

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. CUVIER

Algèbres de Leibnitz : définitions, propriétés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 27, n° 1 (1994), p. 1-45

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1994_4_27_1_1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRES DE LEIBNITZ : DÉFINITIONS, PROPRIÉTÉS

PAR C. CUVIER

ABSTRACT. — Leibnitz algebras are algebras whose product, denoted $[\cdot, \cdot]$, satisfies a certain form of Jacobi's identity, without any symmetry assumption. So, all Lie algebras are Leibniz. A (co)homological theory is defined for these algebras, and can be considered as non-commutative Lie (co)homology. The standard geometric interpretations in low degrees (H^2 classifies extensions, and so forth...) remain true. We apply these functors to the Lie algebra $\mathfrak{gl}(A)$ of matrices with finite size over A an associative, unital algebra over a base field $k \supset \mathbb{Q}$, and show that $HL_*(\mathfrak{gl}(A), k)$ is the tensor algebra on the Hochschild homology of A . This result is a non-commutative analogue of Loday-Quillen's theorem stating that $H_*(\mathfrak{gl}(A), k) = \Lambda^* HC_{*-1}(A)$.

Introduction

Le but de ce travail est de démontrer que, pour toute algèbre A associative unitaire sur un corps k de caractéristique nulle, l'homologie de Hochschild de A est la partie primitive de l'homologie de Leibnitz de l'algèbre de Lie des matrices $\mathfrak{gl}(A)$. Pour cela, on définit les algèbres de Leibnitz comme généralisation des algèbres de Lie, et on construit une théorie (co)homologique associée, appelée homologie de Leibnitz.

Le chapitre I présente cette généralisation des algèbres de Lie. Le principe en paraît *a posteriori* simple. On peut écrire l'identité de Jacobi de bien des façons compte tenu de l'antisymétrie du crochet des algèbres de Lie. L'une d'entre elle traduit exactement la phrase: «une algèbre de Lie est un module à droite sur elle-même». Cette identité, appelée identité de Leibnitz, est prise comme unique axiome définissant les algèbres de Leibnitz. En particulier, aucune propriété d'antisymétrie n'est plus requise sur le crochet. Ceci entraîne que toute algèbre de Lie est une algèbre de Leibnitz, la réciproque étant évidemment fausse.

Dans la section 1 sont données les définitions, ainsi que la détermination exhaustive des algèbres de Leibnitz de dimension 2 sur un corps (lemme 2). On définit la notion de module sur une algèbre de Leibnitz ainsi que celle de centre essentiel. Ce module, engendré par les carrés $[x, x]$, est le plus petit sous-module d'une algèbre de Leibnitz tel que le quotient hérite d'une structure d'algèbre de Lie, et tout morphisme de l'algèbre de Leibnitz vers une algèbre de Lie quelconque se factorise à travers cette algèbre quotient (proposition 2).

La section 2 traite du problème de la détermination des classes d'isomorphie d'algèbres de Leibnitz dont le centre est de faible dimension ou codimension. On montre que les

classes de similitude de matrices inversibles sur k interviennent de manière cruciale dans cette classification partielle.

La fin de la section est consacrée aux liens de la notion d'algèbres de Leibnitz avec les algèbres de Lie partielles introduites par H.-J. Baues et D. Conduché [BC]. Dans certains cas, les définitions données dans cet article coïncident avec les axiomes des algèbres de Leibnitz. Les algèbres de Lie partielles ont été introduites dans le cadre de la théorie des groupes en vue d'étudier les modules croisés (nous renvoyons à la section 3 pour toutes les définitions); il en sera question plus loin.

Après cette présentation, on aborde un point déjà plus complexe : la construction d'une théorie (co)homologique adaptée aux algèbres de Leibnitz qui ait des propriétés aussi proches que possible de l'homologie des algèbres de Lie. C'est le propos du chapitre II.

La théorie en question est calculée au moyen d'un complexe construit sur une algèbre tensorielle, alors que le complexe standard de Chevalley-Eilenberg calculant l'homologie de Lie est bâti sur une algèbre extérieure. On pourrait penser qu'il suffit, dans la formule donnant la différentielle de ce dernier complexe, de remplacer les signes \wedge par des signes \otimes . La flèche obtenue par ce relèvement « naïf » n'est malheureusement pas de carré nul. En profitant de ce que, dans la formule de Chevalley-Eilenberg, on peut remplacer n'importe quel produit extérieur par un produit n'en différant que par l'ordre des termes, on trouve le « bon » relèvement, c'est-à-dire un des plus naturels qui, lui, est de carré nul. Le premier à s'être aperçu de cette possibilité est J.-L. Loday; c'est cette découverte qui a motivé et rendu possible le présent travail. Il est à remarquer qu'un seul axiome suffit pour démontrer ce résultat (théorème 1), l'identité de Leibnitz, alors que l'identité de Jacobi et l'antisymétrie sont indispensables dans le cas des algèbres de Lie.

On montre que, en degrés 0 et 1, cette homologie, qui, pour une algèbre L et un L -module M , est notée $HL_*(L, M)$, s'interprète exactement comme les groupes correspondants pour les algèbres de Lie, et ils coïncident sur les algèbres de Lie. Puisque toute algèbre de Lie est de Leibnitz, il est naturel de comparer les deux homologies dans ce cadre. Les calculs de la section 2 prouvent que les deux théories diffèrent notablement en degrés plus grands que 2. En particulier, si L est de dimension finie sur k et que k désigne le L -module trivial k , $HL_n(L, k)$ peut être non nul pour tout n , ce qui est clairement faux pour l'homologie de Lie.

La section 3 est consacrée à la définition de la cohomologie $HJ^*(L, M)$. La définition de la différentielle coule maintenant de source, mais un problème technique de taille surgit : alors que les applications n -linéaires antisymétriques de L dans M se décomposent en sommes de cup-produits (cf. [ChE]), ce qui permet une démonstration simple par récurrence de $\delta^2 = 0$, ceci n'est plus vrai si on travaille avec des applications multilinéaires quelconques. Ceci n'empêche pas le cobord évident d'être de carré nul (théorème 5), mais rend la preuve plus délicate. Les interprétations en degrés 0 et 1 sont semblables à celles des groupes de cohomologie de Lie.

Dans les sections 4 et 5, on montre que la similitude d'interprétation s'étend en degrés 2 et 3. La section 4 a pour but de montrer que certaines extensions (dites symétriques) d'une algèbre de Leibnitz L par un L -module M sont classées par le groupe $HL^2(L, M)$

(théorème 7). La preuve ressemble essentiellement à celle donnée dans [CE] pour les algèbres de Lie.

La section 5 est consacrée aux modules croisés sur une algèbre de Leibnitz, avec des définitions analogues au concept de même nom pour les algèbres de Lie. Cette analogie ne soit pas masquer le fait que plusieurs « relèvements » des définitions étaient possibles à cause de l'antisymétrie du crochet, et qu'un seul d'entre eux possède des propriétés raisonnables. Sous des hypothèses techniques ad hoc, peu éloignées de celles requises pour les algèbres de Lie, les classes d'équivalence de modules croisés de noyau L et de conoyau P sont en bijection avec le groupe $HL^3(P, L)$ (théorème 8). Les premiers résultats dans ce sens ont été donnés par Mori [Mo] pour les algèbres de Lie. Un théorème relatif existe également si on fixe l'algèbre-but du module croisé. Démontré dans le contexte de Lie dans [KL], son analogue est prouvé sous des hypothèses à peine plus restrictives dans cette section (théorème 9).

Enfin, la section 6 est consacrée à la construction et à l'étude du cup-produit en cohomologie de Leibnitz. Les démonstrations sont de nature combinatoire, pour le motif de non-surjectivité déjà mentionné à propos de l'homologie. La formule de définition est celle donnée pour la cohomologie de Lie dans [CE]. On montre qu'elle définit un produit associatif et commutatif au sens gradué (théorème 10).

Le chapitre III est de nature assez différente. Son but est de démontrer le résultat central, qui est que l'homologie de Leibnitz de l'algèbre des matrices $gl(A)$ est l'algèbre extérieure sur l'homologie de Hochschild de A (A désigne une algèbre associative unitaire sur un corps k de caractéristique nulle).

La section 1 est consacrée à la construction d'un module présimplicial sur $k[U_*] \otimes A^{\otimes *}$ (théorème 1), U_n désignant la classe de conjugaison de la permutation $\tau = (1, 2, \dots, n)$ dans le groupe symétrique S_n . Dans la section 2, on prouve que l'homologie de l'algèbre de Leibnitz $gl(A)$ est une algèbre de type Hopf dont la partie primitive s'identifie à l'homologie de ce complexe (théorème 2). La preuve utilise la théorie des invariants développée dans [LQ] et [L] dans le cas des algèbres extérieures.

La section 3 est consacrée à la preuve du théorème 3, qui montre que le complexe introduit dans la section 1 est quasi-isomorphe au complexe de Hochschild de A . La preuve consiste en fait à exhiber une équivalence de chaînes en sens inverse. J.-L. Loday a étendu ce résultat en exhibant une homotopie explicite, de la manière suivante : l'homologie de Leibnitz de l'algèbre des matrices $gl(A)$ est isomorphe à l'algèbre tensorielle sur l'homologie de Hochschild de A . Les hypothèses sont les mêmes que pour le résultat de [LQ] où Leibnitz est remplacé par Lie et homologie de Hochschild par homologie cyclique.

Dans la section 4, on aborde le problème de la stabilité des groupes d'homologie $HL_n(gl_p(A))$. On obtient des résultats identiques à ceux donnés dans [LQ], sauf pour le premier groupe d'obstruction, qui est le conoyau de la flèche $HL_n(gl_{n-1}(A)) \rightarrow HL_n(gl_n(A)) \simeq HL_n(gl(A))$ induite par l'inclusion évidente. Pour A commutative, dans le cas de l'homologie de Lie, on obtenait $\Omega^{n-1}/d\Omega_A^{n-2}$; pour l'homologie de Leibnitz, on obtient $\Omega_A^{n-1}/d\Omega_A^{n-2}$ (théorème 5).

Quant à la section 5, on y montre, par des techniques partiellement empruntées à [LP], que, sur le complexe $(\mathfrak{gl}(A)^{\otimes *})_{\mathfrak{gl}(k)}$, existent des λ -opérations induites par les puissances extérieures qui, par restriction au complexe de Hochschild, coïncident avec les λ -opérations telle qu'elles sont données dans [L1]. Mieux : les quasi-isomorphismes de la section 3 induisent un diagramme commutatif entre les deux familles de λ -opérations (théorème 6).

CHAPITRE I

Algèbres de Leibnitz : définition, propriétés

Dans ce premier chapitre, nous allons définir la notion d'algèbre de Leibnitz, leur motivation principale n'apparaissant clairement qu'au chapitre suivant.

1. Définitions, exemples

Dans tout ce qui suit, k est un anneau commutatif, et toutes les algèbres envisagées seront k -libres. Les résultats où des hypothèses supplémentaires sont nécessaires (en particulier les théorèmes de classification) seront signalés explicitement.

DÉFINITION 1. — Une algèbre de Leibnitz sur k est la donnée d'un k -module L muni d'une application linéaire $L \otimes L \rightarrow L$, dont l'effet sur $x \otimes y$ sera noté $[x, y]$, vérifiant l'identité :

$$\forall (x, y, z) \in L^3, \quad [[x, y], z] - [[x, z], y] = [x, [y, z]].$$

On appellera morphisme d'algèbres de Leibnitz une application bilinéaire commutant aux crochets. Les algèbres de Leibnitz et leurs morphismes forment clairement une catégorie.

Si L est un k -module muni d'une application bilinéaire $L \otimes L \rightarrow L$ notée $[\cdot, \cdot]$, on dira que le triplet (x, y, z) vérifie l'identité de Leibnitz si et seulement si :

$$[[x, y], z] - [[x, z], y] = [x, [y, z]].$$

Donnons tout de suite quelques conséquences simples de l'identité de Leibnitz.

DÉFINITION 2. — Le centre d'une algèbre de Leibnitz est le noyau de l'application $x \mapsto [\cdot, x]$, notée ad .

Il en résulte immédiatement que si on quotiente une algèbre de Leibnitz par son centre, ou même par le sous-espace engendré par les $[x, x]$, on obtient pour quotient une algèbre de Lie.

PROPOSITION 1. — (a) *Tout élément de la forme $[x, x]$ ou $[x, y] + [y, x]$ est central ;*
(b) *L'identité de Leibnitz appliquée à un triplet (y, x, x) a ses deux membres nuls.*

Preuve. — (a) S'obtient en ajoutant les identités relatives à (x, y, z) et (x, z, y) ;
(b) Vient de l'identité relative à (x, y, y) , sans hypothèse de caractéristique. \square

Le lemme suivant va être très utile pour déterminer quels produits sont de Leibnitz avec le moins de calculs redondants possibles.

LEMME 1. — Soit L un k -module muni d'une application bilinéaire notée $[\cdot, \cdot]$, dite produit. On suppose que le sous-module engendré par les $[x, x]$ annule à droite le produit. Dans une telle algèbre, l'identité de Leibnitz est vraie pour le triplet (x, y, z) si et seulement si elle l'est sur le triplet (x, z, y) .

Preuve. — Les deux égalités sont l'opposée l'une de l'autre. \square

Exemples. — (a) Toute algèbre de Lie est de Leibnitz: si le crochet est supposé antisymétrique, l'identité de Leibnitz est équivalente à l'identité de Jacobi;

(b) LEMME 2. — Si k est un corps, les algèbres de Leibnitz sur k de dimension 2 sont, à isomorphisme près, de l'un des 4 types suivants, deux à deux non isomorphes :

$$\left. \begin{aligned} \forall x, y, [x, y] &= 0; \\ [e, f] &= -[f, e] = e, [e, e] = [f, f] = 0; \end{aligned} \right\} \text{seules algèbres de Lie}$$

$$[e, e] = [f, e] = [f, f] = 0, \quad [e, f] = e;$$

$$[e, e] = [f, e] = [e, f] = 0, \quad [f, f] = \lambda e, \quad \text{avec } \lambda \in k/k^2.$$

Preuve. — De trois choses l'une: ou bien le centre est de dimension 2 (premier type); ou bien il est réduit à 0, ce qui donne l'antisymétrie du second type, en prenant e comme base de $[L, L]$ et en normalisant f (ce pourquoi il a été supposé que k est un corps). Ou bien non: soit alors e un générateur du centre, et f un vecteur non central. Posons $[e, f] = \alpha e$ et $[f, f] = \beta e$.

Un isomorphisme entre deux telles algèbres a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ dans la base (e, f) et il est clair que, si β est non nul, une algèbre de couple (α, β) est isomorphe à une de couple $(0, \beta)$. En normalisant f , on arrive aux types 3 et 4, qui ne peuvent certainement pas être isomorphes. \square

La présence d'éléments centraux particuliers nous amène à la

DÉFINITION 3. — Le k -module engendré par les éléments d'une algèbre de Leibnitz L de la forme $[x, x]$ s'appelle centre essentiel de L .

Cette sous-algèbre abélienne puisque centrale vérifie la

PROPOSITION 2. — Soit L une algèbre de Leibnitz, L_0 une algèbre de Lie et L' l'algèbre de Lie quotient de L par son centre essentiel. Tout morphisme de L dans L_0 se factorise sous la forme $f = gp$, où p est la projection canonique $L \rightarrow L'$ et g un morphisme d'algèbres de Lie.

Preuve. — Immédiate, les éléments du centre essentiel étant forcément annulés par tout morphisme à valeurs dans une algèbre de Lie. \square

Nous pouvons définir aussi la notion de module sur une algèbre de Leibnitz, notion qui va permettre (voir chapitre suivant) entre autres de définir une théorie de (co)homologie sur ces algèbres.

DÉFINITION 4. — Un module M sur une algèbre de Leibnitz L sur k est un k -module muni d'une application bilinéaire $M \otimes L \rightarrow M$, dont l'effet sur $m \otimes x$ sera noté $[m, x]$, vérifiant l'identité :

$$\forall m \in M, \quad \forall (x, y) \in L^2, \quad [[m, x], y] - [[m, y], x] = [m, [x, y]].$$

Exemples. — (a) Toute algèbre de Leibnitz est un module sur elle-même ; ceci explique la notation uniforme adoptée pour le produit dans L et son action sur M . Il ne devrait en découler aucune ambiguïté.

(b) Soit L de Leibnitz. On peut donner à $L^{\otimes n}$, pour tout n , une structure de L -module par :

$$[(x_1 \otimes \dots \otimes x_n), x] = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\dots \otimes [x_i, x] \otimes \dots)$$

où le crochet est en position i et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un n -uplet quelconque d'idempotents fixé une fois pour toutes. En particulier, on peut choisir $\alpha_i = 1 \forall i$.

Remarque. — Un module de Leibnitz est nécessairement à droite. On pourrait appeler les algèbres de Leibnitz «à droite» également. Il existe une version duale, où on appellerait de Leibnitz «à gauche» une algèbre dont le crochet vérifierait $[x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z]$. La catégorie de ces algèbres est clairement isomorphe à celle décrite précédemment, l'isomorphisme respectant les espaces vectoriels et changeant le produit $[x, y]$ en $[y, x]$. Nous ne nous occuperons pas des algèbres à gauche, dont le comportement est clairement identique à celui des algèbres à droite.

2. Théorèmes de classification

Nous allons maintenant donner quatre théorèmes de classification pour les algèbres de Leibnitz de centre de faible dimension ou codimension. Leur principe est similaire : on commence par donner une description de l'algèbre à l'aide de sous-espaces plus petits et d'applications structurales. Puis on rigidifie cet ensemble de données au sein d'une classe d'isomorphie, ce qui les rend plus faciles à comparer et classer.

Dans la suite, k est supposé être un corps. Les crochets des algèbres de Lie obtenues comme quotient seront notés $\langle \dots \rangle$, pour les distinguer des produits de Leibnitz dont ils proviennent.

