 + \ldots + 1/k'_{s'}$.

Considérons la série (supposée définie) :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{s'} \Gamma((n/k'_j)+\omega'_j)}{\prod_{j=1}^{s} \Gamma(n/k_j)+\omega_j)} z^n.$$

D'après les remarques précédentes, la transformation

$$\mathscr{B}^{-1}_{k'_{s'},\omega'_{s'}} \circ \ldots \circ \mathscr{B}^{-1}_{k'_1,\omega'_1} \circ \mathscr{B}_{k_s,\omega_s} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{k_1,\omega_1}$$

conserve les propriétés des fonctions (régularité à l'origine, croissance à l'infini, dans tout secteur, car on peut remplacer $\mathbb{R}^+$ par n'importe quelle direction de $\mathbb{C}$ issue de 0). Il en résulte que si la série $\sum a_n z^n$ vérifie l'une de ces propriétés, il en est de même de son produit de Hadamard par $S(z)$ (le produit de Hadamard de $\sum a_n z^n$ par $\sum b_n z^n$ est $\sum (a_n b_n) z^n$).

En particulier, le produit de Hadamard de $S(z)$ par $1/(1-z)$ est $S(z)$: on en déduit que $S(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus [a, \infty[$, $a>0$, avec croissance polynomiale à l'infini.

Enfin, remarquons que le produit de Hadamard de f, $g \in \mathcal{O}$ est donné par l'intégrale :

$$f \,\Theta\, g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\nu \frac{f(t)\, g(t^{-1} z)}{t} dt$$

où ν est un petit cercle centré à l'origine et orienté dans le sens direct. On déduirait aisément de cette formule intégrale les propriétés sectorielles de $f \,\Theta\, g$ à l'infini, connaissant celles de f et g.

1.6. Soit $(k) = (k_1, \ldots, k_s)$ une suite strictement décroissante de réels >0; associons à (k) une suite $(h) = (h_1, \ldots, h_s)$ de réels >0, en posant $h_1 = k_1$ et si $i>1$, $1/h_i = (1/k_i) - (1/k_{i-1})$ (par exemple, la suite associée à $(k, k/2, \ldots, k/s)$ est la suite $(k, \ldots, k)$). On note $\mathscr{G}_{(k)}$ l'espace des $f \in \mathscr{A}_{h_1}$ tels que $\mathscr{B}_{h_i} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{h_1} f \in \mathscr{A}_{h_{i+1}}$pour $i=1, \ldots, s-1$, et $\mathscr{B}_{h_s} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{h_1} f \in \mathscr{O}$.Si (k) est la suite à un terme k, on a $\mathscr{G}_{(k)}=\mathscr{G}_k$.

PROPOSITION 1.7. — (1) *On a des inclusions :*

$$\mathscr{A}_{k_1} \supset \mathscr{G}_{(k)} \supset \mathscr{G}_{k_1}+\ldots+\mathscr{G}_{k_s}$$

(2) *Si* $k_s/(1-(k_s/k_1))>1/2$, *on a l'égalité :*

$$\mathscr{G}_{(k)}=\mathscr{G}_{k_1}+\ldots+\mathscr{G}_{k_s}$$

(3) *L'application* $\mathscr{G}_{(k)} \ni f \to \hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]$ *est injective.*

(4) $\mathscr{G}_{(k)}$ *est stable par multiplication.*

Preuve. — (1) Si $f \in \mathscr{G}_{k_i}$, $\mathscr{B}_{h_i} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{h_1} f$ est bien défini et appartient à $\mathscr{O}$ (*cf.* 1.4); *a fortiori* $\mathscr{B}_{h_s} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{h_1} f \in \mathscr{O}$. On a $\mathscr{G}_{(k)} \subset \mathscr{A}_{k_1}$ par définition.

(2) Montrons par induction sur s que $\mathscr{G}_{(k)} \subset \mathscr{G}_{k_1}+\ldots+\mathscr{G}_{k_s}$. Si $s=1$, cela résulte de 1.4; si $s>1$, soit $f \in \mathscr{G}_{(k)}$; on a $\mathscr{B}_{k_1} f \in \mathscr{G}_{(k')}$ avec $(k')=(k'_1, \ldots, k'_{s-1})$, où

$$\frac{1}{k'_j}=\frac{1}{k_{j+1}}-\frac{1}{k_1}.$$

D'après l'hypothèse d'induction, $\mathscr{B}_{k_1} f=g_1+\ldots+g_{s-1}$ avec $g_i \in \mathscr{G}_{k'_i}$ (car $k'_{s-1}=k_s/(1-(k_s/k_1))>1/2$, donc *a fortiori* $k'_{s-1}/(1-(k'_{s-1}/k'_1))>1/2$). D'après le lemme 1.2, on a $g_i=g'_i+h_i$ avec $g'_i \in \mathscr{G}_{k'_i, \omega}$ et $h_i \in \mathscr{O}$ (en effet $k'_i \geqq k'_{s-1}>1/2$); d'après le lemme 1.4 :

$$\mathscr{B}_{k_1} f=(g'_1+\ldots+g'_{s-1})+(h_1+\ldots+h_{s-1}) \in \mathscr{A}_{\infty, k_1}$$

donc

$$\mathscr{B}_{k_1} f=g'_1+\ldots+g'_{s-1}+h, \qquad \text{avec} \quad h \in \mathscr{G}_{\infty, k_1}.$$

Le lemme 1.4 entraîne donc que $f \in \mathscr{G}_{k_2}+\ldots+\mathscr{G}_{k_s}+\mathscr{G}_{k_1}$.

C.Q.F.D.

(3) Soit $f \in \mathscr{G}_{(k)}$ telle que $\hat{f}=0$; alors $\varphi=\mathscr{B}_{h_s} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{h_1} f=0$, car $\varphi \in \mathscr{O}$ et $\hat{\varphi}=0$. On en déduit que $f=0$.

(4) Notons $*_{(h)}=*_{(h_1, \ldots, h_s)}$ le transformé du produit ordinaire par

$$\mathscr{B}_{h_s} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{h_1}=\mathscr{B}_{(h)}, \; i.e. \; \mathscr{B}_{(h)}(f . g)=\mathscr{B}_{(h)} f *_{(h)} \mathscr{B}_{(h)} g.$$

Il suffit de montrer que cette opération est en fait définie sectoriellement, *i.e.* sur tout espace $\mathscr{A}_k$. En appliquant cela à chaque $\varphi_i=\mathscr{B}_{h_i} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{h_1}(fg)$ $(f, g \in \mathscr{G}_{(k)})$, on en déduira que $\varphi_i \in \mathscr{A}_{h_{i+1}}$ $(1 \leqq i \leqq s-1)$ et que $\varphi_s \in \mathscr{O}$; et donc que $f . g \in \mathscr{G}_{(k)}$. Donc, soient $\varphi, \psi \in \mathscr{A}_k$; on peut supposer que $\varphi(0)=\psi(0)=0$.

Supposons d'abord $s=1$; soit $\underline{\mathscr{B}}_k$ la transmuée par $f(z) \to f(z^{1/k})$ de la transformation de Borel usuelle $\mathscr{B}$ et notons $\underline{*}_k$ le produit de convolution d'ordre k, transformé par $f(z) \to f(z^{1/k})$ du produit de convolution ordinaire [donc $(\varphi \,\underline{*}_k\, \psi)(z^{1/k})=\varphi(z^{1/k}) * \psi(z^{1/k})$]. Alors $\mathscr{B}$ transforme le produit ordinaire en produit de convolution et donc

$\mathscr{B}_k$ transforme le produit ordinaire en produit de convolution d'ordre k. Or d'après 1.3, $\mathscr{B}_1 f(\zeta)=\zeta . \mathscr{B} f(\zeta)$, d'où $\mathscr{B}_k f(\zeta)=\zeta^k . \underline{\mathscr{B}}_k f(\zeta)$. On a donc la formule intégrale suivante $(\varphi(0)=\psi(0)=0)$:

(1.7.1) $$\varphi *_k \psi(\zeta)=\zeta^k . (\varphi(\zeta) . \zeta^{-k} \underline{*}_k \psi(\zeta) . \zeta^{-k}).$$

Si $s>1$, remarquons que

$$\mathscr{B}_{(h)}(z^p)=\frac{\zeta^p}{\Gamma(p/h_1) \ldots \Gamma(p/h_s)} \qquad \text{et} \qquad \zeta^p *_k \zeta^q=\zeta^{p+q} . \prod_{i=1}^{s} \frac{\Gamma(p/h_i)\Gamma(q/h_i)}{\Gamma((p+q)/h_i)}.$$

Le lecteur vérifiera la formule intégrale suivante (évidente pour les monômes) :

(1.7.2) $$\varphi *_{(h)} \psi=\zeta^{h_1}[\zeta^{-h_1} u_2^{-h_2} \ldots u_s^{-h_s} \varphi(\zeta u_2 \ldots u_s) \underline{*}_{(h)} \zeta^{-h_1} u_2^{-h_2} \ldots u_s^{-h_s} \psi(\zeta u_2 \ldots u_s)]_{u_2=\ldots=u_s=1}$$

Le produit $\underline{*}_{(h)}$ à l'intérieur du crochet signifie qu'on convole d'ordre h_1 pour ζ, h_2 pour $u_2, \ldots, h_s$ pour u_s. La formule est symétrique en $h_1, \ldots, h_s$ et l'opération $*_{(h)}$ est bien définie sectoriellement.

C.Q.F.D.

Remarque 1.8.

1.8.1. Soit q un entier >0 et soit $k>0$; on a $f \in \mathscr{G}_k$ ssi $f(z^q) \in \mathscr{G}_{qk}$; plus généralement, si $(k)=(k_1, k_2, \ldots, k_s)$ est une suite strictement décroissante de réels >0, on a $f \in \mathscr{G}_{(k)}$ ssi $f(z^q) \in \mathscr{G}_{(qk)}$. Choisissons q assez grand tel que $qk_s \geqq 1/2$; alors, on peut appliquer à $f(z^q)$ la proposition 1.7 et donc $f(z^q)=f'_1+\ldots+f'_s$ avec $f'_i \in \mathscr{G}_{qk_i}$. On en déduit que $f(z)$ admet une décomposition $f_1+\ldots+f_s$ avec $\forall i, f_i$ Gevrey d'ordre k_i, mais ramifié d'ordre q.

1.8.2. La décomposition de 1.7 (2) n'est pas unique, même modulo $\mathbb{C}\{z\}$ (on remarquera que $f \in \mathscr{G}_k \Rightarrow f \in \mathscr{G}_{k-\varepsilon}$ pour $\varepsilon>0$ assez petit). Dans tout ce qui précède, on a privilégié la direction $\mathbb{R}^+$, mais on peut remplacer $\mathbb{R}^+$ par n'importe quelle autre direction. On définit alors de manière évidente des faisceaux $\underline{\mathscr{G}}_{(k)}$ sur le cercle $\mathbb{S}=\{z ; |z|=1\}$ ou sur son revêtement universel $\tilde{\mathbb{S}}$ (par exemple, l'espace des germes de $\underline{\mathscr{G}}_{(k)}$ en $\theta=0(=\mathbb{R}^+)$ sera $\mathscr{G}_{(k)}$); sous les hypothèses de 1.7 (2), on aura

$$\underline{\mathscr{G}}_{(k)}=\underline{\mathscr{G}}_{k_1}+\ldots+\underline{\mathscr{G}}_{k_s}.$$

Si I est un intervalle de longueur assez petite (en fait si $|\mathrm{I}|<2\pi-\frac{\pi}{k_s}(1-(k_s/k_1))$, on aura :

$$\underline{\mathscr{G}}_{(k)}(\mathrm{I})=\underline{\mathscr{G}}_{k_1}(\mathrm{I})+\ldots+\underline{\mathscr{G}}_{k_s}(\mathrm{I})$$

mais cette égalité sera fausse si $|\mathrm{I}|$ est grand).

1.8.3. Si (k), (k') sont deux suites strictement décroissantes de réels >0, on écrit $(k) \geqq (k')$ si (k') est contenue dans (k). Alors on a toujours l'inclusion $\mathscr{G}_{(k)} \supset \mathscr{G}_{(k')}$; en effet, si $f \in \mathcal{G}_{(k')}$, on a $f(z^q) \in \mathcal{G}_{(qk')}$, et si $q \in \mathbb{N}$ est assez grand, on a $f(z^q) \in \mathcal{G}_{(qk)}$, d'après 1.7; mais cela entraîne que $f \in \mathcal{G}_{(k)}$.

On note $\mathcal{G}$ la limite inductive des $\mathcal{G}_{(k)}$. L'application $\mathcal{G} \ni f \to \hat{f} \in \mathbb{C}[[z]]$ est injective et l'on dit que f est la resommée de $\hat{f}$ dans la direction $\mathbb{R}^+$.

2. La topologie des espaces Gevrey

2.1. Avec les notations de 1.6, on munit l'espace $\mathcal{G}_{(k)}$ de la topologie suivante. Si $f \in \mathcal{G}_{(k)}$, chaque $\mathcal{B}_{h_i} \circ \ldots \circ \mathcal{B}_{h_1} f \; (0 \leqq i \leqq s-1)$ est holomorphe dans un certain secteur $S^{h_{i+1}}_{R_i, \eta_i}$ et continue sur l'adhérence (on pose $\mathcal{B}_{h_0} f = f$); de plus, $\mathcal{B}_{h_s} \circ \ldots \circ \mathcal{B}_{h_1} f$ est holomorphe dans un disque $|\zeta| < r$ et continue si $|\zeta| \leqq r$. Posons $f^*(z) = f(z) - f(0)$ et fixons un α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Notons $\mathcal{G}_{(k)}(R, \eta, r)$ l'espace des $f \in \mathcal{G}_{(k)}$ qui vérifient les conditions précédentes, muni de la norme :

$$\|f\|_{R, \eta, r} = \sum_{i=1}^{s-1} \sup_{\zeta \in S^{h_{i+1}}_{R_i, \eta_i}} |\mathcal{B}_{h_i} \circ \ldots \circ \mathcal{B}_{h_1} f^*(\zeta)| \, |\zeta|^{-\alpha} + \sup_{z \in S^{h_1}_{R_0, \eta_0}} |f(z)| + \sup_{|\zeta| < r} |\mathcal{B}_{h_s} \circ \ldots \circ \mathcal{B}_{h_1} f^*(\zeta)| \, |\zeta|^{-\alpha}$$

où $R = (R_0, \ldots, R_{s-1})$; $\eta = (\eta_0, \ldots, \eta_{s-1})$. L'espace $\mathcal{G}_{(k)} = \varinjlim \mathcal{G}_{(k)}(R, \eta, r)$, $R \to 0$, $\eta \to 0$, $r \to 0$, est muni de la topologie limite inductive.

Dans la définition de $\mathcal{G}_{(k)}$ (*cf.* 1.6), il n'est pas nécessaire de supposer que les $\mathcal{B}_{h_i} \circ \ldots \circ \mathcal{B}_{h_1} f \; (0 \leqq i \leqq s-1)$ admettent un développement asymptotique à l'origine : il suffit que ces fonctions soient holomorphes dans un secteur $S^{h_{i+1}}_{R_i, \eta_i}$ et continues sur l'adhérence. On en déduit la remarque suivante :

2.1.1 L'espace $\mathcal{G}_{(k)}(R, \eta, r)$ est un espace de Banach, et les normes correspondant à deux α distincts sont équivalentes.

(La dernière affirmation est une conséquence du théorème des homomorphismes de Banach).

Si $(k') \leqq (k)$, on peut montrer (en remarquant que les isomorphismes $\mathcal{B}_k : \mathcal{A}_{k_1, h_1} \tilde{\to} \mathcal{A}_{k_2, h_2}$ du lemme 1.4 sont des isomorphismes topologiques, $\mathcal{A}_{k_1, h_1}$ et $\mathcal{A}_{k_2, h_2}$ étant munis des topologies adéquates) que l'injection $\mathcal{G}_{(k')} \to \mathcal{G}_{(k)}$ est un isomorphisme topologique de $\mathcal{G}_{(k')}$ sur son image. On met alors sur $\mathcal{G} = \varinjlim \mathcal{G}_{(k)}$ la topologie limite inductive.

2.2. Majoration de la norme du produit $f.g.$ — Soient φ, ψ holomorphes dans un secteur S de $\mathbb{C}$ centré en 0, continues sur $\bar{S}$, et admettant des développements asymptotiques à l'origine; on suppose que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ et on pose

$$\|\varphi\| = \sup_{\zeta \in S} |\varphi(\zeta)| \, |\zeta|^{-\alpha}, \qquad \text{avec} \quad \alpha = \inf(h_1, 1).$$

D'après la formule (1.7.2) :

$$\|\varphi \ast_{(h)} \psi\| \leqq C \|\varphi\| \, \|\psi\| \tag{2.2.1}$$

avec

$$C = R^{h_1-\alpha} . [t^{-h_1+\alpha} u_2^{-h_2+\alpha} \ldots u_s^{-h_s+\alpha} \underline{\ast}_{(h)} t^{-h_1+\alpha} u_2^{-h_2+\alpha} \ldots u_s^{-h_s+\alpha}]_{\substack{u_2 = \ldots = u_s = 1 \\ t = R}}$$

R étant le rayon du secteur; en outre $C \to 0$ quand $R \to 0$.

