

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-YVES CHEMIN

**Persistence de structures géométriques dans les fluides
incompressibles bidimensionnels**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 26, n° 4 (1993), p. 517-542

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_4_517_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PERSISTANCE DE STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES DANS LES FLUIDES INCOMPRESSIBLES BIDIMENSIONNELS

PAR JEAN-YVES CHEMIN

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on s'intéresse au comportement en temps grand d'une solution du système d'Euler relatif à un fluide parfait incompressible. On suppose que le tourbillon à l'instant initial est la fonction caractéristique d'un domaine borné régulier. Alors, pour tout temps, le tourbillon reste la fonction caractéristique d'un domaine borné ayant la même régularité.

ABSTRACT. — In this paper, we study the properties of a solution of the incompressible Euler system for large time. We suppose that the initial vorticity is the characteristic function of a regular bounded domain. Then the vorticity remains, for all time, the characteristic function of a bounded domain with the same regularity.

Mots-clefs : Champ de vecteurs (peu réguliers), régularité tangentielle, flot, tourbillon (poches de).

Introduction

Les résultats principaux exposés ici ont pour motivation première un problème classique de la mécanique d'un fluide parfait bidimensionnel : le problème des poches de tourbillon. Rappelons le cadre dans lequel nous allons travailler. Le mouvement d'un tel fluide est décrit par un champ de vecteurs sur le plan, dépendant du temps, noté $v(t, x)$ et vérifiant

$$(E) \quad \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0, \end{cases}$$

où $p(t, x)$ désigne la pression du fluide au point x à l'instant t et où $v \cdot \nabla = \sum_i v^i \partial_i$. On notera ψ le flot du champ de vecteurs v , c'est-à-dire l'application vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\partial_t \psi(t, x) = v(t, \psi(t, x)) \quad \text{et} \quad \psi(0, x) = x.$$

Classification A.M.S. 35 L 60 et 76 A 02.

La quantité fondamentale dans l'étude de cette équation est le rotationnel du champ des vitesses, aussi appelé tourbillon. Comme nous sommes en dimension deux, cette matrice antisymétrique est identifiée à un réel noté $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$. Le caractère spécifique de la dimension deux est la conservation de ω le long des trajectoires du champ de vecteurs v :

$$(0.1) \quad \partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0.$$

Vu la nullité de la divergence du champ de vecteurs v , on peut, si l'on s'en tient aux champs de vecteurs bornés, recalculer v , à un vecteur constant près, à partir de ω , par la formule bien connue suivante, dite loi de Biot-Savart :

$$(0.2) \quad v = \nabla^\perp \Delta^{-1} \omega = \left(- \int \frac{x_2 - y_2}{|x - y|^2} \omega(y) dy, \int \frac{x_1 - y_1}{|x - y|^2} \omega(y) dy \right),$$

en posant $\nabla^\perp f = (-\partial_2 f, \partial_1 f)$.

Il est clair que, si $\omega \in L^\infty \cap L^p$ avec $p < 2$, les intégrales ci-dessus définissent un champ de vecteurs borné. De plus, il est bien connu (et trivial à vérifier) que si ω vérifie (0.1) avec le champ de vecteurs v donné par (0.2), alors v lui-même est solution de (E) avec la donnée initiale déduite de ω_0 par la relation (0.2). Nous nous placerons toujours dans ce cadre et, dans l'énoncé des théorèmes, nous ne formulerons les hypothèses que sur le tourbillon.

Le problème des poches de tourbillon est le suivant : supposons que le tourbillon soit, à l'instant initial, la fonction caractéristique d'un ouvert borné dont le bord est de classe de Hölder $C^{k+\varepsilon}$, où k est un entier strictement positif et ε un réel de l'intervalle $]0, 1[$. Dans ce cas, Yudovitch a démontré dans [11] qu'il existe un unique champ de vecteurs solution du système (E) sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$, dont le tourbillon appartient à $L^\infty(\mathbf{R}^3)$. Cette solution est alors quasi-lipschitzienne, c'est-à-dire que son module de continuité est $|x - y| \cdot |\text{Log}|x - y||$. Un tel champ de vecteurs possède un flot ψ à régularité exponentiellement décroissante en fonction du temps, c'est-à-dire que $\psi(t, \cdot)$ est un homéomorphisme de classe de Hölder $C^{\exp - \alpha t}$. D'après la relation (0.1), le tourbillon à l'instant t est alors la fonction caractéristique d'un ouvert dont la topologie reste inchangée. Par contre, son bord n'est plus *a priori* que de classe $C^{\exp - \alpha t}$.

Deux questions très naturelles se posent alors :

- le bord de l'ouvert reste-t-il régulier à temps petit?
- si oui, que se passe-t-il pour les temps grands?

Dans le cas où ω_0 est la fonction caractéristique de l'intérieur d'une courbe du plan, fermée, simple et de classe $C^{1+\varepsilon}$, l'approche suivante a été développée (voir par exemple [9]). Il est très facile, dans ce cadre, de vérifier, grâce à la formule de Green, que si le bord reste de classe de Hölder $C^{1+\varepsilon}$, il existe alors un paramétrage propre $\gamma(t, \cdot)$ du bord vérifiant l'équation

$$(B) \quad \partial_t \gamma(t, s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log} |\gamma(t, s) - \gamma(t, \sigma)| \partial_\sigma \gamma(t, \sigma) d\sigma.$$

Dans [9], A. Majda annonce une démonstration de l'existence locale en temps d'une solution de l'équation (B) et, en se fondant sur des expériences numériques (voir [12]), conjecture que le temps d'existence est en général fini et que, dans ce cas, le bord du domaine cesse d'être rectifiable. Une moindre dégradation de la régularité du bord a également été suggérée par des simulations numériques plus récentes (voir [4] et [5]).

Une approche simplificatrice a été proposée par P. Constantin et E. Titi (voir [8]). Dans l'optique de l'équation (B), on étudie de petites perturbations du cercle, qui est bien sûr une solution stationnaire de (B) et on ne retient alors du développement en série du logarithme que les termes quadratiques. Pour cette approximation quadratique de l'équation (B), S. Alinhac a démontré dans [1] un résultat d'instabilité qui inclinait à penser qu'il pouvait ne pas y avoir d'existence globale de solution régulière pour l'équation (B) elle-même.

En ce qui concerne l'existence locale en temps, nous l'avons démontrée dans [6] en oubliant l'équation (B) et en démontrant un contrôle local de la norme Lipschitz de la solution de (E) grâce à la régularité tangentielle du tourbillon par rapport à un champ de vecteurs ne s'annulant pas sur le support singulier C^s du tourbillon. De plus, dans [10], P. Serfati démontre l'existence et la régularité holomorphe, localement en temps, pour des petites perturbations du cercle, dans le cadre de l'équation (B).

La motivation première de ce travail est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME A. — Soient ε appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et γ_0 une fonction de l'espace $C^{1+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2)$ paramétrant proprement une courbe de Jordan. Il existe alors une unique solution $\gamma(t, s)$ de l'équation (B) appartenant à l'espace $L_{loc}^\infty(\mathbf{R}; C^{1+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2))$.

Dans [6], nous avons développé l'étude de l'action itérée de champs de vecteurs peu réguliers qui permettait de déduire du théorème ci-dessus le corollaire suivant :

COROLLAIRE B. — Soient ε appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, k un entier positif non nul et γ_0 une fonction de l'espace $C^{k+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2)$ paramétrant proprement une courbe de Jordan. Il existe alors une unique solution $\gamma(t, s)$ de l'équation (B) appartenant à l'espace $L_{loc}^\infty(\mathbf{R}; C^{k+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2)) \cap C^\infty(\mathbf{R}; C^{k+\varepsilon'}(S^1; \mathbf{R}^2))$ pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$.

Notre démarche sera la suivante :

- dans le premier paragraphe, nous expliquerons quel concept de régularité permet de voir le théorème précédent comme corollaire immédiat d'un théorème beaucoup plus général, le théorème 1;
- dans le deuxième, nous démontrerons une estimation sur la norme Lipschitz d'un champ de vecteurs;
- dans le troisième, nous utiliserons cette estimation pour démontrer une estimation *a priori* sur les solutions régulières du système (E);
- dans le quatrième, nous achèverons, par régularisation des données initiales puis passage à la limite, la démonstration du théorème 1;
- dans le cinquième et dernier, nous énoncerons divers résultats globaux issus de la combinaison du théorème 1 et de théorèmes locaux de régularité démontrés dans [6].

NOTATIONS ET RAPPELS. — Dans toute la suite de cet article, nous prendrons les notations et conventions suivantes :

- ε désigne un réel strictement compris entre 0 et 1;
- si X est un champ de vecteurs du plan, on note $I(A, X)$ la borne inférieure de $|X(x)|$ pour x parcourant A et on note ∇X la matrice de terme général $\partial_j X^i$;
- si f est une distribution sur le plan, on note $\nabla^\perp f$ le champ de vecteurs $(-\partial_2 f, \partial_1 f)$ qui est bien sûr de divergence nulle;
- si Ω est un ouvert du plan, $C^e(\Omega)$ [resp. $\text{Lip}(\Omega)$] désigne l'ensemble des fonctions u bornées sur Ω telles que l'on ait, pour tout x et y dans Ω , $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^e$ (resp. $|x - y|$) et on notera par $\|\cdot\|_{e, \Omega}$ (resp. $\|\cdot\|_{\text{Lip}(\Omega)}$) la norme naturelle sur $C^e(\Omega)$ [resp. $\text{Lip}(\Omega)$],
- si $\Omega = \mathbf{R}^2$, on peut caractériser l'espace $C^e(\Omega)$, noté alors simplement C^e , à l'aide d'un découpage dyadique de l'espace des fréquences. Plus précisément, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ telle que $\chi(\xi) = 1 - \sum_{q \geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$, on a :

$$u \in C^e \Leftrightarrow \chi(D)u \in L^\infty \quad \text{et} \quad \|\varphi(2^{-q}D)u\|_{L^\infty} \leq C2^{-qe},$$

la norme $\|\chi(D)u\|_{L^\infty} + \text{Sup}_{q \geq 0} 2^{qe} \|\varphi(2^{-q}D)u\|_{L^\infty}$, notée $\|u\|_e$, étant une norme équivalente à la norme usuelle. Cette propriété caractéristique sert de définition à l'espace C^r lorsque r est quelconque. De plus, si $r = 1$, on ne trouve pas l'ensemble des fonctions lipschitziennes, mais l'ensemble traditionnellement appelé classe de Zygmund et noté C_*^1 des fonctions bornées telles que $|u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)| \leq C|y|$. Enfin, si r est un réel (resp. un réel strictement positif) et \mathcal{C} (resp. \mathcal{B}) une couronne (resp. une boule) de \mathbf{R}^2 , il existe une constante C telle que, pour toute suite de fonctions $(u_q)_{q \in \mathbf{N}}$, on ait :

