G. LEBEAU

Singularités des solutions d'équations d'ondes semi-linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 25, nº 2 (1992), p. 201-231
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1992_4_25_2_201_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 25, 1992, p. 201 à 231.

SINGULARITÉS DES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS D'ONDES SEMI-LINÉAIRES

PAR G. LEBEAU

RÉSUMÉ. — Soit $u(t, x)$ appartenant localement à l'espace $C^0(\mathbb{R}_t, H^{s+1}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1(\mathbb{R}_t, H^s(\mathbb{R}^d))$ et solution d'une équation d'onde semi-linéaire $\square u = F(t, x, u, \nabla u)$, où F est C^∞, et $s > d/2$. On prouve que les singularités microlocales de u sont estimées par les images directes « d'intégrales de Feynman » construites à partir des données de Cauchy, et du propagateur libre.

ABSTRACT. — Let $u(t, x)$ locally in the space $C^0(\mathbb{R}_t, H^{s+1}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1(\mathbb{R}_t, H^s(\mathbb{R}^d))$, be a solution of the semi-linear wave equation $\square u = F(t, x, u, \nabla u)$ with $F \in C^\infty$, $s > d/2$. We prove that the microlocal singularities of u are estimated by the direct images of "Feynman integrals" associated with the Cauchy data of u, and the free propagator.

Mots clés : équation des ondes semi-linéaires, analyse microlocale.

Code Matière A.M.S. (1986) : 35 S 15.

0. Introduction et résultats

Soit $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$ l'opérateur des ondes, où $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$, et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{1+d}$ qui est un domaine de détermination pour $\omega = \Omega \cap \{t = 0\}$.

Soit $u(t, x)$ une fonction réelle continue sur Ω appartenant localement à l'espace

$$C^0(\mathbb{R}_t, H^{s+1}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1(\mathbb{R}_t, H^s(\mathbb{R}^d))$$

où H^s est l'espace de Sobolev usuel et vérifiant dans Ω l'équation des ondes semi-linéaires

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \square u = F(t, x, u, \nabla u), & \nabla u = (\partial_t u, \nabla_x u) \\ u|_{t=0} = \underline{u}_0 \in H^{s+1}_{\mathrm{loc}}(\omega), & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \underline{u}_1 \in H^s_{\mathrm{loc}}(\omega) \end{array} \right.$$

où F est une fonction C^∞ de ses arguments et où $s > d/2$.

On s'intéresse à déterminer les singularités de la solution u de (1) dans $\Omega_+ = \Omega \cap \{t > 0\}$ en fonction de ses données de Cauchy u_0 et u_1. Plus précisément si $p \in T^*\Omega_+ \setminus \Omega_+$, on cherche à déterminer pour quelles valeurs de σ on a

$$(2) \qquad u \in H^\sigma_p \quad \text{(espace de Sobolev microlocal).}$$

Depuis les travaux de J.-M. Bony, ce type de problème a été intensivement étudié (*voir* la bibliographie). Dans cet article, nous prouvons que les singularités de u sont estimées par les images directes « d'intégrales de Feynman » construites explicitement à partir des données de Cauchy u_0 et u_1 et qui traduisent les phénomènes d'interaction (non linéaire) et de propagation (linéaire).

Plus précisément, notre résultat s'énonce de la façon suivante.

DÉFINITION 1. — On appelle diagramme D la donnée d'un ensemble fini $I=\{1, \ldots, N\}$ muni d'une partition $I=I_1 \cup \ldots \cup I_L$ et d'une application $\theta: I \to I \cup \{0\}$ telle que $\theta(I_k) \subset I_{k-1}$, $\theta(I_1)=\{0\}$. On définit le degré de D par $\deg D = \mathrm{Card}(J)$, où $J=\{i \in I, \theta^{-1}(i)=\varnothing\}$.

Soit $e_+(z)(z=(t, x))$, la solution élémentaire de $\square$ à support dans l'avenir. Si D est un diagramme, pour $(z_0, z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{R}^{(1+d)(N+1)}$, on pose :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [D] = \prod_{i \notin J} \nabla^{\beta_i} e_+(z_{\theta(i)} - z_i) \prod_{i \in J} e_+(z_{\theta(i)} - z_i) \\ \{D\} = \prod_{i \in J} (v_i^0(x_i)\, \delta'_{t_i=0} + v_i^1(x_i)\, \delta_{t_i=0}). \end{array} \right.$$

Ici β_i vérifie

$$|\beta_i| \leqq 1,$$

$$v_i^0 \in \mathrm{vect}\{\underline{u}_1, \nabla^\beta \underline{u}_0, |\beta| \leqq 1\} \qquad \text{et} \qquad v_i^1 \in \mathrm{vect}\{\nabla^\beta \underline{u}_1, \nabla^\gamma \underline{u}_0, |\beta| \leqq 1, |\gamma| \leqq 2\}$$

et on omet dans la notation des distributions $[D]$ et $\{D\}$ la dépendance en β_i, v_i^0. On a alors :