On en déduit la conséquence suivante (le α de 2.1 est $\inf(h_1, 1)$).

(2.2.2) Si $R = (R_0, \ldots, R_{s-1})$ et r sont choisis assez petits, on a $\forall f, g \in \mathcal{G}_{(k)}(R, \eta, r)$:

$$\|f.g\|_{R, \eta, r} \leqq \|f\|_{R, \eta, r} \|g\|_{R, \eta, r}.$$

En outre, si g est fixée avec $g(0) = 0$ et si $\varepsilon > 0$ est donné, on a si R, r sont assez petits, $\forall f$:

$$\|f.g\|_{R, \eta, r} \leqq \varepsilon \|f\|_{R, \eta, r}$$

[en effet, d'après 2.1, si $\varphi_i = \mathscr{B}_{h_i} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{h_1} f^*$, $\psi_i = \mathscr{B}_{h_i} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{h_1} g^*$, $S_0 = S^{h_1}_{R_0, \eta_0}$, on a :

$$\|f\|_{R, \eta, r} = \sup_{z \in S_0} |f(z)| + \sum_{i=1}^{s} \|\varphi_i\|$$

$$\|g\|_{R, \eta, r} = \sup_{z \in S_0} |g(z)| + \sum_{i=1}^{s} \|\psi_i\|$$

$$\|f.g\|_{R, \eta, r} \leqq \sup_{z \in S_0} |f(z) g(z)| + |g(0)| . \sum_{i=1}^{s} \|\varphi_i\|$$

$$+ |f(0)| . \sum_{i=1}^{s} \|\psi_i\| + \sum_{i=1}^{s} \|\varphi_i \psi_i\| \leqq \|f\|_{R, \eta, r} \|g\|_{R, \eta, r}$$

d'après (2.2.1), si R et r sont assez petits (les normes considérées sont celles de (2.2) avec $S = S^{h_{i+1}}_{R_i, \eta_i}$ si $1 \leqq i \leqq s-1$ et $S = \{\zeta; |\zeta| < r\}$ si $i = s$). La dernière affirmation est une conséquence de la précédente].

2.3. Fonctions Gevrey en z et holomorphes en y. — Posons $S_0 = S^{h_1}_{R_0, \eta_0}$ et $D_\rho = \{y \in \mathbb{C}^n; |y_i| < \rho, i = 1, \ldots, n\}$; on note $\mathcal{G}_{(k)}(R, \eta, r; \rho)$ l'espace des fonctions F holomorphes dans $S_0 \times D_\rho$, continues sur $\overline{S_0 \times D_\rho}$, telles que $\forall y \in D_\rho$, la fonction $f_y(z) = F(z; y)$ appartienne à $\mathcal{G}_k(R, \eta, r)$ et vérifie $\|F\|_{R, \eta, r; \rho} = \sup_{y \in D_\rho} \|f_y\|_{R, \eta, r} < \infty$. On note $\mathcal{G}_{(k)}\{y\}$ la limite inductive des $\mathcal{G}_{(k)}(R, \eta, r; \rho)$ quand $R \to 0$, $\eta \to 0$, $r \to 0$, $\rho \to 0$.

(2.3.1) $\mathcal{G}_{(k)}\{y\}$ est exactement l'algèbre des séries entières $F(z; y) = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^n} f_\omega(z) . \dfrac{y^\omega}{\omega!}$ à coefficients $f_\omega \in \mathcal{G}_{(k)}$ telles qu'il existe R, η, r; $C > 0$ et $\rho > 0$ avec $\forall \omega$:

$$\|f_\omega\|_{R, \eta, r} \leqq C \rho^{-|\omega|} . \omega!.$$

Preuve. — D'après 2.1 et 2.2, la série F converge uniformément dans $S_0 \times D_{\rho}$, $(0<\rho'<\rho)$ vers une fonction holomorphe notée encore F qui vérifie $\|F\|_{R,\eta,r;\rho}<\infty$. Réciproquement, si $\|F\|_{R,\eta,r;\rho}=C<\infty$, on a par Cauchy :

$$f_{\omega}(z)=\partial_y^{\omega} F(z, 0)=\frac{\omega !}{(2\pi i)^n}\int_{|t_i|=\rho} \frac{F(z, t_1, \ldots, t_n)}{t_1^{\omega_1+1} \ldots t_n^{\omega_n+1}} dt_1 \ldots dt_n.$$

Appliquant $\mathscr{B}_{h_i} \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{h_1}$ à $f_{\omega}(z)$ et remarquant que cet opérateur commute avec l'intégrale, on trouve que

$$\|f_{\omega}\|_{R,\eta,r} \leqq C \rho^{-|\omega|} . \omega !,$$

C.Q.F.D.

On déduit de cette remarque deux conséquences intéressantes.

PROPOSITION 2.4. — *Choisissons* $R'<R$; $\eta'<\eta$; $r'<r$; *alors il existe des constantes* $C>0$, $\rho>0$ *telles que* $\forall f \in \mathscr{G}_{(k)}(R, \eta, r)$:

$$\|z^p . f^{(p)}(z)\|_{R', \eta', r'} \leqq C . \rho^p . p ! \|f\|_{R, \eta, r}.$$

Preuve. — On remarque que $F(z; y)=f(z+zy)(n=1)$ appartient à $\mathscr{G}_{(k)}\{y\}$ et on applique (2.3.1).

PROPOSITION 2.5. — *Si* f, $g \in \mathscr{G}_{(k)}$ *et* $\hat{g}(z)=\lambda z+\ldots$ (λ réel >0), *la composée* $f \circ g$ *appartient aussi à* $\mathscr{G}_{(k)}$.

Preuve. — On remarque que $F(z; y)=f(\lambda z+zy)(n=1)$ appartient à $\mathscr{G}_{(k)}\{y\}$; posons $g(z)=\lambda . z+z . \varphi(z)$ avec $\varphi \in \mathscr{G}_{(k)}$ et $\varphi(0)=0$. Alors $F(z; y)$ est la somme d'une série $\sum f_p(z) . y^p/p !$ [*cf.* (2.3.1)] et $f \circ g(z)=F(z; \varphi(z))=\sum f_p(z) . \varphi^p/p !$ et cette série converge dans $\mathscr{G}_{(k)}$, d'après (2.2.2).

Remarques 2.6

2.6.1. On vient d'utiliser le fait que $f \in \mathscr{G}_{(k)}$ et $f(0)=0 \Rightarrow f(z)/z \in \mathscr{G}_{(k)}$. Cela est bien connu pour $\mathscr{G}_k$, $k>0$; on se ramène à cette situation en considérant $f(z^q)$ (q entier >0 assez grand) et en appliquant (1.8.1).

2.6.2. L'algèbre $\mathscr{G}_{(k)}$ est stable par dérivation : c'est une conséquence des inégalités de 2.4 et de la remarque précédente.

2.6.3. Si $f \in \mathscr{O}$ et $g \in \mathscr{G}_{(k)}$, $g(0)=0$, on a $f \circ g \in \mathscr{G}_{(k)}$ [conséquence de (2.2.2)].

2.6.4. Si $f \in \mathscr{G}_{(k)}$ et $g \in \mathscr{G}_{(k)}$ avec $\hat{g}(z)=\lambda z^q+\ldots$ (λ réel >0 et $q>0$), on a $f \circ g \in \mathscr{G}_{(k')}$, où (k') est la suite obtenue en prenant la réunion des suites (k) et (qk) [posons $\omega(z)=z \sqrt[q]{g(z) . z^{-q}}$; on a $\omega \in \mathscr{G}_{(k)}$, d'après 2.6.1 et 2.6.3; d'autre part, $f(\omega^q) \in \mathscr{G}_{(qk)}$; en conséquence, $f \circ g(z)=f(\omega(z)^q) \in \mathscr{G}_{(k')}$, d'après 2.5].

2.7. Nous terminons ce paragraphe par un théorème sur la représentation des fonctions Gevrey comme séries de fonctions f_n holomorphes dans des domaines U_n qui contiennent l'origine, la frontière de U_n se rapprochant quand $n \to \infty$ de l'origine, dans certaines directions singulières.

Soit θ un angle et soit k un réel >0 ; notons $\mathscr{G}_k^\theta$ l'algèbre des fonctions Gevrey d'ordre k dans un « grand secteur »

$$S_\theta = \{ z \in \mathbb{C} ; \theta - \eta < \arg z < \theta + 2\pi + \eta ; 0 < |z| < R \} ;$$
$$R > 0, \ \frac{\pi}{2k} > \eta > 0 ;$$

R et η sont variables. Si $f \in \mathscr{G}_k^\theta$, on note var f (variation de f) la fonction $f(z . e^{2\pi i}) - f(z)$: elle est holomorphe dans un « petit secteur »

$$s_\theta = \{ z \in \mathbb{C} ; \theta - \eta < \arg z < \theta + \eta ; 0 < |z| < R \}$$

et l'on sait que var f est à décroissance exponentielle d'ordre k à l'origine (*cf.* [11]). On a, sans ambiguïté possible, une injection $\mathscr{G}_k^\theta \to \mathscr{G}_k$, lorsque $k > 1/2$ et $\pi \geqq |\theta| > \pi/2k$.

LEMME 2.8. — *Si $k > 1/2$ et $f \in \mathscr{G}_k$, il existe un nombre fini de directions $\theta_1, \ldots, \theta_q$, $\pi \geqq |\theta_i| > \pi/2k$, telles que :*

$$f \in \mathscr{G}_k^{\theta_1} + \ldots + \mathscr{G}_k^{\theta_q}.$$

Preuve. — On trouvera une démonstration dans [11]; en voici une autre, plus simple, utilisant la transformation de Laplace.

Soit $f \in \mathscr{G}_k$; pour démontrer que $f \in \sum_i \mathscr{G}_k^{\theta_i}$, on peut supposer d'après 1.2 que f est holomorphe à l'infini. D'après 1.4, $\varphi = \mathscr{B}_k f$ est holomorphe dans un ouvert $D_r \cup S_\eta$ où $D_r = \{ \zeta \in \mathbb{C} ; |\zeta| < r \}$ et $S_\eta = \{ \zeta \in \mathbb{C} ; |\arg \zeta| < \eta \}$; en outre, φ est uniformément bornée (*cf.* 1.5.1); on peut évidemment supposer que φ est continue sur $\overline{D_r \cup S_\eta}$.

Découpons l'arc de cercle $|\zeta| = r$, $|\arg \zeta| \geqq \eta$, en petits arcs I_i d'angles $< \pi/k$; alors, par Cauchy, si $\zeta \in D_r \cup S_\eta$ ($|r| < 1$ et $\eta < \pi$) :

$$\varphi = \sum \varphi_i + \psi_+ + \psi_-$$

avec

$$\varphi_i(\zeta) = \frac{1+\zeta}{2\pi i} \int_{I_i} \frac{\varphi(t)}{(1+t)(t-\zeta)} dt$$
$$\psi_\pm(\zeta) = \frac{1+\zeta}{2\pi i} \int_{I_\pm} \frac{\varphi(t)}{(1+t)(t-\zeta)} dt$$

où $I_\pm$ est la demi-droite joignant $re^{\pm i\eta}$ à $\infty . e^{\pm i\eta}$. Les φ_i, ψ_+, ψ_- sont holomorphes et à croissance polynomiale à l'infini dans de grands secteurs et donc leurs transformés de Laplace d'ordre k appartiennent à des $\mathscr{G}_k^{\theta_i}$ convenables, c.q.f.d. (*remarque* : on peut choisir les directions θ_i de telle sorte qu'elles ne dépendent que de l'angle du secteur $S_{R,\eta}^k$ sur lequel f est Gevrey d'ordre k).

Revenons aux notations de 2.7 et soit S le secteur $S_{R,\eta}^k$; soit r, $0 < r < R$, et soit $\eta > 0$ assez petit tel que $|\theta| > (\pi/2k) + \eta$, *i.e.* la direction $\theta \notin \bar{S}$. Soit D_n le disque $\{ z \in \mathbb{C} ; |z| \leqq (r/2)(n+1)^{-1/k} \}$.

PROPOSITION 2.9. — (1) *Si f est Gevrey d'ordre $k>1/2$ dans le grand secteur* S_θ, *il existe des constantes* $C>0$, $1>\rho>0$; *une suite de fonctions* $f_n (n\geqq 0)$, *holomorphes dans* $D_n \cup S$, *telles que :*

(*a*) $\forall n,\ \|f_n\| = \sup_{z\in D_n\cup S} |f_n(z)| \leqq C\rho^n$

(*b*) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ sur S.

(2) Réciproquement, soit f_n une suite de fonctions holomorphes dans $D_n \cup S$ qui vérifient $\|f_n\| \leqq C\rho^n (C>0,\ 1>\rho>0)$; alors $f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est Gevrey d'ordre k dans S et la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge au sens Gevrey d'ordre k vers f sur S.

Preuve. — (1) Par Cauchy, on a si $z\in S$:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{re^{i\theta}} \frac{\operatorname{var} f(t)}{z-t}\,dt + f_0(z),\ \text{avec } f_0 \text{ holomorphe si } |z|<r.$$

Posons si $n\geqq 1$, $f_n(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{r_{n+1}e^{i\theta}}^{r_n e^{i\theta}} \frac{\operatorname{var} f(t)}{z-t}\,dt$ avec $r_n = rn^{-1/k}$; on a $f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n$; en outre $|\operatorname{var} f(t)| \leqq C' e^{-A|t|^{-k}}$, $C'>0$, $A>0$, et donc sur l'intervalle $[r_{n+1}e^{i\theta}, r_n e^{i\theta}]$ on a $|\operatorname{var} f(t)| \leqq C'\rho'^n$ avec $\rho' = e^{-Ar^{-k}} < 1$. Si $z\in D_n \cup S$, on minore facilement le dénominateur de l'intégrale, et l'on en déduit (*a*).

(2) Par Cauchy

$$\frac{|f_n^{(p)}(0)|}{p!} \leqq C\rho^n (2r^{-1})^p (n+1)^{p/k}$$

si $\varphi_n = \mathscr{B}_k f_n$, on a

$$\varphi_n(\zeta)=\sum b_p \zeta^p \qquad \text{avec} \quad |b_p| \leqq C\rho^n (2r^{-1})^p \frac{(n+1)^{p/k}}{\Gamma(p/k)}.$$

On en déduit, par des majorations standard, la convergence normale de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\zeta)$ sur un petit disque $|\zeta|<r'$, $r'>0$; cela, et la convergence normale de $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ sur S, entraînent le résultat.

On déduit de 2.8 et 2.9 que toute fonction $f\in \mathscr{G}_k (k>1/2)$ est la somme dans $\mathscr{G}_k$ d'une série de fonctions f_n holomorphes dans des ouverts de la forme $D_n \cup S$. Si $(k)=(k_1, \ldots, k_s)$ est une suite strictement décroissante de réels >0 et si $k_s>1/2$, on a un résultat analogue pour $f\in \mathscr{G}_{(k)}$, d'après 1.7 (2). Les ouvert $D_n \cup S$ n'ayant pas de

« trous », toute fonction holomorphe au voisinage de $D_n \cup S$ peut être approchée uniformément sur $\overline{D_n \cup S}$ par des polynômes. On en déduit la conséquence suivante :

COROLLAIRE 2.10. — *Si $k_s > 1/2$, les polynômes sont denses dans $\mathscr{G}_{(k)}$.*

2.11. L'application $\mathscr{G}_k^\theta \ni f \mapsto \operatorname{var} f$ induit un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire entre $\mathscr{G}_k^\theta/\mathcal{O}$ et l'espace $\mathscr{A}_\theta^{\leqq -k}$ des germes en 0 de fonctions holomorphes dans un petit secteur s_θ (*cf.* 2.7), à décroissance exponentielle d'ordre k à l'origine (*cf.* [11]). Le lemme 2.8 montre que tout $f \in \mathscr{G}_k$ $(k > 1/2)$ peut être décrit comme la somme d'un élément de $\mathcal{O}$ et d'une somme finie d'intégrales de la forme :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{re^{i\theta}} \frac{g(t)}{z-t}\,dt \qquad \text{avec} \quad g \in \mathscr{A}_\theta^{\leqq -k} \quad \text{et} \quad \pi \geqq |\theta| > \frac{\pi}{2k}.$$

2.12. LE CAS RÉEL. — Soit $f \in \mathscr{G}_{(k)}$ $((k) = (k_1, \ldots, k_s))$ et soit $\hat{f}(z) = \sum a_n z^n$ son développement à l'origine; visiblement, la fonction $\check{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$ appartient aussi à $\mathscr{G}_{(k)}$ et admet $\sum \bar{a}_n z^n$ comme développement. En particulier, si $\hat{f}(z)$ est réelle, on a $\check{f}(z) = f(z)$, et $f \mid \mathbb{R}^+$ est réelle.