Si, pour tout entier q , le support de la transformée de Fourier de u_q est inclus dans $2^q \mathcal{C}$ (resp. $2^q \mathcal{B}$), alors

$$(0.3) \quad \left\| \sum_{q \in \mathbf{N}} u_q \right\|_r \leq C \text{Sup}_{q \geq 0} 2^{qr} \|u_q\|_{L^\infty}.$$

• on désigne, pour $q \geq 0$, l'opérateur $\varphi(2^{-q}D)$ par Δ_q , l'opérateur $\chi(D)$ par Δ_{-1} et enfin, en convenant que $\Delta_p = 0$ lorsque $p \leq -2$, l'opérateur $\sum_{p \leq q-1} \Delta_p$ par S_q . On désigne

par N_0 un entier tel que $\text{Supp } \chi(2^{N_0} \cdot) + \text{Supp } \varphi$ ne rencontre pas l'origine. On utilisera très souvent dans ce travail la décomposition d'un produit introduite par J.-M. Bony dans [3]. On définit respectivement les opérateurs de paraproduit et de reste par les formules :

$$(0.4) \quad T_a = \sum_q S_{q-N_0}(a) \Delta_q, \quad \text{puis} \quad R(a, \cdot) = \sum_{|q-q'| \leq N_0} \Delta_q(a) \Delta_{q'}.$$

On choisira également N_0 assez grand pour que

$$(0.5) \quad \chi(D) T_a = T_a \chi(D) = 0.$$

Il est immédiat que l'on a

$$(0.6) \quad ab = T_a b + T_b a + R(a, b).$$

On utilisera aussi une décomposition très voisine :

$$(0.7) \quad ab = T_a b + \sum_q S_{q+N_0+1}(b) \Delta_q a.$$

Enfin, si X est un champ de vecteurs, on pose $T_X = \sum_i T_{X^i} \partial_i$.

Je tiens à remercier ici S. Alinhac, J.-M. Bony, P. Gérard et G. Lebeau. Les discussions que j'ai pu avoir avec eux ou les remarques qu'ils m'ont faites ont été une aide précieuse lors de la réalisation de ce travail.

L. Hörmander a relu avec grand soin la presque totalité d'une version antérieure de ce travail et m'a fait de nombreuses suggestions. Je l'en remercie très sincèrement.

1. Théorème général d'existence globale

L'objet de ce paragraphe est la réduction du théorème A à un théorème général de propagation, jusqu'à un temps quelconque, d'un certain type de régularité du tourbillon.

Pour motiver cette approche, observons que si ω est la fonction caractéristique d'un domaine borné à bord $C^{1+\varepsilon}$, alors on démontre par des techniques très usuelles d'étude des intégrales singulières que le champ de vecteurs associé à ω par la relation (0.2) est lipschitzien. Il est bien connu que le contrôle de la norme Lipschitz en espace de la solution d'un système hyperbolique quasilinéaire est un point clef.

Il nous est alors apparu qu'une réelle compréhension du problème passait par la réponse à la question suivante : si l'on régularise une donnée initiale de type poche de tourbillon, a-t-on, pour les solutions associées aux données régularisées, une estimation uniforme de leur norme Lipschitz sur un intervalle de temps fixe ? Plus précisément, on considère θ une fonction indéfiniment différentiable à support compact, positive et d'intégrale 1, et $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\omega_n = (1+n)^{-2} \theta((1+n)^{-1} \cdot) * \omega$, ω étant toujours la fonction caractéristique d'un domaine borné régulier. A-t-on une estimation uniforme en n de la norme Lipschitz du champ de vecteurs v_n associé à ω_n par la relation (0.2) ?

La solution de ce problème impose la construction d'un espace de fonctions adapté, d'où la définition suivante :

DÉFINITION 1. — Soient A un fermé du plan et X un champ de vecteurs de divergence nulle à coefficients C^ε , ne s'annulant pas sur A , on désigne par $C_\varepsilon(A, X)$ l'ensemble des fonctions bornées du plan telles que :

- (i) $u \in C^\varepsilon(\mathbb{R}^2 \setminus A)$,
- (ii) $X(x, D)u \in C^{\varepsilon-1}$.

Les deux points importants sont d'une part que l'appartenance de ω à $C_\varepsilon(A, X)$ assure celle de v à l'espace des champs de vecteurs lipschitziens et que, modulo un léger agrandissement de A sans aucune conséquence, la famille $(\omega_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée dans $C_\varepsilon(A, X)$ en un sens convenable.

Nous allons maintenant énoncer le théorème principal de ce travail.

THÉORÈME 1. — Soient X_0 un champ de vecteurs de divergence nulle et A^0 un fermé du plan tels que X_0 soit de classe C^ε et $I(A^0, X_0)$ strictement positif. Si $\omega_0 \in C_\varepsilon(A^0, X_0) \cap L^p$, avec $p < 2$, il existe une unique solution de (E) dans $C(\mathbf{R}; L^\infty(\mathbf{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; \text{Lip}(\mathbf{R}^2))$ qui de plus vérifie :

(i) $X_0(x, D)\psi \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^\varepsilon)$,

(ii) si $X_t = (\psi_t)_* X_0$ et $A^t = \psi(t, A^0)$, alors $\omega(t, \cdot) \in C_\varepsilon(A^t, X_t)$.

Démonstration du théorème A à partir du théorème 1. — Soit f_0 une équation $C^{1+\varepsilon}$ de la courbe Γ_0 , image du cercle S^1 par γ_0 , on pose $X_0 = \nabla^\perp f_0$. On considère alors le fermé A^0 des points du plan à distance suffisamment petite de Γ_0 pour que X_0 ne s'annule pas sur A^0 . Comme X_0 est un vecteur tangent à Γ_0 , non nul sur Γ_0 , il existe une fonction f appartenant à $C^\varepsilon(S^1; \mathbf{R})$ telle que $\partial_s \gamma_0(s) = f(s) X_0(\gamma_0(s))$. Dans le cadre de l'équation (B), on a $\gamma(t, s) = \psi(t, \gamma_0(s))$. Donc $\partial_s \gamma(t, s) = f(s) (X_0(x, D)\psi)(t, \gamma_0(s))$. Du théorème 1 (i), on déduit l'existence d'une solution γ de l'équation (B) dans l'espace $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^{1+\varepsilon}(S^1; \mathbf{R}^2))$.

Remarque. — L'énoncé du théorème 1 contient en particulier le fait que le champ de vecteurs v_0 est lipschitzien.

Le point (i) du théorème 1, à savoir la régularité tangentielle du flot par rapport à X_0 , suffit à établir le théorème A. Le point (ii) doit être compris comme un théorème de persistance, c'est-à-dire de propagation jusqu'à l'infini, de la régularité $C_\varepsilon(A, X)$.

La démarche adoptée ici est la même que celle de [6]. Dans [6], faute d'estimation suffisamment précise, nous n'avions démontré qu'une version locale de ce théorème et donc qu'une version locale du théorème A. La difficulté majeure de la démonstration réside dans le contrôle de la norme Lipschitz du champ de vecteurs solution de (E) au cours du temps, alors que la régularité donnée par les relations (0.1) et (0.2) est moindre (C_*^1 ou mieux, à dérivées BMO). Dans [6], nous avons démontré une majoration de la norme Lipschitz du champ de vecteurs v , qui assurait le caractère lipschitzien de v lorsque son rotationnel ω appartenait à $C_\varepsilon(A, X)$. Le point clef pour obtenir l'existence globale consiste à établir une version logarithmique de cette inégalité, c'est-à-dire une version où les données géométriques définissant la régularité additionnelle n'apparaissent qu'au travers d'un logarithme. C'est l'objet du paragraphe qui suit.

2. Contrôle du gradient d'un champ de vecteurs de divergence nulle à partir de son rotationnel.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. — Soient ε un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et p un réel de l'intervalle $[1, 2[$, il existe une constante C telle que, si A est un quelconque fermé du plan et X un champ de vecteurs de classe C^ε , de divergence nulle et ne s'annulant pas sur A , on ait :

$$\|v\|_{\text{Lip}} \leq C \{ \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} (1 + \text{Log } N_{\varepsilon, p}(A, X, \omega)) \},$$

avec

$$N_{\varepsilon, p}(A, X, \omega) = \frac{\|X\|_\varepsilon \|\omega\|_{\varepsilon, \mathbb{R}^2 \setminus A}}{I(A, X) \|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A)}} \left(1 + \frac{\|X(\chi, D)\omega\|_{\varepsilon-1}}{I(A, X) \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}} \right).$$

Remarque. — Comme $\|X\|_\varepsilon \geq \|X\|_{L^\infty} \geq I(A, X)$ et $\|\omega\|_{\varepsilon, \mathbb{R}^2 \setminus A} \geq \|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A)}$, il est clair que $N_{\varepsilon, p}(A, X, \omega) \geq 1$.

Démonstration. — Nous allons, dans un premier temps, démontrer ce théorème dans un cas très particulier où apparaissent, sans surcharges techniques, les deux idées essentielles de la preuve. Supposons que le champ de vecteurs X soit ∂_1 et accessoirement, que le support de la transformée de Fourier de ω ne rencontre pas l'origine. Dans ce cas, l'ensemble A est quelconque et l'on peut prendre $A = \mathbb{R}^2$ et convenir que $\|\omega\|_{\varepsilon, \mathbb{R}^2 \setminus A} / \|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A)}$ vaut 1. Il est clair que $\|X\|_\varepsilon = I(A, X) = 1$.

La première idée, bien connue, est que l'inclusion de l'espace C_*^0 dans L^∞ est vraie, au logarithme de la norme C^ε près. Plus précisément, on a le lemme suivant :

LEMME 2.2. — Un réel strictement positif ε étant donné, il existe une constante C telle que, pour toute fonction f et tout couple (α, β) de réels vérifiant $\|f\|_0 \leq \alpha$, $\|f\|_\varepsilon \leq \beta$ et $\alpha \leq \beta$, on ait,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C \alpha \left(1 + \text{Log} \frac{\beta}{\alpha} \right).$$

Démonstration. — On écrit $f = S_N f + (\text{Id} - S_N) f$, la caractérisation des espaces de Hölder entraîne alors que l'on a $\|f\|_{L^\infty} \leq (N+1)\alpha + 4\varepsilon^{-1} 2^{-N\varepsilon} \beta$; on obtient ainsi le lemme en choisissant par exemple

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{\beta}{\alpha} \right] + 1,$$

où \log désigne le logarithme de base 2.