THÉORÈME 1. — *Soit u solution de* (1) *avec* $s=(d/2)+\rho_0$, $\rho_0>0$. *Pour tout entier* $M \geqq 1$ *et tout* $\sigma \in [s+1+(M-1)\rho_0, s+1+M\rho_0[$, *on a :*

$$(4) \quad \mathrm{WF}^\sigma(u)|_{t>0} \subset \{(z_0, \zeta_0); \text{il existe un diagramme D, avec } \deg(D) \leqq M \text{ et } (z_0, z_1, \ldots, z_N, \zeta_0, 0, \ldots, 0) \in \mathrm{WF}[[D] . \{D\}]\}.$$

Remarque. — Dans ce théorème, l'existence du produit de distributions $[D] . \{D\}$ est assuré par l'hypothèse $s>d/2$. Plus précisément, si $y=(z_0, z_1, \ldots, z_N)$, η la variable duale, on vérifie comme dans [23], II 2.2, lemme 2 qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que pour toutes fonctions tests φ, ψ, l'intégrale

$$(5) \qquad \int \widehat{\varphi[D]}(\eta')\, \widehat{\psi\{D\}}(\eta-\eta')(1+|\eta'|)^\varepsilon \, d\eta'$$

existe et est fonction tempérée de η.

Le plan de l'article est le suivant : dans le paragraphe 1 on introduit la technique de décomposition en fonction de la fréquence qui est la base de la preuve du théorème 1. En particulier, on prouve le théorème 2. La preuve de ce résultat utilise d'une part les techniques géométriques et d'analyse microlocale analytique développées dans [23] et d'autre part un découpage de la solution u en (essentiellement) deux termes, $u(t, x, \lambda)=u_1(t, x, \lambda)+u_2(t, x, \lambda)$ où λ est un grand paramètre qui représente la fréquence à laquelle on observe la solution; la fonction u_1 (partie régulière de u) est alors concentrée à des fréquences inférieures à λ^δ, avec $\delta\in]0, 1[$, et u_2 (partie singulière de u) est $\mathcal{O}(\lambda^{-a})$, avec $a>0$ dans un espace de Sobolev convenablement choisi. Le paraproduit de J.-M. Bony correspond à un découpage analogue avec $\delta=1$. L'intérêt de choisir un $\delta<1$ réside dans le fait qu'il permet une calcul multilinéaire à tous les ordres. Comme application d'un tel découpage, on obtient en particulier le théorème suivant (*voir* § 1).

THÉORÈME 2. — *Soit* $u\in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s=(d/2)+\rho$, $\rho>0$, *à valeurs réelles et* $F\in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Alors* $\forall N\geqq 1$, $\forall \mu\in[(d/2)+N\rho, (d/2)+(N+1)\rho[$, *on a*

$$\mathrm{WF}^\mu(F(u))\subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{WF}^\mu(u^j)$$

où WF^μ *est le front d'onde Sobolev usuel d'indice* μ.

Les singularités des polynômes de u contrôlent donc les singularités des fonctions non linéaires de u.

Dans le paragraphe 2, on introduit les algèbres associées à l'équation des ondes, et dans le paragraphe 3, la régularité des solutions d'équations d'ondes dans ces algèbres. Dans le paragraphe 4, on étudie la paramétrix d'une linéarisation de l'équation (1). Le paragraphe 5 est consacré à la preuve du théorème 1 et le paragraphe 6 en donne l'application aux problèmes à singularités conormales (théorème 3).

1. Calcul quasi homogène multilinéaire

On note $\lambda\mathcal{D}'$ l'espace des distributions $f(x, \lambda)$, $x\in\mathbb{R}^d$, dépendant d'un paramètre $\lambda\in[1, \infty[$, telles que pour tout $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on ait :

$$|\widehat{\varphi f}(\xi, \lambda)|\leqq \text{polynôme}(\lambda, \xi). \tag{1}$$

DÉFINITION 1. — Pour $(x_0, \xi_0)\in T^*\mathbb{R}^d$, et $f\in\lambda\mathcal{D}'$, on a $(x_0, \xi_0)\notin\lambda\,\mathrm{WF}(f)$ ssi il existe $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ égal à 1 près de x_0 et V_0 voisinage de ξ_0 tels que

$$\int_{\xi\in\lambda V_0} |\widehat{\varphi f}(\xi, \lambda)|^2\, d\xi\in\mathcal{O}(\lambda^{-\infty}) \tag{2}$$

où $\lambda V_0=\{\xi=\lambda\eta;\ \eta\in V_0\}$.