2.13. Dans tout ce qui précède, on a étudié les séries k-sommables dans la direction $\mathbb{R}^+$ (*cf.* 1.8.3), donc k-sommables dans toute direction θ voisine de $\mathbb{R}^+$. Une situation un peu plus générale serait la suivante. Notons $\mathscr{G}_k^{\text{sing}}$ l'algèbre des séries $\sum a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ qui admettent une resommée d'ordre k dans toute direction θ voisine de $\mathbb{R}^+$, sauf peut-être $\mathbb{R}^+$, et soit $\tilde{\mathscr{G}}_k^{\text{sing}}$ la sous-algèbre de $\mathscr{G}_k^{\text{sing}}$ formée des séries k-sommables dans toutes les directions, sauf peut-être $\mathbb{R}^+$. Alors, on a une décomposition :

$$\mathscr{G}_k^{\text{sing}} = \mathscr{G}_k + \tilde{\mathscr{G}}_k^{\text{sing}}.$$

En effet, si $\sum a_n z^n \in \mathscr{G}_k^{\text{sing}}$, il existe f^+ Gevrey d'ordre k au voisinage de 0 dans un secteur $S^+ = \{z \in \mathbb{C}\,;\, -(\pi/2k) - \eta < |\arg z| < \pi/2k\}$; f^- Gevrey d'ordre k au voisinage de 0 dans un secteur

$$S^- = \{z \in \mathbb{C}\,;\, -(\pi/2k) < |\arg z| < (\pi/2k) + \eta\}$$

telles que $\hat{f}^+(z) = \hat{f}^-(z) = \sum a_n z^n$. La différence $g(z) = f^+(z) - f^-(z)$ est alors à décroissance exponentielle d'ordre k dans le secteur $|\arg z| < \pi/2k$ (au voisinage de 0); posons $F(z) = (1/2\pi i)\displaystyle\int_0^r (g(t)/(z-t))\,dt$ ($r > 0$ assez petit) : $F(z)$ est Gevrey d'ordre k au voisinage de 0 dans un grand secteur $-(\pi/2k) < |\arg z| < (\pi/2k) + 2\pi$ et sa variation est $g(z)$. Ainsi $\hat{F}(z) \in \tilde{\mathscr{G}}_k^{\text{sing}}$ et l'on vérifie que $\sum a_n z^n - \hat{F}(z) \in \mathscr{G}_k$. On établit ainsi un isomorphisme « variation » entre $\mathscr{G}_k^{\text{sing}}/\mathscr{G}_k$ et l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de 0 dans le secteur $|\arg z| < \pi/2k$, à décroissance exponentielle d'ordre k à l'origine. Cette situation « singulière » ($\mathbb{R}^+$ est une direction « singulière isolée » pour $\sum a_n z^n$) ne sera pas envisagée par la suite; néanmoins, il serait utile d'étendre le théorème principal de cet article à cette situation plus générale (en se restreignant sans doute à des algèbres de fonctions résurgentes).

3. Extensions à plusieurs variables

Dans ce paragraphe, on étend à plusieurs variables $z_1, \ldots, z_n$ les résultats précédents; si $\mathscr{G}=\mathscr{G}_z$ désigne la limite inductive des $\mathscr{G}_{(k)}$ (*cf.* 1.8.3), on étudie le complété naturel du produit tensoriel sur $\mathbb{C}: \mathscr{G}_{z_1}\otimes \ldots \otimes \mathscr{G}_{z_n}$. Cette extension étant visiblement insuffisante pour les applications, on étend la classe ainsi obtenue en considérant les Gevrey comme séries de fonctions holomorphes (*cf.* 3.14). L'étude du produit tensoriel complété reprenant plus ou moins le cas d'une variable, les preuves seront omises ou simplement esquissées (de 3.1 à 3.13) : ces résultats ne sont pas utilisés dans l'extension 3.14.

3.1. Soient $[k]=[k_1, \ldots, k_n]$; $\mathrm{R}=(\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n)$; $\eta=(\eta_1, \ldots, \eta_n)\in(\mathbb{R}^{*+})^n$; considérons le polysecteur de $\mathbb{C}^n$:

$$\mathrm{S}^{[k]}_{\mathrm{R}, \eta}=\mathrm{S}^{k_1}_{\mathrm{R}_1, \eta_1}\times \ldots \times \mathrm{S}^{k_n}_{\mathrm{R}_n, \eta_n}.$$

On note $\mathscr{A}_{[k], \mathrm{R}, \eta}$ l'algèbre des fonctions f holomorphes dans $\mathrm{S}=\mathrm{S}^{[k]}_{\mathrm{R}, \eta}$, C^∞ sur $\overline{\mathrm{S}}$, *i.e.* admettant un développement asymptotique en chaque point de $\overline{\mathrm{S}}$. En particulier, f admet un développement asymptotique $\hat{f}\in\mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$, à l'origine de $\mathbb{C}^n$. On note $\mathscr{A}_{[k]}$ la limite inductive des $\mathscr{A}_{[k], \mathrm{R}, \eta}$ quand $\mathrm{R}\to 0$, $\eta\to 0$; $\mathscr{G}_{[k]}$ est la sous-algèbre de $\mathscr{A}_{[k]}$ formée des fonctions f qui vérifient des conditions Gevrey d'ordre $k_1, \ldots, k_n$. Cela signifie qu'il existe des constantes $\mathrm{C}>0$, $\mathrm{A}>0$ telles que sur un secteur $\mathrm{S}^{[k]}_{\mathrm{R}, \eta}=\mathrm{S}$ convenable, on ait $\forall \omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)\in\mathbb{N}^n$:

$$\sup_{z\in \mathrm{S}} \frac{|\partial^\omega f(z)|}{\omega!}\leqq \mathrm{CA}^{|\omega|}\Gamma\left(\frac{\omega_1}{k_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\omega_n}{k_n}\right). \tag{3.1.1}$$

On peut supposer que certains k_j sont égaux à $+\infty$; la condition (3.1.1) a encore un sens [on admet que $\Gamma(0)=1$]; si $k_j=+\infty$, le secteur $\mathrm{S}^{k_j}_{\mathrm{R}_j, \eta_j}$ est alors « petit », mais toute fonction $f\in\mathscr{G}_{[k]}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur le polysecteur déduit d'un $\mathrm{S}^{[k]}_{\mathrm{R}, \eta}$ en remplaçant, lorsque $k_j=+\infty$, $\mathrm{S}^{k_j}_{\mathrm{R}_j, \eta_j}$ par un disque $|z_j|<\mathrm{R}_j$. Supposons par exemple que $k_{p+1}=\ldots=k_n=+\infty$; l'algèbre $\mathscr{G}_{[k]}$ sera aussi notée $\mathscr{G}_{[k_1, \ldots, k_p]}\{z_{p+1}, \ldots, z_n\}$ et les éléments de cette algèbre seront dits Gevrey d'ordre $k_1, \ldots, k_p$ en les variables $z_1, \ldots, z_p$; holomorphes en les variables $z_{p+1}, \ldots, z_n$. On déduit immédiatement de (3.1.1) que $f\in\mathscr{G}_{[k]}$ ssi f est la somme d'une série ($z_{p+1}, \ldots, z_n$ assez petits) :

$$\sum f_{\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n} z_{p+1}^{\omega_{p+1}}\ldots z_n^{\omega_n}$$

avec $(\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n)\in\mathbb{N}^{n-p}$; les $f_{\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n}(z_1, \ldots, z_p)$ sont Gevrey d'ordre $k_1, \ldots, k_p$ sur un polysecteur $\mathrm{S}=\mathrm{S}^{k_1}_{\mathrm{R}_1, \eta_1}\times \ldots \times \mathrm{S}^{k_p}_{\mathrm{R}_p, \eta_p}$; enfin il existe des constantes $\mathrm{C}>0$, $\mathrm{A}>0$, telles que $\forall \omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)\in\mathbb{N}^n$, on ait :

$$\sup_{z\in \mathrm{S}} \frac{|\partial^{\omega_1 \ldots \omega_p} f_{\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n}|}{\omega!}\leqq \mathrm{CA}^{|\omega|}\Gamma\left(\frac{\omega_1}{k_1}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{\omega_p}{k_p}\right).$$

Si les rayons R_j des secteurs sont infinis et si $[h]=[h_1, \ldots, h_n]\in(\mathbb{R}^{*+})^n$, la fonction f est à croissance exponentielle d'ordre $h_1, \ldots, h_n$ à l'infini, s'il existe des constantes $\mathrm{C}>0$;

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ telles que, $\forall z \in S$:

$$|f(z)| \leqq C\, e^{\alpha_1 |z_1|^{h_1} + \ldots + \alpha_n |z_n|^{h_n}}. \tag{3.1.2}$$

On note $\mathscr{A}_{[k],[h]}$ la sous-algèbre de $\mathscr{A}_{[k]}$ formée des f qui sont à croissance exponentielle d'ordre $h_1, \ldots, h_n$ à l'infini, et l'on pose lorsque chaque k_j est $< \infty : \mathscr{G}_{[k],[h]} = \mathscr{G}_{[k]} \cap \mathscr{A}_{[k],[h]}$. Si certains k_j sont égaux à $+\infty$, on doit supposer que les majorations (3.1.2) sont vérifiées sur le « domaine étendu »; pour fixer les idées, si $k_1 < \infty, \ldots, k_p < \infty$; $k_{p+1} = \ldots = k_n = \infty$, $\mathscr{G}_{[k],[h]}$ est l'ensemble des $f \in \mathscr{G}_{[k]}$ qui sont holomorphes et vérifient (3.1.2) sur un produit :

$$S^{k_1}_{\infty, \eta_1} \times \ldots \times S^{k_p}_{\infty, \eta_p} \times \tilde{S}^{\infty}_{r_{p+1}, \eta_{p+1}} \times \ldots \times \tilde{S}^{\infty}_{r_n, \eta_n}$$

avec $\tilde{S}^{\infty}_{r_j, \eta_j} = \{ z_j \in \mathbb{C} ; |z_j| < r_j \text{ ou } |\arg z_j| < \eta_j \}$.

Dans les définitions précédentes, on peut supposer que certains h_j sont égaux à $+\infty$ (cela signifie que le secteur des z_j est borné, *i.e.* $R_j < \infty$) ou encore que $h_j = 0$ (cela signifie que f est « bornée » en la variable z_j).

Supposons par exemple que $k_{p+1} = \ldots = k_n = +\infty$; $h_{p+1} = \ldots = h_n = +\infty$; l'algèbre $\mathscr{G}_{[k],[h]}$ sera aussi notée $\mathscr{G}_{[k_1, \ldots, k_p], [h_1, \ldots, h_p]} \{ z_{p+1}, \ldots, z_n \}$ et les éléments de cette algèbre seront dits Gevrey d'ordre $k_1, \ldots, k_p$, à croissance exponentielle d'ordre $h_1, \ldots, h_p$ à l'infini, en les variables $z_1, \ldots, z_p$; holomorphes en les variables $z_{p+1}, \ldots, z_n$ (si tous les $h_1, \ldots, h_p$ sont nuls, nous dirons que la croissance à l'infini est bornée). Cette algèbre est la sous-algèbre des $f \in \mathscr{G}_{[k_1, \ldots, k_p]} \{ z_{p+1}, \ldots, z_n \}$ qui sont holomorphes dans un produit $S = S^{k_1}_{\infty, \eta_1} \times \ldots \times S^{k_p}_{\infty, \eta_p} \times D_{r_{p+1}} \times \ldots \times D_{r_n}$ (D_r est le disque ouvert de $\mathbb{C}$ centré en 0, de rayon r) qui vérifient $\forall z \in S$:

$$|f(z)| \leqq C\, e^{\alpha_1 |z_1|^{h_1} + \ldots + \alpha_p |z_p|^{h_p}}$$

($C > 0$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_p > 0$ constantes convenables).

Le lemme 1.2 admet l'extension suivante :

LEMME 3.2. — *Si $[k] = [k_1, \ldots, k_n]$ et si chaque k_j est $> 1/2$, tout $f \in \mathscr{G}_{[k]}$ admet une décomposition en une somme de 2^n termes :*

$$f = \sum_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_p \leqq n} f_{i_1 \ldots i_p}$$

avec $f_{i_1 \ldots i_p}$ Gevrey d'ordre $k_{i_1}, \ldots, k_{i_p}$ et à croissance bornée, en les variables $z_{i_1}, \ldots, z_{i_p}$; holomorphe en les variables z_j, $j \notin (i_1, \ldots, i_p)$.

[Si $f \in \mathscr{G}_{[k]}$, on a une décomposition $f = f_1 + f_2$ en procédant comme dans la preuve de 1.2, les variables $z_2, \ldots, z_n$ étant considérées comme paramètres ; f_1 est alors holomorphe en z_1 au voisinage de 0 et f_2 est Gevrey d'ordre k_1, à croissance bornée, en la variable z_1 ; on recommence avec f_1 et f_2 (au lieu de f) par rapport à z_2 (au lieu de z_1), etc.].

3.3. Si $1 \leqq j \leqq n$ et $k > 0$, on note $\mathscr{B}^j_k$ la transformation de Borel partielle d'ordre k, appliquée à la variable z_j; si $k = \infty$, on convient que $\mathscr{B}^j_k$ est l'application identique. Les

$\mathscr{B}_k^j$ commutent entre elles et l'on pose :

$$\mathscr{B}_{k_1, \ldots, k_n} = \mathscr{B}_{[k]} = \mathscr{B}_{k_n}^n \circ \ldots \circ \mathscr{B}_{k_1}^1$$

$\mathscr{B}_{[k]}$ (transformation de Borel d'ordre $k_1, \ldots, k_n$) transforme le développement asymptotique en $0 : \sum a_{\omega_1 \ldots \omega_n} z_1^{\omega_1} \ldots z_n^{\omega_n}$ en le développement

$$\sum a_{\omega_1 \ldots \omega_n} \frac{\zeta_1^{\omega_1}}{\Gamma(\omega_1/k_1)} \ldots \frac{\zeta_n^{\omega_n}}{\Gamma(\omega_n/k_n)}.$$

Le lemme suivant est l'extension à plusieurs variables du lemme 1.4 :

LEMME 3.4. — *Soient* $[k]=[k_1, \ldots, k_n]$; $[k_1]=[k_{1,1}, \ldots, k_{1,n}]$ *avec* $[k_1] \leqq [k]$; $[h_1]=[h_{1,1}, \ldots, h_{1,n}]$, *tous appartenant à* $(\mathbb{R}^{+*})^n$. *Soient* $[k_2]=[k_{2,1}, \ldots, k_{2,n}]$; $[h_2]=[h_{2,1}, \ldots, h_{2,n}]$ *avec* $\forall j$:

$$\frac{1}{k_{1,j}} - \frac{1}{k_j} = \frac{1}{k_{2,j}}; \qquad \frac{1}{h_{1,j}} + \frac{1}{k_j} = \frac{1}{h_{2,j}}.$$

Alors $\mathscr{B}_{[k]}$ *induit des isomorphismes* $\mathbb{C}$-*linéaires :*

$$\mathscr{A}_{[k_1],[h_1]} \xrightarrow{\sim} \mathscr{A}_{[k_2],[h_2]}; \mathscr{G}_{[k_1],[h_1]} \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}_{[k_2],[h_2]}.$$

En particulier, $\mathscr{G}_{[k_1]} \simeq \mathscr{G}_{[k_2],[k]}$; $\mathscr{G}_{[k]} \simeq \mathscr{G}_{[\infty],[k]}$ *où* $\mathscr{G}_{[\infty],[k]}$ *désigne l'espace des fonctions holomorphes dans un produit d'ouverts* $\prod_{j=1}^{n} S_j$ *avec* $S_j = \{ z_j ; |z_j| < r_j$ *ou* $|\arg z_j| < \eta_j \}$ ($r_j > 0$, $\eta_j > 0$ *variables) et qui sont à croissance exponentielle d'ordre* $k_1, \ldots, k_n$ *à l'infini. Ce dernier isomorphisme entraîne que l'application* $\mathscr{G}_{[k]} \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ *est injective.*

3.5. Posons $[\theta]=[\theta_1, \ldots, \theta_n]$ où $\theta_1, \ldots, \theta_n$ désignent des angles; on note $\mathscr{G}_{[k]}^{[\theta]}$ l'algèbre des fonctions f Gevrey d'ordre $[k]=[k_1, \ldots, k_n]$ dans un « grand polysecteur » $S_{[\theta]} = \{ z=(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; \forall j=1, \ldots, n : \theta_j - \eta_j < \arg z_j < \theta_j + 2\pi + \eta_j$ et $0 < |z_j| < R_j \}$; $R_j > 0$ et $\eta_j > 0$ sont variables. Cela signifie que f est holomorphe dans $S_{[\theta]}$, C^∞ sur $\bar{S}_{[\theta]}$ (produit des adhérences des secteurs) et vérifie sur $S_{[\theta]}$ (au lieu de S) les inégalités (3.1.1). On a, sans ambiguïté possible, une injection $\mathscr{G}_{[k]}^{[\theta]} \to \mathscr{G}_{[k]}$, lorsque chaque k_j est $> 1/2$ et lorsque $\forall j$, $\pi \geqq |\theta_j| > \pi/2 k_j$.