PROPOSITION 3. — Soit L une algèbre de Leibnitz dont le centre est un hyperplan, et soit n sa dimension. La structure de cette algèbre est décrite par la donnée d'un k -module E de dimension $n-1$, d'un endomorphisme φ de E et d'un élément x de E , avec $(\varphi, x) \neq (0, 0)$. Réciproquement, une telle donnée permet de construire une algèbre de Leibnitz de centre un hyperplan.

Preuve. — On définit sur $E \times k$ le produit suivant :

$$[(v, \lambda), (v', \lambda')] = \lambda' (\lambda x + \varphi(v), 0)$$

qui vérifie clairement l'identité de Leibnitz, puisque tout crochet est central, et qui n'est pas abélienne, vu que φ et x ne sont pas tous deux nuls. Réciproquement, étant donné L , on prend pour E son centre. Le produit est totalement déterminé par $\text{ad}(e)$, avec e non central. Comme $[v, e] + [e, v]$ est central, $[v, e]$ est central si v l'est ; soit φ la restriction de $\text{ad}(e)$ à E . Enfin, on note x le crochet $[e, e]$, qui est dans E . Il est clair que l'identité de Leibnitz n'introduit aucune contrainte sur φ et x . D'autre part, le fait que L n'est pas abélienne impose $(\varphi, x) \neq (0, 0)$, comme on le vérifie directement. \square

Nous aurons besoin de la

DÉFINITION 5. — On désignera par $\Phi(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence des automorphismes de k^n par conjugaison (ou, de manière équivalente, l'ensemble des classes de similitudes de matrices inversibles de taille n sur k).

Ceci permet de formuler le :

THÉORÈME 1. — (a) Les classes d'isomorphie des algèbres de Leibnitz sur k de dimension n à centre hyperplan dont le φ associé est surjectif forment un ensemble en bijection avec $\Phi(n-1)$ par $(E, \varphi, x) \mapsto \dot{\varphi}$ et $\dot{\varphi} \mapsto (E, \varphi, 0)$.

(b) L'ensemble des classes de congruence projective des endomorphismes singuliers de E s'injecte dans les classes d'isomorphie d'algèbres à φ non surjectif par $0 \mapsto (E, 0, x)$ et $\dot{\varphi} \mapsto (E, \varphi, 0)$.

Preuve. — Un isomorphisme de deux telles algèbres a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & x_0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec α automorphisme et λ inversible. La compatibilité des crochets impose les relations :

$$\varphi = \lambda \alpha \varphi' \alpha^{-1} \quad \text{et} \quad \alpha x = \lambda^2 x' + \lambda \varphi' x_0.$$

Si φ est surjectif, φ' l'est aussi et on peut supposer x nul, ce qui mène à la première assertion. Pour la seconde, elle vient de ce qu'on peut supposer $\varphi = \varphi'$; mais il n'est pas vrai en général que tous les choix de x donneront des algèbres isomorphes, sauf pour φ nul. \square

Nous allons nous intéresser maintenant au cas symétrique, à savoir celui où le centre est une droite.

PROPOSITION 4. — Soit L une k -algèbre de Leibnitz de dimension n , de centre une droite dont l'action à gauche sur L est non nulle. On peut la décrire comme un multiplet $(L', u, \varphi, \theta, \theta')$, où L' est une algèbre de Lie de dimension $n-2$, de crochet noté $\langle \dots \rangle$, u une dérivation de L' , φ une forme bilinéaire sur $L' \otimes L'$, θ et θ' des formes linéaires sur L' , le tout vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $\theta + \theta u + u \theta' = 0$;
- 2) $\varphi(ux, y) - \varphi(uy, x) = \theta \langle x, y \rangle$; où x, y et z sont des éléments quelconques de L' .
- 3) $\varphi(x, y) + \varphi(ux, y) + \varphi(x, uy) = -\theta' \langle x, y \rangle$;
- 4) $\varphi(\langle x, y \rangle, z) - \varphi(\langle x, z \rangle, y) = \varphi(x, \langle y, z \rangle)$.

Preuve. — Soit une algèbre vérifiant les hypothèses. Notons e un générateur du centre. L/ke est une algèbre de Lie, de sorte que, sur un supplémentaire de ke , le produit est donné par un crochet de Lie et une application bilinéaire. $[e, \cdot]$ est une forme linéaire sur ce sous-espace; on prend pour L' le noyau de cette forme, et on choisit f un vecteur non annulé par e à gauche (il en existe un puisque ke n'est pas une sous-algèbre en somme directe). Le produit sur L est donc donné par :

$$\begin{aligned} [\cdot, e] &= 0, [e, f] = e \text{ après normalisation, } [e, x] = 0 \ (x \in L'); \\ [f, f] &= 0 \text{ après normalisation, } [f, x] = \theta(x)e + \beta(x)f + u(x), \\ [x, f] &= \theta'(x)e - \beta(x)f - u(x), [x, y] = \langle x, y \rangle + \varphi(x, y)e + \psi(x, y)f. \end{aligned}$$

avec toutes les applications qui interviennent (bi)linéaires à valeurs scalaires ou dans L' , suivant le cas. Il reste à écrire que toutes ces flèches vérifient l'identité de Leibnitz.

Les identités non triviales a priori sont liées aux triplets suivants: (e, f, x) , (e, x, y) , (f, f, x) , (f, x, y) , (x, f, y) , (x, y, z) . La première donne $\beta=0$; la seconde, $\psi=0$; la troisième, la première relation; la quatrième et la cinquième montrent que u est une dérivation de L' et donnent les relations 2 et 3; enfin la dernière donne la relation 4), qui sera interprétée en termes cohomologiques dans le chapitre suivant.

Réciproquement, considérons le produit donné sur $L' \times k \times k$ par :

$$[(x, \alpha, \beta), (x', \alpha', \beta')] = (\langle x, x' \rangle + \beta u(x') - \beta' u(x), \varphi(x, x') + \beta' \theta' x + \alpha \beta' + \beta \theta x').$$

Un calcul un peu long et que nous omettrons prouve que ce produit vérifie l'identité de Leibnitz, ce qui conclut la preuve. \square

Nous allons montrer d'abord que, à isomorphisme près, on peut opérer une simplification rapide.

LEMME 3. — *Toute algèbre vérifiant les hypothèses de la proposition précédente est isomorphe à une où $\theta = \theta' = 0$.*

Preuve. — Après choix d'une base B de L' , la matrice d'un isomorphisme entre des algèbres L et L_1 a la forme suivante dans les bases $(e, f, B; e_1, f_1, B_1)$: $\begin{pmatrix} \lambda & \mu & p \\ 0 & v & q \\ 0 & x_0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec

les relations imposées par la compatibilité des crochets.

Se limitant à la situation où $v = \lambda = 1$ et $q = 0 = x_0$, on trouve entre autres :

$$\theta_1 \alpha = pu + \theta \quad \text{et} \quad p + \theta'_1 \alpha = \theta' - pu.$$

En choisissant alors p convenablement, il en résulte que L est isomorphe à une algèbre où $\theta + \theta' = 0$, ce qui entraîne $\theta = \theta' = 0$ d'après la première relation structurelle. \square

Nous supposons donc désormais que cette condition est réalisée. Si nous traduisons les autres relations dans ce cas particulier, on obtient, m étant la matrice de φ dans une

certaine base :

$$'mu = 0 = m(id + u).$$

Nous allons maintenant exprimer les conditions d'isomorphisme dans toute leur généralité, afin de continuer à trouver des représentants de plus en plus simples des classes d'isomorphie étudiées.

LEMME 4. — L et L_1 sont isomorphes si et seulement si il existe un scalaire λ , un vecteur x_0 et un automorphisme de Lie α tels que :

$$u_1 = \alpha u \alpha^{-1} + ad(x_0);$$

$$\varphi_1(\alpha x, \alpha y) = \lambda \varphi(x, y) - \varphi_1(\alpha \langle x, y \rangle, x_0) - \varphi_1(x_0, \alpha \langle x, y \rangle).$$

avec les mêmes notations que dans le lemme précédent.

Preuve. — Dans la matrice du lemme précédent, on écrit explicitement les conditions de compatibilité, qui donnent :

$$p = -\varphi(\alpha, x_0) - \varphi_1(x_0, \alpha), \quad \mu = \varphi_1(x_0, x_0), \quad q = 0$$

et les 2 relations annoncées. \square

Nous allons maintenant devoir émettre une hypothèse un peu technique afin de continuer la simplification des représentants :

(*) Hypothèse : pour toute dérivation de L' , il en existe une qui lui est cohomologue et qui n'a pas les valeurs propres 0 et -1 .

Supposons cette hypothèse réalisée. Il en résulte alors immédiatement la nullité de φ , ce qui donne le :

THÉORÈME 2. — *Les classes d'isomorphie d'algèbres de Leibnitz dont le centre, de dimension 1, n'est pas un facteur direct en tant qu'algèbre, et dont l'algèbre de Lie associée vérifie l'hypothèse ci-dessus forment un ensemble en bijection avec $\text{Out}'(L')^{\text{Aut}(L')}$. La notation Out' désigne les dérivations extérieures dont le noyau est en somme directe avec le centre de L' , et $\text{Aut}(L')$ y agit par conjugaison.*

Preuve. — Il reste à vérifier la dimension du centre de l'algèbre définie par le produit suivant sur $L' \times k \times k$:

$$[(x, \alpha, \beta), (x', \alpha', \beta')] = (\langle x, x' \rangle + \beta ux' - \beta' ux, 0, \alpha\beta').$$

On voit qu'elle vaut 1 si et seulement si u est injectif sur le centre de L' .

Il faut maintenant donner des situations où l'hypothèse (*) est réalisée. Le cas le plus simple est le suivant :

LEMME 5. — *Si k est un sous-corps de \mathbb{C} et L' n'est pas nilpotente, (*) est vérifiée. \square*

Preuve. — Il existe une dérivation intérieure dont les valeurs propres sont, outre 0, de module grand devant celui des valeurs propres de la dérivation u . La dérivation u' obtenue par addition a alors des valeurs propres de module grand devant 1 ou nul, ce qui donne le résultat. \square

On a aussi le

LEMME 6. — Si $H^1(L', L')=0$, l'hypothèse (*) est vérifiée.

Preuve. — On peut alors choisir $u=0$, puisque toute dérivation de L' est intérieure. Il en résulte alors $\varphi=0$. \square

Nous donnons maintenant le théorème correspondant pour les algèbres dont le centre est bilatère.

PROPOSITION 5. — Une algèbre de Leibnitz L dont le centre, une droite, est bilatère, se décrit par un couple (L', φ) , où L' est une algèbre de Lie de dimension $n-1$ sans centre et φ une forme bilinéaire sur L' vérifiant :

$$\forall (x, y, z) \in L^3, \quad \varphi(\langle x, y \rangle, z) - \varphi(\langle x, z \rangle, y) = \varphi(x, \langle y, z \rangle).$$

Preuve. — Si e est un générateur du centre de L , on désigne par L' un supplémentaire de ke dans L , et le produit sur $L' \times k$ est donné par : $[(x, \alpha), (x', \alpha')] = (\langle x, x' \rangle, \varphi(x, x'))$. L'identité de Leibnitz impose la condition énoncée, et, réciproquement, on obtient une structure de Leibnitz avec un tel produit. Le calcul du centre de L au moyen de cette description donne la condition sur le centre de L' . \square

Ceci conduit au :

THÉORÈME 3. — L'ensemble des classes d'isomorphie d'algèbres de Leibnitz dont le centre est bilatère et de dimension 1 est contenu dans un groupe de congruence de formes bilinéaires, décrit au chapitre suivant comme $HL^2(L', k)$.

Preuve. — Dans la proposition précédente, l'écriture des relations de compatibilité nous donne :

$$\lambda\varphi(x, y) + p\langle x, y \rangle = \varphi_1(\alpha x, \alpha y) \quad \text{et} \quad \langle \alpha x, \alpha y \rangle_1 = \alpha \langle x, y \rangle.$$

Quitte à identifier L' et L'_1 , ce qui revient à dire que α est un automorphisme de L' , le quotient des formes bilinéaires sur L' par la première relation donne l'ensemble cherché. \square

Pour terminer, nous allons donner un théorème partiel sur les algèbres de centre de codimension 2.

PROPOSITION 6. — Soit L une algèbre de Leibnitz dont le centre est de codimension 2 et l'algèbre de Lie quotient non abélienne. On peut la décrire par un module E de dimension $n-2$, deux endomorphismes φ et ψ de E et deux éléments de E , b et c , avec les relations : $\varphi\psi - \psi\varphi = \varphi$ et $\psi b + 2b = \varphi^2 c$.

Preuve. — On prend pour E le centre de L , et on note e et f deux éléments d'une base d'un supplémentaire de E de sorte que la classe de e modulo E engendre $[L/E, L/E]$. On note φ et ψ les actions de e et f respectivement sur E . On peut normaliser e de sorte que $[f, e] = e$; on note b et c les éléments $[e, e]$ et $[f, f]$, et provisoirement on pose $[e, f] = -e + a$. Lorsqu'on écrit l'identité de Leibnitz pour le produit ainsi défini, on trouve les relations annoncées ainsi que $a = \varphi c$.

Réciproquement, on vérifie que le produit défini sur $E \times k \times k$ par :

$$[(x, \alpha, \beta), (x', \alpha', \beta')] = (\alpha' \varphi x + \beta' \psi x + \alpha \alpha' b + \beta \beta' c + \alpha \beta' \varphi c, \alpha \beta' - \beta \alpha', 0)$$

vérifie l'identité de Leibnitz si et seulement si les égalités annoncées sont vérifiées. \square

Nous nous limiterons au cas où φ est bijective. Une telle algèbre vérifie alors le

LEMME 7. — *A isomorphisme près, on peut supposer que b et c sont nuls.*

Preuve. — Nous allons écrire un critère d'isomorphisme qui donnera le résultat comme conséquence directe.

La matrice d'un isomorphisme entre deux algèbres L et L_1 aura la forme sui-

vante : $\begin{pmatrix} \alpha & x_0 & y_0 \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & \pi & \nu \end{pmatrix}$ dans des bases de la forme (B, e, f) , avec B une base de E .

Les conditions de compatibilité sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \pi = 0 \quad \nu = 1 \quad \alpha \varphi = \varphi_1 \alpha \quad \alpha \psi \alpha^{-1} = \psi_1 + \mu \varphi_1 \\ x_0 = \varphi_1 y_0 + \mu b_1 \quad \lambda = 1 \quad \alpha b = \varphi_1 x_0 + b_1 \\ \alpha c = \mu \varphi_1 y_0 + \psi_1 y_0 + \mu^2 b_1 + c_1 + \mu \varphi_1 c \quad \alpha \varphi c - x_0 = \mu \varphi_1 x_0 + \psi_1 x_0 + \mu b_1 + \varphi_1 c. \end{aligned}$$

Il est clair alors qu'un choix judicieux de x_0 permet de supposer $b=0$. La deuxième relation structurale donne alors $c=0$, ce qui est le résultat annoncé, et permet une écriture nettement plus simple des relations de compatibilité, à savoir :

$$\varphi_1 = \alpha \varphi \alpha^{-1} \quad \psi_1 = \alpha (\psi - \mu \varphi) \alpha^{-1}. \quad \square$$

D'où finalement le

THÉORÈME 4. — (a) *Pour que deux algèbres soient isomorphes, il faut que leurs φ aient même classe dans $\Phi(n-2)$;*

(b) *Cet invariant étant fixé, les classes d'isomorphie des algèbres de Leibnitz de centre de codimension 2 à algèbre quotient non abélienne et à φ inversible sont en correspondance avec l'espace affine des solutions de $\varphi \psi - \psi \varphi = \varphi$ modulo $k \varphi$ et conjugaison par le commutant inversible de φ .*

Preuve. — C'est la traduction des formules simplifiées du lemme précédent. \square

On peut s'interroger sur ce qui advient de ces théorèmes de classification si on remplace les hypothèses sur le centre par les mêmes sur le centre essentiel. La réponse est : très peu de choses. Nous allons donner pour le théorème $x \in [1, 4]$ la modification de l'énoncé permettant d'obtenir le théorème x' correspondant.

THÉORÈME 1'. — *La condition $(\varphi, x) \neq (0, 0)$ disparaît.*

THÉORÈME 2'. — *La définition de L utilise le centre essentiel, et la condition d'injectivité de u disparaît.*

THÉORÈME 3'. — *La condition « L sans centre » disparaît.*

THÉORÈME 4'. — *Aucun changement.*

3. Lien avec la théorie des groupes

Cette section est consacrée à un compte rendu partiel d'un travail récent de J. Baues et D. Conduché consacré aux modules précroisés de groupes, et qui introduit des structures qui coïncident dans certains cas avec celles que nous venons de définir. Le cadre dans lequel les auteurs se placent est le suivant : M et N sont deux groupes, et δ est un morphisme de M dans N . On suppose aussi une action de N sur M , δ -compatible, notée en exposant.

On notera $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ et $\langle x, y \rangle = x^{-1}y^{-1}xy^{\delta x}$ (commutateur de Peiffer). On vérifie que $\langle x, (y, z) \rangle = \langle \langle x, z \rangle, y \rangle - \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$ modulo des quadruples crochets. De même,

$$\langle (x, y), z \rangle - \langle \langle x, y \rangle, z \rangle + \langle x, \langle y, z \rangle \rangle = -\langle \langle y, x \rangle, z \rangle + \langle y, \langle x, z \rangle \rangle \quad [\text{BC}, 2.11].$$

Si de surcroît δy est nul, on obtient une identité de Leibnitz au moins formellement, et si $\delta x = 0$, une identité de Leibnitz gauche. Le $+$ est NON commutatif et désigne le produit dans M (c'est pourquoi on n'a qu'une identité formelle).