La seconde idée est la suivante. Si $X = \partial_1$, on a, d'après le lemme ci-dessus, appliqué avec $\alpha = C \|\omega\|_{L^\infty}$ et $\beta = C (\|\omega\|_{L^\infty} + \|\partial_1 \omega\|_{\varepsilon-1})$,

$$\|\partial_1 \partial_j \Delta^{-1} \omega\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty} \left(1 + \text{Log} \left(1 + \frac{\|\partial_1 \omega\|_{\varepsilon-1}}{\|\omega\|_{L^\infty}} \right) \right).$$

Or, $\|\partial_2^2 \Delta^{-1} \omega\|_{L^\infty} \leq \|\omega\|_{L^\infty} + \|\partial_1^2 \Delta^{-1} \omega\|_{L^\infty}$, d'où le théorème 2.1 dans ce cas très particulier.

Pour passer au cas général, deux difficultés se présentent. La première, sérieuse, provient de la faible régularité du champ de vecteurs X et sa possible annulation au cours de l'évolution. La seconde provient de la nécessaire troncature en espace et se résout facilement en analysant avec un peu de précaution la pseudolocalité des multiplicateurs de Fourier. L'un des points cruciaux est que toutes ces tendances à perturber l'inégalité n'apparaissent, elles aussi, qu'atténuées par un logarithme.

Pour obtenir le résultat, il nous faut procéder graduellement. Ainsi, allons-nous commencer par démontrer le lemme suivant :

LEMME 2.3. — Soient ε un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et p un réel de l'intervalle $[1, 2[$, il existe une constante C telle que si A est un fermé du plan et Y un champ de vecteurs de classe C^ε ne s'annulant pas sur A , on ait :

$$\|v\|_{Lip} \leq C \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} \frac{\|Y\|_{L^\infty}^2}{I(A, Y)^2} \times \left(1 + \text{Log} \frac{\|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} + \|Y(x, D)v\|_\varepsilon}{I(A, Y) \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}} + \text{Log} \frac{\|\omega\|_{\varepsilon, \mathbb{R}^2 \setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A)}} \right).$$

Démonstration. — Nous allons, dans un premier temps, nous concentrer sur les hautes fréquences. On posera $a = (\text{Id} - \chi(D)) \Delta^{-1} \omega$. Il faut majorer $\|\partial_i \partial_j a\|_{L^\infty}$. L'étape décisive est la majoration de $\|Y(x, D) \partial_i a\|_{L^\infty}$.

Avant d'aller plus loin, nous avons besoin de quelques propriétés du calcul paradifférentiel de Bony (voir [3]) qui sont résumées dans le lemme ci-dessous :

LEMME 2.4. — Soient r, s et m trois nombres réels et σ une fonction indéfiniment dérivable telle que, pour tout ξ de norme plus grande que 1 et tout réel λ supérieur à 1, $\sigma(\lambda\xi) = \lambda^m \sigma(\xi)$. Il existe une constante C telle que

- (i) $\|T_a b\|_s \leq C \|a\|_{L^\infty} \|b\|_s$ et si $r < 0$, $\|T_a b\|_{r+s} \leq C \|a\|_r \|b\|_s$;
- (ii) si $r + s > 0$, $\|R(a, b)\|_{r+s} \leq C \|a\|_r \|b\|_s$ et $\|R(a, b)\|_{r+s} \leq C \|a\|_{L^\infty} \|b\|_{r+s}$;
- (iii) si $r > 0$, $\|ab\|_r \leq C (\|a\|_{L^\infty} \|b\|_r + \|a\|_r \|b\|_{L^\infty})$ et si $r + s > 0$ et $r < 0$, $\|ab\|_{r+s} \leq C \|a\|_r \|b\|_s$;
- (iv) $\|[T_a, \sigma(D)]b\|_{s-m+1} \leq C \|\nabla a\|_{L^\infty} \|b\|_s$ et si $r < 1$,
 $\|[T_a, \sigma(D)]b\|_{s-m+r} \leq C \|\nabla a\|_{r-1} \|b\|_s$;

(v) soient X un champ de vecteurs à coefficients C^ε de divergence nulle et A un opérateur linéaire envoyant C^r dans C^{r-m} pour tout réel r ; alors, pour tout réel r tel que r et $r-m$ soient strictement supérieurs à $-\varepsilon$ et pour toute u dans C^r , on a

$$[X(x, D), A]u = [T_X, A]u + \sum_j \{T_{\partial_j A u} X^j + \partial_j R(Au, X^j)\} - A \sum_j \{T_{\partial_j u} X^j + \partial_j R(u, X^j)\}.$$

Démonstration. — Les points (i) et (ii) résultent de manière claire de (0.3) et de la définition (0.4) des opérateurs de reste R et de paraproduit T . Le point (iii) est une conséquence immédiate de la décomposition (0.6) en paraproduit et reste.

Quant au point (iv), il convient d'expliciter le commutateur. D'après (0.5), on peut supposer la fonction σ homogène. On a donc la formule suivante, N_1 étant un entier dépendant de φ et de N_0 .

$$[T_a, \sigma(D)]b = \sum_q \sum_{k=-N_1}^{N_1} 2^{(q+k)m} c_{q,k} \quad \text{avec} \quad c_{q,k} = [S_{q-N_0}(a), \varphi\sigma(2^{-q-k}D)]\Delta_q b.$$

Une formule de Taylor à l'ordre 1 assure que l'on a

$$c_{q,k} = 2^{-(q+k)} \sum_j 2^{2(q+k)} \int dy 2^{(q+k)}(x-y)_j h(2^{q+k}(x-y)) \Delta_q b(y) \\ \times \int_0^1 dt S_{q-N_0}(\partial_j a)(x+t(y-x)) \quad \text{en posant } \hat{h} = \varphi\sigma.$$

Il est clair que le support de la transformée de Fourier de $c_{q,k}$ est inclus dans une couronne de type $2^q \mathcal{C}'$, \mathcal{C}' étant une couronne fixe. La majoration de $c_{q,k}$ résulte clairement de la caractérisation des espaces de Hölder et de l'appartenance à L^1 de h et de $x_j h_k$, d'où le point (iv).

Pour démontrer le point (v), on utilise (0.4); d'où

$$X(x, D)u = T_X u + \sum_j \{ T_{\partial_j \mu} X^j + R(\partial_j u, X^j) \}.$$

La nullité de la divergence de X assure que l'on a

$$X(x, D)u = T_X u + \sum_j \{ T_{\partial_j \mu} X^j + \partial_j R(u, X^j) \}.$$

La commutation avec un opérateur fixé A étant linéaire, on obtient la formule souhaitée et ainsi le lemme 2.4.

Revenons à la démonstration du lemme 2.3. On va utiliser l'identité (0.7). On a

$$(2.1) \quad Y(x, D)\partial_i a = \Phi_1 + \Phi_2 \\ \text{avec} \\ \Phi_1 = T_Y \partial_i a \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \sum_{k=1}^2 \sum_q S_{q+N_0+1}(\partial_i \partial_k a) \Delta_q Y^k.$$

Pour la majoration de $\|\Phi_1\|_{L^\infty}$, on utilise le lemme 2.2. Il est clair que

$$\|\Phi_1\|_0 \leq C \|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty}.$$

De plus, nous allons démontrer que $\Phi_1 = \sum_{j=1}^4 \Phi_{1,j}$ avec:

$$\Phi_{1,1} = [T_Y, \partial_i(\text{Id} - \chi(D))\Delta^{-1}]\omega,$$

$$\Phi_{1,2} = \partial_i (\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \Delta^{-1} \sum_{k=1}^2 \{ T_{\partial_2 Y^k} \partial_k v^1 - T_{\partial_1 Y^k} \partial_k v^2 \},$$

$$\Phi_{1,3} = \partial_i (\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \Delta^{-1} \{ \partial_1 Y(x, \mathbf{D}) v^2 - \partial_2 Y(x, \mathbf{D}) v^1 \}$$

et

$$\Phi_{1,4} = \partial_i (\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \Delta^{-1} \left\{ \partial_2 \sum_{k=1}^2 \sum_q S_{q+N_0+1} (\partial_k v^1) \Delta_q(Y^k) \right. \\ \left. - \partial_1 \sum_{k=1}^2 \sum_q S_{q+N_0+1} (\partial_k v^2) \Delta_q(Y^k) \right\}.$$

En effet, il est clair que $\Phi_1 = \Phi_{1,1} + \partial_i (\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \Delta^{-1} T_Y \omega$. Par définition de ω , on a

$$T_Y \omega = \sum_{k=1}^2 T_{Y^k} \partial_k (\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) \\ = \sum_{k=1}^2 \{ \partial^1 (T_{Y^k} \partial_k v^2) - \partial_2 (T_{Y^k} \partial_k v^1) \} - \sum_{k=1}^2 \{ T_{\partial_1 Y^k} \partial_k v^2 - T_{\partial_2 Y^k} \partial_k v^1 \}.$$

D'où

$$\Phi_1 = \Phi_{1,1} + \Phi_{1,2} + \partial_i (\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \Delta^{-1} \sum_{k=1}^2 \{ \partial_1 (T_{Y^k} \partial_k v^2) - \partial_2 (T_{Y^k} \partial_k v^1) \}.$$

Or, d'après (0.7), on a

$$T_{Y^k} \partial_k v^i = Y(x, \mathbf{D}) v^i - \sum_q S_{q+N_0+1} (\partial_k v^i) \Delta_q Y^k.$$

D'où la formule souhaitée.

Le lemme 2.4 assure que l'on a, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$:

$$\|\Phi_{1,3}\|_\varepsilon \leq C_\varepsilon \|Y(x, \mathbf{D}) v\|_\varepsilon \quad \text{et} \quad \|\Phi_{1,i}\|_\varepsilon \leq C_\varepsilon \|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty}, \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$

De plus, vu que $v = (\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \nabla^{-1} \Delta^{-1} \omega + \chi(\mathbf{D}) v$, il est clair que

$$\|v\|_1 \leq C (\|\omega\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}).$$

Or, d'après (0.2), on a

$$|v(x)| \leq \int \frac{\chi(x-y)}{|x-y|} |\omega(y)| dy + \int \frac{1-\chi(x-y)}{|x-y|} |\omega(y)| dy.$$

Comme $\chi(x)|x|^{-1}$ appartient à L^1 et $(1-\chi(x))|x|^{-1}$ appartient à $L^{p'}$, p' désignant l'exposant conjugué de p , on a

$$(2.2) \quad \|v\|_{L^\infty} \leq C \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} \quad \text{et donc} \quad \|v\|_1 \leq C \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}.$$

Comme on a $\|S_{q+N_0+1}(\partial_k v^i)\|_{L^\infty} \leq \sum_{q' \leq q+N_0} \|\Delta_{q'}(\partial_k v^i)\|_{L^\infty}$, il résulte de (2.2) que

$$\|S_{q+N_0+1}(\partial_k v^i)\|_{L^\infty} \leq C(q+N_0+2) \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}.$$

En particulier, on a $\|S_{q+N_0+1}(\partial_k v^i)\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon 2^{q(\varepsilon-\varepsilon')} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}$ pour tout $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

D'après la définition des espaces de Hölder à l'aide des couronnes dyadiques, on sait que $\|\Delta_q(Y)\|_{L^\infty} \leq 2^{-q\varepsilon} \|Y\|_\varepsilon$. D'où, d'après (0.3),

$$\|\Phi_{1,4}\|_{L^\infty} \leq C_{\varepsilon'} \|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}, \quad \text{pour tout } \varepsilon' \in]0, \varepsilon[.$$

L'application du lemme 2.2 avec

$$\alpha = \|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}, \quad \beta = \|Y(x, D)v\|_\varepsilon + \|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}$$

et un réel de l'intervalle $]0, \varepsilon[$, par exemple $\varepsilon/2$, assure alors l'inégalité suivante :

$$(2.3) \quad \|\Phi_1\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} \left(1 + \text{Log} \frac{\|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} + \|Y(x, D)v\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}} \right).$$

Le terme Φ_2 se traite différemment. Soit N un entier, on écrit $\Phi_2 = \Phi_{3,N} + \Phi_{4,N}$ avec :

$$\begin{aligned} \Phi_{3,N} &= \sum_{k=1}^2 \sum_{q \leq N-1} S_{q+N_0+1}(\partial_k \partial_i a) \Delta_q(Y^k), \\ \Phi_{4,N} &= \sum_{k=1}^2 \sum_{q \geq N} S_{q+N_0+1}(\partial_k \partial_i a) \Delta_q(Y^k). \end{aligned}$$

La majoration de $\Phi_{4,N}$ se fait en utilisant la régularité C^ε du champ de vecteurs Y .