Le résultat suivant est la version à plusieurs variables du lemme 2.8 :

PROPOSITION 3.6. — *Si* $k_j > 1/2$ $(j=1, \ldots, n)$ *et si* $f \in \mathscr{G}_{[k]}$, *il existe un nombre fini de polydirections* $[\theta_1], \ldots, [\theta_q]$ $([\theta_i]=[\theta_{i1}, \ldots, \theta_{in}]$ *et* $\forall i, j : \pi \geqq |\theta_{ij}| > \pi/2 k_j)$, *telles que :*

$$f \in \mathscr{G}_{[k]}^{[\theta_1]} + \ldots + \mathscr{G}_{[k]}^{[\theta_q]}.$$

Preuve. — On copie la preuve de 2.8. Soit $f \in \mathscr{G}_{[k]}$; d'après le lemme 3.2, on peut supposer que f est Gevrey d'ordre $k_1, \ldots, k_p$ et à croissance à l'infini bornée, en les variables $z_1, \ldots, z_p$; holomorphe en les variables $z_{p+1}, \ldots, z_n$. On applique à f la transformation de Borel $\mathscr{B}_{k_1,\ldots,k_p}=\mathscr{B}^p_{k_p}\circ\ldots\circ\mathscr{B}^1_{k_1}$; on obtient une fonction $\varphi(\zeta)$ holomorphe et bornée dans un produit :

$$S=\tilde{S}^{\infty}_{r_1,\eta_1}\times\ldots\times\tilde{S}^{\infty}_{r_p,\eta_p}\times D_{r_{p+1}}\times\ldots\times D_{r_n}$$

avec $\tilde{S}^{\infty}_{r_j,\eta_j}=\{\zeta_j\in\mathbb{C}\,;\,|\zeta_j|<r_j$ ou $|\arg\zeta_j|<\eta_j\}$ et $D_{r_j}=\{\zeta_j\in\mathbb{C}\,;\,|\zeta_j|<r_j\}$.
On peut supposer que φ est continue sur $\bar{S}$ et par Cauchy, si $\zeta\in S$ et si $\partial_0 S$ est le bord distingué de S :

$$\varphi(\zeta)=\frac{(1+\zeta_1)\ldots(1+\zeta_p)}{(2\pi i)^p}\int\ldots\int_{\partial_0 S}\frac{\varphi(t_1,\ldots,t_p\,;\,\zeta_{p+1},\ldots,\zeta_n)\,dt_1\ldots dt_p}{(1+t_1)\ldots(1+t_p)(t_1-\zeta_1)\ldots(t_p-\zeta_p)}.$$

On découpe alors cette intégrale en petits morceaux et l'on applique la transformation de Borel inverse.

3.7. Soit $f\in\mathscr{G}_{[k]}$; supposons que f est Gevrey d'ordre $[k]$ $(k_j>1/2,\ \forall j)$ dans le polysecteur $S^{k_1}_{R'_1,\eta'_1}\times\ldots\times S^{k_n}_{R'_n,\eta'_n}$, choisissons $R_1<R'_1,\ldots,R_n<R'_n$; $\eta_1<\eta'_1,\ldots,\eta_n<\eta'_n$.

Pour chaque $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\mathbb{N}^n$, considérons le voisinage ouvert U_ω de l'origine de $\mathbb{C}^n$:

$$U_\omega=\prod_{j=1}^{n}\left(S^{k_j}_{R_j,\eta_j}\cup D_{R_j(\omega_j+1)^{-1/k_j}}\right)$$

$(D_r=\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z|<r)$. Avec les hypothèses précédentes, on a le résultat suivant qui généralise 2.9 (on rappelle que $k_j>1/2,\ \forall j$) :

Proposition 3.8. — (1) *Il existe* $C>0$ *;* $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_n)$, *avec* $0<\rho_j<1,\ \forall j=1,\ldots,n$ *; des fonctions* f_ω $(\omega\in\mathbb{N}^n)$ *holomorphes dans* U_ω, *telles que :*

(*a*) $\forall\omega,\ \|f_\omega\|=\sup_{z\in U_\omega}|f_\omega(z)|\leqq C\rho^\omega$

(*b*) $\sum_\omega f_\omega=f$ *sur* $\prod_{j=1}^{n}S^{k_j}_{R_j,\eta_j}$.

(2) *Réciproquement, soient* f_ω *des fonctions holomorphes dans* U_ω *qui vérifient* $\|f_\omega\|\leqq C\rho^\omega$ *pour des constantes* $C>0$, $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_n)$ *avec* $\forall j,\ 0<\rho_j<1$ *; alors la fonction* $f=\sum_\omega f_\omega$, *définie et holomorphe dans* $\prod_{j=1}^{n}S^{k_j}_{R_j,\eta_j}$, *appartient à* $\mathscr{G}_{[k]}$.

[Pour démontrer (1), on peut supposer d'après 3.6 que f appartient à $\mathscr{G}^{[\theta]}_{[k]}$ pour un $[\theta]$ convenable; on reprend alors l'idée de la preuve de 2.9 (1)].

3.9. D'après la proposition précédente, les éléments de $\mathscr{G}_{[k]}$ sont les sommes de certaines séries de fonctions holomorphes. Cette approche est particulièrement agréable pour découvrir les propriétés de multisommabilité.

Soient $(k_j)=(k_{j,1},\ldots,k_{j,s})$, $1\leqq j\leqq n$, n suites strictement décroissantes de nombres réels $>1/2$, toutes de longueur s. Donnons-nous des réels $R_1>0,\ldots,R_n>0$; $\eta_1>0,\ldots,$

$\eta_n>0$ assez petits ; posons, si $\omega \in \mathbb{N}^n$:

$$\mathrm{U}_\omega=\prod_{j=1}^{n} \mathrm{U}_{\omega, j} \qquad \text{avec} \quad \mathrm{U}_{\omega, j}=\bigcap_{i=1}^{s} (\mathrm{S}_{\mathrm{R}_j, \eta_j}^{k_{j, i}} \cup \mathrm{D}_{\mathrm{R}_j(\omega_j+1)^{-1/k_{j,i}}}).$$

Soient $\mathrm{C}>0$; $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, avec $\forall j$, $0<\rho_j<1$. Associons à chaque $\omega \in \mathbb{N}^n$ une fonction f_ω, holomorphe dans U_ω et telle que

$$\| f_\omega \|=\sup_{z \in \mathrm{U}_\omega} | f_\omega(z) | \leqq \mathrm{C} \rho^\omega$$

La série $\sum_\omega f_\omega$ converge sur $\prod_{j=1}^{n} \mathrm{S}_{\mathrm{R}_j, \eta_j}^{k_{j,1}}$ vers une fonction holomorphe f.

Notons $\mathscr{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}$ l'ensemble de toutes les fonctions f ainsi obtenues, quand R_j, les η_j, C et les ρ_j varient. On a alors le résultat suivant (comparer avec 1.7 ; on rappelle que tous les k_{ji} sont $>1/2$) :

Proposition 3.10. — *$\mathscr{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}$ est une algèbre, stable par dérivation ; en outre* $\mathscr{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}=\sum_{1 \leqq i_1, \ldots, i_n \leqq s} \mathscr{G}_{[k_{1, i_1}, \ldots, k_{n, i_n}]}$.

Preuve. — Seule cette dernière égalité pose problème. D'après 3.8, on a des inclusions $\mathscr{G}_{[k_{1, i_1}, \ldots, k_{n, i_n}]} \subset \mathscr{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}$; réciproquement, soit $f=\sum_\omega f_\omega \in \mathscr{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}$; on peut supposer, en remplaçant par exemple les rayons R_j par $\mathrm{R}_j/2$, que chaque f_ω est continue sur $\bar{\mathrm{U}}_\omega$; si $z \in \mathrm{U}_\omega$, on a par Cauchy :

$$f_\omega(z)=\frac{1}{(2 \pi i)^n} \int \ldots \int_{\partial_0 \mathrm{U}_\omega} \frac{f_\omega(t_1, \ldots, t_n)}{(t_1-z_1) \ldots (t_n-z_n)} dt_1 \ldots dt_n$$

où $\partial_0 \mathrm{U}_\omega=\prod_{j=1}^{n} \partial \mathrm{U}_{\omega, j}$ est le bord distingué de $\mathrm{U}_\omega=\prod_{j=1}^{n} \mathrm{U}_{\omega, j}$.

Décomposons $\partial \mathrm{U}_{\omega, j}$ en une réunion disjointe de $\mathrm{U}_{\omega, j, i}$ $(1 \leqq i \leqq s)$ en posant si $s>1$:

$$\mathrm{U}_{\omega, j, 1}=\left\{ z_j \in \partial \mathrm{U}_{\omega, j} ;\ | \arg z_j | < \frac{\pi}{2 k_{j, 2}}+\eta_j \right\}$$

$$\mathrm{U}_{\omega, j, s}=\left\{ z_j \in \partial \mathrm{U}_{\omega, j} ;\ \frac{\pi}{2 k_{j, s}}+\eta_j \leqq | \arg z_j | \right\}$$

et si $1<i<s$:

$$\mathrm{U}_{\omega, j, i}=\left\{ z_j \in \partial \mathrm{U}_{\omega, j} ;\ \frac{\pi}{2 k_{j, i}}+\eta_j \leqq | \arg z_j | < \frac{\pi}{2 k_{j, i+1}}+\eta_j \right\}$$

(bien sûr, si $s=1$, $\mathrm{U}_{\omega, j, 1}=\partial \mathrm{U}_{\omega, j}$). Enfin, posons

$$\mathrm{V}_{\omega, i_1, \ldots, i_n}=\prod_{j=1}^{n} \mathrm{U}_{\omega, j, i_j}$$

et

$$f_{\omega, i_1, \ldots, i_n}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \ldots \int_{V_{\omega, i_1, \ldots, i_n}} \frac{f_\omega(t_1, \ldots, t_n)}{(t_1 - z_1) \ldots (t_n - z_n)} dt_1 \ldots dt_n.$$

On a $f_\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_n} f_{\omega, i_1, \ldots, i_n}$ et on déduit de 3.6 que

$$f_{i_1, \ldots, i_n} = \sum_\omega f_{\omega, i_1, \ldots, i_n} \in \mathcal{G}_{[k_{1, i_1}, \ldots, k_{n, i_n}]}.$$

On a $f = \sum_{i_1, \ldots, i_n} f_{i_1, \ldots, i_n}$,

C.Q.F.D.

3.11. Dans les définitions précédentes, on suppose $k_j > 1/2$ ou $k_{j, i} > 1/2$, $\forall j$ ou $\forall i, j$. On peut omettre ces conditions; on définit $\mathcal{G}_{[k]}$ (et plus généralement $\mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}$ comme l'ensemble des $f \in \mathcal{A}_{[k]}$ (resp. l'ensemble des $f \in \mathcal{A}_{[k_{1, 1}, \ldots, k_{n, 1}]}$) tels qu'il existe un entier $q > 0$ avec $q.k_j > 1/2$, $\forall j$ (resp. $q.k_{j, i} > 1/2$, $\forall i, j$), pour lequel

$$f(z_1^q, \ldots, z_n^q) \in \mathcal{G}_{q \,.\, [k]} (\text{resp. } f(z_1^q, \ldots, z_n^q) \in \mathcal{G}_{[q \,.\, (k_1), \ldots, q \,.\, (k_n)]}).$$

Visiblement, $\mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}$ est une algèbre, stable par dérivation; en outre, cette dernière définition coïncide avec la définition précédente, lorsque chaque $k_{j, i}$ est $> 1/2$ (pour vérifier cela, il faut utiliser la transformation de Borel-Laplace). Si $f \in \mathcal{A}_{[k_{1, 1}, \ldots, k_{n, 1}]}$ et si $q_1, \ldots, q_n$ sont des entiers > 0, on a

$$f \in \mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]} \quad \text{ssi} \quad f(z_1^{q_1}, \ldots, z_n^{q_n}) \in \mathcal{G}_{[q_1 \,.\, (k_1), \ldots, q_n \,.\, (k_n)]}.$$

Si $(k'_1), \ldots, (k'_n)$ sont des suites extraites de $(k_1), \ldots, (k_n)$ respectivement, on a trivialement l'inclusion : $\mathcal{G}_{[(k'_1), \ldots, (k'_n)]} \subset \mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}$ et l'on note G_n la réunion de tous les $\mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}$.

Dans les définitions précédentes, on peut supposer que tous les k_{ji} sont égaux à $+\infty$ pour $j = p+1, \ldots, n$; on obtient alors l'algèbre notée $\mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_p)]}\{z_{p+1}, \ldots, z_n\}$ des germes qui sont « Gevrey d'ordre $(k_1), \ldots, (k_p)$ en les variables $z_1, \ldots, z_p$ et qui sont holomorphes en les variables $z_{p+1}, \ldots, z_n$ ». La définition est analogue à celle de $\mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}$ lorsque les $k_{j, i}$ sont $> 1/2$ (*cf.* 3.9); simplement, on remplace le $U_{\omega, j}$ de 3.9 pour $j = p+1, \ldots, n$ par un disque D_{R_j}, $R_j > 0$. On a l'analogue de 3.10 :

$$\mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_p)]}\{z_{p+1}, \ldots, z_n\} = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_p \leq s} \mathcal{G}_{[k_{1, i_1}, \ldots, k_{p, i_p}]}\{z_{p+1}, \ldots, z_n\}.$$

Si les $k_{j, i}$ sont simplement > 0, on définit $\mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_p)]}\{z_{p+1}, \ldots, z_n\}$ comme l'ensemble des $f \in \mathcal{A}_{[k_{1, 1}, \ldots, k_{p, 1}]}\{z_{p+1}, \ldots, z_n\}$ telles qu'il existe un entier $q > 0$ avec $f(z_1^q, \ldots, z_p^q, z_{p+1}, \ldots, z_n) \in \mathcal{G}_{[q \,.\, (k_1), \ldots, q \,.\, (k_p)]}\{z_{p+1}, \ldots, z_n\}$. Si $k_1, \ldots, k_p$ sont des réels > 0, cette définition de $\mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_p)]}\{z_{p+1}, \ldots, z_n\}$ coïncide bien entendu avec celle de 3.1. Le lemme qui suit est une conséquence immédiate des définitions précédentes.

LEMME 3.12. — *Soit* $f \in \mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}$ *; alors :*

(1) *Si* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont des réels* >0 *:*

$$f(z_1(\lambda_1+y_1), \ldots, z_n(\lambda_n+y_n)) \in \mathcal{G}_{[(k_1), \ldots, (k_n)]}\{y_1, \ldots, y_n\}.$$

(2) *Si* (k) *est la suite de réels* >0 *obtenue en ordonnant en une suite strictement décroissante l'ensemble de tous les* $k_{j,i}$, *on a*

$$f(z_1, z_1(\lambda_2+y_2), \ldots, z_1(\lambda_n+y_n)) \in \mathcal{G}_{(k)}\{y_2, \ldots, y_n\}.$$

i.e. *on obtient une fonction Gevrey d'ordre* (k) *en* z_1, *holomorphe en les variables* $y_2, \ldots, y_n$.

COROLLAIRE 3.13. — *L'application* $G_n \ni f \to \hat{f} \in \hat{G}_n$, *qui a* f *associe son développement asymptotique à l'origine, est injective.*

Preuve. — Soit $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ l'éclatement considéré en 3.12 (2) :

$$(z_1, y_2, \ldots, y_n) \to (z_1, z_1(\lambda_2+y_2), \ldots, z_1(\lambda_n+y_n));$$

si $f \in \mathcal{G}_n$ et $f=0$, on a $\hat{f} \circ \varphi = \hat{f} \circ \varphi = 0$ et $f \circ \varphi \in \mathcal{G}\{y_2, \ldots, y_n\}$. D'après 1.7 (3) et 2.3, on a $f \circ \varphi = 0$ et donc $f=0$.

EXTENSION 3.14. — Nous avons défini G_n comme étant l'algèbre de certaines séries de fonctions holomorphes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$ (après une éventuelle ramification). On peut étendre cette définition en remplaçant dans la définition des U_ω, les coordonnées z_j par des fonctions $g_j \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$.