Dans le cas de groupes abéliens, le $+$ reprend sa fonction usuelle, et les auteurs appellent algèbre de Lie partielle la donnée d'un groupe abélien R , d'une sous-groupe L de R et d'un crochet $\langle \dots \rangle$ tel que :

$$x \in L \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0$$

et

$$y \in L \Rightarrow \langle x, \langle y, z \rangle \rangle - \langle y, \langle x, z \rangle \rangle = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle.$$

Si $L = R$, on obtient bien une algèbre de Lie; on a bien une structure partiellement de Leibnitz et partiellement antisymétrique. La motivation de cette construction est la suivante : on sait que le commutateur classique induit sur le gradué associé à la série centrale inférieure d'un groupe une structure d'algèbre de Lie. On peut remplacer, étant donné un module précroisé, les commutateurs par les commutateurs de Peiffer et se demander quelle structure algébrique on obtient sur le gradué correspondant. La réponse est la

PROPOSITION [BC, 3.8]. — *Soit $\delta: M \rightarrow N$ un module précroisé, M^{cr} le quotient de M par ses commutateurs de Peiffer, δ^{cr} le module précroisé induit. On notera P_i les termes de la série centrale inférieure de Peiffer. Si C désigne l'abélianisé de M^{cr} , K le noyau de δ^{cr} restreint à C et G le gradué associé aux P_i , $(C \oplus G, K \oplus G, \langle \dots \rangle)$ est une algèbre de Lie partielle, où le produit est induit par le commutateur de Peiffer. \square*

Il sera de nouveau question de modules croisés dans la section II.5.

CHAPITRE II

Homologie des algèbres de Leibnitz

Ce chapitre est destiné à définir cette notion et à montrer les nombreuses similitudes entre cette nouvelle théorie et l'homologie des algèbres de Lie, bien que ces dernières ne coïncident pas sur les algèbres de Lie, pour lesquelles elles sont toutes deux définies.

1. Définition des groupes $HL_n(L, M)$

DÉFINITION 1. — Soit L une algèbre de Leibnitz, M un L -module. On notera $V_*(L, M)$ le L -module gradué donné par $V_n(L, M) = M \otimes L^{\otimes n}$, muni de l'action diagonale de L :

$$[m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x] = [m, x] \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n + \sum_{j=1}^n m \otimes \dots \otimes [x_j, x] \otimes \dots$$

On va munir $V_*(L, M)$ (notation qui pourra être abrégée en V si L et M sont clairement fixés par le contexte) d'une différentielle coïncidant avec celle du complexe de Chavalley-Eilenberg après passage à l'algèbre extérieure. Pour alléger les écritures, un élément de la forme $m \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ pourra être écrit $x_0 \otimes \dots \otimes x_n$, étant bien entendu que x_0 est dans M et en notant de la même façon le produit dans L et l'action sur M .

DÉFINITION 2. — On pose :

$$d_n(x_0 \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{j+1} \dots \otimes [x_i, x_j] \otimes \dots \otimes x_j \otimes \dots$$

(Le crochet est en position i .)

C'est cette application de degré -1 qui va être la différentielle sur $V_*(L, M)$.

LEMME 1. — (a) Pour tous $w \in V_n$ et $x \in L$, on a : $d[w \otimes x] = dw \otimes x + (-1)^{n+1} [w, x]$.

(b) Pour tous $w \in V_n$, x et $y \in L$, on a : $[w \otimes y, x] = [w, x] \otimes y + w \otimes [y, x]$.

Preuve. — En regroupant dans la formule de d les termes relatifs à $j=n+1$ à part pour a), et en faisant de même dans celle de l'action pour b). \square

PROPOSITION 1 :

$$\forall w \in V_n, \quad x \in L \quad d[w, x] = [dw, x].$$

Preuve. — Par récurrence, le résultat étant évident en degré 1. On calcule en effet, pour w' un indécomposable de degré $n+1$ s'écrivant $w \otimes y$ avec w de degré n :

$$\begin{aligned} d[w', x] &= d[w \otimes y, x] = d([w, x] \otimes y + w \otimes [y, x]) \quad (\text{lemme 1 b}) \\ &= d[w, x] \otimes y + (-1)^{n+1} [w, x], y \\ &\quad + dw \otimes [y, x] + (-1)^{n+1} [w, [y, x]] \quad (\text{lemme 1 a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= d[w, x] \otimes y + dw \otimes [y, x] + (-1)^n [[w, y], x] \\
&= [dw, x] \otimes y + dw \otimes [y, x] + (-1)^n [[w, y], x] \quad (\text{récurrence}) \\
&= [dw \otimes y, x] + (-1)^n [[w, y], x] \quad (\text{lemme 1 b}) \\
&= [d(w \otimes y), x] \quad (\text{lemme 1 a}) \\
&= [dw', x]. \quad \square
\end{aligned}$$

Cette proposition présente un intérêt en soi, certes, mais permet surtout de démontrer le

THÉORÈME 1 :

$$d^2 = 0.$$

Preuve. — Comme d_0 est nul, le résultat est clair en degré 1. Il va être établi par récurrence.

Soit w' un indécomposable en degré $n+1$, écrit sous la forme $w \otimes x$, avec $x \in L$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
d^2 w' &= d(d(w \otimes x)) = d(dw \otimes x + (-1)^{n+1} [w, x]) \\
&= d^2 w \otimes x + (-1)^n [dw, x] + (-1)^{n+1} d[w, x] \\
&= d^2 w \otimes x = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

DÉFINITION 3. — Pour L une algèbre de Leibnitz sur k et M un L -module, nous noterons $HL_*(L, M)$ l'homologie du complexe $(V_*(L, M), d)$. Les groupes d'homologie considérés seront dits groupes d'homologie de Leibnitz de L à coefficients dans M .

Exemple. — Si L est une algèbre de Leibnitz abélienne, et M un module L -trivial, le bord est nul, et par conséquent $HL_n(L, M) = M \otimes L^{\otimes n}$.

On remarque que L peut aussi être considérée comme algèbre de Lie. On peut donc calculer $H_*(L, M)$, qui vaut $\Lambda^n L \otimes M$. Il est donc clair que les deux théories ne coïncident pas même quand elles sont toutes deux définies.

Ceci dit, nous allons voir que certaines interprétations des groupes en basse dimension sont communes aux deux théories.

PROPOSITION 2. — (a) $HL_0(L, M) = M/[M, L] = M_L$.

(b) Si M est L -trivial, $HL_1(L, M) = M \otimes (L/[L, L])$.

Preuve. — Il suffit de décrire explicitement les cycles et les bords en degré 0 et 1. Les cycles en degré 0 sont formés par M , tandis que les bords sont les éléments $[m, x]$, ce qui donne a). Pour b) les cycles sont donnés par $M \otimes L$ alors que les bords sont les $m \otimes [x, y]$, tout ceci dans le cas où M est L -trivial. Ceci donne clairement la deuxième assertion. \square

2. Exemples de calcul

Nous allons donner maintenant quelques exemples de calcul d'homologie $HL_*(L, k)$, avec k vu comme L -module trivial. Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'algèbre de dimension 2 donnée par deux générateurs e et f et les relations $[e, e]=[f, f]=0$, $[e, f]=e$ est de Leibnitz. Nous allons en calculer l'homologie.

Nous aurons dans la suite à considérer des suites d'entiers. Si $u=(u_1, u_2, \dots)$, on notera $U_k = \sum_{i < k} u_i$.

Ceci permet de formuler le

LEMME 2. — Soient $i=(i_1, \dots, i_p)$ une suite d'entiers dont seul le premier peut être nul, et $j=(j_1, \dots, j_p)$ une suite d'entiers dont seul le dernier peut être nul. On note $x_{i,j} = f^{\otimes i_1} \otimes e^{\otimes j_1} \otimes \dots$. Alors, $dx_{i,j}$ est donné par :

$$\sum_{2 \leq k \leq p} (-1)^{k+J_k} a(k) J_k \dots \otimes f^{\otimes i_k - a(k)} \otimes \dots,$$

avec $a(k)=1$ si i_k est impair, 0 sinon.

Preuve. — Si dans la formule donnant d , on note A_j la somme des termes correspondant à l'indice supérieur j , on voit que ce terme est nul si le j -ième élément de x est e , et que $A_j + A_{j+1} = 0$ si des f sont en positions j et $j+1$. On a donc écrit $dx_{i,j}$ avec le moins de termes possible et le plus de regroupements possible. \square

Il en résulte que $V_*(L, k)$ est la somme directe de sous-complexes X_r , engendrés par les éléments $x_{i,j}$ avec $\sum j_k = r$.

PROPOSITION 3. — Si k contient \mathbb{Q} , pour $r \geq 1$, X_r est acyclique.

Preuve. — On considère l'application de X_r dans X_r , définie par $w \mapsto w \otimes f$. En degré p , on a la formule : $d(w \otimes f) = dw \otimes f + (-1)^{p+1} rw$. On interprète ceci en disant que, à normalisation près, cette application constitue une homotopie contractante pour X_p . \square

D'où le

THÉORÈME 2. — Soit L l'algèbre de Leibnitz de dimension 2 sur k contenant \mathbb{Q} dont le produit est donné sur les générateurs e et f par $[e, e]=[f, f]=[f, e]=0$, $[e, f]=e$. Si k désigne le L -module trivial, on a, pour tout n , $HL_*(L, k) = k$. Le générateur en degré n est la classe de $f^{\otimes n}$.

Preuve. — La proposition précédente montre que $HL_*(L, k)$ est l'homologie de X_0 , qui en chaque degré est engendré par le générateur annoncé et où le bord est nul. \square

De même, on peut calculer l'homologie de Leibnitz de l'algèbre de Lie de dimension 2 non abélienne :

THÉORÈME 3. — Soit L l'algèbre de Leibnitz de dimension 2 sur k un corps contenant \mathbb{Q} dont le produit, exprimé sur les générateurs e et f , est donné par :

$$[e, e]=[f, f]=0, \quad [e, f] = -[f, e] = e.$$

Nous avons alors $HL_n(L, k) = k \forall n$; le générateur en degré n étant la classe de $f^{\otimes n}$.

Preuve. — La même que précédemment, le lemme 2 restant valable et, avec les mêmes notations, $w \mapsto w \otimes f$ est, pour r inversible, une homotopie contractante pour X_r avec $r > 0$. \square

Le cas de l'algèbre engendrée par deux générateurs e et f , avec un produit donné par $[e, e] = [e, f] = [f, e] = 0$, $[f, f] = e$, qui est clairement associative et isomorphe à $X k[X]/X^3$, est un peu plus compliqué, quoiqu'elle ait même homologie que les précédentes. On l'appellera L , et $V_*(L, k)$ sera abrégé en V_* . Le sous-espace des cycles sera noté Z_* . Sur ce complexe existent des opérateurs que nous allons décrire.

DÉFINITION 4. — Pour tout n , les applications u , v et α sont données par: $ux = e \otimes x$, $vx = f \otimes x$, $\alpha x = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i = f}} (-1)^{i+1} u_i x$

(u_i est l'oubli du i -ième élément).

LEMME 3. — 1) $du = -ud$, $dv = -vd + u\alpha$, $\alpha u = -u\alpha$, $\alpha v + v\alpha = id$ en degrés > 0 ;

2) u et v sont injectives, et $V_{n+1} = uV_n \oplus vV_n$;

3) $\alpha d = -d\alpha$, $\alpha^2 = 0$;

4) $v\alpha$ et αv sont des idempotents qui commutent avec d .

Preuve. — Les assertions de 1) sont immédiates par regroupement de termes dans l'écriture de d , et 2) n'est pas plus compliqué.

Pour 3), on écrit que :

$$d^2 v = 0 = d(-vd + u\alpha) = du\alpha - (-vd + u\alpha)d = -u(d\alpha + \alpha d)$$

et on utilise l'injectivité de u . D'autre part, α^2 est nul en degré 2, et les formules

$$\alpha^2 u = -\alpha u \alpha = u \alpha^2, \quad \alpha^2 v = \alpha - \alpha v \alpha = \alpha - \alpha + v \alpha^2$$

montrent l'autre égalité par récurrence grâce à 2).

4) est alors direct, la propriété étant vraie sur αv si et seulement si elle l'est pour $v\alpha$. \square

On peut donc définir des applications linéaires φ et ψ par $\varphi v = \psi u = 0$, $\psi v = \varphi u = id$, correspondant à la somme directe de 2).

Sur V_* , on définit une filtration par: $F_p V_{p+q} = u^q V_p$. La suite spectrale associée converge clairement, et on a la :

PROPOSITION 4. — Il existe une suite spectrale donnée par

$$E_{p,q}^2 = HL_{p-1}(L, k) \Rightarrow HL_{p+q}(L, k)$$

où d_2 est induite par α si $p \geq 3$.

Preuve. — Cette suite est celle associée à la filtration définie plus haut. Pour le voir, il suffit d'en calculer les termes $Z_{p,q}^2$ et $E_{p,q}^2$, qui sont donnés par :

$$Z_{p,q}^r = \{x \in u^q V_p \mid dx \in u^{q+r-1} V_{p-r}\}$$

$$E_{p,q}^2 = u^{q+1} V_{p-1} + d^{-1} u^{q+r-1} V_{p-r} \mid u^{q+1} V_{p-1} + (u^q V_p \cap du^{q-r+2} V_{p+r-1})$$

On a donc :

$$E_{p,q}^2 = u^q v Z_{p-1} + u^{q+1} V_{p-1} \mid u^{q+1} V_{p-1} + u^{q+1} V_{p-1} + u^q dV_{p+1} \quad \text{si } p > 0$$

$$E_{0,q}^2 = u^q V_0 \mid u^q dV_1$$

$$\simeq v Z_{p-1} + u V_{p-1} \mid u V_{p-1} + v dV_p \quad \text{si } p > 0 \quad \text{HL}_0(L, k) \quad \text{si } p = 0$$

$$\simeq \text{HL}_{p-1}(L, k) \quad \text{si } p > 0 \quad \text{HL}_0(L, k) \quad \text{si } p = 0.$$

(on a utilisé le fait que $d(ux + vy) = u(\alpha y - dx) - vdy$).

Si on calcule la différentielle d_2 , on trouve :

$$d_2 z = u^{-q} (d(u^q v z + u^{q+1} x) \bmod u^{q+1} (dV_p + uV_{p-2}))$$

$$= u(\alpha z + (-1)^{q+1} x) \bmod u(uV_{p-2} + v dV_{p-1})$$

$$= \alpha z \bmod (uV_{p-2} + v dV_{p-1})$$

$$= \psi \alpha z \bmod dV_{p-2}$$

$$= \text{classe de } \psi \alpha z \text{ dans } \text{HL}_{p-3}(L, k). \quad \square$$

Nous savons que V_* peut être décomposé comme somme directe de $v\alpha V_*$ et $\alpha v V_*$. Il en résulte que la proposition précédente s'étend à ces deux sous-complexes.

On les notera V_*^+ et V_*^- , avec des notations correspondantes en homologie.

PROPOSITION 5. — V_*^+ a une homologie nulle sauf en degré 1.

Preuve. — α agit par 0 sur ce sous-complexe, ce qui implique la nullité de d_2 dans la suite spectrale correspondante, ce qui entraîne pour $n \geq 3$:

$$\text{HL}_n^+(L, k) = \bigoplus_{0 \leq p \leq n} \text{HL}_p^+(L, k) = \text{HL}_{n-1}^+(L, k) \oplus \text{HL}_{n-1}^+(L, k)$$

$$= \bigoplus_E \text{HL}_2^+(L, k)$$

avec E un ensemble de cardinal $2^{(n-2)}$. Or, $\alpha ve = e$ et $\alpha vf = 0$, et V_0 est engendré par e , qui vaut $d(f \otimes f) = d\alpha(f \otimes f \otimes f)$. Donc, $\text{HL}_0^+(L, k)$ est nul. De même, en degré 2, $\text{Im } \alpha v$ est engendrée par :

$$e^3 = d(f \otimes f \otimes e \otimes e), \quad e \otimes e \otimes f - f \otimes e \otimes e = d(f \otimes f \otimes e \otimes f - e \otimes f^3),$$

$$e \otimes f \otimes e - f \otimes e \otimes e = d(f^3 \otimes e + e \otimes f^3), \quad e \otimes f \otimes f + f \otimes f \otimes e = d(f^4).$$

Donc, tous les groupes d'homologie, sauf peut-être en degré 1, sont nuls. Or, $e \otimes f + f \otimes e = \alpha v(e \otimes f)$ est un cycle de classe non triviale, puisque les seuls bords sont $f \otimes e$ et $e \otimes e$. D'où le résultat annoncé. \square

Nous allons prouver maintenant le

THÉORÈME 4. — $HL_n(L, k)$ est isomorphe à k en degrés ≥ 2 . L'isomorphisme se traduit au niveau des chaînes par $v\alpha u$, et $HL_0(L, k)$ est engendré par la classe de f .

Preuve. — Il suffit de démontrer le théorème sur $HL_*^-(L, k)$ en degré au moins 2, et de faire un calcul direct sinon. Traitons d'abord le premier cas. Comme $\text{Im } v$ et $\text{Im } u$ sont en somme directe, $Z_{p,q}^r \cap V_*^-$ est nul si q est strictement positif. De ce fait, $E_{p,q}^2$ est nul sauf pour $q=0$, ce qui entraîne la dégénérescence de la suite avec $HL_p^-(L, k) = HL_{p-1}^-(L, k)$ par l'isomorphisme $E^2 \rightarrow E^\infty$. Tous les groupes $HL_{p+2}(L, k)$ sont donc isomorphes à $HL_2(L, k)$.

On a vu que l'isomorphisme entre $E_{p,q}^2$ et $HL_{p-1}(L, k)$ étant donné par v . Il en résulte que $v\alpha u$ est un isomorphisme en homologie pour V_*^- , et donc pour V_* , comme on peut le vérifier :

$$\begin{aligned} v\alpha ux &= dv\alpha y \Rightarrow u\alpha x = d\alpha y \\ y &= uA + vuB + v^2C \Rightarrow \alpha x = -\alpha dA - dB \\ 0 &= -d\alpha uB - d\alpha v^2C \\ \Rightarrow \alpha x &= -\alpha dA - dB \\ \alpha C &= -d\alpha B = 0 \end{aligned}$$

Comme on peut supposer y dans $\text{Im } v\alpha$, il en résulte que $A=0$ et :

$$\alpha(uB + vC) = 0 \Leftrightarrow \varphi C = \alpha B \quad \text{et} \quad \psi C = \alpha C.$$

Il vient alors : $\alpha\varphi C = \alpha\psi C = 0 \Rightarrow \alpha B = 0$.