On utilise $\|S_{q+N_0+1}(\partial_k \partial_i a)\|_{L^\infty} \leq C(q+N_0+1) \|\omega\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon 2^{q\varepsilon/2} \|\omega\|_{L^\infty}$. D'où il vient

$$\|\Phi_{4,N}\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon 2^{-N\varepsilon/2} \|\omega\|_{L^\infty} \|Y\|_\varepsilon.$$

Le terme $\Phi_{3,N}$ doit se traiter avec un peu plus de finesse. Un regroupement d'Abel entraîne que

$$\Phi_{3,N} = \sum_{k=1}^2 \left\{ S_N(Y^k) S_{N+N_0}(\partial_k \partial_i a) - \sum_{q \leq N-1} S_q(Y^k) \Delta_{q+N_0}(\partial_k \partial_i a) \right\}.$$

Or, pour tout entier q et tout entier N , on a, par définition des espaces de Hölder,

$$\|S_q(Y^k)\|_{L^\infty} \leq \|Y\|_{L^\infty} \quad \text{et} \quad \|S_{N+N_0}(\partial_k \partial_i a)\|_{L^\infty} \leq C(N+N_0+1) \|\omega\|_{L^\infty}.$$

Il en résulte que

$$\|\Phi_{3,N}\|_{L^\infty} \leq C(N+N_0+1) \|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty}$$

On optimise alors le choix de N en prenant par exemple $\frac{N}{2} = \left[\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{\|Y\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}} \right] + 1$, d'où il vient :

$$\|\Phi_2\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty} \left(1 + \text{Log} \frac{\|Y\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty}} \right).$$

En appliquant (2.1), (2.3) et l'inégalité ci-dessus, on obtient, pour tout $i \in \{1, 2\}$:

$$(2.4) \quad \|Y(x, D) \partial_i a\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} \left(1 + \text{Log} \frac{\|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} + \|Y(x, D) v\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}} \right).$$

Il suffit alors d'observer, que l'on a,

$$|Y(x)|^2 \partial_1^2 = Y^1(x) Y(x, D) \partial_1 - Y^2(x) Y(x, D) \partial_2 + (Y^2(x))^2 \Delta,$$

$$|Y(x)|^2 \partial_2^2 = Y^2(x) Y(x, D) \partial_2 - Y^1(x) Y(x, D) \partial_1 + (Y^1(x))^2 \Delta$$

et

$$|Y(x)|^2 \partial_1 \partial_2 = Y^1(x) Y(x, D) \partial_2 + Y^2(x) Y(x, D) \partial_1 - Y^1(x) Y^2(x) \Delta,$$

pour conclure, d'après (2.4), à l'inégalité suivante, pour tous i et j valant 1 ou 2 :

$$(2.5) \quad \||Y(x)|^2 \partial_i \partial_j a\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon (\|Y\|_{L^\infty})^2 \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} \left(1 + \text{Log} \frac{\|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} + \|Y(x, D) v\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}} \right).$$

Une fois obtenue cette inégalité, reste à tronquer en dehors du lieu d'annulation éventuelle du champ de vecteurs Y . Pour ce faire, on pose $\delta = (I(A, Y)/2 \|Y\|_\varepsilon)^{1/\varepsilon}$ et on considère une fonction f (resp. g) appartenant à $C^\varepsilon(\mathbb{R}^2; [0, 1])$, valant identiquement 1 près de $A_{\delta/4}$ (resp. $A_{\delta/2}$) et supportée dans $A_{3\delta/4}$ (resp. $A_{5\delta/6}$) telle que $\|f\|_\varepsilon \leq C \delta^{-\varepsilon}$ (A_δ désignant l'ensemble des points dont la distance à A est inférieure à δ). Par définition de δ , on a $2I(A_\delta, Y) \geq I(A, Y)$, d'où

$$(2.6) \quad \|g \partial_i \partial_j a\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \frac{\|Y\|_{L^\infty}^2}{I(A, Y)^2} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} \left(1 + \text{Log} \frac{\|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} + \|Y(x, D) v\|_\varepsilon}{\|Y\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}} \right).$$

On va maintenant majorer $\|(1-g) \partial_i \partial_j a\|_{L^\infty}$, ce qui nécessite le lemme suivant :

LEMME 2.5. — Soit σ une fonction de classe C^∞ telle que $|\partial^\alpha \sigma(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$, il existe une constante C telle que, si P et Q sont deux fermés disjoints tels que $d(P, Q) = \inf\{|x-y| \mid (x, y) \in P \times Q\}$ soit non nul, alors, pour toute fonction bornée h supportée dans Q , on a :

$$\|\sigma(D) h\|_{L^\infty(P)} \leq C (1 - \text{Log}^- d(P, Q)) \|h\|_{L^\infty}, \quad \text{en posant } \text{Log}^- = \text{Min}(0, \text{Log}).$$

Remarque. — Nous retrouverons ici le fait que les multiplicateurs de Fourier d'ordre 0 n'opèrent certes pas dans L^∞ , mais que cette non-opérance n'apparaît jamais qu'au travers d'un logarithme.

Démonstration. — Désignons par K le noyau de l'opérateur $\sigma(D)$. Vu que K est la transformée de Fourier inverse de σ , pour tout multientier α , $x^\alpha K(x)$ est la transformée de Fourier inverse de $(-D_\xi)^\alpha \sigma(\xi)$. Par hypothèse, lorsque $|\alpha|$ vaut $d+1$, alors $(-D_\xi)^\alpha \sigma(\xi)$ est intégrable et donc $x^\alpha K(x)$ est bornée. De plus, $|\alpha|$ valant toujours $d+1$, on peut écrire

$$x^\alpha K(x) = \int \chi(|x|\xi) e^{i(x|\xi)} (-D_\xi)^\alpha \sigma(\xi) d\xi + \int (1-\chi(|x|\xi)) e^{i(x|\xi)} (-D_\xi)^\alpha \sigma(\xi) d\xi$$

Après intégration par parties, le premier terme vaut

$$\sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta (D_\xi)^{\alpha-\beta} (\chi(|x|\xi)) x^\beta e^{i(x|\xi)} \sigma(\xi) d\xi.$$

Chaque terme de la somme est majoré, pour x assez petit, par $C|x|^{d+1} \text{Vol } B(0, C/|x|)$. Quant au second terme, il est majoré par

$$\int_{|\xi| \geq C/|x|} (1+|\xi|)^{-(d+1)} d\xi.$$

Il en résulte que, lorsque x est assez petit, on a $|x^\alpha K(x)| \leq C|x|$ pour tout multientier α de longueur $d+1$. Donc, on a

$$|K(x)| \leq \frac{C}{|x|^d + |x|^{d+1}}.$$

Pour tout x dans P , et pour toute fonction bornée h supportée dans Q , on a alors, vu que $d(P, Q)$ est strictement positive,

$$|\sigma(D)h(x)| \leq C \int_{|x-y| \geq d(P, Q)} \frac{1}{|x-y|^d + |x-y|^{d+1}} |h(y)| dy.$$

D'où le lemme 2.5.

Revenons à la démonstration du lemme 2.3. De l'application du lemme 2.5 ci-dessus, avec $P = \text{Supp}(1-g)$ et $Q = \text{Supp } f$, il résulte, comme $d(P, Q) \geq \delta/4$, que

$$(2.7) \quad \|(1-g) \partial_i \partial_j (\text{Id} - \chi(D)) \Delta^{-1} f \omega\|_{L^\infty} \leq C \|\omega\|_{L^\infty} (1 - \text{Log } \delta).$$

Il reste à majorer $\|(1-g) \partial_i \partial_j (\text{Id} - \chi(D)) \Delta^{-1} (1-f) \omega\|_{L^\infty}$. Pour ce faire, nous allons utiliser le lemme 2.2.

Il est clair que

$$\|\partial_i \partial_j (\text{Id} - \chi(D)) \Delta^{-1} (1-f) \omega\|_0 \leq C \|(1-f) \omega\|_{L^\infty}.$$

Comme le support de $1-f$ est inclus dans $\mathbf{R}^2 \setminus A$, on a

$$\|\partial_i \partial_j (\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \Delta^{-1} (1-f) \omega\|_0 \leq C \|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus A)}.$$

Par ailleurs, l'opérateur $\partial_i \partial_j (\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \Delta^{-1}$ envoie continûment C^ε dans C^ε ; il faut donc majorer $\|(1-f)\omega\|_\varepsilon$. En supposant par exemple que $x \in \text{Supp}(1-f)$, on a

$$|(1-f(x))\omega(x) - (1-f(y))\omega(y)| \leq |f(x) - f(y)| \|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus A)} + |1-f(y)| |\omega(x) - \omega(y)|;$$

Comme $\|f\|_\varepsilon \leq C\delta^{-\varepsilon}$, on a $\|(1-f)\omega\|_\varepsilon \leq C\delta^{-\varepsilon} \|\omega\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A}$. Il vient alors

$$\|\partial_i \partial_j (\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \Delta^{-1} (1-f) \omega\|_\varepsilon \leq C\delta^{-\varepsilon} \|\omega\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A}.$$

Le lemme 2.2, appliqué avec $\alpha = C \|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus A)}$ et $\beta = C\delta^{-\varepsilon} \|\omega\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A}$, assure alors que

$$\|(\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \partial_i \partial_j \Delta^{-1} (1-f) \omega\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty} \left(1 + \text{Log} \frac{\|\omega\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus A)}} - \text{Log} \delta \right).$$

Il résulte alors de (2.7) que

$$(2.8) \quad \|(1-g) \partial_i \partial_j a\|_{L^\infty} \leq C \|\omega\|_{L^\infty} \left(1 + \text{Log} \frac{\|\omega\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus A)}} - \text{Log} \delta \right).$$

Par définition de δ , on a

$$1 - \text{Log} \delta = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \text{Log} 2 + \frac{1}{\varepsilon} \text{Log} \frac{\|Y\|_\varepsilon}{I(A, Y)}.$$

D'où, comme $I(A, Y) \leq \|Y\|_\varepsilon$, on a, d'après (2.6),

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \|(\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \nabla v\|_{L^\infty} &\leq C_\varepsilon \frac{\|Y\|_{L^\infty}^2}{I(A, Y)^2} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} \\ &\times \left(1 + \text{Log} \frac{\|Y\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} + \|Y(x, \mathbf{D})v\|_\varepsilon}{I(A, Y) \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}} + \text{Log} \frac{\|\omega\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus A)}} \right). \end{aligned}$$

Reste maintenant le cas des basses fréquences. Il suffit d'observer que $\|\chi(\mathbf{D}) \nabla v\|_{L^\infty} \leq C \|v\|_{L^\infty}$ et d'utiliser (2.2) pour obtenir que $\|\chi(\mathbf{D}) \nabla v\|_{L^\infty} \leq C \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}$. En décomposant $\nabla v = (\text{Id} - \chi(\mathbf{D})) \nabla v + \chi(\mathbf{D}) \nabla v$, le lemme 2.3 résulte alors de (2.9).