Soit X un sous-ensemble localement fermé de $\mathbb{C}^n$ tel que $0 \in \bar{X}$; une fonction f holomorphe au voisinage de X est Gevrey en 0 s'il existe des fonctions $g_1, \ldots, g_s$ holomorphes dans un polydisque

$$D_R^n = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z_j| < R, j=1, \ldots, n\} \qquad \text{avec} \quad g_i(0)=0, \quad \forall i;$$

des réels $k_1 > 1/2, \ldots, k_s > 1/2$; des constantes $\eta > 0$, $1 > \rho > 0$, $C > 0$; une suite f_q $(q \in \mathbb{N})$ de fonctions holomorphes, tels que si l'on pose $(1 \leqq i \leqq s;\ q \in \mathbb{N})$:

$$U_i^1 = \left\{ z \in D_R^n;\ g_i(z) \neq 0 \text{ et } |\arg g_i(z)| < \frac{\pi}{2k_i} + \eta \right\}$$

$$U_{i,q}^2 = \{ z \in D_R^n;\ |g_i(z)| < R(q+1)^{-1/k_i} \}$$

$$F_i = \{ z \in D_R^n;\ g_i(z) \neq 0 \text{ et } \arg g_i(z) = 0 \}$$

on ait :

$$\text{(3.14.1)} \qquad X \cap D_R^n \subset \bigcap_{i=1}^{s} F_i = F$$

(3.14.2) Chaque f_q est holomorphe dans $U_q = \bigcap_{i=1}^{s} (U_i^1 \cup U_{i,q}^2)$ donc *a fortiori* holomorphe dans $U = \bigcap_{i=1}^{s} U_i^1$ qui contient F; en outre,

$$\forall q : \| f_q \|_{U_q} = \sup_{z \in U_q} | f_q(z) | \leqq C \rho^q$$

(3.14.3) f au voisinage de $X \cap D_R^n$ est la somme $\sum_{q=0}^{\infty} f_q$ [cette somme converge normalement dans U d'après (3.14.2)].

D'après les inégalités de Cauchy pour les dérivées successives d'une fonction holomorphe, la série $\sum f_q$ et toutes les séries dérivées, convergent absolument en 0 et plus généralement en tout point de $\bar{F}$ assez voisin de l'origine. La fonction f admet donc un développement asymptotique $\hat{f} \in \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ à l'origine.

Faisons varier toutes les données : s, R, ρ, C, η, les g_i, les k_i et les f_q et considérons l'ensemble de tous les germes en 0 de fonctions f ainsi obtenues. On obtient alors une algèbre $G_{X,0}$, stable par dérivation, de germes f qui admettent un développement asymptotique en tout point de $\bar{X}$ au voisinage de 0, et l'on a en particulier une application $G_{X,0} \ni f \to \hat{f} \in \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$. Tout germe d'application holomorphe $\varphi : (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ induit un homomorphisme $\varphi^* : G_{X,0} \to G_{\varphi^{-1}(X),0}$, en supposant bien sûr que le germe $\varphi^{-1}(X)$ en 0 est non vide. Par exemple, si les composantes de φ sont >0 en chaque point de $(\mathbb{R}^{+*})^m$, φ induit un homomorphisme $\varphi^* : G_{(\mathbb{R}^{+*})^n,0} \to G_{(\mathbb{R}^{+*})^m,0}$ (toute fonction f de G_n appartient à $G_{(\mathbb{R}^{+*})^n,0}$ après ramification; remarquons que φ n'induit pas une application de G_n dans G_m; par exemple si $f \in G_1$, $f(z_1 z_2) \notin G_2$ sauf cas exceptionnel).

Examinons la situation particulière où chaque $g_i(z)$ est de la forme $h_i(z) \cdot z_1^{p_{i,1}} \ldots z_n^{p_{i,n}}$, $h_i \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ et $h_i(0) \neq 0$; quitte à ajouter des g_i, on peut toujours supposer que $\forall j$, il existe un i avec $p_{i,j} \neq 0$. On trouve que F est l'ensemble des $z \in D_R^n \cap (\mathbb{C}^*)^n$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \arg z_j = -\arg h_i(z), \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, s.$$

Comme $0 \in \bar{X}$ et $X \subset F$, on voit en faisant tendre $z \in X$ vers 0, qu'il existe des $\xi_j \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \xi_j = -\arg h_i(0)$, $i = 1, \ldots, s$.

Après le changement de variables $Z_j = z_j e^{-i\xi_j}$, on peut supposer que $\arg h_i(0) = 0$ *i.e.* $h_i(0) > 0$ pour tout i; puis, en modifiant un peu les constantes η, R etc. on peut supposer que tous les $h_i(z)$ sont égaux à 1; U est alors l'ensemble des $z \in D_R^n \cap (\mathbb{C}^*)^n$ tels que :

$$\left| \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \arg z_j \right| < \frac{\pi}{2 k_i} + \eta, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Il est donc naturel de considérer la sous-algèbre notée $\tilde{G}_n$ de $G_{(\mathbb{R}^{+*})^n,0}$ obtenue en supposant que tous les $g_i(z)$ sont des monômes $z_1^{p_{i,1}} \ldots z_n^{p_{i,n}}$.

D'après le théorème de désingularisation d'Hironaka, il existe un morphisme analytique $\pi:(\tilde{\mathbb{C}}^n, \pi^{-1}(0)) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, propre et surjectif, tel que $\forall a \in \pi^{-1}(0)$, il existe un système de coordonnées locales en a, pour lesquelles tous les $g_i \circ \pi (g_i \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\})$ sont de la forme précédente $h_i(z) z_1^{p_{i,1}} \ldots z_n^{p_{i,n}}$ avec $h_i(0) \neq 0$, $\forall i = 1, \ldots, s$. L'étude de $G_{X,0}$ se ramène donc toujours, par désingularisation, à celle de $\tilde{G}_n$. L'extension de 3.13 est alors immédiate :

PROPOSITION 3.15. — *L'application* $G_{X,0} \ni f \to \hat{f} \in \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ *est injective.*

[Par désingularisation, on peut supposer que tous les g_i associés à f sont de la forme $z_1^{p_{i,1}} \ldots z_n^{p_{i,n}}$; si φ est l'éclatement considéré dans la preuve de 3.13, on vérifie que $f \circ \varphi$ est Gevrey en z_1 et holomorphe en $y_2, \ldots, y_n$; comme $\hat{f} \circ \varphi = 0$, on a $f \circ \varphi = 0$, donc $f = 0$.]

3.16. TOPOLOGIE SUR LES ESPACES GEVREY. — Il y a plusieurs manières de définir la topologie des espaces Gevrey suivant qu'on utilise la définition standard de 3.1, la transformation de Borel-Laplace (*cf.* § 2) ou les séries de fonctions holomorphes. Nous adoptons ce dernier point de vue, car la situation traitée est la plus générale.

Dans (3.14.2) on peut remplacer les inégalités $\| f_q \|_{U_q} \leqq C \rho^q$ par la seule inégalité $\sum_{q=0}^{\infty} \| f_q \|_{U_q} \rho^{-q} \leqq C$: cette dernière inégalité entraîne les premières, et on a la réciproque à condition de modifier les constantes C et $\rho (0 < \rho < 1)$.

Avec les notations de 3.14, fixons les données R, ρ, η, les g_i et les k_i; on associe à ces données une norme notée simplement $\| \ \|_v$ et définie comme suit; on considère toutes les séries $\sum_{q=0}^{\infty} f_q$ avec f_q holomorphe dans U_q, telles que $\sum_{q=0}^{\infty} \| f_q \|_{U_q} \rho^{-q} < \infty$ et telle que $\sum_{q=0}^{\infty} f_q = f$ au voisinage de $X \cap D_R^n$, et l'on pose :

$$\| f \|_v = \inf \left(\sum_{q=0}^{\infty} \| f_q \|_{U_q} \rho^{-q} \right).$$

Les $\| f \|_v$ définissent un système inductif de normes sur $G_{X,0}$ et l'on munit $G_{X,0}$ de la topologie limite inductive.

PROPOSITION 3.17. — (1) *Si* $f, g \in G_{X,0}$, *on a* $\| f . g \|_v \leqq \| f \|_v \| g \|_v$.

(2) *Si* $f \in G_{X,0}$ *et* $\hat{f}(0) = 0$, *on a* $\varinjlim \| f \|_v = 0$.

(3) *Si* $\{ f_p \}$ *est une suite de Cauchy pour la norme* $\| \ \|_v$, *la limite appartient à* $G_{X,0}$.

[(1) et (3) sont immédiats; pour (2), on peut choisir une représentation $\sum f_q$ de f de telle sorte que $f_q(0) = 0$; $\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit un N tel que

$$\sum_{q=N+1}^{\infty} \| f_q \|_{U_q} \rho^{-q} \leqq \varepsilon/2;$$

on diminue alors le rayon R de telle sorte que $\|f_q\|_{U_q}\rho^{-q}\leqq\varepsilon/2(N+1)$ pour tout $q=0,\ldots,N$; et donc pour cette nouvelle norme : $\|f\|_v\leqq\varepsilon$.]

3.18. Les algèbres $\mathcal{G}_{[k]}$ (ou $\mathcal{G}_{[(k_1),\ldots,(k_n)]}$) considérées précédemment sont contenues dans $G_{(\mathbb{R}^{+*})^n,0}$, pourvu que les k_j (ou les k_{ji}) soient tous $>1/2$; on les munit de la topologie induite et ce sont des sous-algèbres fermées de $G_{(\mathbb{R}^{+*})^n,0}$. Si les k_j (ou les k_{ji}) sont des réels >0, on choisit un entier $p>0$ tel que tous les $p.k_j$ (ou les $p.k_{ji}$) soient $>1/2$; on a des injections :

$$\mathcal{G}_{[k]}\ni f\to f(z_1^p\ldots z_n^p)\in\mathcal{G}_{p.[k]}$$

$$\mathcal{G}_{[(k_1),\ldots,(k_n)]}\ni f\to f(z_1^p\ldots z_n^p)\in\mathcal{G}_{[p.(k_1),\ldots,p(k_n)]}$$

et l'on identifie topologiquement les espaces avec leurs images munis de la topologie induite par $G_{(\mathbb{R}^{+*})^n,0}$.

On peut bien sûr définir la topologie de $\mathcal{G}_{[k]}$ en revenant à la définition de 3.1. Si l'on pose $\|f\|_S=\sup_{z\in S}|f(z)|$, il convient de mettre sur $\mathcal{G}_{[k]}$ le système inductif de semi-normes :

$$\|f\|_{R,\eta,A}=\sum_{\omega\in\mathbb{N}^n}\frac{\|\partial^\omega f\|_S A^{-|\omega|}}{\omega!\,\Gamma(\omega_1/k_1)\ldots\Gamma(\omega_n/k_n)}$$

ce qui est plus difficile à manipuler que les normes précédentes. On peut aussi utiliser les itérés de Borel, en reprenant les idées du paragraphe 2.

Enfin, on note $G_{X,0}\{y_1,\ldots,y_N\}$ l'algèbre des séries convergentes en $y_1,\ldots,y_N$ à coefficients dans $G_{X,0}$; c'est l'ensemble des séries

$$F=\sum_{\omega\in\mathbb{N}^n}f_\omega y^\omega\,(y=(y_1,\ldots,y_N);f_\omega\in G_{X,0})$$

telles qu'il existe une norme $\|\ \|_v$ et un $\rho>0$ avec $\|F\|_{v,\rho}=\sum_\omega\|f_\omega\|_v\rho^{|\omega|}<\infty$. On définit pareillement $\mathcal{G}_{[k]}\{y_1,\ldots,y_N\}$, $\mathcal{G}_{[(k_1),\ldots,(k_n)]}\{y_1,\ldots,y_N\}$, etc. et ces définitions coïncident bien entendu avec les définitions antérieures.

3.19. ***Le cas réel*** : Si $f\in G_{(\mathbb{R}^{+*})^n,0}$, la fonction $\check{f}$ définie par $\check{f}(z)=\overline{f(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n)}$ appartient encore à $G_{(\mathbb{R}^{+*})^n,0}$ et si $\hat{f}(z)=\sum a_\omega z^\omega$, on a $\hat{\check{f}}(z)=\sum\bar{a}_\omega z^\omega$. En conséquence, si $\hat{f}$ *est réelle* (*i.e.* tous les a_ω sont réels), on a par 3.15, $f=\check{f}$ et $f|(\mathbb{R}^{+*})^n$ est réelle. On peut alors supposer que les f_q de la série $\sum f_q$ définissant f sont tous réels ($f_q=\check{f}_q$, $\forall q\in\mathbb{N}$).

4. Le théorème de préparation

4.1. Soient

$$\varphi=\sum a_\omega y^\omega\in\mathbb{C}\{y_1,\ldots,y_p\}\qquad\text{et}\qquad f_1,\ldots,f_p\in G_{X,0}\qquad\text{avec}\quad\hat{f}_1(0)=\ldots=\hat{f}_p(0)=0;$$

la composée $\varphi(f_1,\ldots,f_p)$ appartient encore à $G_{X,0}$: en effet, il existe un $\rho>0$ tel que $\sum|a_\omega|\rho^{|\omega|}<\infty$ et d'après 3.17 (2), il existe une norme v telle que pour tout i: $\|f_i\|_v\leqq\rho$;

d'après 3.17 (1) et (3), la série $\sum a_\omega f^\omega$ converge alors normalement pour ν vers une fonction de $G_{X,0}$. En particulier, si $f \in G_{X,0}$ et $\hat{f}(0) \neq 0$, $1/f \in G_{X,0}$, *i.e.* $G_{X,0}$ est une algèbre locale. On munit l'algèbre $G_{X,0}\{y_1, \ldots, y_N\}$ considérée en 3.18, de la famille de normes $\|F\|_{\nu,\rho}$; ces normes vérifient aussi les conditions de 3.17 et $G_{X,0}\{y\}$ est comme $G_{X,0}$ un anneau local.

La série $F = \sum_{\omega \in \mathbb{N}^n} f_\omega y^\omega$ est régulière d'ordre p en la variable y_N si $\hat{F}$ est régulière d'ordre p en y_N, *i.e.* $\hat{F}(0, 0, y_N)$ est non nulle et commence par un terme de degré p.

PROPOSITION 4.2. — *Supposons que* $F = \sum f_\omega y^\omega$ *est régulière d'ordre* p *en la variable* y_N; *si* $F' \in G_{X,0}\{y\}$, *il existe des séries uniques* $Q \in G_{X,0}\{y\}$, $R \in G_{X,0}\{y'\}[y_N]$ (*on pose* $y' = (y_1, \ldots, y_{N-1})$) *telles que* $d^\circ R$ *en* y_N *soit* $< p$ *et* $F' = FQ + R$.

En outre, F *est équivalente dans* $G_{X,0}\{y\}$ *à un unique polynôme distingué de degré* p $P = y_N^p + \sum_{i=1}^{p} g_i \cdot y_N^{p-i} \in G_{X,0}\{y'\}[y_N]$.

Preuve. — La démonstration est analogue à celle du théorème de préparation analytique (*cf.* [12], 2.3, p. 54). On pose $F = \sum_{i=1}^{p} A_i \cdot y_N^{p-i} + \Delta \cdot y_N^p$ avec $A_i \in G_{X,0}\{y'\}$ et $A_i(0; 0) = 0$; $\Delta \in G_{X,0}\{y\}$ inversible. Soient ν une norme sur $G_{X,0}$; $\rho, \lambda \in]0, 1]$ fixés; on note Y la sous-algèbre de $G_{X,0}\{y\}$ formée des séries $F' = \sum f_{\omega,\mu} y'^\omega y_N^\mu$ ($\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{N-1}) \in \mathbb{N}^{N-1}$; $f_{\omega,\mu} \in G_{X,0}$) telles que

$$\|F'\| = \sum \|f_{\omega,\mu}\| \rho^{|\omega|} \lambda^\mu < \infty.$$

On pose $Y' = Y \cap G_{X,0}\{y'\}$ et on choisit ν, ρ, λ de telle sorte que $A_1, \ldots, A_p \in Y'$ et Δ appartienne à Y et soit inversible dans cet anneau.

Si $(u_1, \ldots, u_p; v) \in Y'^p \times Y = X$, on pose :

$$\|(u_1, \ldots, u_p; v)\| = \sup(\|u_1\|, \ldots, \|u_p\|; \|v\|).$$

On a des applications $\mathbb{C}$-linéaires $T, U : X \to Y$ en posant :

$$T(u_1, \ldots, u_p; v) = \sum_{i=1}^{p} u_i \cdot y_N^{p-i} + \Delta \cdot y_N^p \cdot v$$

$$U(u_1, \ldots, u_p; v) = (A_1 y_N^{p-1} + \ldots + A_p) \cdot v$$

L'application T est bijective et :

$$\|T(u_1, \ldots, u_p; v)\| \geqq \lambda^p \|(u_1, \ldots, u_p; \Delta \cdot v)\| \geqq \lambda^p \cdot \|(u_1, \ldots, u_p; v)\|$$

si l'on suppose que $\|\Delta^{-1}\| \leqq 1$, ce qui est toujours possible en multipliant F par une constante convenable. D'autre part : $A_1(0; 0) = \ldots = A_p(0; 0) = 0$; on peut donc choisir ν, ρ assez petits pour que $\|A_1 y_N^{p-1} + \ldots + A_p\| = C < \lambda^p$, et en conséquence :

$$\|U(u_1, \ldots, u_p; v)\| \leqq C \|(u_1, \ldots, u_p; v)\|.$$

D'après 6.1, Ch. III de [12], T + U est bijective, ce qui démontre le théorème de division. La dernière affirmation s'obtient en divisant y_N^p par F.