Dans la dernière égalité, on a utilisé que $\text{Ker } \alpha = \text{Im } \alpha$. Ceci nous donne $B \in \text{Im } \alpha$. Il en résulte alors que $x = v\alpha x = -dB$.

On a donc prouvé que x est nécessairement un bord et que $v\alpha u$ induit une injection, donc un isomorphisme, en homologie pour les degrés au moins 2.

Il faut maintenant déterminer $HL_2(L, k)$; on voit que

$$f \otimes (e \otimes f + f \otimes e) = v\alpha(f \otimes e \otimes f)$$

est un cycle non trivial, qui est le seul aux bords près. Le générateur en degré $k > 1$ est donc $(v\alpha u)^{k-2}(e \otimes f)$.

Il reste à calculer les groupes d'homologie de degrés 0 et 1. En degré 0, f est le seul cycle non trivial, et, en degré 1, $\text{Im } v\alpha$ est nulle. On a donc $HL_0^-(L, k) = k$ et $HL_1^-(L, k) = 0$, ce qui, avec la proposition précédente, conclut la preuve. \square

3. Définition des groupes $HL^*(L, M)$

Nous allons maintenant définir une cohomologie des algèbres de Leibnitz, et montrer qu'elle a des propriétés très proches de celles de la théorie correspondante pour les algèbres de Lie.

DÉFINITION 5. — Nous noterons $V^*(L, M)$ le L -module gradué défini en degré n par $\text{Hom}_k(L^{\otimes n}, M)$, l'action étant donnée par $[f, x]w = f[w, x]$. Nous allons le munir d'une différentielle.

DÉFINITION 6. — On définit δ_n sur V^n par : $n+1$

$$\delta_n f(w) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} [f(\dots \otimes w_i \otimes \dots), w_i] - f(dw)$$

THÉORÈME 5 :

$$\delta^2 = 0.$$

Preuve. — Elle va procéder par calcul direct. Nous y désignerons par u_i l'opérateur défini sur $L^{\otimes n}$ par oubli du i -ième élément. Il est clair que $u_i u_j = u_j u_{i+1}$ si $i \geq j$. On a en effet :

$$\begin{aligned} \delta^2 f(w) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} [\delta f(u_i w), w_i] - \delta f(dw) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j} [[f(u_j u_i w), w_i], w_j] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=i}^n (-1)^{i+j} [[f(u_j u_i w), w_i], w_{j+1}] \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} [f(du_i w), w_i] - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} [f(u_j dw), (dw)_j] \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} [f(u_{j-1} u_i w), [w_i, w_j]] - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} [f(du_i w), w_i] \\ &\quad - \sum_{1 \leq j < k < l \leq n} (-1)^{j+k} [f(\dots \otimes w_j \otimes \dots \otimes [w_k, w_l] \otimes \dots), w_j] \\ &\quad - \sum_{l \leq k < l \leq n} (-1)^{k+l} [f(u_k u_l w), [w_k, w_l]] \\ &\quad - \sum_{1 \leq k < j < l \leq n} (-1)^{j+k} [f(\dots \otimes [w_k, w_l] \otimes \dots \otimes w_j \otimes \dots \hat{w}_l \otimes \dots), w_j] \\ &\quad - \sum_{1 \leq k < l \leq j \leq n} (-1)^{j+k} [f(\dots \otimes [w_k, w_l] \otimes \dots \otimes w_l \otimes \dots \otimes w_{j+1} \otimes \dots), w_{j+1}] \end{aligned}$$

Il est clair que les sommes de doubles crochets se simplifient. Quant aux autres, elles se simplifient aussi, en décomposant les $f(du_i w)$ de même manière que les $f(u_i dw)$: (les crochets sont en position k)

$$\begin{aligned} du_i w &= \sum_{1 \leq k < l < i} (-1)^{l+1} \dots \otimes [w_k w_l] \otimes \dots \otimes w_l \otimes \dots \otimes w_i \otimes \dots \\ &\quad + \sum_{1 \leq k < i \leq l} (-1)^{l+1} \dots \otimes [w_k, w_{l+1}] \otimes \dots \otimes w_i \otimes \dots \otimes w_{l+1} \otimes \dots \\ &\quad + \sum_{i \leq k < l} (-1)^{l+1} \dots \otimes w_i \otimes \dots \otimes [w_{k+1}, w_{l+1}] \otimes \dots \otimes w_{l+1} \otimes \dots \end{aligned}$$

Le résultat est donc finalement nul. \square

DÉFINITION 7. — Pour L une algèbre de Leibnitz et M un L -module, les groupes d'homologie du complexe $(V^*(L, M), \delta)$ seront notés $HL^*(L, M)$, et dits groupes de cohomologie de Leibnitz L à coefficients dans M .

Remarque 1. — Compte tenu du caractère fonctoriel des constructions précédentes, on voit facilement que, si $0 \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0$ est une suite exacte de L -modules, elle donne naissance à une suite exacte de complexes et à une suite exacte en (co)homologie.

Remarque 2. — Si M est un module L -trivial, on a, comme dans le cas des algèbres de Lie, $\delta f = -fd$, ce qui entraîne la même conclusion, à savoir que $HL^n(L, M)$ vaut $\text{Hom}_k(HL_n(L, M), M)$ pour tout n .

Remarque 3. — Si L est une algèbre de Lie, la projection $L^{\otimes*} \rightarrow \Lambda^*(L)$ induit une flèche entre les complexes calculant la (co)homologie de L comme algèbre de Leibnitz et comme algèbre de Lie. Les exemples de calcul en homologie montrent qu'elle peut être nulle; elle l'est clairement en degrés plus grands que la dimension de L .

Nous allons donner une interprétation de ces groupes en bas degrés en montrant qu'ils ont des propriétés comparables avec celles de leurs homologues pour les algèbres de Lie.

DÉFINITION 8. — Une application linéaire f d'une algèbre de Leibnitz L dans un L -module M est dite morphisme croisé si et seulement si on a, pour tous x, y dans L : $[fx, y] - [fy, x] = f[x, y]$.

Parmi les morphismes croisés, il en est d'évidents, à savoir les applications de la forme $[m, \cdot]$, où $m \in M$. Ces morphismes croisés seront dits intérieurs. Les classes d'équivalence de morphismes croisés modulo les morphismes intérieurs seront appelés morphismes extérieurs de L dans M .

PROPOSITION 6. — (a) $HL^0(L, M) = \{m \in M \mid \forall x \in L [m, x] = 0\} = M^L$.

(b) $HL^1(L, M)$ s'identifie aux morphismes croisés extérieurs de L dans M .

Preuve. — Il suffit d'examiner que signifie explicitement le fait d'être un cocycle ou un cobord en degré 0 et 1. En particulier, les morphismes croisés sont exactement les 1-cocycles. \square

4. Extensions

Nous allons continuer l'analogie en montrant que certaines extensions d'algèbres de Leibnitz sont classées à isomorphisme près par $HL^2(L, M)$.

DÉFINITION 9. — Une extension d'une algèbre de Leibnitz L par un L -module M (considéré comme algèbre de Leibnitz abélienne) est une algèbre de Leibnitz L' s'insérant dans une suite exacte d'algèbres $0 \rightarrow M \rightarrow L' \rightarrow L \rightarrow 0$.

M devient alors un L' -module, et la restriction de cette action à L redonne la structure de module d'origine.

On va donc étudier le problème suivant : sur $L \oplus M$, module sous-jacent à L' , on veut déterminer les crochets de Leibnitz dont la restriction à L redonne le produit d'origine et l'action de L sur M comme L -module.

PROPOSITION 7. — *La donnée d'une extension de L par M est équivalente à celle d'une application bilinéaire $\alpha: L \otimes L \rightarrow M$ et d'une autre, $\varphi: L \otimes M \rightarrow M$, vérifiant les relations suivantes :*

- 1) $\varphi([x, x'], m) - [\varphi(x, m), x'] = \varphi(x, \varphi(x', m))$
- 2) $\alpha([x, x'], x'') + [\alpha(x, x'), x''] - \alpha([x, x''], x') - [\alpha([x, x''], x')]$
 $= \alpha(x, [x', x'']) + \varphi(x, \alpha(x', x'')).$

où les x sont dans L et $[\cdot, \cdot]$ désigne indifféremment le crochet de L ou l'action de L sur M .

Preuve. — Il suffit d'écrire que l'identité de Leibnitz est vérifiée sur des triplets (a, b, c) où elle n'est pas a priori triviale. On trouve de la sorte l'identité de Leibnitz pour $[\cdot, \cdot]$, ainsi que les relations annoncées. \square

Par analogie au cas des algèbres de Lie, nous définissons un morphisme d'extension comme un morphisme de suites exactes. Il en résulte la

PROPOSITION 8. — *Deux extensions (α, φ) et (α', φ') de L par M sont isomorphes si et seulement si il existe une application linéaire $\theta: L \rightarrow M$ telle que :*

$$\theta[x, x'] + \alpha(x, x') = [\theta x, x'] + \varphi'(x, \theta x') + \alpha'(x, x') \quad \forall x, x' \in L.$$

Preuve. — Un morphisme de suites exactes est forcément un isomorphisme dans notre cas, et il suffit d'écrire la compatibilité aux crochets de (id, θ) . \square

Il résulte de cette proposition que, dans le cas général, il sera fort difficile de prouver l'isomorphisme entre deux extensions données. Nous ne nous intéresserons qu'à deux cas de figure.

THÉORÈME 6. — *Toute algèbre de Leibnitz peut être considérée comme une extension à φ nul d'une algèbre de Lie L par un L -module.*

Preuve. — Soit M le centre (ou le centre essentiel) de l'algèbre de Leibnitz, et L l'algèbre quotient. La suite exacte en résultant est une extension de L par M qui est isomorphe à l'algèbre de départ. \square

DÉFINITION 10. — Une extension sera dite symétrique si $\varphi(x, m) = -[m, x]$ pour tous x dans L et m dans M .

Le seul théorème de classification que nous donnerons concerne ces extensions. Leur lien avec $HL^2(L, M)$ est essentiel, comme on va le voir.

PROPOSITION 9. — *Une extension symétrique de L par M est la donnée d'un 2-cocycle de Leibnitz de L dans M .*

Preuve. — Dans les deux relations structurales, l'une est clairement vérifiée par la valeur choisie pour φ , et la seconde donne $\delta\alpha = 0$. \square

En se servant du critère d'isomorphie précédent, on en déduit le

THÉORÈME 7. — Soient L une algèbre de Leibnitz k -libre et M un L -module. Les extensions symétriques de L par M ont leurs classes d'isomorphie en bijection avec $HL^2(L, M)$. Cette bijection est un morphisme de groupes pour la somme de Baer, le neutre correspondant à l'extension par somme directe.

Preuve. — Il suffit de mettre ensemble la proposition précédente, le critère d'isomorphie, qui devient: α et α' diffèrent d'un cobord, et de recopier sans changement la preuve donnée dans [CE, p. 290]. \square

5. Modules croisés

Nous allons poursuivre cette analogie de comportement avec un théorème sur les modules croisés sur une algèbre de Leibnitz, qui sont classifiés par un groupe de cohomologie relatif.

DÉFINITION 11. — Soient M et N deux algèbres de Leibnitz libres sur k , et μ un morphisme de M dans N . On dira que (M, μ, η) est un module croisé si et seulement si :

- 1) η est linéaire de N dans $\text{Der}(M)$;
- 2) $\eta(n)\eta(n') - \eta(n')\eta(n) = \eta([n', n])$;
- 3) $\mu(\eta(n)(m)) = [\mu m, n]$;
- 4) $\eta(\mu m)(m') = [m', m]$.

Dans cette définition, comme dans toute la suite, les éléments portent des noms rappelant celui de l'algèbre à laquelle ils appartiennent. Ainsi, n, n', \dots sont des éléments de N .

Nous allons donner des conséquences de ces propriétés qui vont permettre une description plus explicite de ces objets.

On notera P le conoyau de μ et L son noyau. P est muni d'une structure d'algèbre de Leibnitz et sera identifié à un supplémentaire de $V = \text{Im } \mu$. On vérifie aisément que V est une sous-algèbre et un idéal de N . Pour éviter toute confusion, on notera $\langle \dots \rangle$ le produit dans N de deux éléments de P .

On pose: $\langle p, p' \rangle - [p, p'] = \beta(p, p')$. Par ailleurs, M admet $L \oplus V$ comme module sous-jacent, et 4) montre que L est central dans M . Nous noterons encore $\langle \dots \rangle$ le produit dans M de deux éléments de V . Il est clair que μ est un automorphisme de V .

Nous supposerons dans la suite L et P fixés, et parlerons de (L, P) -modules. 2) s'interprète par: M est un P -module via η , et 3) montre que L l'est aussi. On est donc amené à considérer la situation suivante: une suite exacte

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$$

avec P, N et M algèbres de Leibnitz, et L un P -module, μ et η comme dans la définition 11. On vérifie aisément que l'action de P sur L via η coïncide avec l'action

définissant L comme P -module, et il reste à étudier la forme du produit sur M et de η . C'est l'objet de la

PROPOSITION 10. — *La donnée d'un (L, P) -module croisé équivaut à celle d'un automorphisme μ de V , d'une application bilinéaire $\alpha: V \otimes V \rightarrow L$, d'une structure de N -module pour L et d'une application bilinéaire $\eta_0: P \otimes V \rightarrow L$, le tout vérifiant :*

- a) $[\alpha(v, v'), v''] + \alpha([v, v'], v'') - \alpha([v, v''], v') - [\alpha(v, v''), v'] = \alpha(v, [v', v''])$.
- b) $[\eta_0(p \otimes v), v'] + \alpha(v, [v', p]) + \alpha([v, p], v') = [\alpha(v, v'), p] + \eta_0(p \otimes [v, v'])$;
- c) $\eta(n)\eta(n') - \eta(n')\eta(n) = \eta(\langle p, p' \rangle)$.

Preuve. — L étant central dans M , M se décrit comme une extension à φ nul de V par L , et α est l'application bilinéaire correspondante, d'où a). 5) donne aussi $\eta(v) = \langle \cdot, \mu^{-1}v \rangle$. 4) montre que $\eta(n)$ est un endomorphisme de L , et que $\eta(p)v = \mu^{-1}[\mu v, p] + \eta_0(p \otimes v)$, avec $\eta_0: P \otimes V \rightarrow L$.

Traduisons maintenant 2) : l'égalité correspondante :

$$[\eta(n)m, m'] + [m, \eta(n)m'] = \eta(n)[m, m']$$

est tautologique pour m' dans L , et dérive de ce qui précède pour n dans V . Pour n dans P , on obtient la seconde condition.

On a ainsi prouvé que toutes les conditions énoncées sont nécessaires et suffisantes, ce qui termine la preuve. \square

Nous allons maintenant donner un critère d'isomorphie pour deux modules croisés. Par là, il faut entendre un diagramme commutatif de suites exactes tel que $N=N'$ et toutes les flèches d'une des suites vers l'autre, sauf celle de M vers M' , valent l'identité.

PROPOSITION 11. — *Deux modules croisés (μ, α, η_0) et (μ', α', η'_0) sont isomorphes si et seulement si il existe θ linéaire de V dans L telle que :*

$$\begin{aligned} \alpha(v, v') + \theta[v, v'] &= [\theta v, v'] + \alpha'(\mu'^{-1}\mu v, \mu'^{-1}\mu v') \\ [l, \mu^{-1}v] &= [l, \mu'^{-1}v'] \\ \eta'_0(p \otimes \mu'^{-1}\mu v) &= \eta_0(p \otimes v) + \theta\mu^{-1}[\mu v, p] - [\theta v, p]. \end{aligned}$$

Preuve. — Il suffit d'écrire les conditions de compatibilité aux crochets aux η , l'isomorphisme étant donné par $(l, v) \mapsto (l + \theta v, \mu'^{-1}\mu v)$. \square

COROLLAIRE. — *Tout module croisé est isomorphe à un où $\mu = \text{id}$.*

Preuve. — Il suffit de prendre les α' , η'_0 et $[\cdot, v]'$ *ad hoc* avec $\theta = 0$. \square

Nous supposons désormais $\mu = \text{id}$ et dirons que de tels modules croisés sont normalisés. Dans ce cas, le critère d'isomorphie se réécrit :

PROPOSITION 12. — *Deux modules croisés normalisés (α, η_0) et (α', η'_0) sont isomorphes si et seulement si il existe θ linéaire telle que :*

$$\begin{aligned} \alpha'(v, v') &= \alpha(v, v') + \theta[v, v'] - [\theta v, v'] \\ \eta'_0(p, v) &= \eta_0(p, v) + \theta[v, p] - [\theta v, p]. \quad \square \end{aligned}$$

DÉFINITION 12. — Nous dirons qu'un module croisé est bilatère si le V -module L est trivial, ou, ce qui est équivalent, si L est central bilatère dans M .

Nous ne nous intéresserons désormais qu'aux modules croisés bilatères. La proposition ci-dessous donne une caractérisation complète de ces objets :

PROPOSITION 13. — *Un (L, P) -module croisé normalisé V -trivial équivaut à la donnée d'un 2-cocycle de Leibnitz α de $V \otimes V$ dans L et d'une application bilinéaire $\eta_0 : P \otimes V \rightarrow L$ telle que :*

- 1) $\eta_0(p \otimes [v, v']) + [\alpha(v, v'), p] = \alpha([v, p], v') + \alpha(v, [v', p])$;
- 2) $\alpha(v, [p, v']) = -\alpha(v, [v', p])$;
- 3) $\eta_0(p \otimes [v, p']) + [\eta_0(p' \otimes v), p] - \eta_0(p' \otimes [v, p]) - [\eta_0(p \otimes v), p']$
 $= -\eta_0([p, p'] \otimes v) = \eta_0([p', p] \otimes v)$,

Preuve. — Il suffit de reprendre les résultats de la proposition 8. Il reste alors à traduire la condition 8.c en fonction de α et η_0 . Pour n et n' dans V , l'égalité vient de ce que M est une algèbre de Leibnitz. Pour $n \in V$, $p \in P$ et $l+v \in M$, elle s'écrit :

$$\langle \eta(p)(l+v), n \rangle - \eta(p)(\langle l+v, n \rangle) = \langle l+v, [p, n] \rangle = -\langle l+v, [n, p] \rangle.$$

Soit, comme N est une algèbre de Leibnitz :

$$\alpha([v, p], n) - [\alpha(v, n), p] - \eta_0(p \otimes [v, n]) = \alpha(v, [p, n]) = -\alpha(v, [n, p]),$$

ce qui est la seconde condition.