Remarque. — Le lemme 2.3 démontré ci-dessus n'utilise en rien la nullité de la divergence du champ de vecteurs Y , ce qui n'entraîne aucune restriction à son application. Soit X un champ de vecteurs à divergence nulle, la structure striée qu'il définit n'est fidèlement décrite que par un champ de vecteurs colinéaire à X , unitaire dans la région qui nous intéresse. Ce champ de vecteurs n'a bien évidemment aucune raison d'être à divergence nulle. Ceci est la clef du passage du lemme 2.3, où les données géométriques liées à la structure striée apparaissent « au carré », au théorème 2.1 où ces mêmes données ne sont présentes qu'adoucies par un logarithme.

Fin de la démonstration du théorème 2.1. — Nous allons appliquer le lemme 2.3 à un champ de vecteurs Y judicieusement construit à partir de X . Pour ce faire, posons $\eta = (I(A, X)/2 \|X\|_\varepsilon)^{1/\varepsilon}$, et si ρ désigne une fonction régulière supportée dans la boule unité du plan et d'intégrale 1 et si A_α désigne l'ensemble des points à distance α de A , on pose alors :

$$\tau = \frac{16}{\eta^2} \rho\left(\frac{4}{\eta} \cdot\right) * 1_{A_{\eta/2}} \quad \text{et} \quad Y(x) = \tau(x) \frac{X(x)}{|X(x)|}.$$

Remarquons immédiatement que $\|Y\|_{L^\infty} = 1$ (A, Y) = 1. Appliqué avec un ε' strictement compris entre 0 et ε (par exemple $\varepsilon' = \varepsilon/2$), le lemme 2.3 assure

$$(2.10) \quad \|v\|_{Lip} \leq C \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p} \left\{ 1 + \text{Log} \left(\|Y\|_\varepsilon + \frac{\|Y(x, D)v\|_{\varepsilon'}}{\|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}} \right) + \text{Log} \frac{\|\omega\|_{\varepsilon, \mathbb{R}^2 \setminus A}}{\|\omega\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A)}} \right\}.$$

Il reste à majorer $\|Y\|_\varepsilon$ et $\|Y(x, D)v\|_{\varepsilon'}$. La majoration de $\|Y\|_\varepsilon$ est aisée. On étudie $Y(x) - Y(y)$ en supposant par exemple que x appartient au support de τ . Un calcul très élémentaire assure que

$$|Y(x) - Y(y)| \leq |\tau(x) - \tau(y)| + 2|\tau(y)| \frac{|X(x) - X(y)|}{|X(x)|}.$$

Comme $\text{Inf} \{ |X(x)|, x \in \text{Supp } \tau \} \geq (1/2) I(A, X)$ et que $\|\tau\|_{L^\infty} \leq 1$, il vient

$$|Y(x) - Y(y)| \leq \|\tau\|_\varepsilon |x - y|^\varepsilon + 2|\tau(y)| \frac{|X(x) - X(y)|}{|X(x)|}.$$

Il résulte du fait que $\|\tau\|_\varepsilon \leq C \eta^{-\varepsilon}$ et de la définition de η que

$$(2.11) \quad \|Y\|_\varepsilon \leq C \frac{\|X\|_\varepsilon}{I(A, X)}.$$

Remarquons qu'il est impossible de majorer $\|Y(x, D)v\|_\varepsilon$ par $\|X\|_\varepsilon, \|X(x, D)\omega\|_{\varepsilon-1}$ et $\|\omega\|_{L^\infty}$. Par contre, on peut, pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$, majorer $\|Y(x, D)v\|_{\varepsilon'}$ par $\|X\|_\varepsilon, \|X(x, D)\omega\|_{\varepsilon-1}$ et $\|\omega\|_{L^\infty}$ comme il sera démontré au lemme 2.6.

En observant que $Y(x, D)v = \frac{\tau(x)}{|X(x)|} X(x, D)v$, il vient que

$$(2.12) \quad \|Y(x, D)v\|_{\varepsilon'} \leq C_{\varepsilon'} \frac{\|X\|_\varepsilon \|X(x, D)v\|_{\varepsilon'}}{I(A, X)^2}, \quad \text{et ce pour tout } \varepsilon' < \varepsilon.$$

La majoration de $\|X(x, D)v\|_{\varepsilon'}$ se fait en utilisant le lemme ci-dessous.

LEMME 2.6. — *Il existe deux opérateurs W_1 et W_2 opérant sur les couples de champs de vecteurs de divergence nulle, à valeurs dans les champs de vecteurs, tels que, pour tout couple (ε, p) de $]0, 1[\times]1, 2[$, il existe une constante C telle qu'étant donnés v et X deux champs de vecteurs de divergence nulle, si ω est le tourbillon de v , on ait*

$X(x, D)v = W_1(X, v) + W_2(X, v)$ avec :

- (i) $\|W_1(X, v)\|_\varepsilon \leq C \|X(x, D)\omega\|_{\varepsilon-1}$,
- (ii) pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$, $\|W_2(X, v)\|_{\varepsilon'} \leq C_{\varepsilon'} \|X\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}$,
- (iii) $\|W_2(X, v)\|_\varepsilon \leq C \|X\|_\varepsilon \|v\|_{Lip}$.

Démonstration. — Nous allons utiliser le découpage dyadique de l'espace des fréquences pour démontrer la formule suivante :

$$X(x, D)v = \sum_{i=1}^4 V_i$$

avec

$$V_1 = (\text{Id} - \chi(D)) \nabla^\perp \Delta^{-1} X(x, D)\omega,$$

$$V_2 = [T_X, \nabla^\perp \Delta^{-1}]\omega,$$

$$V_3 = -(\text{Id} - \chi(D)) \nabla^\perp \Delta^{-1} \sum_{j=1}^2 \{T \partial_j \omega X^j + \partial_j R(\omega, X^j)\}$$

et

$$V_4 = \sum_{j=1}^2 \{T \partial_j v X^j + \partial_j R(v, X^j)\}.$$

Le lemme 2.4 (v) appliqué avec $A = (\text{Id} - \chi(D)) \nabla^\perp \Delta^{-1}$ et $u = \omega$ montre que l'on a

$$X(x, D)(\text{Id} - \chi(D))v = \sum_{i=1}^3 V_i + V'_4$$

avec

$$V'_4 = \sum_{j=1}^2 \{T_{\partial_j(\text{Id} - \chi(D))v} X^j + \partial_j R((\text{Id} - \chi(D))v, X^j)\}.$$

D'après (0.5), $T_X \chi(D) = 0$; de plus, X est de divergence nulle, donc

$$X(x, D)\chi(D)v = \sum_{j=1}^2 \{T \partial_j \chi(D)v X^j + \partial_j R(\chi(D)v, X^j)\}.$$

D'où la formule souhaitée; on pose alors $W_1(X, v) = V_1$ et $W_2(X, v) = X(x, D)v - W_1$.

Il est immédiat que $\|V_1\|_\varepsilon \leq C \|X(x, D)\omega\|_{\varepsilon-1}$. De plus, le lemme 2.4 assure que l'on a $\|V_i\|_\varepsilon \leq C \|X\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty}$ pour i valant 2 ou 3 et que $\|V_4\|_\varepsilon \leq C \|X\|_\varepsilon \|v\|_{Lip}$. De plus, $\|\partial_j v\|_{-(\varepsilon-\varepsilon')} \leq C \|v\|_1$. Donc, d'après (2.2) et le lemme 2.4, on a $\|V_4\|_{\varepsilon'} \leq C \|X\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}$, d'où le lemme 2.6.

On déduit de ce lemme que

$$(2.13) \quad \|X(x, D)v\|_{\varepsilon'} \leq C \|X(x, D)\omega\|_{\varepsilon-1} + \|X\|_\varepsilon \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}.$$

Le théorème 2.1 résulte alors de (2.10-13).

3. Estimation a priori non linéaire

C'est dans cette partie qu'intervient la dynamique. On considère dans ce paragraphe une solution régulière globale du système (E). Plus précisément, on sait que, si le champ de vecteurs à l'instant initial appartient à C^r pour tout $r > 0$ et a son rotationnel dans L^p , alors il existe une solution globale localement bornée en temps à valeurs dans C^r pour tout $r > 0$ (voir [2]). Le but de ce paragraphe est la démonstration de l'estimation a priori suivante :

THÉORÈME 3.1. — Soit $\varepsilon > 0$ et $p \in [1, 2[$, il existe C telle que pour tout champ de vecteurs v solution $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^0_b(\mathbf{R}^2))$ de (E), tout champ de vecteurs X_0 de divergence nulle et de classe C^e et tout fermé du plan A^0 tels que $I(A^0, X_0)$ soit strictement positif, on ait :

$$\|v(t, \cdot)\|_{Lip} \leq C \|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^p} (1 + \text{Log } N_{\varepsilon, p}(A^0, X_0, \omega_0)) \exp(Ct \|\omega_0\|_{L^\infty}),$$

avec, comme au théorème 2.1

$$N_{\varepsilon, p}(A, X, \omega) = \frac{\|X\|_\varepsilon \|\omega\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A^0}}{I(A, X) \|\omega\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus A^0)}} \left(1 + \frac{\|X(x, D)\omega\|_{\varepsilon-1}}{I(A, X) \|\omega\|_{L^\infty \cap L^p}} \right).$$

Démonstration. — Nous allons définir, pour chaque temps, un champ de vecteurs X_t et un fermé A^t auxquels on puisse appliquer, à chaque instant, le théorème 2.1 avec profit.