On peut dans la proposition précédente remplacer $G_{X,0}$ par $\mathscr{G}_{[k]}$, $\mathscr{G}_{[(k_1),\ldots,(k_n)]}$, G_n, $\tilde{G}_n$: seules les propriétés (1), (2), (3) de 3.17 sur les normes sont utilisées. Remarquons que $\mathscr{G} = G_1$ est un anneau local régulier de dimension 1 admettant $\mathbb{C}[[z]]$ comme complété. Plus généralement :

PROPOSITION 4.3. — *L'anneau $\mathscr{G}\{y_1, \ldots, y_N\}$ est un anneau local régulier de dimension $N+1$; son complété est l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[z; y]]$.*

Preuve. — Démontrons d'abord, par récurrence sur N, que $\mathscr{G}\{y\}$ est un anneau noethérien. C'est vrai si $N=0$; si $N>0$, nous devons montrer que tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq 0$ de $\mathscr{G}\{y\}$ admet un nombre fini de générateurs.

Si $z \in \mathfrak{p}$, le résultat est évident, car $\mathscr{G}\{y\}/z.\mathscr{G}\{y\} \simeq \mathbb{C}\{y\}$ et cet anneau est noethérien; si $z \notin \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ contient un élément $F = \sum f_\omega y_N^\omega$ pour lequel il existe un entier $p \geqq 0$ vérifiant les conditions suivantes :

si $|\omega| < p$, $f_\omega(0) = 0$; il existe un multindice ω tel que $|\omega| = p$ et $f_\omega(0) \neq 0$. Après un changement linéaire de coordonnées sur y, on peut supposer que $f_{(0,\ldots,0,p)}(0) \neq 0$; d'après 4.2, $\mathfrak{p}$ est engendré par F et $\mathfrak{p} \cap \mathscr{G}\{y'\}[y_N]$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{G}\{y'\}$ et donc $\mathscr{G}\{y'\}[y_N]$ sont noethériens, d'où le résultat.

Le complété de $\mathscr{G}\{y\}$ pour la topologie $\underline{m}$-adique ($\underline{m} = (z, y_1, \ldots, y_N)$) s'identifie à $\mathbb{C}[[z; y]]$ et l'on en déduit par des arguments classique que $\mathscr{G}\{y\}$ est un anneau local régulier de dimension $N+1$.

4.4. On note $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}$ la sous-algèbre de $\mathscr{G}$ formée de germes f qui sont réels, *i.e.* $f|\mathbb{R}^+$ est réelle ou $\hat{f}$ est réelle (*cf.* 2.12); on définit pareillement $G_n^{\mathbb{R}}$, $G^{\mathbb{R}}_{(\mathbb{R}^{+*})^n, 0}$, $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}_{[(k_1),\ldots,(k_n)]}$, etc. (*cf.* 3.19). L'algèbre $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y_1, \ldots, y_N\}$ vérifie le théorème de préparation, et c'est un anneau local régulier de dimension $N+1$, son complété étant $\mathbb{R}[[x; y]]$. On définit un sous-faisceau $\underline{\mathscr{G}}^{\mathbb{R}}$ du faisceau des germes de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles, de la façon suivante : en un point (x_0, y_0) avec $x_0 > 0$, $\underline{\mathscr{G}}^{\mathbb{R}}_{(x_0, y_0)}$ est l'anneau des germes de fonctions analytiques réelles au voisinage (x_0, y_0); pour tout point $(0, y_0)$, on pose $\underline{\mathscr{G}}^{\mathbb{R}}_{(0, y_0)} = \mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y - y_0\}$. Visiblement, tout élément de $\underline{\mathscr{G}}^{\mathbb{R}}_{(x_0, y_0)}$ induit un élément de $\underline{\mathscr{G}}^{\mathbb{R}}_{(x, y)}$ pour tout (x, y) voisin de (x_0, y_0). Le faisceau $\underline{\mathscr{G}}^{\mathbb{R}}$ est cohérent : la démonstration du théorème de cohérence d'OKA (théorème 6.4, p. 43 de [12]) se transpose mot à mot. Plus généralement, toutes les définitions et propriétés locales des faisceaux analytiques cohérents, des ensembles analytiques ou semi-analytiques, s'étendent facilement à cette situation plus générale; nous en développons ici quelques unes.

4.5. THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES.

(4.5.1) Soit $F(x; z) \in \mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{z\}$, $z = (z_1, \ldots, z_p)$, et soient $z_1(x; y), \ldots, z_p(x; y) \in \mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$ avec $z_i(0, 0) = 0$, $i = 1, \ldots, p$; alors $F(x; z(x, y)) \in \mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$.

(4.5.2) Soient $F_1, \ldots, F_p \in \mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y; z\}$ telles que $F_1(0, 0, 0) = \ldots = F_p(0, 0, 0) = 0$ et telles que $(D(F_1, \ldots, F_p)/D(z_1, \ldots, z_p))(0, 0, 0) \neq 0$.

Alors il existe $z_1(x;y), \ldots, z_p(x;y)$ uniques, appartenant à $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$, telles que $z_1(0,0)=\ldots=z_p(0,0)=0$ et $F_i(x;y;z(x,y))=0$ pour $i=1,\ldots,p$.

(4.5.3) Soit $F\in\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y;z\}^q$ et soit I l'idéal engendré dans $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$ par les mineurs d'ordre q de la matrice jacobienne $F'_z(x;y;0)$ (si $q>p$, $I=0$); alors, si I′ est un idéal propre de $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$ et si $(F(x;y;0)\in\bigoplus_q I'.I^2$, il existe $z(x;y)\in\bigoplus_p I'.I$ tel que $F(x;y;z(x,y))=0$ (la preuve est analogue à celle du théorème 3.2, p. 57 de [12]).

PROPOSITION 4.6. — (1) *L'injection canonique* $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y\}\to\mathbb{R}[[x;y]]$ *est fidèlement plate.*

(2) *Si* $\mathfrak{p}$ *est un idéal premier de* $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$, *l'idéal* $\hat{\mathfrak{p}}$ *engendré par* $\mathfrak{p}$ *dans* $\mathbb{R}[[x;y]]$ *est aussi premier de même hauteur.*

Preuve. — (1) est évident; démontrons (2). Si $x\in\mathfrak{p}$, on se ramène à démontrer que le complété d'un idéal premier de $\mathbb{R}\{y\}$ est premier, ce qui est bien connu. Nous supposerons donc que $x\notin\mathfrak{p}$.

On peut appliquer à $\mathfrak{p}$ le théorème de préparation et donc le lemme de normalisation (*cf.* [12]). Si $N-k+1=ht\,\mathfrak{p}$, on peut, après un éventuel changement linéaire de coordonnées sur $y=(y_1,\ldots,y_N)$, supposer que $\mathfrak{p}$ contient des polynômes $P, Q_{k+1},\ldots,Q_N$, tels que si $y'=(y_1,\ldots,y_{k-1})$:

(1) $P\in\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y'\}[y_k]$ est un polynôme distingué en y_k, irréductible sur $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y'\}$ et de discriminant $\delta\neq 0$.

(2) $\forall j=k+1,\ldots,N$, $Q_j=\delta.y_j-R_j$ avec $R_j\in\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y'\}[y_k]$ et $d^\circ R_j<d^\circ P$.

(3) $\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y'\}=0$ et $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y\}/\mathfrak{p}$ est un module de type fini sur $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y'\}$.

(4) $\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y';y_k\}$ est engendré par P.

(5) Il existe un entier $m\geqq 0$ tel que $\mathfrak{p}=(P,Q_{k+1},\ldots,Q_N):\delta^m$. On déduit de là que $\hat{\mathfrak{p}}=\widehat{(P,Q_{k+1},\ldots,Q_N)}:\delta^m$ et l'on voit que $\hat{\mathfrak{p}}$ est premier si et seulement si P est irréductible. On se ramène donc, par normalisation, au cas où $\mathfrak{p}$ est engendré par un germe irréductible P qui est un polynôme distingué appartenant à $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y'\}[y_N]$ où $y'=(y_1,\ldots,y_{N-1})$.

On démontre d'abord le résultat pour $N=1$, $y=y_1$. Supposons que $P=\hat{Q}.\hat{R}$ est une décomposition propre de P dans $\mathbb{R}[[x;y]]$; P étant sans facteurs multiples, l'idéal engendré par $\hat{Q}$ et $\hat{R}$ dans $\mathbb{R}[[x;y]]$ contient une puissance $\nu>0$ de l'idéal maximal $\underline{\hat{m}}$. Considérons alors l'équation :

$$F(x;y;z_1;z_2)=(\hat{Q}_{2\nu}+z_1)(\hat{R}_{2\nu}+z_2)-P=0$$

où $\hat{Q}_{2\nu}$, $\hat{R}_{2\nu}$ sont les développements de Taylor d'ordre 2ν de $\hat{Q}$ et $\hat{R}$ respectivement. L'idéal engendré par $(\partial F/\partial z_1)(x,y;0)$ et $(\partial F/\partial z_2)(x,y;0)$ contient $\underline{m}^\nu$ ($\underline{m}$ idéal maximal de $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$) et $F(x,y;0)\in\underline{m}^{2\nu+1}$.

D'après (4.5.3), l'équation précédente admet une solution dans $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$, ce qui contredit l'hypothèse que P est irréductible dans $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$, et démontre le résultat pour $N=1$. En conséquence, si $P\in\mathcal{G}^{\mathbb{R}}[y]$ est un polynôme distingué, sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}[y]$ coïncide avec sa décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[[x]][y]$.

Pour N quelconque, supposons encore que l'on ait une décomposition propre $P=\hat{Q}.\hat{R}$; on peut supposer que $\hat{Q}$ et $\hat{R}$ sont des polynômes distingués appartenant à $\mathbb{R}[[x;y']][y_N]$.

D'après le cas $N=1$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $\hat{Q}(x, \lambda_1 t, \ldots, \lambda_N t) \in \mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{t\}$; il en résulte que $\hat{Q} = \sum f_\omega(x) . y^\omega$ avec $f_\omega \in \mathscr{G}^{\mathbb{R}}$ pour tout ω.

Considérons, pour toute norme ν sur $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}$, la fonction :

$$\phi_\nu(\lambda) = \sup_q \sqrt[q]{\| \sum_{|\omega| = q} f_\omega \lambda^\omega \|_\nu}.$$

Cette fonction est semi-continue inférieurement et par hypothèse $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ est la réunion des fermés $F_{\nu, p} = \{ \lambda \mid \phi_\nu(\lambda) \leqq p \}$ où $p \in \mathbb{N}$ et où ν décrit un ensemble dénombrable. D'après le théorème de Baire, l'un des fermés possède un intérieur non vide, et l'on en déduit l'existence d'une norme ν et de constances $C > 0$, $\rho > 0$ telles que :

$$\sup_{|\lambda| = 1} \| \sum_{|\omega| = q} f_\omega \lambda^\omega \|_\nu \leqq C \rho^q.$$

On déduit de là que $\hat{Q} = \sum f_\omega(x) . y^\omega$ appartient à $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$; il en sera de même de $\hat{R}$, ce qui contredit le fait que P est irréductible dans $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$.

(Pour obtenir 4.6 (2), on pourrait démontrer que $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$ est hensélien et pseudo-géométrique, puis appliquer un théorème de Nagata [8].)

Dans les énoncés 4.5 et 4.6, on peut remplacer $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}$ par $\mathscr{G}$ et $\mathbb{R}[[x; y]]$ par $\mathbb{C}[[x; y]]$. Si $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, 0}$ est l'anneau des germes en 0 de fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ à valeurs réelles, on a une injection $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y\} \to \mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, 0}$: procédant comme dans [12], on peut démontrer que cette injection est fidèlement plate et que tout sous-module de $(\mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y\})^p$ engendre dans $\mathscr{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, 0})^p$ un sous-module fermé.

4.7. Considérons un « germe d'ensemble semi-analytique » :

$$X = \bigcup_i \bigcap_j \{ (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N ; f_{ij}(x; y) ? 0 \}$$

où ? est $>$ou $=$; les i, j décrivent un ensemble fini d'indices et $f_{ij} \in \mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$, $\forall i, j$. Pour étudier X, on peut supposer qu'il est contenu dans le demi-espace $x > 0$, car l'intersection de X avec $x = 0$ est un germe semi-analytique au sens usuel du terme et ses propriétés sont bien connues.

Un arc Gevrey ξ dans X est un germe d'application $\xi : (\mathbb{R}^+, 0) \ni t \to \xi(t) = (x(t); y_1(t), \ldots, y_N(t)) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, 0)$ tel que $\xi(0) = 0$, $\xi(t) \in X$ pour $t > 0$ et $x(t)$, $y_1(t), \ldots, y_N(t)$ appartient à $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}$. Cela implique bien sûr que le premier coefficient non nul de $\hat{x}(t)$ est >0. On sait composer les germes Gevrey d'une variable (*cf.* 2.6.4) et cette composition est continue; si $f \in \mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$, on voit facilement que $f(\xi(t))$ est Gevrey en t.

PROPOSITION 4.8. — *Soit* X *un « germe semi-analytique » comme précédemment, supposé non vide. Alors :*

(1) X *admet un nombre fini de composantes connexes.*

(2) *Il existe un arc Gevrey contenu dans* X.

Preuve. — (1) L'affirmation (1) signifie que l'intersection d'un représentant $\underset{\sim}{X}$ de X avec une boule euclidienne $\|(x, y)\| < \varepsilon$ assez petite admet un nombre fini de composantes connexes. On procède par induction sur N : si $N=0$, c'est trivial.

Supposons $N>0$; comme $x>0$ sur X, on peut supposer que les $\hat{f}_{ij}$ ne contiennent pas x en facteur et, d'après le théorème de préparation, après un changement linéaire de coordonnées en y, on peut supposer que tous les f_{ij} sont des polynômes distingués en y_N à coefficients dans $\mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y'\}$, $y'=(y_1, \ldots, y_{N-1})$. Écrivons $f_{ij}=\sum_k a_{ijk}(x; y') y_N^k$ et considérons le polynôme générique $F_{ij}=\sum_k a_{ijk} y_N^k \in \mathbb{R}[a; y_N]$ où a désigne le paquet de variables a_{ijk} et décrit un $\mathbb{R}^M$. Notons $\pi_\varepsilon (\varepsilon>0)$ la projection $\mathbb{R}^M \times]-\varepsilon, \varepsilon[\ni (a, y_N) \to a \in \mathbb{R}^M$ et considérons dans $\mathbb{R}^M \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ le semi-algébrique

$$\mathscr{X}=\bigcup_i \bigcap_j \{(a, y_N) \in \mathbb{R}^M \times]-\varepsilon, \varepsilon[; F_{ij}(a, y_N) ? 0\}.$$

Si θ désigne l'application $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}, 0) \ni (x, y') \to (a_{ijk}(x; y')) \in \mathbb{R}^M$, on a $X=(\theta \times \mathrm{id})^{-1} \mathscr{X}$. Comme conséquence du théorème de Tarski-Seidenberg (*cf.* [3], méthode du « saucissonnage »), il existe une partition finie de $\mathbb{R}^M$ en semi-algébriques W_α tels que chaque W_α soit une variété analytique simplement connexe et tels que chaque $\pi_\varepsilon^{-1}(W_\alpha) \cap \mathscr{X}$ admette la description suivante :

Il existe un polynôme $\mathscr{P}_\alpha=A_{\alpha, i_\alpha} y_N^{i_\alpha}+A_{\alpha, i_\alpha-1} y_N^{i_\alpha-1}+\ldots \in \mathbb{R}[a; y_N]$ tel que le terme dominant A_{α, i_α} et le discriminant de $\mathscr{P}_\alpha$ ne s'annulent en aucun point de W_α. En outre, il existe des racines réelles de $\mathscr{P}_\alpha (a \in W_\alpha)$

$$\mathscr{Y}_\alpha^{(1)}(a)<\mathscr{Y}_\alpha^{(2)}(a)<\ldots<\mathscr{Y}_\alpha^{(l_\alpha)}(a)$$

telle que $\pi_\varepsilon^{-1}(W_\alpha) \cap \mathscr{X}$ soit une réunion de « tranches » T disjointes de la forme :
$T_l=\{(a, y_N)$ avec $a \in W_\alpha$ et $y_N=\mathscr{Y}_\alpha^{(l)}(a)\}$
ou $T_{l, l+1}=\{a, y_N)$ avec $a \in W_\alpha$ et $\mathscr{Y}_\alpha^{(l)}(a)<y_N<\mathscr{Y}_\alpha^{(l+1)}(a)\}$
ou $T_{-\varepsilon, 1}=\{(a, y_N)$ avec $a \in W_\alpha$ et $-\varepsilon<y_N<\mathscr{Y}_\alpha^{(1)}(a)\}$
ou $T_{l_\alpha, \varepsilon}=\{(a, y_N)$ avec $a \in W_\alpha$ et $\mathscr{Y}_\alpha^{(l_\alpha)}(a)<y_N<\varepsilon\}$.

Comme $X=(\theta \times \mathrm{id})^{-1} \mathscr{X}$, on en déduit un « saucissonnage » de X et comme par induction, chaque $\theta^{-1}(W_\alpha)$ admet un nombre fini de composantes connexes, il en sera de même pour X.