Pour p et p' dans P , on obtient :

$$\begin{aligned} \eta(p)([l, p'] + [v, p'] + \eta_0(p' \otimes v)) - \eta(p')([l, p] + [v, p] + \eta_0(p \otimes v)) \\ = l, [p', p] + [v, [p', p]] + \langle v, \beta(p', p) \rangle + \eta_0([p', p] \otimes v). \end{aligned}$$

Soit, comme L est un P -module et N une algèbre de Leibnitz :

$$\begin{aligned} \eta_0(p \otimes [v, p']) + [\eta_0(p' \otimes v), p] - \eta_0(p' \otimes [v, p]) - [\eta_0(p \otimes v), p'] \\ = \eta_0([p', p] \otimes v) + \alpha(v, \beta(p', p)). \end{aligned}$$

ce qui est la condition 3. \square

Nous allons considérer une relation sur les modules croisés plus faible que l'isomorphie, mais qui donnera un résultat similaire à ce qui se passe en théorie des groupes pour les objets analogues.

DÉFINITION 13. — Deux modules croisés seront dits liés s'il existe un diagramme commutatif de suites exactes où les flèches $P \rightarrow P$ et $L \rightarrow L$ valent l'identité. On considérera que « X lié à X' » équivaut à « X' lié à X ». Deux modules croisés seront dits équivalents si il existe une chaîne de liaisons les reliant.

PROPOSITION 14. — Dire que X et X' sont liés équivaut à l'existence d'un morphisme $f: V \rightarrow V'$ et d'une application linéaire $g: V \rightarrow L$ telles que :

- a) $\alpha(fv, fv') = \alpha(v, v') + g[v, v']$;
- b) $\eta_0(p \otimes fv) = \eta_0(p \otimes v) + [gv, p] - g[v, p]$;
- c) $\beta'(p, p') = f\beta(p, p')$.

Preuve. — Il suffit de lire le diagramme et d'expliciter les relations de compatibilité avec les crochets et les η . La flèche de $L \oplus V$ vers $L \oplus V'$ est donnée par $\begin{pmatrix} \text{id} & g \\ 0 & f \end{pmatrix}$ et celle de $V \oplus P$ vers $V' \oplus P$ par $\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$. \square

Nous allons montrer que les classes d'équivalence de modules croisés peuvent se décrire en termes d'éléments de $HL^3(P, L)$. Pour cela, on associe à un module croisé la cochaîne suivante :

$$k(p, p', p'') = \eta_0(p \otimes \beta(p', p'')) - \eta_0(p' \otimes \beta(p, p'')) + \eta_0(p'' \otimes \beta(p, p')).$$

LEMME 4 :

$$\delta k = 0.$$

Preuve. — Il suffit de développer le cobord :

$$\begin{aligned} \delta k(p_1, p_2, p_3, p_4) = & [\eta_0(p_2 \otimes \beta(p_3, p_4)), p_1] \\ & - [\eta_0(p_3 \otimes \beta(p_2, p_4)), p_1] + [\eta_0(p_4 \otimes \beta(p_2, p_3)), p_1] \\ & - [\eta_0(p_1 \otimes \beta(p_3, p_4)), p_2] + [\eta_0(p_3 \otimes \beta(p_1, p_4)), p_2] - [\eta_0(p_4 \otimes \beta(p_1, p_3)), p_2] \\ & + [\eta_0(p_1 \otimes \beta(p_2, p_4)), p_3] - [\eta_0(p_2 \otimes \beta(p_1, p_4)), p_3] + [\eta_0(p_4 \otimes \beta(p_1, p_2)), p_3] \\ & - [\eta_0(p_1 \otimes \beta(p_2, p_3)), p_4] + [\eta_0(p_2 \otimes \beta(p_1, p_3)), p_4] - [\eta_0(p_3 \otimes \beta(p_1, p_2)), p_4] \\ & - \eta_0([p_1, p_2] \otimes \beta(p_3, p_4)) + \eta_0(p_3 \otimes \beta([p_1, p_2], p_4)) - \eta_0(p_4 \otimes \beta([p_1, p_2], p_3)) \\ & - \eta_0([p_1, p_3] \otimes \beta(p_2, p_4)) + \eta_0(p_2 \otimes \beta([p_1, p_3], p_4)) - \eta_0(p_4 \otimes \beta([p_1, p_3], p_2)) \\ & - \eta_0(p_1 \otimes \beta([p_2, p_3], p_4)) + \eta_0([p_2, p_3] \otimes \beta(p_1, p_4)) - \eta_0(p_4 \otimes \beta(p_1, [p_2, p_3])) \\ & + \eta_0([p_1, p_4] \otimes \beta(p_2, p_3)) - \eta_0(p_2 \otimes \beta([p_1, p_4], p_3)) + \eta_0(p_3 \otimes \beta([p_1, p_4], p_2)) \\ & + \eta_0(p_1 \otimes \beta([p_2, p_4], p_3)) - \eta_0([p_2, p_4] \otimes \beta(p_1, p_3)) + \eta_0(p_3 \otimes \beta([p_2, p_4], p_3)) \\ & + \eta_0(p_1 \otimes \beta(p_2, [p_3, p_4])) - \eta_0(p_2 \otimes \beta(p_1, [p_3, p_4])) + \eta_0([p_3, p_4] \otimes \beta(p_1, p_2)). \end{aligned}$$

On utilise la relation 13.3 pour remplacer tous les termes de la forme $[\eta_0(p \otimes v), p']$. Après quoi, la somme ci-dessus est égale à $\sum_i \eta_0(p_i \otimes v_i)$. Ces v_i sont nuls en écrivant l'identité de Leibnitz dans N pour les trois éléments de P qui ne sont pas p_i . Ce qui prouve le lemme. \square

LEMME 5. — Les cochaînes k et k' de deux modules croisés liés ne diffèrent que d'un cobord, et réciproquement.

Preuve. — D'après la proposition 14, nous avons en effet :

$$\begin{aligned} k'(p, p', p'') &= \eta_0(p \otimes \beta(p, p')) + [g \beta(p', p''), p] - g[\beta(p', p''), p] \\ &\quad - \eta_0(p' \otimes \beta(p, p'')) + [g \beta(p, p''), p'] - g[\beta(p, p''), p'] + \eta_0(p'' \otimes \beta(p, p')) \\ &\quad + [g \beta(p, p'), p''] - g[\beta(p', p''), p] = k(p, p', p'') + \delta(g \beta). \end{aligned}$$

Il en résulte la première assertion. Si maintenant deux cochaînes k et k' ne diffèrent que d'un cobord δh , on peut toujours factoriser h par V , de sorte que les modules croisés correspondants sont liés. \square

On a prouvé là une moitié du

THÉORÈME 8. — *Les classes d'équivalence de modules croisés bilatères de conoyau P une k -algèbre de Leibnitz, de noyau L un P -module, tous libres sur k , sont en bijection avec $HL^3(P, L)$.*

Preuve. — On a montré l'existence d'une injection de l'ensemble des classes dans $HL^3(P, L)$. Il s'agit maintenant de construire un module croisé associé à un élément quelconque de $HL^3(P, L)$. Soit k cet élément. Nous allons construire une structure de module croisé dont l'algèbre de Leibnitz sous-jacente V sera l'algèbre de Lie abélienne sur le module $P \times P$.

Nous supposons les produits $[p, v]$ nuls, noterons un élément de $V \langle p_1, p_2 \rangle$ et poserons :

$$[\langle p_1, p_2 \rangle, p] = \langle [p_1, p], p_2 \rangle + \langle p_1, [p_2, p] \rangle - \langle [p_1, p_2], p \rangle$$

LEMME 6. — *Ceci donne à $N = P \oplus V$ une structure d'algèbre de Leibnitz.*

Preuve. — Il suffit en fait de vérifier que, pour l'action donnée, V est un P -module. De fait :

$$\begin{aligned} [[\langle p_1, p_2 \rangle, p], p'] &= \langle [[p_1, p], p'], p_2 \rangle + \langle [p_1, p], [p_2, p'] \rangle + \langle [p_1, p'], [p_2, p] \rangle \\ &\quad + \langle p_1, [[p_2, p], p'] \rangle - \langle [[p_1, p_2], p'], p \rangle - \langle [p_1, p_2], [p, p'] \rangle + \langle [[p_1, p_2], p], p' \rangle \\ &\quad - \langle [[p_1, p], p_2], p' \rangle - \langle [p_1, [p_2, p]], p' \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne 0 comme différence d'actions itérées. \square

Nous prendrons pour M l'algèbre de Lie abélienne sur $L \otimes V$: Si maintenant nous posons $k(p, p', p'') = \eta_0(p \otimes \langle p', p'' \rangle)$, définissant ainsi η_0 sur $P \otimes V$, on définit $\eta(n)$ sur M par :

$$\eta(v')v = [v, v'], \quad \eta(p)v = [v, p] + \eta_0(p \otimes v), \quad \eta(p)l = [l, p], \quad \eta(v)l = 0.$$

Bien entendu, on prend μ égal à id sur V et 0 sur L . L'application des classes d'isomorphie de modules croisés bilatères dans $HL^3(P, L)$ est donc bien surjective, ce qu'il fallait démontrer. \square

Considérons maintenant le cas des modules croisés à N fixé. Nous allons donner un théorème de classification par un groupe de cohomologie relatif des classes d'isomorphie

de tels modules. Comme N est fixé, ceci fixe une surjection v de N sur P , et on parlera de (L, v) -modules. On a clairement le :

COROLLAIRE (de 14). — *Deux tels modules croisés sont isomorphes si et seulement si il existe θ linéaire de V dans L nulle sur les éléments de la forme $[p, v] + [v, p]$ telle que :*

$$\alpha'(v, v') = \alpha(v, v') + \theta[v, v']; \quad \eta'_0(p \otimes v) = \eta_0(p \otimes v) + \theta[v, p] - [\theta v, p]. \quad \square$$

DÉFINITION 14. — Un module croisé sera dit extensible si l'extension par 0 de α sur N est encore un cocycle.

Nous supposons désormais cette condition vérifiée. Elle se traduit par la

PROPOSITION 15. — *Un module croisé à α extensible est un module croisé vérifiant, outre les trois conditions de 14, les suivantes :*

- 4) $\alpha(\beta(p, p'), v) = \alpha(v, \beta(p, p')) = 0$;
- 5) $\alpha([p, v], v') = \alpha([p, v'], v)$;
- 6) $\alpha([v, p], v') + \alpha(v, [v', p]) = 0$;
- 7) $\eta_0(p \otimes \cdot)$ est nulle sur tous les $[v, p'] + [p', v]$.

Preuve. — Il suffit d'écrire que $\alpha \oplus 0$ est un cocycle dans les divers cas de figure possibles. \square

Nous définissons alors un cocycle de Leibnitz f de $N \otimes N$ dans L par :

$$f(v, v') = \alpha(v, v'), \quad f(p, p') = 0, \quad f(p, v) = -f(v, p) = \eta_0(p \otimes v).$$

Il est facile de voir que cette cochaîne est dans le conoyau de $v^* : V^*(P, L) \rightarrow V^*(N, L)$, et que sa classe de cohomologie est la même pour deux modules croisés isomorphes. Il reste pour cela à prouver qu'il s'agit d'un cocycle.

LEMME 7:

$$\delta f = 0.$$

Preuve. — Il faut prouver que $\delta f(x \otimes y \otimes z) = 0$, où les symboles x, y et z sont dans V ou P . Nous allons déterminer cela dans les 8 cas possibles.

- a) x, y et z sont dans P (situation notée PPP) : δf est une cochaîne sur $P \otimes P \otimes P$.
- b) PPV :

$$[\eta_0(p' \otimes v), p] - \eta_0(p \otimes v, p') = \eta_0([p, p'] \otimes v) + \eta_0(p' \otimes [p, v]) + \eta_0(p \otimes [p', v]).$$

C'est 15.3 et 4.

- c) PVP :

Même chose, par 15.7.

- d) VPP :

Même chose.

e) VVP:

$$[\alpha(v, v'), p] = -\eta_0(p \otimes [v, v']) - \alpha([v, p], v') - \alpha(v, [v' p]).$$

C'est 15.1.

f) VPV:

Même chose par 15.2 et 6.

g) PVV:

Même chose, par 15.5.

h) VVV:

$$\delta\alpha = 0.$$

On voit donc que δf est à support dans $P \otimes P \otimes P$; f est par conséquent un cocycle du complexe conoyau. \square

DÉFINITION 16. — L'homologie du conoyau de $v^*: V^*(P, L) \rightarrow V^*(N, L)$ se note $HJ^*(P, N; L)$.

THÉORÈME 9. — Soient $v: N \rightarrow P$ un morphisme surjectif d'algèbres de Leibnitz, et L un P -module. Les classes d'isomorphie de (L, v) -modules croisés bilatères extensibles forment un ensemble en bijection avec le groupe de cohomologie relatif $HL^3(P, N; L)$.

Preuve. — On vient de prouver qu'il existe une application injective des classes d'isomorphie de modules croisés dans le groupe de cohomologie relatif $HL^3(P, N; L)$. Il suffit d'en établir la surjectivité en exhibant, pour toute classe de cohomologie, un module croisé lui correspondant.

Soit donc f un 2-cocycle de $N \otimes N$ dans L . Nous allons définir un produit sur $M = L \oplus V$ par $\langle (l, v), (l', v') \rangle = (f(v, v'), [v, v'])$. Il est clairement de Leibnitz. Nous définissons aussi une action η par :

$$\eta(p + v')(l + v) = [l, p] + [v, p] + \langle v, v' \rangle + f(p, v).$$

Il n'est pas difficile de voir que $\eta(n)$ ainsi défini est une dérivation et que les différences d'actions itérées sont bien des actions de crochets. \square

Un exemple d'utilisation de modules croisés est fourni par la théorie des groupes. Suivant [BC], on appellera module précroisé sur un groupe N la donnée d'un morphisme de groupe $\delta: M \rightarrow N$ et d'une action notée en exposant de N sur M telle que $\delta(x^\alpha) = \alpha^{-1} x \alpha$. Le module est dit croisé si de plus $x^\delta y = y^{-1} x y$. On reconnaît bien les axiomes de modules croisés avec le crochet remplacé par la conjugaison. Nous avons vu en I.3 que, au moins formellement, on a une identité de structures entre ces modules croisés et ceux que nous introduisons. Les modules croisés admettent dans ce cadre une classification cohomologique analogue à celle qui vient d'être présentée (cf. [ML]).

6. Un produit en cohomologie de Leibnitz

Sur la cohomologie des algèbres de Lie existe un produit (dit cup-produit), associatif et commutatif au sens gradué, qui se relève au niveau des cochaînes. Nous allons montrer l'existence d'un produit analogue en cohomologie de Leibnitz, défini par les mêmes formules.

Il sera utile de préciser quelques

NOTATIONS. — Nous noterons $\langle n \rangle$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, muni de son ordre usuel. Tous les ensembles considérés dorénavant étant ordonnés, cette épithète sera omise. Le cardinal d'un ensemble fini A sera noté $\#A$. A toute inclusion $A \subset B$ est associée un shuffle σ par la règle: $\sigma(i)$ est le i -ième élément de A si $i \leq \#A$, et le $(i - \#A)$ -ième élément du complémentaire de A dans B sinon. Il est clair que tout (p, q) -shuffle peut s'obtenir ainsi, avec $p = \#A$ et $p + q = \#B$. La signature de ce shuffle sera notée $\varepsilon(A, B)$, qui sera abrégée en $\varepsilon(A)$ quand B sera clair. La concaténation d'ensembles sera notée par $|$. Le complémentaire de A dans B se note $B \setminus A$, ou encore \hat{A} en l'absence d'ambiguïté sur B . Nous appellerons $X(n, p)$ l'ensemble des parties à p éléments de $\langle n \rangle$, qui est en bijection avec celui des $(p, n-p)$ -shuffles, comme on l'a vu. Si x est un n -uplet et $A \subset \langle n \rangle$, x_A désigne le p -uplet constitué des éléments de x à indice dans A . $A \setminus i$ est A privée de i , alors que A/i est A privée de son i -ième élément. Si i est dans A , i_A désigne son rang dans A . Sinon, on appellera $A+i$ la partie ordonnée obtenue en ajoutant i à A . On désignera par x un n -uplet (x_1, \dots, x_n) quand n est défini sans ambiguïté.

Nous pouvons maintenant formuler la

DÉFINITION 15. — Soient L une algèbre de Leibnitz, M et M' deux L -modules, f un élément de $V^p(L, M)$ et g de $V^q(L, M')$. On pose $n = p + q$. Alors, le cup-produit de f et g , noté $f \cup g$, est un élément de $V^n(L, M \otimes M')$ donné par :

$$(f \cup g)(x) = \sum_{A \in X(n, p)} \varepsilon(A) f(x_A) \otimes g(x_{\hat{A}})$$

PROPOSITION 16. — Soit T l'application qui échange les facteurs: $M' \otimes M \rightarrow M \otimes M'$.

Alors: $T(g \cup f) = (-1)^{pq} f \cup g$.

Preuve. — Il suffit de mettre en regard les deux définitions :

$$\begin{aligned} (f \cup g)(x) &= \sum_{A \in X(n, p)} \varepsilon(A) f(x_A) \otimes g(x_{\hat{A}}) \\ T(g \cup f)(x) &= \sum_{A \in X(n, p)} \varepsilon(\hat{A}) f(x_A) \otimes g(x_{\hat{A}}) \end{aligned}$$

Comparons les deux signatures qui différencient ces définitions. Leur quotient est la signature de la permutation qui envoie $A|\hat{A}$ sur $\hat{A}|A$. Il s'agit là d'une permutation circulaire sur n symboles, de signature $(-1)^{q(p+q-1)} = (-1)^{pq}$, indépendamment de A .