On définit alors X_t et A^t par

$$(3.1) \quad A^t = \psi(t, A^0),$$

$$(3.2) \quad X_t = (\psi_t)_* X_0 \quad \text{i.e.} \quad (X_t)^i = (X_0(x, D)\psi)^i(t, \psi^{-1}(t, x)).$$

Il faut contrôler les quantités apparaissant dans le terme de droite de l'inégalité du théorème 2.1. Le point-clef consiste à démontrer que

$$(3.3) \quad N_{\varepsilon, p}(A^t, X_t, \omega_t) \leq N_{\varepsilon, p}(A^0, X_0, \omega_0) \exp\left(C \int_0^t \|v(s, \cdot)\|_{Lip} ds\right)$$

• *Majoration de $\|\omega(t, \cdot)\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A^t} / \|\omega(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus A^t)}$.* — D'après la conservation du tourbillon le long des lignes de flot (0.1), on a

$$\omega(t, x) - \omega(t, y) = \omega_0(\psi^{-1}(t, x)) - \omega_0(\psi^{-1}(t, y)).$$

Par définition de A^t , il vient, pour tous x et y du plan n'appartenant pas à A^t ,

$$|\omega(t, x) - \omega(t, y)| \leq \|\omega_0\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A^0} |\psi^{-1}(t, x) - \psi^{-1}(t, y)|^\varepsilon;$$

d'où

$$\|\omega(t, \cdot)\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A^t} \leq \|\omega_0\|_{\varepsilon, \mathbf{R}^2 \setminus A^0} \exp\left(\varepsilon \int_0^t \|v(s, \cdot)\|_{Lip} ds\right).$$

Or, de par la définition de A^t , il est clair que

$$\|\omega(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A^t)} = \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A^0)}.$$

Il en résulte alors que

$$(3.4) \quad \frac{\|\omega(t, \cdot)\|_{\varepsilon, \mathbb{R}^2 \setminus A^t}}{\|\omega(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A^t)}} \leq \frac{\|\omega_0\|_{\varepsilon, \mathbb{R}^2 \setminus A^0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A^0)}} \exp\left(\varepsilon \int_0^t \|v(s, \cdot)\|_{Lip} ds\right).$$

• *Minoration de $I(A^t, X_t)$.* — Par dérivation de l'équation du flot suivant X_0 , on obtient

$$\partial_t X_0(x, D)\psi(t, x) = \nabla v(t, \psi(t, x)) \cdot X_0(x, D)\psi(t, x).$$

En intégrant l'équation ci-dessus entre t et 0 , il vient,

$$|X_0(x)| \leq |X_0(x, D)\psi(t, x)| \exp \int_0^t \|v(s, \cdot)\|_{Lip} ds.$$

Par définition de A^t et de X_t , il vient

$$(3.5) \quad I(A^0, X_0) \leq I(A^t, X_t) \exp \int_0^t \|v(s, \cdot)\|_{Lip} ds.$$

• *Majoration de $\|X_t\|_\varepsilon$ et de $\|X_t(x, D)\omega\|_{\varepsilon-1}$.* — Elle est décrite par la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. — *Pour tout ε de l'intervalle $]0, 1[$, il existe une constante C , telle que :*

$$(i) \quad \|X_t(x, D)\omega(t, \cdot)\|_{\varepsilon-1} \leq C \|X_0(x, D)\omega_0\|_{\varepsilon-1} \exp\left(C \int_0^t \|v(s, \cdot)\|_{Lip} ds\right),$$

$$(ii) \quad \|X_t\|_\varepsilon \leq C \left(\|X_0\|_\varepsilon + \frac{\|X_0(x, D)\omega_0\|_{\varepsilon-1}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}} \right) \exp\left(C \int_0^t \|v(s, \cdot)\|_{Lip} ds\right).$$

Démonstration. — Le point clef en est le lemme de propagation de la régularité höldérienne suivant, lemme qui décrit avec soin la régularité nécessaire sur le champ de vecteurs propageant la régularité :

LEMME 3.3. — *Soient r un réel non nul de l'intervalle $] -1, 1[$ et F une application bilinéaire définie sur $Lip(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2) \times C^r$ telle que $\|F(v, f)\|_r \leq C \|f\|_r \|v\|_{Lip}$. Il existe une constante C_1 telle que, pour tout champ de vecteurs lipschitzien v de divergence nulle tel que $V(s) = \|v(s, \cdot)\|_{Lip} \geq V > 0$ et pour tout couple (f, h) de fonctions de $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}; C^r)$ satisfaisant à $\partial_t f + v \cdot \nabla f = F(v, f) + h$, on ait :*

$$\|f(t, \cdot)\|_r \leq C_1 \left(\|f(0, \cdot)\|_r + \frac{1}{V} \sup_{s \in [0, t]} \|h(s, \cdot)\|_r \right) \exp\left(C_1 \int_0^t V(s) ds\right).$$

Remarque. — L'hypothèse $V(s) \geq V > 0$ est inutile si $h = 0$. La raison de cette hypothèse (hypothèse bien sûr vérifiée dans le cas de solutions du système d'Euler incompressible où l'on a $2V(s) \geq \|\omega_0\|_{L^\infty}$) réside dans notre volonté d'obtenir une homogénéité convenable dans le terme relatif à la donnée initiale dans le point (ii) de la proposition 3.2.

Démonstration. — La première des choses à faire est de se ramener au cas facile où r est strictement compris entre 0 et 1. On définit l'opérateur $\Lambda = \chi(D) + (\text{Id} - \chi(D))|D|^{-1}$ si $r < 0$ et par $\Lambda = \text{Id}$ si $r > 0$. On a donc $\partial_t \Lambda f + v \cdot \nabla \Lambda f = \Lambda f(v, f) + \Lambda h + [v \cdot \nabla, \Lambda] f$. D'après le lemme 2.4(v), appliqué avec $X = v \cdot \nabla$ et $A = \Lambda$, on a

$$\begin{aligned} \partial_t \Lambda f + v \cdot \nabla \Lambda f &= \Lambda F(v, f) + \Lambda h + [T_v, \Lambda] f + \sum_j \{ T_{\partial_j \Lambda f} v^j + \partial_j R(\Lambda f, v^j) \} - \Lambda \sum_j \{ T_{\partial_j f} v^j + \partial_j R(f, v^j) \}. \end{aligned}$$

D'où, en posant $g(t) = \Lambda f(t)$ et $l(t) = \Lambda h(t)$, il vient

$$(3.6) \quad \partial_t g + v \cdot \nabla g = l + G(v, g)$$

avec

$$\begin{aligned} G(v, g) &= \Lambda F(v, \Lambda^{-1} g) + [T_v, \Lambda] \Lambda^{-1} g \\ &\quad + \sum_j \{ T_{\partial_j g} v^j + \partial_j R(g, v^j) \} - \Lambda \sum_j \{ T_{\partial_j \Lambda^{-1} g} v^j + \partial_j R(\Lambda^{-1} g, v^j) \} \end{aligned}$$

Posons $r' = r$ si $r > 0$ et $r' = r + 1$ si $r < 0$. D'après le lemme 2.4, il est clair que $\|G(v, g)\|_{r'} \leq C \|v\|_{Lip} \|g\|_{r'}$. De plus, par simple intégration de l'équation le long des caractéristiques, il vient :

$$g(t, x) = g_0(\psi^{-1}(t, x)) + \int_0^t \{ G(v, g)(s, \psi(s, \psi^{-1}(t, x))) ds + l(s, \psi(s, \psi^{-1}(t, x))) \} ds.$$

De plus, il est clair que $\|\nabla \{ \psi(s, \psi^{-1}(t, \cdot)) \}\|_{L^\infty} \leq \exp \int_s^t V(s) ds$, d'où, d'après la relation (3.6), on a,

$$\begin{aligned} \|g(t, \cdot)\|_{r'} &\leq \|g(0, \cdot)\|_{r'} \exp\left(r' \int_0^t V(s) ds\right) \\ &\quad + C \int_0^t \|g(s, \cdot)\|_{r'} V(s) \exp\left(r' \int_s^t V(s') ds'\right) ds + \int_0^t \|l(s)\|_{r'} \exp\left(r' \int_s^t V(s') ds'\right) ds. \end{aligned}$$

On va multiplier l'inégalité ci-dessus par $\exp -\lambda \int_0^t V(s) ds$, λ étant un réel strictement supérieur à r' .

Posons

$$G_{r', \lambda}(t) = \sup_{s \in [0, t]} \left\{ \|g(s, \cdot)\|_{r'} \exp\left(-\lambda \int_0^s V(s') ds'\right) \right\}$$

et

$$H_{r', \lambda}(t) = \text{Sup}_{s \in [0, t]} \left\{ \|h(s, \cdot)\|_{r'} \exp\left(-\lambda \int_0^s V(s') ds'\right) \right\}.$$

En utilisant que $V(s) \geq V$, il vient

$$G_{r', \lambda}(t) \leq \|g(0, \cdot)\|_{r'} + \left(C' G_{r', \lambda}(t) + \frac{H_{r', \lambda}(t)}{V} \right) \int_0^t V(s) \exp\left((\lambda - r') \int_t^s V(s') ds'\right) ds.$$

Or, une intégration immédiate assure que

$$\int_0^t V(s) \exp\left((\lambda - r') \int_t^s V(s') ds'\right) ds \leq \frac{1}{\lambda - r'}$$

Il en résulte que, pour $\lambda > C' + r'$,

$$(3.7) \quad G_{r', \lambda}(t) \leq \frac{\lambda - r'}{\lambda - r' - C'} \|g(0, \cdot)\|_{r'} + \frac{H_{r', \lambda}(t)}{V(\lambda - r' - C')}.$$

Comme il existe un réel $\alpha > 1$ tel que, pour tout t , $\alpha^{-1} \|g(t)\|_{r'} \leq \|f(t)\|_{r'} \leq \alpha \|g(t)\|_{r'}$, le lemme 3.3 résulte de (3.7) en choisissant par exemple $\lambda = C' + 3$.

Revenons à la proposition 3.2. En dérivant l'équation du flot le long de X_0 , il vient, d'après la relation (3.2) de définition de X_t ,

$$(3.8) \quad \partial_t X_t + v \cdot \nabla X_t = X_t(x, D) v.$$

La relation ci-dessus signifie simplement que les champs de vecteurs $\partial_t + v \cdot \nabla$ et X_t commutent. Il en résulte que

$$(3.9) \quad \partial_t X_t(x, D) \omega + v \cdot \nabla X_t(x, D) \omega = 0.$$

La majoration de $\|X_t(x, D) \omega\|_{e-1}$ n'est alors qu'une application directe du lemme 3.3 avec $f(t, x) = X_t(x, D) \omega(t, x)$, $F = 0$ et $h = 0$.