(2) Soit $P_\alpha \in \mathscr{G}^{\mathbb{R}}\{y'\}[y_N]$ le polynôme déduit de $\mathscr{P}_\alpha$ en remplaçant chaque a_{ijk} par $a_{ijk}(x; y')$; de même, soit $\mathscr{Y}_\alpha^{(l)}(x; y')$ la racine de P_α déduit de $\mathscr{Y}_\alpha^{(l)}$ en remplaçant chaque a_{ijk} par $a_{ijk}(x; y')$. Le germe X étant non vide, il existe un α tel que le germe en 0 $X_\alpha=(\theta \times \mathrm{id})^{-1}(\pi_\varepsilon^{-1}(W_\alpha) \cap \mathscr{X})$ soit non vide. Le germe $\theta^{-1}(W_\alpha)$ étant en particulier non vide, il existe par induction sur N, un arc Gevrey $\xi': t \to (x(t), y'(t))$ contenu dans $\theta^{-1}(W_\alpha)$. Le germe X_α contient une « tranche » non vide, par exemple le germe des $(x; y'; y_N)$ avec $(x; y') \in \theta^{-1}(W_\alpha)$ et $y_N=\mathscr{Y}_\alpha^{(l)}(x; y')$ (on laisse le lecteur considérer les autres possibilités).

Considérons alors le polynôme $P_\alpha(\xi'(t); y_N) \in \mathscr{G}_t^{\mathbb{R}}[y_N] \subset \mathbb{R}[[t]][y_N]$. D'après le théorème de Puiseux formel, après une éventuelle ramification $t=T^q$, on peut supposer que toutes les racines de ce polynôme appartiennent au corps des fractions de $\mathbb{C}[[t]]$. En procédant comme dans la preuve de 4.6 (2) [on applique (4.5.3) avec $\mathcal{G}$ au lieu de $\mathcal{G}^{\mathbb{R}}$], on démontre que toutes ces racines appartiennent au corps des fractions de $\mathcal{G}_t$. D'après le choix de α et l, l'une de ces racines $y_{\mathrm{N}}(t)$ vérifie la condition suivante : le germe en 0 (noté encore ξ) de l'image de l'arc Gevrey $\xi :]0, \varepsilon] \ni t \to (\xi'(t), y_{\mathrm{N}}(t)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ a une intersection non vide avec la « tranche », donc avec X_α, donc avec X. On voit facilement que ξ, donc $\xi \cap \mathrm{X}$, sont « semi-analytiques »; d'après le (1), $\xi \cap \mathrm{X}$ admet un nombre fini de composantes connexes, ce qui implique $\xi \subset \mathrm{X}$,

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4.9. – *Toute fonction $f \in \mathcal{G}^{\mathbb{R}}\{y\}$ vérifie une inégalité de Lojasiewicz par rapport au germe $f^{-1}(0)$.*

(Si $\underset{\sim}{f}$ est un représentant de f, cela signifie qu'il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ et des constantes $\mathrm{C}>0$ et $\alpha>0$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{V} : |\underset{\sim}{f}(x; y)| \geqq \mathrm{C}\, d((x, y), \underset{\sim}{f}^{-1}(0))^\alpha$$

d: distance euclidienne.)

Pour démontrer ce théorème, on peut recopier la démonstration de l'inégalité de Lojasiewicz pour les fonctions analytiques (*cf.* [12], Ch. V) ou utiliser le théorème I de [10].

5. Démonstrations des théorèmes I et II

5.1. Rappelons que l'algèbre $\tilde{\mathrm{G}}_n$ est la sous-algèbre de $\mathrm{G}_{(\mathbb{R}^{+*})^n, 0}$ obtenue en supposant que les $g_i(z)$ sont tous des monômes $z_1^{p_{i,1}} \dots z_n^{p_{i,n}} (p_{i,j} \in \mathbb{N})$ (*cf.* 3.14). On note $\tilde{\mathrm{G}}_n^{\mathbb{R}}$ la sous-algèbre de $\tilde{\mathrm{G}}_n$ formée des fonctions f à valeurs réelles, *i.e.* $\tilde{\mathrm{G}}_n^{\mathbb{R}} = \{f \in \tilde{\mathrm{G}}_n ; f \text{ est réelle ou } \hat{f} \text{ est réelle}\}$ (*cf.* 3.19); si f est réelle, on peut supposer que les f_q qui définissent f sont aussi réels; d'apré 3.15, l'application $\tilde{\mathrm{G}}_n^{\mathbb{R}} \ni f \to \hat{f} \in \mathbb{R}[[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]]$ est injective.

Considérons l'éclatement $\pi : \tilde{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{R}^n$ de l'hyperplan de coordonnées $x_1 = \dots = x_r = 0$, $r \geqq 2$; la fibre $\pi^{-1}(0)$ s'identifie à l'espace projectif $\mathbb{P}_{r-1}(\mathbb{R})$ paramétré par les coordonnées homogènes $x_1 \circ \pi, \dots, x_r \circ \pi$; dans cette fibre, on distingue deux sortes de points :

– Les points (pour nous singuliers) $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_r$ correspondant aux axes de coordonnées $x_1, \dots, x_r$; si on choisit par exemple le point $a = \dot{x}_1$, on a un système de coordonnées locales en a pour $\tilde{\mathbb{R}}^n$, noté $(y_1, \dots, y_n)$ défini par $x_1 = y_1$, $x_2 = y_1 y_2, \dots, x_r = y_1 y_r$, $x_{r+1} = y_{r+1}, \dots, x_n = y_n$. Appelons quadrant d'indice q de $\mathbb{R}^n$, tout ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n ; x_i > 0, \forall i \in \mathrm{I}\}$, où I est un sous-ensemble à q éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$. L'image réciproque par π au voisinage de a du quadrant $(\mathbb{R}^{+*})^n$ est encore un $(\mathbb{R}^{+*})^n$.

– Les autres points, dit réguliers; en un tel point $a \in \pi^{-1}(0)$, on peut trouver un système de coordonnées locales de la forme :

$$x_1 = y_1 ; \qquad x_2 = y_1(\lambda_2 + y_2); \dots ; \qquad x_r = y_1(\lambda_r + y_r); \qquad x_{r+1} = y_{r+1}, \dots, x_n = y_n,$$

l'un des λ_i étant $\neq 0$. Comme on s'intéresse à $\pi^{-1}(\mathbb{R}^{+*})^n$, on peut supposer que tous ces λ_i sont $\geqq 0$; en de tels points, $\pi^{-1}(\mathbb{R}^{+*})^n$ est un quadrant d'indice $<n$.

Soit p un entier, $r<p\leqq n$, et considérons l'algèbre $\tilde{\mathbb{G}}^{\mathbb{R}}_{p-1}\{x_p, \ldots, x_n\}$ des germes Gevrey en $x_1, \ldots, x_{p-1}$ et analytiques en $x_p, \ldots, x_n$. Si $f\in\tilde{\mathbb{G}}^{\mathbb{R}}_{p-1}\{x_p, \ldots, x_n\}$ et si $a\in\pi^{-1}(0)$ est un point singulier, il est clair que le germe de $f\circ\pi$ en a appartient à $\tilde{\mathbb{G}}^{\mathbb{R}}_{p-1}\{y_p, \ldots, y_n\}$ (coordonnées $y_1, \ldots, y_n$) ; si $a\in\pi^{-1}(0)$ est un point régulier, avec par exemple $\lambda_r>0$, on voit que $(f\circ\pi)_a$ est analytique en $y_r, y_p, \ldots, y_n$ et Gevrey en les autres variables y_j.

5.2. Revenons aux théorèmes I et II. Dans le cas I, posons $f=\prod_{i,j} f_{i,j}$; dans le cas II, on doit montrer que $f\in\tilde{\mathbb{G}}^{\mathbb{R}}_n$ vérifie une inégalité de Łojasiewicz par rapport au germe de ses zéros. On procède par induction sur n, le cas $n=1$ étant trivial. On peut supposer que X est contenu dans le quadrant ouvert $(\mathbb{R}^{+*})^n$ et, pour II, il suffit de montrer que f vérifie une inégalité de Łojasiewicz en restriction à $(\mathbb{R}^{+*})^n$, car la restriction des f_{ij} ou de f à chaque hyperplan $x_i=0$ est encore Gevrey et donc on peut appliquer l'hypothèse d'induction sur n. On se ramène tout d'abord au cas où f et les f_{ij} sont analytiques en x_n.

Considérons l'éclatement de 5.1 ; il suffit de montrer le théorème I pour chaque germe semi-analytique $(\pi^{-1}(X))_a$, $a\in\pi^{-1}(0)$, et de même, le théorème II, pour $(f\circ\pi)_a$ (π est propre et surjective, et dans le cas I on utilise le fait que l'image continue d'un connexe est connexe ; dans le cas II, le fait que π est lipchitzienne). En chaque point régulier $a\in\pi^{-1}(0)$, les $f_{ij}\circ\pi$ ou $f\circ\pi$ sont analytiques en au moins une variable ; il suffit donc de regarder les points singuliers, et l'on éclate à nouveau certains plans de coordonnées en ces points singuliers, puis l'on recommence... La proposition 5.6 affirme qu'on peut choisir un arbre fini de tels éclatements de telle sorte que si a est un point singulier d'un éclatement final et si $(\tilde{\mathbb{R}}^n, a)\ni(y_1, \ldots, y_n)\to\pi(y_1, \ldots, y_n)\in\mathbb{R}^n, 0)$ est le morphisme composé des éclatements entre a et 0, on ait $\hat{f}\circ\pi=y_1^{\alpha_1}\ldots y_n^{\alpha_n}\hat{\varphi}(y_1, \ldots, y_n)$ avec $\hat{\varphi}(0)\neq 0$. Les $\hat{f}_{ij}\circ\pi$ ont donc la même forme et d'après 5.4, $f\circ\pi$ et les $f_{ij}\circ\pi$ sont tous le produit d'un monôme par un germe Gevrey inversible. Les théorèmes I et II sont donc trivialement vérifiés par $\pi^{-1}(X)$ et $f\circ\pi$ respectivement en ce point a.

5.3. Supposons que les f_{ij} et f appartiennent à $\tilde{\mathbb{G}}^{\mathbb{R}}_{p-1}\{x_p, \ldots, x_n\}$ avec $2\leqq p\leqq n$. On procède par induction sur p ; le cas $p=2$ a été démontré au paragraphe 4 ; supposons donc $p>2$.

Considérons les $\hat{f}_{ij}$ et $\hat{f}$ comme éléments de l'anneau des séries formelles $\Lambda[[x_1, \ldots, x_{p-1}]]$ avec $\Lambda=\mathbb{C}[[x_p, \ldots, x_n]]$. D'après la proposition 5.6 appliquée aux f_{ij} et $f\in\Lambda[[x_1, \ldots, x_{p-1}]]$, il existe un arbre fini d'éclatements (en des points singuliers) de telle sorte que si a est un point singulier d'un éclatement final et si $(\tilde{\mathbb{R}}^{p-1}, a)\ni(y_1, \ldots, y_{p-1})\to\pi(y_1, \ldots, y_{p-1})\in(\mathbb{R}^{p-1}, 0)$ est le morphisme composé des éclatements entre a et 0, on ait

$\hat{f}\circ\pi=y_1^{\alpha_1}\ldots y_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\hat{\varphi}(y_1, \ldots, y_n)$ avec $\hat{\varphi}(0, \ldots, 0, y_p, \ldots, y_n)\neq 0$. On en déduit, comme plus haut, une décomposition analogue pour les $\hat{f}_{ij}\circ\pi$ et chaque $f_{ij}\circ\pi$ est le produit d'un monôme par un $g_{ij}\in\tilde{\mathbb{G}}^{\mathbb{R}}_{p-1}\{y_p, \ldots, y_n\}$ (variables $y_1, \ldots, y_n$) tel que $\hat{g}_{ij}(0, \ldots, 0, y_p, \ldots, y_n)\neq 0$. On peut donc supposer que le germe semi-analytique $\pi^{-1}(X)$ est défini à l'aide des g_{ij}; après un changement linéaire de coordonnées sur les variables $y_p, \ldots, y_n$, on peut supposer que les $\hat{g}_{ij}$ sont toutes régulières en la variable y_n; enfin, par le théorème de préparation, on peut supposer que tous les g_{ij} sont des polynômes distingués en y_n à coefficients dans $\tilde{G}^{\mathbb{R}}_{p-1}\{y_p, \ldots, y_{n-1}\} \subset \tilde{G}^{\mathbb{R}}_{n-1}$. En procédant comme dans la preuve de 4.8 (Tarski-Seidenberg + hypothèse d'induction sur n), on démontre que $\pi^{-1}(X)$ vérifie les conclusions du théorème I; on démontre aussi le théorème II pour $f \circ \pi$, en reprenant les arguments de 4.9.

Si a est un point régulier de l'un des éclatements et si $\pi : (\tilde{\mathbb{R}}^{p-1}, a) \to (\mathbb{R}^{p-1}, 0)$ désigne encore le morphisme composé des éclatements entre a et 0, $f \circ \pi$ et les $f_{ij} \circ \pi$ sont analytiques en un nombre de variables $> n-p+1$, et l'on applique l'induction sur p,

C.Q.F.D.

On a utilisé la remarque suivante :

LEMME 5.4. — *Si* $f \in \tilde{G}_n$:

(1) $f(z_1, \ldots, z_{p-1}, 0, \ldots, 0) \in \tilde{G}_{p-1}$

(2) *si* $\hat{f}(z_1, \ldots, z_{p-1}, 0, \ldots, 0) = 0$, *on a* $f = \sum_{i=p}^{n} z_i g_i$, *avec* $g_i \in \tilde{G}_n$.

(*On a le même résultat avec* $\tilde{G}^{\mathbb{R}}_n$ *et l'on en déduit que* $\tilde{G}_n$, $\tilde{G}^{\mathbb{R}}_n$ *sont des anneaux locaux, l'idéal maximal étant engendré par* $z_1, \ldots, z_n$ *ou* $x_1, \ldots, x_n$.)

Preuve. — On se ramène au cas $p=n$; supposons que $f = \sum_{q=0}^{\infty} f_q$ avec f_q holomorphe dans l'ouvert U_q considéré en 3.14 ($g_i = z_1^{p_{i,1}} \ldots z_n^{p_{i,n}}$); on voit que $z \in U_q \Rightarrow (z_1, \ldots, z_{n-1}, tz_n) \in U_q$, $\forall t \in [0, 1]$ et

$$|f_q(z) - f_q(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0)| \, |z_n|^{-1} \leqq \sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{\partial f_q}{\partial z_n}(z_1, \ldots, z_{n-1}, tz_n) \right|.$$

D'après les inégalités de Cauchy, et quitte à rétrécir les U_q (*cf.* 5.5), on peut supposer qu'il existe des constantes $C > 0$, $0 < \rho < 1$, telles que

$\forall q : \left\| \frac{\partial f_q}{\partial z_n} \right\|_{U_q} \leqq C \rho^q$. Ainsi, la série $\sum_q (f_q(z) - f_q(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0)) z_n^{-1}$ converge vers une fonction $g \in \tilde{G}_n$; la fonction $f(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0) = \sum_q f_q(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0)$ appartient à $\tilde{G}_{n-1}$ et $f(z) - f(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0) = z_n g$; si $\hat{f}(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0) = 0$, on a $f(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0) = 0$, d'après la quasi-analyticité, d'où (2).

Remarque 5.5. — Les algèbres $\tilde{G}_n$, $G_{X, 0}$, etc. sont toutes stables par dérivation. Avec les notations de 3.14, définissons les ensembles U'^1_i, $U'^2_{i,q}$, U'_q etc. en remplaçant η par $\eta' < \eta$ et R par $R' < R$. Supposons que les g_i sont holomorphes au voisinage de $\bar{D}^n_R$ et posons $k = \inf_{1 \leqq i \leqq s} k_i$. Montrons tout d'abord qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall q$ et $\forall z \in U'_q$, la boule fermée de centre z et de rayon $\varepsilon (q+1)^{-1/k}$ soit contenue dans U_q.

Si $z \in U'_q$, on a pour tout $i = 1, \ldots, s$, $z \in U'^2_{i,q}$ ou $z \in U'^1_i$. Si $z \in U'^2_{i,q}$ et si $\|z' - z\| \leqq \varepsilon (q+1)^{-1/k}$, on aura par le théorème des accroissements finis et si $\varepsilon > 0$ est assez petit, $|g_i(z)-g_i(z')|<(R-R')(q+1)^{-1/k}$ et donc $z'\in U^2_{i,q}$. Si $z\in U'^1_i\setminus U'^2_{i,q}$, on a $|g_i(z)|\geqq R'(q+1)^{-1/k_i}\geqq R'(q+1)^{-1/k}$; si $\|z'-z\|\leqq\varepsilon(q+1)^{-1/k}$, on aura donc *a fortiori* : $\|z'-z\|\leqq(\varepsilon/R').\|g_i(z)\|$; alors $z'-z=g_i(z).u(z)$ avec $\|u(z)\|\leqq\varepsilon/R'$ et $g_i(z')-g_i(z)=g_i(z)(1+\varepsilon(z))$ et l'on peut choisir $\varepsilon>0$ assez petit pour que $|\arg(1+\varepsilon(z))|$ soit $<\eta-\eta'$. En conséquence, le point $z'\in U^1_i$, d'où notre assertion : $z'\in U_q=\bigcap_{i=1}^{q}(U^1_i\cup U^2_{i,q})$.