Il en résulte que les deux expressions diffèrent d'un facteur $(-1)^{pq}$, ce qui était à prouver. \square

L'associativité se prouve de même :

PROPOSITION 17. — Soient f, g et h des cochaînes sur L à valeurs dans M, M' et M'' , de degrés p, q et r respectivement. On pose $p+q+r=n$. Alors : $f \cup (g \cup h) = (f \cup g) \cup h$.

Preuve. — Là encore, il suffit de mettre en regard les expressions à comparer :

$$\begin{aligned} f \cup (g \cup h)(x) &= \sum_{A \in X(n, p)} \sum_{\substack{\#B=q \\ A \cap B = \emptyset}} \varepsilon(A) \varepsilon(B, \hat{A}) f(x_A) \otimes g(x_B) \otimes h(x_{(A \cup B)}) \\ (f \cup g) \cup h(x) &= \sum_{A \in X(n, p+q)} \sum_{\substack{\#B=q \\ B \subset A}} \varepsilon(A) \varepsilon(B, A) f(x_B) \otimes g(x_{A \setminus B}) \otimes h(x_{\hat{A}}) \\ &= \sum_{A \in X(n, p)} \sum_{\substack{\#B=q \\ A \cap B = \emptyset}} \varepsilon(A \cup B) \varepsilon(B, A \cup B) f(x_A) \otimes g(x_B) \otimes h(x_{(A \cup B)}) \end{aligned}$$

Les produits de signatures des deux expressions sont celle de la permutation qui envoie $\langle n \rangle$ sur $A|B|(A \cup B)$, réalisée de deux manières différentes comme produit. Les deux expressions sont donc égales, et \cup est associatif. \square

Le résultat suivant est plus délicat à établir

THÉORÈME 10. — Soient f et g deux cochaînes sur une algèbre de Leibnitz à valeurs dans M et M' deux L -modules, et de degrés p et q respectivement. On pose $n=p+q-1$. Alors : $\delta(f \cup g) = \delta f \cup g + (-1)^p f \cup \delta g$.

Preuve. — On écrit les deux membres :

$$\begin{aligned} \delta(f \cup g)(x) &= \sum_{C \in X(n, p)} \varepsilon(C) \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} [f(u_i x_C) \otimes g((u_i x_C)_C), x_i] - f((dx)_C) \otimes g((dx)_C) \right) \\ \delta(f \cup g)(x) &= \sum_{A \in X(n, p+1)} \varepsilon(C) \left(\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} [f(x_{A/i}), x_{a_i}] \otimes g(x_{\hat{A}}) - f(d(x_A)) \otimes g((x_{\hat{A}})) \right) \\ f \cup \delta g(x) &= \sum_{C \in X(n, p)} \varepsilon(C) \left(\sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} f(x_C) \otimes [g(x_{\hat{C}/i}), x_{\hat{c}_i}] - f(x_C) \otimes g(d(x_C)) \right) \end{aligned}$$

Nous allons simplifier l'écriture de $\delta(f \cup g) - \delta f \cup g - (-1)^p f \cup \delta g$ au moyen de quelques lemmes combinatoires. Nous noterons s_i l'application de $X(n, p)$ dans $X(n, p+1)$ donnée par : $(s_i C)_j = c_j$ si $c_j < i$ et $1 + c_j$ sinon.

LEMME 8 :

$$\forall C \in X(n, p), \varepsilon(C) = (-1)^{\sum c_i - p(p+1)/2}.$$

Preuve. — On peut décomposer la permutation correspondante en produit de transpositions de la sorte. On place d'abord c_1 en première position, ce qui requiert $c_1 - 1$ transpositions. Pour c_2 , il en faudra $c_2 - 2$ et ainsi de suite. En sommant, on trouve le résultat. \square

DÉFINITION 17. — Pour C dans $X(n, p)$, on pose $r(C) = \sum c_i + p(p+1)/2$.

LEMME 9. — Pour tout C dans $X(n, p)$ et tout i de $\langle n \rangle \setminus C$, il existe un seul élément A de $X(n, p+1)$ et un seul j dans $\langle p+1 \rangle$ tels que $a_j = i$ et $A/j = s_i C$.

Preuve. — Il suffit d'insérer i dans C , ce qui donne A , et de prendre pour j la position de i dans A . \square

Comme il est clair que $(u_i x)_C = x_{(s_i C)}$, ce lemme montre que les termes de la première somme dans $\delta f \cup g$ se retrouvent dans $\delta(f \cup g)$, avec un signe qui est $(-1)^{r(A) - r(C) + i + j}$. Or, $r(A) - r(C)$ vaut $i - j$; le signe est donc identique dans les deux expressions.

LEMME 10. — Pour tout C dans $X(n, p)$ et i dans $\langle n \rangle$, il existe un seul C' de $X(n, p)$ et un seul j de $\langle q+1 \rangle$ tels que : $C' = s_i C$ et $i = (\hat{C}')_j$.

Preuve. — Comme $i \notin C'$, on prend pour j la position de i dans \hat{C}' . \square

De ce fait, les termes de la première somme dans $f \cup \delta g$ se retrouvent dans $\delta(f \cup g)$. Comme précédemment, il faut calculer $r = r(C') - r(C) + i + j$.

Ceci vaut $\#C \cap (\langle n \rangle \setminus \langle i-1 \rangle) + i - j$. Mais $j = i - \#C \cap \langle i-1 \rangle$. Donc, $r = \#C = p$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \delta(f \cup g) - \delta f \cup g - (-1)^p f \cup \delta g(x) \\ = \sum_{C \in X(n, p)} \varepsilon(C) (f((dx)_C) \otimes g((dx)_{\hat{C}}) + (-1)^p f(x_C) \otimes g(d(x_{\hat{C}}))) \\ + \sum_{A \in X(n, p+1)} \varepsilon(A) f(d(x_A)) \otimes g(x_{\hat{A}}). \end{aligned}$$

Nous allons décomposer la première somme afin de simplifier les deux autres. Nous poserons : $\{x, k, l\} = \dots \otimes [x_k, x_l] \otimes \dots \otimes \hat{x}_l \otimes \dots$, pour $k < l$ dans $\langle r \rangle$. On a donc, si x est dans $L^{\otimes r}$, $dx = \sum_{1 \leq k < l \leq r} (-1)^{l+1} \{x, k, l\}$.

On désigne, pour $i \notin C$, par $d_i C$ la partie obtenue de C en décrémentant ses éléments plus grands que i .

LEMME 11. — Soit $C \in X(n, p)$ et x dans $L^{\otimes n}$.

$$\text{Alors : } \{x, k, l\}_C = \begin{cases} \{x_{(s_l C)}, k_{(s_l C)}, l_{(s_l C+1)}\} & \text{si } k \in C; \\ x_{(s_l C)} & \text{sinon. } \square \end{cases}$$

De ce fait :

$$\begin{aligned} \sum_{C \in X(n, p)} \varepsilon(C) (f(dx)_C) \otimes g(dx_{\hat{C}}) \\ = \sum_{\substack{A \in X(n, p+1), l \in \langle n \rangle \\ C \in X(n, p) \mid s_l \hat{C} = \hat{A} \\ k \in C, k < l}} \varepsilon(C) (-1)^{l+1} f(\{x_{(s_l C + l)}, k_{(s_l C)}, l_{(s_l C + l)}\}) \otimes g(x_{\hat{A}}) \\ + \sum_{\substack{C \in X(n, p+1), l \in \langle n \rangle \\ B \in X(n, p) \mid s_l B = C \\ l > k \notin B}} \varepsilon(B) (-1)^{l+1} f(x_C) \otimes g(\{x_{(s_l \hat{B} + l)}, k_{(s_l \hat{B})}, l_{(s_l \hat{B} + l)}\}) \end{aligned}$$

Ces formules se simplifient largement : en effet, dans la première somme ci-dessus, on a forcément $A = s_l C + l$, soit $l \in A$ et $C = d_l(A \setminus l)$. Il en résulte donc que $s_l C + l$ n'est autre que A , et cette somme devient :

$$\sum_{\substack{A \in X(n, p+1) \\ \{k, l\} \subset A}} \varepsilon(d_l(A \setminus l)) (-1)^{l+1} f(\{x_A, k_A, l_A\}) \otimes g(x_{\hat{A}}).$$

De même, dans la seconde somme, l ne peut être dans C et donc $B = d_l C$. Par le même argument, cette somme vaut :

$$\sum_{\substack{C \in X(n, p) \\ \{k, l\} \subset \hat{C}}} \varepsilon(d_l C) (-1)^{l+1} f(x_C) \otimes g(\{x_{\hat{C}}, k_{\hat{C}}, l_{\hat{C}}\}).$$

Pour finir, il reste à comparer les différentes signatures qui interviennent. Or, on a :

$$l \in A \Rightarrow r(d_l(A \setminus l)) - r(A) + l - l_A = 0;$$

$$l \in \hat{C} \Rightarrow r(d_l C) - r(C) + l - l_{\hat{C}} = \#C = p.$$

En conclusion, toutes les sommes se simplifient, et le théorème est prouvé. \square

Il en résulte le

COROLLAIRE. — *Pour tout choix d'une algèbre de Leibnitz L et de M et M' deux L -modules, il existe un produit associatif et commutatif au sens gradué, dit cup-produit :*

$$HL^*(L, M) \otimes HL^*(L, M') \rightarrow HL^*(L, M \otimes M'). \quad \square$$

CHAPITRE III

Homologie de Hochschild et homologie de Leibnitz de l'algèbre des matrices

Le but du présent chapitre est de montrer que l'homologie de Leibnitz de $\mathfrak{gl}(A)$ est calculable en fonction de l'homologie de l'algèbre A . Pour cela, on introduira un complexe intermédiaire $V_*(A)$, formé à partir d'une structure présimpliciale sur $k[U_*] \otimes A^{\otimes *}$ dont

nous démontrons l'existence. U_n désigne la classe de conjugaison de $\tau=(1, 2, \dots, n)$ dans le groupe symétrique S_n .

Dans tout ce qui suit, k est un anneau commutatif, et les algèbres seront associatives et unitaires (sauf l'algèbre de Lie $gl(A)$, bien sûr). Ultérieurement, on appliquera la restriction supplémentaire: k corps de caractéristique nulle.

Si un élément σ du groupe symétrique S_n agit sur les symboles a_1, \dots, a_n , on définit une suite infinie périodique de symboles sur lesquels σ agit par la règle: $a_{r \pm n} = a_r$, pour tout r . Cette convention vise à rendre plus synthétiques certaines des écritures qui suivent.

1. Construction d'un complexe

Dans cette section, on va montrer l'existence d'une structure présimpliciale sur $k[U_*] \otimes A^{\otimes *}$. Le complexe associé sera étudié dans les sections suivantes.

DÉFINITION 1. — Si σ est un élément de U_n , on peut lui associer canoniquement un élément $\omega(\sigma)$ de S_{n-1} par: $\omega(\sigma)(j) = \sigma^{j(1)-1}$. On désignera également par $\omega(\sigma)$ l'élément de S_n obtenu en considérant que $\omega(\sigma)$ agit sur $\{2, \dots, n\}$, laissant 1 fixe. Avec cette notation, on a clairement $\sigma = \omega(\sigma)\tau\omega^{-1(\sigma)}$. $\omega(\sigma)$ sera abrégé en ω si σ est clair par le contexte.

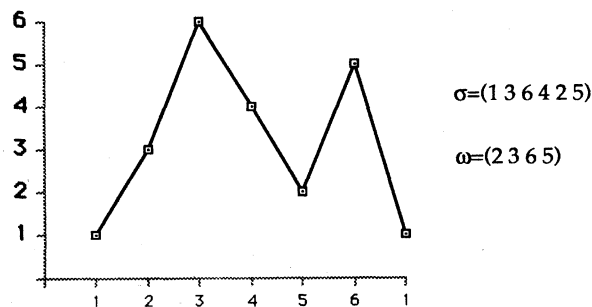
DÉFINITION 2. — On désigne par d'_i , pour i entre 0 et n , l'application de U_{n+1} dans U_n définie par:

$$(d'_i \sigma)(j) = j \text{ si } j \leq \max(\omega(i+2), \omega(i+1)), j-1 \text{ sinon.}$$

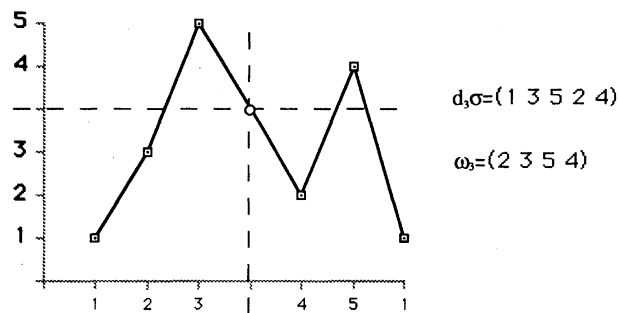
La même notation sera appliquée à l'application définie sur $k(U_*)$ par $d_i \sigma = (-1)^{i+\varepsilon_i} d'_i \sigma$, avec $\varepsilon_i = \omega(i+2)$ si $\omega(i+1) < \omega(i+2)$, $1 + \omega(i+1)$ sinon. La distinction entre d et d' est l'attribution d'un signe, lequel dépend expressément de σ et de i .

$\omega(d_i \sigma)$ sera généralement notée ω_i ; il ne devrait en résulter aucune confusion.

On peut illustrer graphiquement cette opération d_i sur les n -cycles. Considérons le graphe de $j \mapsto \omega(j)$:



Vu la nature cyclique du graphe, on peut aussi le représenter tracé sur un cercle. L'opération d_i consiste à : enlever, dans ce graphe, celle des colonnes d'abscisse $i+1$ ou $i+2$ contenant le point de plus grande ordonnée ; enlever la ligne où ce dernier se trouve ; recoller les morceaux en renumérotant les lignes et les colonnes. Par exemple :



La colonne d'abscisse 4 a été effacée, ainsi que la ligne 4, car $\omega(4) > \omega(5)$. Les lignes et colonnes ont été ensuite recollées et renumérotées.

LEMME 1. — Soit σ dans U_{n+1} . Alors :

$$\begin{aligned} \omega_i(j) &= \omega(j) & \text{si } j < i & \text{ et } \omega(j) < \max(\omega(i+1), \omega(i+2)) \\ \omega(j-1) & & \text{si } j \geq i & \text{ et } \omega(j-1) < \max(\omega(i+1), \omega(i+2)) \\ \omega(j) - 1 & & \text{si } j < i & \text{ et } \omega(j) \geq \max(\omega(i+1), \omega(i+2)) \\ \omega(j-1) - 1 & & \text{si } j \geq i & \text{ et } \omega(j-1) \geq \max(\omega(i+1), \omega(i+2)) \end{aligned}$$

Preuve. — Il s'agit d'une simple traduction. \square

Les notations employées suggèrent que les d_i sont les opérateurs face d'un module simplicial, autrement dit vérifient certaines règles de commutation. Il en est bien ainsi :

THÉORÈME 1. — Soit k un anneau commutatif. Sur $k[U_{n+1}]$, les opérateurs construits dans la définition 2 vérifient :

$$0 \leq i < j \leq n \Rightarrow d_i d_j = d_{j-1} d_i.$$

Preuve. — Si on représente σ comme une suite d'entiers de 1 à $n+1$ dont le premier vaut 1 et telle que chaque entier entre 1 et $n+1$ y soit présent une fois et une seule, l'effet de l'application d_i sur cette suite est d'omettre le $(i+2)$ -ième ou le $(i+1)$ -ième si ce dernier est plus grand, et diminuer d'une unité les éléments restants qui sont supérieurs à l'élément omis (on appellera normalisation cette dernière opération). ω désigne toujours l'élément de S_{n+1} laissant 1 fixe associé à σ . Il est facile alors de voir que les effets de $d_i d_j$ et $d_{j-1} d_i$ sont les mêmes si $i < j-1$. Cet effet est d'omettre les i' -ième et j' -ième éléments (r' vaut $r+1$ si le $(r+1)$ -ième élément est plus grand que le suivant, et $r+2$

sinon), de diminuer de 2 ceux qui sont plus grands que les deux omis, de 0 ceux qui sont plus petits que ces derniers et de 1 les autres. Pour ce qui est des signes, le fait que i est strictement inférieur à $j-1$ garantit que les changements de signes sont les mêmes dans les deux cas. En effet, il se font par rapport aux mêmes éléments, une normalisation compensant le changement de signe de $i+j$.

Le cas $j=i+1$ demande un peu plus de soin. Six cas de figure peuvent se présenter pour les signes. Pour les effets sur la suite associée, ils sont toujours identiques, à savoir omettre les deux plus grands des éléments $\omega(i+1)$, $\omega(i+2)$ et $\omega(i+3)$, avec la même normalisation que ci-dessus. Le seul problème est celui des signes, étudiés cas par cas :

- a) $\omega(i+1) < \omega(i+2) < \omega(i+3)$: le signe est commun et vaut $(-1)^{\omega(i+1)+\omega(i+2)+i+j}$.
- b) $\omega(i+1) < \omega(i+3) < \omega(i+2)$: on obtient $(-1)^{i+j+\omega(i+2)+\omega(i+3)+1}$.
- c) $\omega(i+3) < \omega(i+1) < \omega(i+2)$: on obtient $(-1)^{i+j+\omega(i+2)+\omega(i+1)+1}$.
- d) $\omega(i+3) < \omega(i+2) < \omega(i+1)$: on obtient $(-1)^{i+j+\omega(i+2)+\omega(i+1)}$.
- e) $\omega(i+2) < \omega(i+3) < \omega(i+1)$: on obtient $(-1)^{i+j+\omega(i+3)+\omega(i+1)}$.
- f) $\omega(i+2) < \omega(i+1) < \omega(i+3)$: on obtient $(-1)^{i+j+\omega(i+3)+\omega(i+1)+1}$.

On a donc finalement l'assertion proposée. \square

Il reste à étendre cette structure à $k[U_*] \otimes A^{\otimes *}$. Tel est l'objet de la proposition suivante.