Pour majorer $\|X_t\|_e$, il faut recourir au lemme 2.6. Avec les notations de ce lemme, on a $X_t(x, D) v = W_1 + W_2$. D'après le point (i) que nous venons de démontrer, l'application du lemme 3.3 avec $h = W_1$ et $F = W_2$ (licite car $2 \|v(s, \cdot)\|_{\text{Lip}} \geq 2V = \|\omega_0\|_{L^\infty}$) assure le point (ii) et ainsi la proposition.

De la proposition 3.2 et des inégalités (3.4) et (3.5), on déduit l'inégalité (3.3). Le théorème 2.1 assure que

$$(3.10) \quad \|v(t, \cdot)\|_{\text{Lip}} \leq C \|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^p} (1 + \text{Log } N_{e, p}(A^0, X_0, \omega_0)) + C \|\omega_0\|_{L^\infty} \int_0^t \|v(s, \cdot)\|_{\text{Lip}} ds.$$

Le théorème 3.1 résulte de l'intégration de l'inégalité (3.10) ci-dessus.

Remarque. — Si $X_0(x, D)\omega_0$ appartient à L^∞ , la proposition 3.2(i) est alors inutile. En effet, d'après la relation (3.9), on a dans ce cas $\|X_0(x, D)\omega_0\|_{L^\infty} = \|X_t(x, D)\omega_t\|_{L^\infty}$.

4. Démonstration du théorème 1

On procède de manière analogue à celle de [6]. Les deux étapes de la démonstration sont maintenant la régularisation de la donnée initiale et le passage à la limite sur les solutions associées aux données initiales régularisées.

• *Régularisation des données initiales.* — Soit v_0 une donnée initiale vérifiant les hypothèses du théorème 1, on considère une fonction $\theta \in C_0^\infty(B(0, \alpha))$, positive et d'intégrale 1, α étant à choisir. On pose alors $\theta_n = (1+n)^{-2} \theta((1+n)\cdot)$ et $v_{0,n}$ (resp. $\omega_{0,n}$) = $\theta_n * v_0$ (resp. ω_0). Comme v_0 est lipschitzien, la suite $(v_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers v_0 dans L^∞ . De plus, il est clair que

$$(4.1) \quad \|\omega_{0,n}\|_{L^p} \leq \|\omega_0\|_{L^p} \quad \text{et que} \quad \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty} \leq \|\omega_0\|_{L^\infty}.$$

On choisit α suffisamment petit pour que, sur l'ensemble noté A_α^0 des points à distance inférieure à α de A^0 , on ait

$$(4.2) \quad 2I(A_\alpha^0, X_0) \geq I(A^0, X_0).$$

En outre, si x et x' sont deux points de $\mathbb{R}^2 \setminus A_\alpha^0$, alors, pour tout y dans $B(0, \alpha)$, $x - y$ et $x' - y$ sont dans $\mathbb{R}^2 \setminus A^0$; il est donc clair que

$$(4.3) \quad \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A_\alpha^0)} \leq \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A^0)} \quad \text{et} \quad \|\omega_{0,n}\|_{\varepsilon, \mathbb{R}^2 \setminus A_\alpha^0} \leq \|\omega_0\|_{\varepsilon, \mathbb{R}^2 \setminus A^0}.$$

De plus, il faut démontrer que la suite $(X_0(x, D)\omega_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $C^{\varepsilon-1}$. En posant $\Theta_n a = \theta_n * a$, il vient, d'après le lemme 2.4(v) appliqué avec $X = X_0$, $u = \omega$ et $A = \Theta_n$,

$$[X_0(x, D), \Theta_n] \omega_0 = [T_{X_0}, \Theta_n] \omega_0 + R_0(X_0, \omega_0)$$

avec

$$R_0(X_0, \omega_0) = \sum_j T_{\partial_j \Theta_n \omega_0} X_0^j + \partial_j R(X_0^j, \Theta_n \omega_0) - \Theta_n (T_{\partial_j \omega_0} X_0^j + \partial_j R(X_0^j, \omega_0)).$$

Il résulte alors du lemme 2.4 (ii) et (iv) que l'on a

$$(4.4) \quad \|X_0(x, D)\omega_{0,n}\|_{\varepsilon-1} \leq C(\|X_0(x, D)\omega_0\|_{\varepsilon-1} + \|X_0\|_\varepsilon \|\omega_0\|_{L^\infty}).$$

Enfin, comme les quantités $\|\omega_0\|_{L^\infty}$ et $\|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A^0)}$ apparaissent au dénominateur dans l'inégalité du théorème 3.1, il n'est pas sans intérêt de les minorer. La suite $(\omega_{0,n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend faiblement vers ω_0 dans L^∞ . Les estimations (4.1) et (4.3) jointes à la compacité faible des boules de L^∞ assurent que $\lim \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A^0)} = \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A^0)}$ et $\lim \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty} = \|\omega_0\|_{L^\infty}$. Donc, comme par ailleurs $\omega_{0,n}$ tend fortement vers ω_0 dans L^p ,

on peut, en prenant n assez grand, supposer :

$$(4.5) \quad \begin{aligned} & \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A^0)} \geq (1/2) \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus A^0)}, \quad \|\omega_{0,n}\|_{L^\infty} \geq (1/2) \|\omega_0\|_{L^\infty} \\ & \text{et} \\ & \|\omega_{0,n}\|_{L^p} \geq (1/2) \|\omega_0\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Il résulte alors des estimations (4.1-5) qu'il existe une constante C telle que

$$N_{\varepsilon,p}(A^0, X_{0,n}, \omega_{0,n}) \leq C N_{\varepsilon,p}(A^0, X_0, \omega_0).$$

Le théorème 3.1, appliqué avec A_α^0 , X_0 et $\omega_{0,n}$, assure alors immédiatement que

$$(4.6) \quad \|v_n(t, \cdot)\|_{Lip} \leq C \|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^p} (1 + \text{Log } N_{\varepsilon,p}(A^0, X_0, \omega_0)) \exp(Ct) \|\omega_0\|_{L^\infty}.$$

On a donc un contrôle uniforme et global de la norme lipschitz des champs de vecteurs v_n . On peut aborder la seconde étape.

• *Passage à la limite.* — Il s'agit de démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans un espace convenable. On suit ici la démarche de [7] en considérant l'opérateur $\pi(v, w) = \nabla \Delta^{-1}(\text{tr}(dv dw))$, où Δ^{-1} désigne la convolution par $\text{Log}|x|$. Il est trivial de vérifier qu'une solution du système (E) est solution du système (E') où l'on a remplacé $-\nabla p$ par $\pi(v, v)$. Le lemme suivant assure la définition de l'opérateur π indépendamment de toute décroissance à l'infini des champs de vecteurs v et w .

LEMME 4.1. — *Pour tout $r \in]-1, 1[$, il existe une constante C telle que, pour tous champs de vecteurs à divergence nulle v et w , on ait :*

$$\|\pi(v, w)\|_r \leq C \|v\|_{Lip} \|w\|_r$$

Démonstration. — Il est bien sûr capital d'utiliser la nullité de la divergence des champs de vecteurs. Grâce à cette nullité, on peut écrire $\pi(v, w) = \sum_i \pi_i(v, w)$ avec

$$\pi_1(v, w) = \sum_{i,j} (\text{Id} - \chi(D)) \nabla \Delta^{-1} \partial_j T_{\partial_i v^j} w^i,$$

$$\pi_2(v, w) = \sum_{i,j} (\text{Id} - \chi(D)) \nabla \Delta^{-1} \partial_i T_{\partial_j w^i} v^j,$$

$$\pi_3(v, w) = \sum_{i,j} (\text{Id} - \chi(D)) \nabla \Delta^{-1} \partial_i \partial_j R(v^j, w^i),$$

$$\pi_4(v, w) = \sum_{i,j} \chi(D) \nabla \partial_i \partial_j \int \chi(x-y) \text{Log}|x-y| R(v^j, w^i)(y) dy$$

et

$$\pi_5(v, w) = \sum_{i,j} \chi(D) \int \nabla \partial_i \partial_j (1 - \chi(x-y)) \text{Log}|x-y| R(v^j, w^i)(y) dy.$$

La partie hautes fréquences ne pose pas de problèmes. Il suffit d'appliquer le lemme 2.4 pour obtenir que $\|\pi_i(v, w)\|_r \leq C \|v\|_{Lip} \|w\|_r$, pour $i = 1, 2$ ou 3 . Comme la transformée

de Fourier de π_4 et de π_5 est supportée dans un compact fixe, il suffit, pour majorer $\|\pi_4(v, w)\|_r$ et $\|\pi_5(v, w)\|_r$ de majorer leur norme L^∞ . Or, les fonctions $\chi(x) \text{Log}|x|$ et $\nabla \partial_i \partial_j (1 - \chi(x)) \text{Log}|x|$ sont des fonctions intégrables, donc, pour $i=4$ ou 5 , on a $\|\pi_i(v, w)\|_r \leq C \text{Sup}_{i,j} \|\mathbf{R}(v^i, w^j)\|_{L^\infty}$. Or, d'après le lemme 2.4,

$$\|\mathbf{R}(v^i, w^j)\|_{L^\infty} \leq C \|v\|_{\text{Lip}} \|w\|_r;$$

d'où le lemme 4.1.

On va maintenant pouvoir majorer la différence $v_n - v_m$. On a l'équation suivante :

$$(4.7) \quad \partial_t(v_n - v_m) + v_n \cdot \nabla(v_n - v_m) = \pi(v_n - v_m, v_n + v_m) + (v_n - v_m) \cdot \nabla v_m.$$

Soit r un réel de l'intervalle $] -1, 0[$; en découpant le produit en termes de paraproduit et de reste, c'est-à-dire en appliquant (0.6), il résulte du lemme 2.4 que

$$(4.8) \quad \|(v_n - v_m) \cdot \nabla v_m\|_r \leq C \|v_n + v_m\|_{\text{Lip}} \|v_n - v_m\|_r.$$

D'après (4.5), on peut appliquer, pour n assez grand, l'inégalité (3.7) avec $v = v_n$, $V = (1/4) \|\omega_0\|_{L^\infty}$ et $h = \pi(v_n - v_m, v_n + v_m) + (v_n - v_m) \cdot \nabla v_m$. D'où, si $\lambda > r + 1 + C$,

$$M_{n,m}(t, \lambda) \leq C \|v_{0,n} - v_{0,m}\|_r + \frac{C}{V(\lambda - r - 1 - C)} M_{n,m}(t, \lambda)$$

avec

$$M_{n,m}(t, \lambda) = \text{Sup}_{0 \leq s \leq t} \|v_n(s, \cdot) - v_m(s, \cdot)\|_r \exp\left(-\lambda \int_0^t \|v_n(s, \cdot)\|_{\text{Lip}} ds\right).$$

En choisissant λ assez grand, on en déduit l'existence d'un réel C tel que, pour tout t , on ait

$$\|v_n(t, \cdot) - v_m(t, \cdot)\|_r \leq C \|v_{0,n} - v_{0,m}\|_r \exp\left(C \int_0^t \|v_n(s, \cdot)\|_{\text{Lip}} ds\right).$$

Il résulte de (4.6) que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^r)$. Donc, par interpolation avec l'inégalité (4.6), la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^r)$ pour tout réel r' strictement inférieur à 1 .