Comme $|f_q(z)|\leqq C\rho^q$ sur U_q, on a d'après les inégalités de Cauchy :

$$\frac{\|\partial^w f_q\|_{U'_q}}{\omega!}\leqq C\varepsilon^{-|\omega|}(q+1)^{|\omega|/k}\rho^q. \tag{5.5.1}$$

Pour ω fixé, si $\rho'>\rho$ et $\rho'<1$, on voit qu'il existe une constante C_ω telle que $\|\partial^w f_q\|_{U'_q}\leqq C_\omega\rho'^q$ ce qui montre que $\partial^\omega f\in G_{X,0}$. Par des majorations classiques, on déduit de (5.5.1) qu'en tout point de $\bar{X}$ assez voisin de l'origine, le développement asymptotique de f est Gevrey d'ordre $(k,\ldots,k)$.

Soit Λ un anneau commutatif et soit $f\in\Lambda[[x_1,\ldots,x_n]]$. Éclatons un hyperplan de coordonnées passant par 0, par exemple $x_1=\ldots=x_r=0$; dans la fibre au-dessus zéro, on a r points « singuliers » (*cf.* 5.1); éclatons à nouveau en chacun de ces points un hyperplan de coordonnées et répétons le processus en tous les points « singuliers » ainsi obtenus. Après un nombre fini de tels éclatements de points singuliers, on obtient un arbre et en chaque point de cet arbre, on a des coordonnées canoniques. On a utilisé plus haut le résultat suivant :

PROPOSITION 5.6. — *Il existe un arbre fini d'éclatements d'hyperplans de coordonnées* (*de codimension* 2), *tel que si a est un point singulier d'un éclatement final et si* $\pi:(\tilde{\mathbb{R}}^n,a)\ni(y_1,\ldots,y_n)\to\pi(y_1,\ldots,y_n)\in(\mathbb{R}^n,0)$ *est le morphisme composé des éclatements entre a et* 0, *on ait :*

$$f\circ\pi=y_1^{\alpha_1}\ldots y_n^{\alpha_n}\varphi(\gamma_1,\ldots,y_n)\qquad avec\quad\varphi(0)\neq0;\quad\alpha_i\in\mathbb{N}.$$

Preuve. — Le résultat est inclus dans [2], p. 24-29. Voici une preuve, assez différente d'une version simplifiée de [2], que m'a communiquée P. Milman.

Écrivons f sous la forme $\sum_{\omega\in\Omega}f_\omega x^\omega$ avec $f_\omega\in\Lambda[[x_1,\ldots,x_n]]$ et $f_\omega(0)\neq0$; Ω sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^n$. D'après le lemme qui suit, il existe une suite finie d'éclatements d'hyperplans de coordonnées de codimension 2, telle que si a est un point singulier final et si $\pi:(\tilde{\mathbb{R}}^n,a)\ni(y_1,\ldots,y_n)\to\pi(y_1,\ldots,y_n)\in(\mathbb{R}^n,0)$ est le morphisme composé des éclatements entre a et 0, on ait $x^\omega\circ\pi=y^\mu$, $\mu\in\mathbb{N}^n$, les μ décrivant un sous-ensemble de $\mathbb{N}^n$, totalement ordonné pour l'ordre produit sur $\mathbb{N}^n$. Si μ_0 est le plus petit des μ, on a :

$$f\circ\pi=\sum(f_\omega\circ\pi)y^\mu=y^{\mu_0}.(\sum(f_\omega\circ\pi)y^{\mu-\mu_0})=y^{\mu_0}.\varphi(y_1,\ldots,y_n)\qquad\text{avec}\quad\varphi(0)\neq0,$$

C.Q.F.D.

LEMME 5.7. — *Soit* Ω *un sous-ensemble fini de* $\mathbb{N}^n$; *il existe un arbre fini d'éclatements d'hyperplans de coordonnées de codimension* 2, *tel que si a est un point final et si*

$\pi:(\tilde{\mathbb{R}}^n, a)\ni(y_1, \ldots, y_n)\to\pi(y_1, \ldots, y_n)\in(\mathbb{R}^n, 0)$ *est le morphisme composé des éclatements entre* a *et* 0, *on ait* $\forall\,\omega\in\Omega: x^{\omega}\circ\pi=y^{\mu}$, *les* μ *formant un sous-ensemble de* $\mathbb{N}^n$ *totalement ordonné pour l'ordre produit.*

Preuve. — On peut supposer que card $\Omega=2$, car par itération, on a le résultat pour un Ω quelconque. En éclatant un nombre fini de fois l'origine, on résout facilement le cas $n=2$. Si $n\geqq 3$, on peut, après une mise en facteurs, supposer que les deux monômes sont sans facteurs communs et donc, après une éventuelle permutation de coordonnées, de la forme : $x_1^{\omega_1}\ldots x_r^{\omega_r}$ et $x_{r+1}^{\omega_{r+1}}\ldots x_n^{\omega_n}$ avec $\omega_i\geqq 0$, $\forall\, i$; $\omega_n=\inf_{1\leqq i\leqq n}\omega_i$.

On procède par récurrence sur inf ω_i, le cas $\omega_n=0$ permettant d'appliquer l'induction sur n. On suppose donc $\omega_n>0$ et on applique l'hypothèse de récurrence (sur n) à $x_1^{\omega_1}\ldots x_r^{\omega_r}$ et $x_{r+1}^{\omega_{r+1}}\ldots x_{n-1}^{\omega_{n-1}}$; après éclatements d'hyperplans de codimention 2 (en les variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$), on se ramène au cas où les monômes sont de la forme $x_1^{\omega'_1}\ldots x_{n-1}^{\omega'_{n-1}}$ et $x_n^{\omega_n}$. Si l'un des ω'_i est $<\omega_n$, on applique la seconde induction; sinon, on éclate par exemple l'hyperplan $x_1=x_n=0$, et on se ramène aux monômes $x_1^{\omega'_1-\omega_n}x_2^{\omega'_2}\ldots x_{n-1}^{\omega'_{n-1}}$ et $x_n^{\omega_n}$; après itération, on se ramène au cas où $\omega'_1<\omega_n$, et l'on applique alors la seconde induction.

6. Extensions-Exemple

6.1. Rappelons les propriétés de $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ éparses dans les pages précédentes; $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ est une algèbre locale (*cf.* 5.4) et son idéal maximal est engendré par $x_1, \ldots, x_n$; $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}\supset\mathbb{R}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ est stable par dérivation (*cf.* 5.5). L'algèbre $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ est « faiblement noethérienne », *i.e.* elle n'est peut être pas noethérienne, mais toute suite décroissante de germes $f_1^{-1}(0)\supset f_2^{-1}(0)\supset\ldots\supset f_i^{-1}(0)\supset\ldots$ avec $f_i\in\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ est stationnaire. Pour démontrer cela, on procède exactement comme dans la preuve des théorèmes I et II; on se ramène, par éclatement et application du théorème de préparation, au cas où f_1 appartient à $\tilde{G}_{n-1}^{\mathbb{R}}[x_n]$ et est un polynôme distingué; en divisant les f_i par f_1, on se ramène au cas où tous les f_i appartiennent à $\tilde{G}_{n-1}^{\mathbb{R}}[x_n]$. Par hypothèse d'induction, $\tilde{G}_{n-1}^{\mathbb{R}}$ est faiblement noethérienne, et il en est de même de $\tilde{G}_{n-1}^{\mathbb{R}}[x_n]$ d'après un théorème de [9], d'où le résultat.

Par ailleurs, tout germe semi-analytique X défini par un nombre fini de $f_{i,j}\in\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$, admet un nombre fini de composantes connexes : l'algèbre $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ est donc topologiquement noethérienne, au sens de [9], et on peut lui appliquer tous les résultats de [9]. Par exemple, soit $(X, 0)\subset((\mathbb{R}^+)^{n+p}, 0)$ un germe semi-analytique défini à l'aide d'un nombre fini de $f_{i,j}\in\tilde{G}_{n+p}^{\mathbb{R}}$ et soit $\pi:(\mathbb{R}^+)^{n+p}\to(\mathbb{R}^+)^p$ la projection canonique. Si $\underset{\sim}{X}$ est un représentant de X et si B est une boule ouverte centrée en 0 de $\mathbb{R}^{n+p}$ de rayon assez petit, le nombre de composantes connexes des fibres $\pi^{-1}(y)\cap\underset{\sim}{X}\cap B$ est uniformément borné quand y décrit $\mathbb{R}^p$.

6.2. On peut en utilisant la théorie de Khovanskii, « compléter » les algèbres $\tilde{G}_n^{\mathbb{R}}$ en conservant toutes les propriétés topologiques ou métriques. Par exemple, notons par $\mathcal{O}$ la donnée pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'une sous-algèbre $\mathcal{O}_n$ de l'algèbre $\mathscr{H}_0(\mathbb{R}^{+*})^n$ des germes à l'origine de fonctions analytiques réelles sur $(\mathbb{R}^{+*})^n$; on suppose que $\forall n, p : \mathcal{O}_n \otimes \mathcal{O}_p \subset \mathcal{O}_{n+p}$. Nous écrirons $\mathcal{O} < \mathcal{O}'$ si $\mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et nous définissons ainsi une relation d'ordre sur l'ensemble de ces familles. Soi $\mathcal{A}$ la plus petite famille $\mathcal{O}$ vérifiant les conditions suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $\mathcal{O}_n$ est algébriquement close dans $\mathcal{H}_0 (\mathbb{R}^{+*})^n$ et $\mathcal{O}_n \supset \tilde{\mathrm{G}}_n^{\mathbb{R}}$.

b) Si $\varphi \in \mathcal{H}_0 (\mathbb{R}^{+*})^n$ a ses dérivées dans $\mathcal{O}_n$, on a $\varphi \in \mathcal{O}_n$.

c) Si $\varphi \in \mathcal{O}_n$ est >0 en chaque point au voisinage de 0, Log φ, φ^α (α réel) appartiennent aussi à $\mathcal{O}_n$.

d) Les $\mathcal{O}_n$ sont stables par composition, *i. e.* si $f : ((\mathbb{R}^{+*})^n, 0) \to (\mathbb{R}^{+*})^p, 0)$ a ses composantes dans $\mathcal{O}_n$ et si $\varphi \in \mathcal{O}_p$, on a $\varphi \circ f \in \mathcal{O}_n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}_n$ est une algèbre topologiquement noethérienne qui vérifie encore le théorème II (la preuve est analogue à celle de [10], théorème 3.4). On peut, dans ce contexte général des fonctions Gevrey, considérer des ensembles sous-analytiques, des hypersurfaces pfaffiennes : les extensions ne présentent aucune difficulté.

6.3. *Exemple.* — Les développements asymptotiques Gevrey considérés précédemment ne se rencontrent pas directement dans les problèmes : il faut au préalable désingulariser ou plus simplement uniformiser. Voici un exemple simple.

Soit $g(t, z)$ holomorphe dans $\mathrm{D}_t \times \mathrm{D}_z$ (D_t, D_z sont des polydisques centrés en 0 de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^n$ respectivement); soit $f(t, z)$ holomorphe dans $\mathrm{S}_t \times \mathrm{D}_z$, où $\mathrm{S}_t \subset \mathrm{D}_t$ est un secteur : $|\arg t - \theta_0| < \varepsilon$, $0 < |t| < \mathrm{R}$; considérons l'intégrale :

$$h(z) = \int_0^{t_0} \frac{f(t, z)}{g(t, z)} \, dt$$

où $t_0 \in \mathrm{S}_t$ et l'intégrale est prise sur le segment $[0, t_0]$; on suppose que $g(t, 0) \neq 0$ et donc, par le théorème de préparation, on peut supposer que $g(t, z)$ est un polynôme distingué en t ; on suppose aussi que $f(t, z)$ est à décroissance exponentielle, uniformément en z, quand $t \to 0$ dans le secteur S_t, *i. e.* $\forall (t, z) \in \mathrm{S}_t \times \mathrm{D}_z$, $|f(t, z)| \leq \mathrm{C} e^{-\alpha/|t|}$ ($\mathrm{C} > 0$, $\alpha > 0$). La fonction $h(z)$ est définie et holomorphe sur l'ouvert semi-analytique formé des z tels que $g(t, z) \neq 0$, $\forall t \in [0, t_0]$.

Posons $g(t, z) = g_1(t, z)^{n_1} \ldots g_s(t, z)^{n_s}$, où les g_i sont des polynômes distingués irréductibles distincts deux à deux et $n_i \in \mathbb{N}^*$. Après éclatements en z, on peut supposer que le discriminant $\Delta(z)$ de $g_1(t, z) \ldots g_s(t, z)$ a son germe de zéros en 0 contenu dans la réunion des hyperplans $z_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. D'après le théorème de Puiseux généralisé et quitte à remplacer chaque z_i par un z_i^p ($p \in \mathbb{N}$ convenable), on peut supposer que

$$g(t, z) = \prod_{i=1}^{s} (t - \varphi_i(z))$$

avec $\varphi_i \in \mathbb{C}\{z\}$ et $\varphi_i(0) = 0$. Après de nouveaux éclatements, on peut supposer que chaque φ_i est de la forme :

$$\varphi_i(z) = z_1^{p_{i,1}} \ldots z_n^{p_{i,n}} (\alpha_i + \psi_i(z))$$

avec $p_{i,j} \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$, $\psi_i \in \mathbb{C}\{z\}$ et $\psi_i(0) = 0$.

Supposons que $\forall i=1, \ldots, s : |\arg \alpha_i - \arg t_0| > \pi/2$. On peut écrire

$$h(z) = \sum_{q \geqq 1} h_q(z) \qquad \text{avec} \quad h_q(z) = \int_{t_0/q+1}^{t_0/q} \frac{f(t, z)}{g(t, z)}\, dt.$$

Chaque $h_q(z)$ est holomorphe dans $U_q = \bigcap_{i=1}^{s} (U_i^1 \cup U_{i,q}^2)$ avec

$$U_i^1 = \left\{ z \in D_R^n ;\ z_1^{p_{i,1}} \ldots z_n^{p_{i,n}} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad |\arg z_1^{p_{i,1}} \ldots z_n^{p_{i,n}}| < \frac{\pi}{2} + \eta \right\}$$

$$U_i^2 = \{ z \in D_R^n ;\ |z_1^{p_{i,1}} \ldots z_n^{p_{i,n}}| \leqq R\, t_0/q+1 \}$$

(R, η constantes >0 assez petites) et $|h_q|$ est uniformément borné sur U_q par $C\rho^q$ ($C>0$, $0<\rho<1$ constantes convenables). Il en résulte que $h(z) \in \tilde{G}_n$. Les conditions $|\arg \alpha_i - \arg t_0| > \pi/2$ sont bien sûr très restrictives : pour les lever, on doit supposer que l'ouverture de S_t est π et faire varier t_0 dans S_t.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Balser, *Summation of Formal Power Series Through Iterated Laplace Transform*, Universität Ulm, preliminary version, 1991.

[2] E. Bierstone et P. Milman, *Semi-Analytic and Subanalytic Sets* (*Publications de l'I.H.E.S.*, n° 67, 1988).

[3] J. Bochnak, M.-F. Coste-Roy et M. Coste, *Géométrie algébrique réelle*, Springer Verlag, Ergebnisse der Mathematik, 1987.

[4] W. Jurkat, *Summability of Asymptotic Series*, preprint, Universität Ulm, 1990.

[5] A. G. Khovanskii, *Real Analytic Varieties with the Finiteness Property and Complex Abelian Integrals* (*Funct. Anal. an appl.*, vol. 18, 1984, p. 199-207).

[6] B. Malgrange et J.-P. Ramis, *Fonctions multisommables* (*Annales Institut Fourier*, vol. 41, n° 3, 1991, p. 1-16).

[7] R. Moussu et C. Roche, *Théorie de Khovanskii et problème de Dulac* (*Inventiones*, vol. 105, 1991, p. 431-441).

[8] M. Nagata, *Local Rings* (*Wiley* 1962, *Interscience tracts in pure and applied mathematics*, 13).

[9] J.-Cl. Tougeron, *Algèbres analytiques topologiquement noethériennes* (théorie de Khovanskii) (*Annales Institut Fourier*, vol. 41, n° 4, 1991).

[10] J.-Cl. Tougeron, *Inégalités de Lojasiewicz globales* (*Annales de l'Institut Fourier*, vol. 41, n° 4, 1991).

[11] J.-Cl. Tougeron *An Introduction to the Theory of Gevrey Expansions and the Borel Laplace Transform with some Applications* (cours de 3ᵉ cycle, 1990) et *Sur les ensembles analytiques réels définis par des équations Gevrey au bord*, manuscrit, 1990.

[12] J.-Cl. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables* (*Ergebnisse der Mathematik*, vol. 71, 1972).

(Manuscrit reçu le 26 juin 1992,
révisé le 15 décembre 1992.)

J.- Cl. Tougeron,
Université de Rennes-I,
IRMAR,
Campus de Beaulieu,
35402 Rennes Cedex,
France.