DÉFINITION 3. — Par abus de langage, on notera, pour \underline{a} un élément de $A^{\otimes n+1}$, $d_i(\underline{a})$ l'image de \underline{a} par la i -ième face du complexe de Hochschild :

$$d_i(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n \quad 0 \leq i < n;$$

$$d_n(a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \dots$$

Dans la définition générale, le produit est en position i .

PROPOSITION 1. — Soit \underline{a} un élément de $A^{\otimes n+1}$ et $\sigma \in U_{n+1}$. On notera $\sigma \underline{a}$ l'élément $a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma^{-1}(n+1)}$. Alors, les applications d_i définies sur $k[U_{n+1}]$ par $d_i(\sigma \otimes \underline{a}) = d_i \sigma \otimes (\omega_i \cdot d_i(\omega^{-1} \underline{a}))$ vérifient les relations : $i < j \Rightarrow d_i d_j = d_{j-1} d_i$.

Preuve. — Dans le calcul des deux expressions à comparer, les deux permutations sont égales, comme le montre le théorème 1. Il reste donc à comparer les actions sur $A^{\otimes n+1}$. Le seul point restant à montrer, après simplifications évidentes, est que, sur $A^{\otimes n+1}$, on a :

$$d_i(\omega_j^{-1} \omega_j d_j(\omega^{-1} \underline{a})) = d_{j-1}(\omega_i^{-1} \omega_i d_i(\omega^{-1} \underline{a})),$$

ce qui résulte de la commutation des faces du complexe de Hochschild. \square

COROLLAIRE. — Le k -module gradué défini en degré n par $k[U_{n+1}] \otimes A^{\otimes n+1}$ muni des opérateurs d_i est un module présimplicial. On peut donc en faire un complexe, le bord étant donné par la formule $d = \sum (-1)^i d_i$. Les groupes d'homologie obtenus seront provisoirement notés $HZ_*(A)$.

Il ne semble pas possible de munir $V_*(A)$ d'une structure simpliciale. On peut toutefois s'en rapprocher de la manière suivante :

DÉFINITION 4. — Soit $\sigma \otimes \underline{a}$ dans $V_n(A)$. Pour tout i entre 0 et n , on définit un n -cycle $\sigma^{(i)}$, de permutation associée $\omega^{(i)}$, par :

$$\begin{aligned} j < i &\Rightarrow \omega^{(i)}(j) = \omega(j) \\ j > i &\Rightarrow \omega^{(i)}(j) = \omega(j-1)\omega^{(i)}(i) = n+2. \end{aligned}$$

On pose alors $s_i(\sigma \otimes \underline{a}) = (-1)^{n+i} \sigma^{(i)} \otimes (\underline{a} \otimes 1)$.

PROPOSITION 2. — a) $i \leq j \Rightarrow s_i s_j = (n+2, n+3) \cdot s_{j+1} s_i (\sigma \otimes \underline{a})$
(le \cdot désigne l'action par conjugaison signée sur $k[U_{n+1}]$)

$$\begin{aligned} b) \quad i < j &\Rightarrow d_i s_j = s_{j-1} d_i \\ i > j+1 &\Rightarrow d_i s_j = s_j d_{i-1} \\ d_i s_i &= id = d_i s_{i+1}. \end{aligned}$$

Preuve. — Le seul point délicat est la dernière assertion de b) en ce qui concerne les signes. En effet, l'opération s_i revient à rajouter $n+2$ comme $(i+2)$ -ième élément dans la suite associée à σ , et les signes sont clairement ceux annoncés sauf éventuellement pour $d_i s_i$ et $d_{i+1} s_i$. Que les deux valent $\pm id$ est clair; ils sont égaux car η_i change de parité en même temps que j . Le signe de $d_i s_i$ est $(-1)^{(n+2+i+i+n)} = 1$, ce qui termine la preuve. \square

On peut s'interroger sur l'existence d'une structure de S_n -module sur $V_n(A)$. Bien que la réponse ne soit pas forcément négative, l'action la plus naturelle qu'on puisse envisager n'en est pas une. Toutefois, on a des résultats partiels.

PROPOSITION 3 :

$$d_i(\varphi\sigma\varphi^{-1} \otimes \varphi \underline{a}) = \varphi' \cdot d_{i+k}(\sigma \otimes \underline{a}).$$

Preuve. — Dans la formule à prouver, l'action de S_n est par conjugaison sur $k[U_n]$ et par permutation des variables sur $A^{\otimes n}$; de manière précise :

$$\varphi \cdot \underline{a} = a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \dots$$

On a, en notant β la permutation associée à $\varphi\sigma\varphi^{-1}$:

$$d_i(\varphi \cdot \sigma \otimes \underline{a}) = d_i(\varphi\sigma\varphi^{-1}) \otimes \beta_i d_i(\tau^{k'} \omega^{-1} \underline{a}).$$

L'entier k' est tel que $\varphi\omega(1-k') = 1$ (on rappelle que tous les entiers sont considérés modulo $n+1$). Comme $d_i \tau^{k'}$ est égal à $\tau^{k'} d_{i+k'}$ avec k' dépendant de k' et i , on a déjà la forme de l'égalité à démontrer. Il reste à déterminer $d_i(\varphi\sigma\varphi^{-1})$. On l'obtient en omettant le plus grand des $(i+1)$ - et $(i+2)$ -ièmes éléments de la suite $(\varphi\sigma^i \varphi^{-1}(1))$. On pose :

$$p = \min(\sigma^{i+1+k}(1), \sigma^{i+2+k}(1)) \text{ et } q = \min(\varphi\sigma^{i+1+k}(1), \varphi\sigma^{i+k+2}(1)).$$

La permutation φ' est la permutation circulaire de l'intervalle $[\min(p, q), \max(p, q)]$. Si cet intervalle est vide ou réduit à un singleton, φ' vaut l'identité. \square

2. $\text{HZ}_*(A)$ et l'homologie de l'algèbre de Leibnitz des matrices

Nous allons maintenant montrer que $\text{HZ}_*(A)$ permet de calculer l'homologie de l'algèbre de Leibnitz des matrices sur A . Nous supposons désormais que k est un corps de caractéristique nulle.

Considérons l'algèbre de Lie des matrices de taille finie sur A , $\mathfrak{gl}(A)$, vue comme algèbre de Leibnitz. Comme $(\mathfrak{gl}_p(A))^{\otimes n}$ est réductive et $\mathfrak{gl}_p(k)$ est $\mathfrak{gl}_p(k)$ -semi-simple pour la représentation adjointe pour $p \geq 3$, on se trouve dans le cadre de validité de la proposition 6.2 de [LQ]. Cette dernière dit que l'homologie de Leibnitz de $\mathfrak{gl}_p(A)$ est calculée par le complexe des coinvariants donné en degré n par $(\mathfrak{gl}_p(A))^{\otimes n}_{\mathfrak{gl}_p(k)}$. En utilisant le système d'inclusions $\mathfrak{gl}_p(A) \rightarrow \mathfrak{gl}_{p+1}(A)$ consistant à rajouter une $(p+1)$ -ième ligne et une $(p+1)$ -ième colonne de zéros, on obtient, par le même argument que dans [LQ], une structure d'algèbre de Hopf sur $\text{HL}_*(\mathfrak{gl}(A))$, la multiplication se faisant par somme directe et la comultiplication étant induite par la diagonale.

DÉFINITION 5. — Soit $E_{i,j}(a)$ la matrice comportant un seul coefficient non nul, valant a , sur la i -ième ligne et la j -ième colonne. On notera X_n le k -module engendré par les produits tensoriels $E_{1,\sigma(1)}(a_1) \otimes \dots \otimes E_{n,\sigma(n)}(a_n)$, pour σ dans S_n .

On sait, depuis [LQ], que $(\mathfrak{gl}(A))^{\otimes n}_{\mathfrak{gl}(k)}$ est isomorphe à $k[S_n] \otimes A^{\otimes n}$, lequel est manifestement isomorphe à X_n par : $\sigma \otimes \underline{a} \mapsto E_{1,\sigma(1)}(a_1) \otimes \dots \otimes E_{n,\sigma(n)}(a_n)$. On notera T le premier isomorphisme, et θ le second. Ceci permet de munir X_* d'une différentielle en composant : l'inclusion de X_n dans $(\mathfrak{gl}(A))^{\otimes n}$; la projection canonique ; la différentielle sur le complexe quotient ; l'isomorphisme T et la bijection θ . Si on appelle $f_1 \dots f_5$ les flèches précédentes, dans l'ordre de leur composition, le fait que cette application est de carré nul vient de ce que la composée de f_4, f_5, f_1 et f_2 vaut l'identité et que le carré de f_3 est nul par construction. Il en résulte aussitôt que le complexe X_* a pour homologie $\text{HL}_*(\mathfrak{gl}(A))$.

On calcule explicitement la différentielle sur X_* de la manière suivante. Il suffit de composer la différentielle de $V_*(\mathfrak{gl}(A))$ par l'application suivante : si A et B sont deux listes d'éléments de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ sans répétitions de cardinal n , ne différant que par l'ordre de leurs éléments, on associe à $E_{a_1,b_1} \otimes \dots \otimes E_{a_n,b_n}$ le produit $E_{1,\sigma(1)} \otimes \dots \otimes E_{n,\sigma(n)}$, où σ est la permutation qui envoie l'ensemble ordonné A sur B .

La bijection entre X_* et $k[S_*] \otimes A^{\otimes *}$ permet de munir ce dernier module gradué d'une structure de complexe, dont l'homologie vaut encore $\text{HL}_*(\mathfrak{gl}(A))$. Par le même argument que dans [LQ], il existe une structure d'algèbre de Hopf sur X_* dont la partie primitive est formée par $k[U_*] \otimes A^{\otimes *}$. *A priori*, on a donc construit deux différentielles sur le module gradué $k[U_*] \otimes A^{\otimes *}$, et la question naturelle est de comparer les homologies des deux complexes obtenus.

THÉORÈME 2 :

$$\text{HZ}_{*-1}(A) = \text{Prim HL}_*(\mathfrak{gl}(A)).$$

Preuve. — Il suffit en fait de démontrer que, sur $k[U_*] \otimes A^{\otimes *}$, la différentielle construite au paragraphe précédent, qui résulte de l'isomorphisme T , est égale à celle définie en début de chapitre. En effet :

$$\begin{aligned} d(E_{1, \sigma(1)}(a_1) \otimes \dots \otimes E_{n, \sigma(n)}(a_n)) &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (-1)^{j+1} \dots \otimes [E_{i, \sigma(i)}(a_i), E_{j, \sigma(j)}(a_j)] \otimes \dots \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \sigma(i) = j}} (-1)^{j+1} \dots \otimes E_{i, \sigma(j)}(a_i a_j) \otimes \dots - \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \sigma(j) = i}} (-1)^{j+1} \dots \otimes E_{j, \sigma(i)}(a_j a_i) \otimes \dots \end{aligned}$$

[le terme écrit est en position $\min(i, j)$].

On voit sur cette écriture que le bord à calculer est la somme de $n+1$ indécomposables, dont chacun va être identifié à un $d_k(\sigma \otimes a)$ via θ . De manière précise, $\theta(d_k(\sigma \otimes a))$ est, dans la somme précédente, le terme résultant du crochet de $E_{\omega(k+1), \omega(k+2)}$ et $E_{\omega(k+2), \omega(k+3)}$.

La permutation associée au terme correspondant à k est celle qui envoie $\{1, \dots, \sigma^1(i)-1, \sigma^1(i)+1, \dots, n+1\}$ sur $\{\sigma(1), \dots, i-1, i+1, \dots, \sigma(n+1)\}$, où i vaut $\max(\omega(k+1), \omega(k+2))$. Elle correspond exactement à l'action de $d_k \sigma$ sur les suites d'entiers. On vérifie en outre que les signes sont tels que, si on appelle d'_i les termes ci-dessus, on a $\sum d'_i = d'$ et que celui associé à $d_k \sigma$ est exactement $(-1)^{\epsilon_k}$. D'où la correction de signes nécessaire pour obtenir des opérateurs simpliciaux. $\text{HZ}_*(A)$ est donc l'homologie de la partie primitive de $(\text{gl}(A)^{\otimes *})_{\text{gl}(k)}$, la « partie primitive » de $\text{HL}_*(\text{gl}(A))$ avec décalage d'une unité des degrés, comme annoncé. \square

3. Le théorème principal

Nous en arrivons maintenant au résultat peut-être le plus intéressant de ce chapitre, à savoir le fait que HZ_* n'est autre que l'homologie de Hochschild. Pour cela, nous allons introduire quelques notations.

DÉFINITION 6. — On définit sur $V_n(A)$ l'application s , de degré 1, par la formule :

$$s(\sigma \otimes a) = \sigma' \otimes (1 \otimes a)$$

où ω' , associé à σ' , est donné par : $\omega'(i) = \omega(i-1) + 1$, $i > 1$.

On notera t la composée $d_{n+1} s$.

LEMME 2. — a) $d_i t = -t d_{i-1}$, $0 < i \leq n$;

b) $d_0 t = d_n$;

c) t restreint à $k[\tau]$ est l'opérateur cyclique ordinaire signé ;

d) $\text{Im } t^n \subset k[\tau]$.

Preuve. — Il est immédiat de vérifier que $d_0 s = \text{id}$ et que, pour i entre 1 et n , $d_i s$ vaut $s d_{i-1}$. a) et b) se déduisent directement des règles de commutation présimpliciales, après examen des signes. c) est vrai par inspection. Pour d), il suffit de remarquer que

l'opération induite par t sur U_{n+1} consiste, dans la liste associée à σ , à incrémenter tous les éléments, omettre le dernier et ajouter 1 en tête. De sorte que la liste associée à $t^k \sigma$ commence par $\{1, 2, \dots, k+1\}$. Ceci donne la dernière assertion. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le

THÉORÈME 3. — *Soit A une algèbre unitaire associative sur le corps k de caractéristique nulle.*

a) *L'inclusion naturelle $\iota: C_*(A) \rightarrow V_*(A)$ induit un quasi-isomorphisme entre ces complexes. Autrement dit, $HZ_* = HH_*$.*

b) *L'application $\psi: V_*(A) \rightarrow C_*(A)$ donnée par $\psi(\sigma \otimes \underline{a}) = \varepsilon(\omega) \tau \otimes \omega^{-1} \underline{a}$ est une rétraction de ι .*

Preuve. — Nous allons donner une homotopie explicite entre $\iota \circ t^{n+1}$ et id . Il est d'ores et déjà clair que $t^{n+1} \circ \iota$ vaut l'identité à cause de l'assertion 3 du lemme 2. Ceci montrera que ι_* et $(t^{n+1})_*$ sont des quasi-isomorphismes réciproques. Puis nous montrerons que $t^{n+1} = \psi$.

En degré n , posons $h = s \sum_{j=0}^n t^j$. Pour calculer $dh + hd$, on va poser $\delta_i = (-1)^i d_i$, de sorte que $d = \sum \delta_i$, et se servir des propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} s t^j &= -t^{j+1} \\ \delta_i s t^j &= -s t^j \delta_{i-j-1} \quad i < j \leq n \\ \delta_i s t^j &= -s t^{j-1} \delta_{n+i-j-1} \quad 1 \leq i \leq j \\ d_0 s t^j &= t^j \end{aligned}$$

(ces formules sont conséquence directe du lemme 2).

On en conclut que tous les termes de dh sont annulés par ceux de hd , sauf les termes t^i qui s'annulent entre eux à l'exception des deux extrêmes. On se retrouve donc avec $dh + hd = \text{id} - \iota \circ t^{n+1}$. Comme $t^{n+1} \circ \iota$ vaut id , ceci assure le quasi-isomorphisme annoncé.

Il reste à montrer que $t^{n+1} = \psi$ dans le cas général. On le sait déjà pour $\sigma = \tau$ (cas pour lequel $\psi = \text{id}$). La preuve se fait en remarquant que l'action de t sur $\sigma \otimes (a_1 \otimes \dots \otimes a_n)$ est de placer le $\sigma^{-1}(1)$ -ième élément de \underline{a} en position 1, avec un signe qui est $(-1)^{1+\sigma^{-1}(1)}$. L'élément qui sera déplacé par t sera toujours le $\sigma^{-2}(1)$ -ième de \underline{a} qu'il y ait eu normalisation ou non, et l'action de t^{n+1} va donc être celle de ω avec signature. Ce qui est la seconde assertion. \square

Ce résultat permet de calculer $HL_*(gl(A))$. La preuve explicite en est donnée par J.-L. Loday dans [L; X, 6].

THÉORÈME 3 bis. — *Soit A une algèbre associative unitaire sur un corps de caractéristique nulle. Alors :*

$$HL_*(gl(A)) = T^*(HH_*(A)[-1]). \quad \square$$

4. Stabilité de l'homologie de Leibnitz des $\mathfrak{gl}_n(A)$

Comme dans le cas de l'homologie de Lie, et par des arguments analogues, on peut montrer que $HL_n(\mathfrak{gl}_p(A))$ se stabilise pour $p \geq n$, et décrire le premier groupe d'obstruction.

DÉFINITION 6. — On appelle n -ième groupe d'homologie de Milnor-Hochschild de A , et on note $HH_n^M(A)$, le quotient de $A^{\otimes n}$ par les relations $R_{k,l}$ suivantes, définies par tous entiers $0 \leq k < l \leq n+1$:

$$(R_{k,l}) \dots \otimes b(a_k \otimes \dots \otimes a_l) \otimes \dots = 0$$

THÉORÈME 4. — a) On a l'identité $HL_n(\mathfrak{gl}_n(A)) = HL_n(\mathfrak{gl}_{n+1}(A)) = \dots = HL_n(\mathfrak{gl}(A))$.

b) La suite suivante est exacte :

$$HL_n(\mathfrak{gl}_{n-1}(A)) \rightarrow HL_n(\mathfrak{gl}(A)) \rightarrow HH_{n-1}^M(A) \rightarrow 0.$$

Le conoyau est appelé homologie de Milnor-Hochschild par analogie avec le cas de l'homologie de Lie.