Pour conclure la démonstration du théorème 1, il reste à démontrer les propriétés de régularité de la solution ainsi construite par passage à la limite. Nous allons rappeler sans démonstration le très facile lemme 2.4 de [6].

LEMME 4.2. — Soit $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite bornée de $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; \text{Lip}(\mathbf{R}^2))$ convergeant vers v dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^r)$ pour r strictement inférieur à 1 . Si ψ_n (resp. ψ) désigne le flot associé à v_n (resp. v), alors, pour tout r strictement inférieur à 1 , $\lim(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}} = \psi$ et $\lim((\psi_n)^{-1})_{n \in \mathbf{N}} = \psi^{-1}$ dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; \text{Id} + C^r)$.

Comme le champ X_0 est de divergence nulle, $X_0(x, D)\psi_n = \sum_j \partial_j (X_0^j \psi_n)$; d'après le lemme 4.2 ci-dessus et le lemme 2.4(iii), il est clair que $\lim(X_0^j \psi_n)_{n \in \mathbf{N}} = X_0^j \psi$ dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^r)$. D'où $\lim(X_0(x, D)\psi_n)_{n \in \mathbf{N}} = X_0(x, D)\psi$ dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^{r-1})$. Or, d'après le

théorème 3.1 et la proposition 3.2(ii), la suite $(X_0(x, D)\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^\varepsilon)$. Il en résulte que

$$(4.9) \quad \begin{cases} \lim (X_0(x, D)\psi_n)_{n \in \mathbb{N}} = X_0(x, D)\psi \text{ dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^r) \text{ pour tout } r < \varepsilon, \\ \text{donc } X_0(x, D)\psi \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^\varepsilon) \text{ et } X_t \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^\varepsilon). \end{cases}$$

Le point (i) du théorème 1 est ainsi démontré. Démontrons maintenant que

$$(4.10) \quad \lim (X_{n,t})_{n \in \mathbb{N}} = X_t \text{ dans l'espace } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^{\varepsilon'}) \text{ pour tout } \varepsilon' < \varepsilon.$$

Par définition des champs de vecteurs $X_{n,t}$ et X_t , il vient

$$\begin{aligned} X_{n,t}(x) - X_t(x) &= X_0(x, D)\psi_n(t, (\psi_n)^{-1}(t, x)) - X_0(x, D)\psi(t, \psi^{-1}(t, x)) \\ &\quad + (X_0(x, D)\psi_n - X_0(x, D)\psi)(t, \psi^{-1}(t, x)). \end{aligned}$$

D'où l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|X_{n,t} - X_t\|_{L^\infty} &\leq \|X_0(x, D)\psi_n(t, \cdot)\|_\varepsilon (\|\psi_n^{-1}(t, \cdot) - \psi^{-1}(t, \cdot)\|_{L^\infty})^\varepsilon \\ &\quad + \|X_0(x, D)\psi_n(t, \cdot) - X_0(x, D)\psi(t, \cdot)\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

L'assertion (4.9) dit que la suite $(X_0(x, D)\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^\varepsilon)$ convergeant vers $X_0(x, D)\psi$ dans l'espace $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^{\varepsilon'})$ pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$. Le lemme 4.2 et le fait que la suite $(X_{n,t})_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée dans l'espace $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^\varepsilon)$ permettent alors de déduire immédiatement la propriété (4.10) de l'inégalité ci-dessus.

Il faut maintenant étudier la convergence de la suite $(X_{n,t}(x, D)\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Rappelons que, comme $\lim (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = v$ dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^r)$, pour tout $r < 1$, on a

$$(4.11) \quad \lim (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} = \omega \text{ dans } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^r), \text{ pour tout } r < 0.$$

Il résulte du lemme 2.4(iii) que $\lim (\omega_n X_{n,t})_{n \in \mathbb{N}} = \omega X_t$ dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^r)$, pour tout $r < 0$ et donc que $\lim (\text{div}(\omega_n X_{n,t}))_{n \in \mathbb{N}} = \text{div}(X_t \omega)$ dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^r)$, pour tout $r < -1$. D'après l'inégalité (4.6) et la proposition 3.2(i), la suite $(X_{n,t}(x, D)\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de l'espace $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^{\varepsilon-1})$. Il en résulte que

$$(4.12) \quad X_t(x, D)\omega \text{ appartient à l'espace } L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; C^{\varepsilon-1}).$$

Enfin, la relation de conservation du tourbillon, jointe au fait que la solution v appartienne à $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbf{R}; \text{Lip}(\mathbf{R}^2))$, assure, d'après la relation (0.1), que $\omega(t, \cdot) \in C^\varepsilon(\mathbf{R}^2 \setminus A_t)$ soit finalement $\omega(t, \cdot) \in C_\varepsilon(A^t, X_t)$. Le théorème 1 est ainsi complètement démontré.

5. Quelques remarques conclusives

Dans ce paragraphe, on va donner la version globale de quelques théorèmes locaux de [6]. Si S est une sous-variété de classe C^∞ , on désigne par $C^p(S, \infty)$ l'ensemble des u appartenant à C^p telles que, pour toute famille z_1, \dots, z_j de champs de vecteurs C^∞ tangents à S , $z_1(x, D) \dots z_j(x, D)u$ reste dans C^p . On a alors le théorème suivant, dont

la démonstration n'est que la juxtaposition du théorème F de [6] et du théorème 1 :

THÉORÈME 5.1. — Soit Γ_0 une courbe fermée de classe C^∞ . Si ω_0 appartient à $C^{\varepsilon-1}(\Gamma_0, \infty) \cap L^p$ avec $p < 2$, il existe alors une unique solution v dans l'espace $L_{loc}^\infty(\mathbf{R}; \text{Lip}(\mathbf{R}^2))$ qui de plus vérifie :

(i) la surface $\Gamma = \{ \psi(t, \Gamma_0), t \in \mathbf{R} \}$ est de classe C^∞ ;

(ii) $v \in C^{\varepsilon'}(\Gamma, \infty)$ pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$ localement en temps.

Avec ce théorème, nous voudrions insister sur le point suivant : dans le problème des poches de tourbillon, le fait que le tourbillon vaille exactement 1 d'un côté de la courbe et exactement 0 de l'autre, apparaît, du point de vue de l'évolution de la régularité de la courbe, comme une information anecdotique.

En guise de conclusion, nous voudrions donner la version globale du théorème le plus général de [6], qui, malheureusement, s'énonce dans le cadre des familles de champs de vecteurs dites $1-\varepsilon, k$ régulières. Il est hors de question de redéfinir ici cette notion et nous invitons le lecteur intéressé à se reporter au troisième paragraphe de [6] pour une définition précise. Disons simplement que c'est une famille de champs de vecteurs dont les coefficients peuvent être dérivés par les éléments de la famille elle-même sans perte de régularité significative. Le théorème, dont la preuve n'est à nouveau rien, sinon la juxtaposition du théorème 4.1 de [6] et du théorème 1, est le suivant :

THÉORÈME 5.2. — Soient k un entier strictement positif et Z_0 une famille de champs de vecteurs de divergence nulle, $1-\varepsilon, k$ régulière. On considère une donnée initiale v_0 dans l'espace $C_{1-\varepsilon}^{\varepsilon-1}(Z_0, k) \cap L^p$ avec $p < 2$, on suppose de plus l'existence d'un réel strictement positif β tel que la famille Z_0 ne s'annule identiquement en aucun point du support singulier C^p de ω_0 . Il existe alors une unique solution v de (E) dans l'espace $L_{loc}^\infty(\mathbf{R}; \text{Lip}(\mathbf{R}^2))$ qui de plus vérifie :

(i) le flot $\psi \in \text{Id} + C_{(1-\varepsilon, 0)}^1(Z_0 \cup \{ \partial_t \}, (k, \infty))$;

(ii) si $Z = \psi^* Z_0$, alors la famille $\underline{Z} = Z \cup \{ \partial_t + v \cdot \nabla \}$ est $(1-\varepsilon, 0), (k, \infty)$ régulière et v appartient à l'espace $C_{(1-\varepsilon, 0)}^1(\underline{Z}, (k, \infty))$ localement en temps.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ALINHAC, Remarques sur l'instabilité du problème des poches de tourbillon. Prépublication de l'Université d'Orsay, 1989, *Journ. of Functional Analysis* (à paraître).
- [2] H. BAHOURI et B. DEHMAN, Remarques sur l'apparition de singularités dans les écoulements Eulériens incompressibles à données Höldériennes (à paraître).
- [3] J.-M. BONY, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, vol. 14, 1981, p. 209-246.
- [4] T. BUTTKE, The Observation of Singularities in the Boundary of Patches of Constant Vorticity, *Phys. Fluids A*, vol. 1, (7), 1989, p. 1283-1285.
- [5] T. BUTTKE, A Fast Adaptive Vortex Method for Patches of Constant Vorticity in Two Dimensions. *Journ. Comp. Phys.*, vol. 89, 1990, p. 161-186.
- [6] J.-Y. CHEMIN, Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait incompressible bidimensionnel. *Inventiones Math.*, vol. 103, 1991, p. 599-629.
- [7] J.-Y. CHEMIN, Régularité des trajectoires des particules d'un fluide parfait incompressible remplissant l'espace. Prépublication de l'École Polytechnique, 1990, *Journ. Maths. Pures et Appliquées* (à paraître).

- [8] P. CONSTANTIN et E. TITI, On the Evolution of Nearly Circular Vortex Patches, *Comm. Math. Phys.*, vol. 119, 1988, p. 177-198.
- [9] A MAJDA, Vorticity and the Mathematical Theory of Incompressible Fluid Flow. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 38, 1986, p. 187-220.
- [10] P. SERFATI, Étude mathématique de flammes infiniment minces en combustion. Résultats de structure et de régularité pour l'équation d'Euler incompressible, *Thèse*, Université Paris-VI, 1992.
- [11] V. YUDOVITCH, Non Stationnary Flow of an Ideal Incompressible Liquid, *Zh. Vych. Math.*, vol. 3, 1963, p. 1032-1066.
- [12] N. ZABUSKY, M. HUGHES et K. ROBERTS, Contour Dynamics for the Euler Equations in Two Dimensions, *Jour. Comp. Phys.*, vol. 30, 1979, p. 96-106.

(Manuscrit reçu le 24 juin 1992,
révisé le 9 octobre 1992.)

J.-Y. CHEMIN
École Polytechnique,
C.N.R.S.-U.R.A. 169,
F-91128 Palaiseau Cedex,
France.