Preuve. — Elle reprend essentiellement celle donnée dans le cas de l'homologie de Lie dans [L].

Nous noterons $L_{n,r} = (\mathfrak{gl}_r(A)^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}_r(k)}$. On sait que, pour $r \geq n$, $k[S_n]$ est isomorphe à $(\mathfrak{gl}_r(k) \otimes n) \mathfrak{gl}$. On a besoin de renseignements plus précis. Ils sont donnés par la

PROPOSITION ([L], IX.3). — La suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow L_{n,n-1} \xrightarrow{T^*} k[S_n] \xrightarrow{\varepsilon} k \rightarrow 0$$

pour tout $n > 0$ et tout corps k contenant \mathbb{Q} . \square

Pour n fixé, on a une suite exacte de complexes, où le théorème précédent a permis de déterminer le quotient en degré $n+1$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & L_{n+2,n} & \rightarrow & L_{n+2,n+1} & \rightarrow & * \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & L_{n+1,n} & \rightarrow & L_{n+1,n+1} & \xrightarrow{\pi=\varepsilon \otimes \text{id}} & A^{\otimes n+1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & L_{n,n} & \downarrow \cong & L_{n,n+1} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Le complexe de gauche calcule l'homologie de $\mathfrak{gl}_n(A)$ et celui du milieu, celle de $\mathfrak{gl}_{n+1}(A)$. * est un quotient non précisé dont on ne se servira pas. La longue suite exacte

associée en homologie donne entre autres :

$$a') \text{HL}_{n-1}(\text{gl}_n(A)) = \text{HL}_{n-1}(\text{gl}_{n+1}(A)) = \dots = \text{HL}_{n-1}(\text{gl}(A))$$

$$b') \text{HL}_{n+1}(\text{gl}_n(A)) \rightarrow \text{HL}_{n+1}(\text{gl}_{n+1}(A)) \rightarrow A^{\otimes n+1}/\text{Im } \pi d \rightarrow \\ \rightarrow \text{HL}_n(\text{gl}_{n-1}(A)) \rightarrow \text{HL}_n(\text{gl}_n(A)) \rightarrow 0.$$

$a')$ est presque $a)$. Pour obtenir $a)$ et $b)$, on va travailler sur $b')$.

LEMME 3. — π_* est surjective.

Preuve. — Il suffit pour le voir d'exhiber un cycle comme antécédent de tout élément de $A^{\otimes n+2}$. Or, si $\underline{a} = a_1 \otimes \dots \otimes a_{n+2}$ est un tel élément, le produit $E_{1,1}(a_1) \otimes E_{2,2}(a_2) \otimes \dots \otimes E_{n+2,n+2}(a_{n+2})$ de X_{n+2} a pour image $\text{id} \otimes \underline{a}$ dans $k[S_{n+2}] \otimes A^{\otimes n+2}$ et \underline{a} dans $A^{\otimes n+2}$. Le fait qu'il s'agit d'un cycle est clair. \square

$b')$ Se découpe alors en deux suites exactes. L'une dit simplement que les deux derniers termes sont isomorphes, ce qui, combiné avec $a')$, donne $a)$. Il reste maintenant à expliciter les relations du conoyau $A^{\otimes n+2}/\text{Im } \pi d$ et à les mettre sous une forme aussi réduite que possible.

Le lemme 3 montre que l'image par πd de $J_{n+2, n+1}$ est nulle, de sorte qu'il suffit de déterminer les générateurs de $\pi d(k[S_{n+2}] \otimes A^{\otimes n+2})$ d'après le théorème précédent.

Or, se placer dans $k[S_{n+2}] \otimes A^{\otimes n+2}$ revient à travailler dans $(\text{gl}(A)^{\otimes n+2})_{\text{gl}(k)}$, qui n'est autre que $\Lambda^{n+2} V_*(A)$, avec un bord donné par l'action diagonale de d . Via ψ , qui commute à t par construction, il s'agit de $\Lambda^{n+2} C_*(A)$, avec un bord donné par action diagonale de b . L'ensemble de relations par lequel quotienter $A^{\otimes n+2}$ est donc celui des $(a_0 \otimes \dots \otimes a_{k-1} \otimes b(a_k \otimes \dots \otimes a_{k+1}) \otimes \dots \otimes a_{n+1})$ pour toutes les valeurs possibles de k et l , et pour tout \underline{a} dans $T^*(A)$.

On définit donc les groupes d'homologie de Milnor-Hochschild comme le quotient de $A^{\otimes *}$ par toutes ces relations, ce qui prouve $b)$. \square

Il reste à étudier les groupes d'homologie de Milnor-Hochschild. Un cas particulier où cela est possible est donné par la :

PROPOSITION 4. — Si, outre les hypothèses du théorème 4, on suppose A commutative, le groupe d'obstruction $\text{HH}_{n-1}^M(A)$ s'identifie à $\Omega_{A|k}^{n-1}$.

Preuve. — Dans ce qui suit, nous ne supposons A commutative qu'en fin de preuve, ce qui donnera des informations assez précises sur la valeur de $\text{HH}_{n-1}^M(A)$ dans le cas non commutatif.

Considérons un élément $\underline{a} = a_0 \otimes \dots \otimes a_n$. Les relations $R_{k,l}$ et $R_{k-1,l}$ impliquent la nullité des éléments suivants de $\text{HH}_{n-1}^M(A)$, pour tout choix des a_i , de $k \geq 1$ et $l > k$:

$$\dots \otimes a_{k-2} \otimes a_{k-1} a_k \otimes \dots - (-1)^{l-k} \dots a_{k-2} \otimes a_l a_{k-1} \otimes a_k \otimes \dots \\ + (-1)^{l-k} \dots \otimes a_{k-2} \otimes a_{k-1} \otimes a_l a_k \otimes \dots$$

La relation $R_{k,k+1}$ appliquée à l'élément $\underline{a}' \dots \otimes a_{k-1} \otimes a_k \otimes a_l \otimes \dots$ montre que, dans le quotient, les éléments dont une composante est un commutateur sont nuls. D'où

l'égalité :

$$\begin{aligned} \dots \otimes a_{k-2} \otimes a_{k-1} a_k \otimes \dots &= (-1)^{l-k} (\dots a_{k-2} \otimes a_l a_{k-1} \otimes a_k \\ &\quad \times \otimes \dots - \dots \otimes a_{k-2} \otimes a_{k-1} \otimes a_k a_l \otimes \dots) \end{aligned}$$

La relation $R_{k-1, k+1}$ appliquée à l'élément \underline{a}' montre d'autre part la nullité de :

$$\dots \otimes a_{k-2} \otimes (a_{k-1} a_k \otimes a_l - a_{k-1} \otimes a_k a_l + a_l a_{k-1} \otimes a_l) \otimes \dots$$

En reportant dans l'égalité précédente, il en résulte :

$$\dots \otimes a_{k-2} \otimes a_{k-1} a_k \otimes \dots = (-1)^{l-k-1} \dots \otimes a_{k-2} \otimes a_{k-1} a_k \otimes a_l \otimes \dots$$

Si on prend $a_{k-1} = 1$ et $l = k+2$, on en déduit que $\text{HH}_{n-1}^M(A)$ est le quotient de $A \otimes \Lambda^{n-1}(A)$ par les relations $R_{0,1}$, $R_{k, k+1}$ et $R_{k, k+2}$, puisque par récurrence, toutes les autres relations s'en déduisent.

Or, les relations $R_{0, l}$ et $R_{0, l-1}$ donnent, par soustraction, la nullité de :

$$a_0 \otimes \dots \otimes a_{l-1} a_l \otimes \dots - a_l a_0 \otimes \dots \otimes a_{l-1} + a_{l-1} a_0 \otimes \dots \otimes a_l$$

Et, dans l'algèbre extérieure, compte tenu de la relation $R_{0,1}$, ceci n'est autre que la relation $R_{0,2}$ appliquée à l'élément $a_0 \otimes a_{l-1} \otimes a_l \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{l-2}$.

En résumé, $\text{HH}_{n-1}^M(A)$ est égal, comme k -module, à $A \otimes \Lambda^{n-1}(A)$ quotienté par les relations suivantes :

- (1) $\underline{a} = 0$ si un des a_i est un commutateur ;
- (2) $a_0 a_1 \otimes a_2 - a_0 \otimes a_1 a_2 + a_2 a_0 \otimes a_1 = 0$

La structure de A -module à gauche est évidente. Celle de A -module à droite s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{a}a &= a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1} a = (-1)^n a_0 \otimes a_{n-1} a \otimes \dots \\ &= (-1)^n (a a_0 \otimes a_{n-1} \otimes \dots + a_0 a_{n-1} \otimes a \otimes \dots). \end{aligned}$$

Supposons maintenant A commutative. Les relations (1) deviennent trivialement vérifiées, et on reconnaît bien $\Omega_{A|k}^{n-1}$, isomorphe comme A -module à $\text{HH}_{n-1}^M(A)$ par $a_0 da_1 \dots da_{n-1} a_0 \otimes \dots \otimes a_{n-1}$. \square

COROLLAIRE. — *Si, outre les hypothèses du théorème 4, on suppose A commutative, on a la suite exacte :*

$$\text{HL}_n(\mathfrak{gl}_{n-1}(A)) \rightarrow \text{HL}_n(\mathfrak{gl}(A)) \rightarrow \Omega_{A|k}^{n-1} \rightarrow 0$$

Remarque. — Il est clair que la flèche canonique qui va de l'homologie de Leibnitz vers l'homologie de Lie envoie ces groupes sur l'homologie cyclique de Milnor $\text{HC}_*^M(A)$ définie dans [L], X. 3.

5. λ -Opérations

Les théorèmes de comparaison 2 et 3 soulèvent la question suivante : existe-t-il sur $(\mathfrak{gl}(A)^{\otimes *})_{\mathfrak{gl}(k)}$ des λ -opérations données par des formules analogues au cas de l'algèbre

extérieure, et, si oui, se relient-elles bien aux opérations connues sur l'homologie de Hochschild? Nous répondons par l'affirmative à ces deux questions.

On considère, sur $\mathfrak{gl}_n(A)$, l'application Λ_n^k à valeurs dans $\mathfrak{gl}_n(\Lambda^k A)$ donnée par: $\Lambda_n^k(\alpha)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \sum \dots \wedge \alpha v_i \wedge \dots$. On en déduit une application de $V_*(\mathfrak{gl}_n(A))$ dans $V_*(\mathfrak{gl}_n(\Lambda^k A))$ (complexes calculant l'homologie d'algèbres de Leibnitz). La première étant un morphisme d'algèbres de Leibnitz, la seconde est un morphisme de complexes. Pour $n \geq p$, il en résulte une flèche entre complexes $V_*(A)$ et $V_*(\Lambda^k A)$.

Nous allons déterminer cette dernière application. Il suffit de le faire pour $A=k$, et nous ne considérerons que ce cas.

DÉFINITION 7. — Soit $\sigma \in U_n$. Une permutation φ est dite avoir un σ -retour en i si et seulement si $\varphi^{-1}(i) < \varphi^{-1}\sigma^{-1}(i)$ (de sorte que les τ -retours sont les retours ordinaires). L'ensemble des permutations de S_n à $k-1$ σ -retours sera noté $S_{n,k,\sigma}$. On définit le sous-ensemble $U_{n,k,\sigma}$ de U_n par la condition que les permutations ω associées soient dans $S_{n,k,\sigma}$.

On va relier les $U_{n,k,\sigma}$ aux plus classiques $U_{n,k}$ (cf. [LP]):

PROPOSITION 5. — Soit σ dans U_n . On a la relation: $S_{n,k,\sigma} = \omega^{-1} S_{n,k}$.

Preuve. — φ admet un σ -retour en i si et seulement si $\varphi^{-1}\omega^{-1}\omega(i) < \varphi^{-1}\omega^{-1}(\omega(i)-1)$, autrement dit: si et seulement si $\omega\varphi$ admet un retour en $\omega(i)$. \square

COROLLAIRE. — $U_{n,k,\sigma} = \omega^{-1} U_{n,k} \omega$. \square

Ceci permet de formuler le

THÉORÈME 5:

$$\Lambda_n^k(\sigma) = (-1)^{k-1} \sum_{\varphi \in U_{n,k,\sigma}} \varphi$$

Preuve. — La définition de l'isomorphisme T^* est telle qu'on a, exactement comme dans [LP], pour σ dans U_n et $\varphi = \omega\tau\omega^{-1}$:

$$\Lambda_n^k(\sigma) = \sum_{\varphi \in U_n} \text{Tr}(\Lambda_n^k E_{\omega(1), \sigma\omega(1)} \dots \Lambda_n^k E_{\omega(n), \sigma\omega(n)}) \varphi.$$

Toutes les parties dont il sera question dans la suite seront supposées munies de l'ordre induit par celui de $\langle n \rangle$ ou $\langle k \rangle$ selon le cas. Les endomorphismes U_φ dont il faut calculer la trace sont définis par:

$$U_\varphi(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \sum_{\substack{\theta: \langle n \rangle \rightarrow \langle k \rangle \\ \forall i, \omega\theta^{-1}(i) \\ \text{est une } \sigma\text{-chaîne}}} \wedge_{i=1}^k E_{\omega(m_i), \sigma\omega(M_i)} v_i$$

avec m_i et M_i les éléments extrémaux de $\theta^{-1}(i)$.

On posera $\alpha = \beta^{-1}\omega$, avec $\beta\tau\beta^{-1} = \sigma$.

Donc :

$$\begin{aligned} \text{Tr } U_\varphi &= \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n} \sum_{\substack{\theta : \langle n \rangle \rightarrow \langle k \rangle \\ \text{pour tout } i, \alpha\theta^{-1}(i) \text{ est un intervalle } [p_i, q_i] \\ q_i = \omega^{-1}(r_i) - 1 ; p_i = \omega^{-1}(r_{\psi(i)})}} \varepsilon(\psi) \\ &= \sum_{\substack{\text{partition de } \langle n \rangle \text{ en } k \\ \text{intervalles sur lesquels} \\ \alpha^{-1} \text{ croit}}} \sum_{\substack{\psi \in S_k \\ \Omega \in S_k}} \sum_{\substack{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n \\ \beta^{-1}(r_i) = p_{\Omega\psi^{-1}(i)} = p_{\Omega(i+1)}}} \varepsilon(\psi) \end{aligned}$$

en posant $\alpha\theta^{-1}(i) = [p_{\Omega(i)}, p_{\Omega(i+1)}]$.

Il en résulte que $\psi = \tau^{-1}$, de signature $(-1)^{k-1}$. D'autre part, la dernière double somme se fait sur les Ω tels que $\omega(p_{\Omega(i)})$ soit une suite croissante; Ω est donc fixé par cette condition. Finalement, on a, en appelant N le nombre de partitions de $\langle n \rangle$ en k intervalles sur lesquels α^{-1} croît : $\text{Tr } U_\varphi = (-1)^{k-1} N$.

Or, ce nombre vaut 1 si α a $k-1$ retours et 0 sinon. La partition correspondante est déterminée en prenant comme débuts d'intervalles les points où α admet un retour. Il en résulte que $\Lambda_n^k(\sigma)$ vaut, au signe près, la somme des φ tels que $\beta\varphi\beta^{-1} = \alpha\tau\alpha^{-1}$ pour α dans $S_{n,k}$. Ceci équivaut bien à φ dans $U_{n,k,\sigma}$ comme annoncé. \square

Les opérations Λ_n^k ne sont pas stables par les inclusions $\mathfrak{gl}_n(A) \rightarrow \mathfrak{gl}_{n+1}(A)$. On est donc amené à considérer des combinaisons linéaires de ces applications qui, elles, passent à la limite inductive et donc à $\mathfrak{gl}(A)$. Les résultats sont exactement les mêmes que dans [LP]; on citera pour mémoire le

THÉORÈME ([LP], 2.3). — L'application λ_n^k définie par

$$\lambda_n^k = \bigoplus_{i=0}^k (-1)^i \binom{n-1+i}{i} \Lambda_n^{k-i}$$

définit sur $\text{HL}_*(\mathfrak{gl}(A))$ une opération λ^k , dite k -ième λ -opération. \square

En mettant ensemble le théorème 5 et la proposition 5, on obtient la compatibilité des λ -opérations :

THÉORÈME 6. — Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V^*(A) & \rightarrow & C_*(A) \\ & & \downarrow \psi \\ & & \lambda^k \downarrow \quad \downarrow \lambda^k \\ V^*(A) & \rightarrow & C_*(A) \quad \square \\ & & \downarrow \psi \end{array}$$

BIBLIOGRAPHIE

[BC] H.-J. BAUES et D. CONDUCHÉ, *The Central Series for Peiffer Commutators in Groups with Operators* (*J. Algebra*, vol. 133, 1990, pp. 1-34).
 [C] C. CUVIER, *Homologie des algèbres de Leibnitz*, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1991 (à paraître).

- [CE] H. CARTAN et S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [ChE] C. CHEVALLEY et S. EILENBERG, *Cohomology Theory of Lie Groups and Lie Algebras (Trans. of the A.M.S., vol. 63, 1948, p. 85-124).*
- [L] J.-L. LODAY, *Cyclic Homology* (à paraître).
- [L1] J.-L. LODAY, *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives (Inventiones Mathematicæ, vol. 96, 1990, p. 205-230).*
- [LP] J.-L. LODAY et C. PROCESI, *Cyclic Homology and Lambda Operations*, in *K-Theory: connections with Geometry and Topology*, NATO ASI series C, vol. 279, 1989, p. 209-224.
- [LQ] J.-L. LODAY et D. QUILLEN, *Cyclic Homology and the Lie Algebra Homology of Matrices (Commentarii Math. Helvetici, vol. 59, 1984, p. 565-591).*
- [ML] S. MACLANE, *Homology*, Springer-Verlag, 1963.
- [MM] J. MILNOR et J.-C. MOORE, *On the Structure of Hopf Algebras (Annals of Math., vol. 91, 1965, p. 211-264).*

(Manuscrit reçu le 3 juin 1991.)

C. CUVIER,
Université d'Aix-Marseille II,
Département de Mathématiques, Case 901,
13288 Marseille Cedex 09.