On remarquera qu'on a $\lambda\,\mathrm{WF}(f)=\mathrm{WF}(f)$ si f est indépendant de λ, où WF est le front d'onde de Hörmander, dans $T^*\mathbb{R}^d\setminus\mathbb{R}^d$.

Pour $p\in\mathbb{Z}$, soit C_p la couronne

$$\theta\,.\,2^p\leqq|\xi|<2^{p+1}/\theta \qquad (\theta=0{,}9) \tag{3}$$

et pour $f(x, \lambda)$ à support compact en x, $p \geqq 0$

$$(4) \qquad a_p^2(f) = \int_{C_p} |\hat{f}(\xi, 2^p)|^2 \, d\xi.$$

Pour $\mu \in \mathbb{R}$, on pose :

$$(5) \qquad |f|_\mu^2 = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{2p\mu} a_p^2(f).$$

Pour $t > d/2$, on munit l'espace de Sobolev $H^t(\mathbb{R}^d)$ d'une norme $\| \ \|_t$ telle que $\|ab\|_t \leqq \|a\|_t \|b\|_t$ et $\|\hat{a}\|_{L^1} \leqq \|a\|_t$ pour $a, b \in H^t(\mathbb{R}^d)$. On peut choisir $\|a\|_t^2 = D_t \int (1 + |\xi|)^{2s} |\hat{a}(\xi)|^2 \, d\xi$ pour une certaine constante D_t.

LEMME 1. — *Soit* $t > d/2$ *et* $a(x, \lambda)$ *de classe* C^∞ *en* x *vérifiant* $\exists \delta \in]0, 1[$, $\forall \alpha$, $\exists C_\alpha \sup_\lambda \| \lambda^{-|\alpha|\delta} \partial_x^\alpha a \|_t \leqq C_\alpha$.

(i) *Pour* $f \in \lambda \mathcal{D}'$ *on a* $\lambda \operatorname{WF}(af) \subset \lambda \operatorname{WF}(f)$.

(ii) *Pour* $v(x) \in H^\mu_{\text{comp}}$, $|av|_\mu \leqq \text{Cte} \|v\|_\mu$.

Preuve. — On peut supposer a à support compact en x. On a alors :

$$(6) \qquad \forall N, \quad \exists C_N, \quad \forall \lambda, \xi, \qquad |\hat{a}(\xi, \lambda)| \leqq C_N \left(\frac{\lambda^\delta}{1 + |\xi|} \right)^N$$

$$(7) \qquad \sup_\lambda \int |\hat{a}(\xi, \lambda)| \, d\xi \leqq C_0.$$

Soit $f \in \lambda \mathcal{D}'$ et $(x_0, \xi_0) \notin \lambda \operatorname{WF}(f)$; soit φ et V_0 comme dans la définition 1 et $V_0' \subset\subset V_0$. On a $f \in \lambda \mathcal{D}'$ par (6) et

$$(8) \qquad \widehat{\varphi af}(\xi, \lambda) = \int_{\eta \in \lambda V_0} \hat{a}(\xi - \eta, \lambda) \widehat{\varphi f}(\eta, \lambda) \, d\eta + \int_{\eta \notin \lambda V_0} \hat{a}(\xi - \eta, \lambda) \widehat{\varphi f}(\eta, \lambda) \, d\eta = I + II.$$

Par (7) et (2) on a $\| I(\xi, \lambda) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \in \mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$. Pour $\xi \in \lambda V_0'$ et $\eta \notin \lambda V_0$ on a $|\xi - \eta| \geqq \text{Cte}(\lambda + |\xi| + |\eta|)$ d'où pour $\xi \in \lambda V_0'$ $|II(\xi, \lambda)| \in \mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$ d'où (i). De même pour $v \in H^\mu_{\text{comp}}$, $\xi \in C_p$, $p \geqq 0$ on écrit

$$(9) \qquad \widehat{av}(\xi, 2^p) = \int_{\eta \in D_p} \hat{a}(\xi - \eta, 2^p) \hat{v}(\eta) \, d\eta + \int_{\eta \notin D_p} \hat{a}(\xi - \eta, 2^p) \hat{v}(\eta) \, d\eta = I + II$$

où $D_p = C_{p-1} \cup C_p \cup C_{p+1}$. On a par (7)

$$(10) \qquad \| I(\xi, 2^p) \|_{L^2(C_p)} \leqq C_0 \| \hat{v} \|_{L^2(D_p)}$$

et pour $\xi \in C_p$, $\eta \notin D_p$, $|\xi-\eta| \geqq C^k(2^p+|\eta|)$ d'où

$$\forall N, \quad \exists C_N, \quad \forall p \geqq 0, \quad \forall \xi \in C_p, \qquad |\mathrm{II}(\xi, 2^p)| \leqq C_N 2^{-pN} \|v\|_\mu. \tag{11}$$

Or on a $\sum_{p=0}^{\infty} 2^{2p\mu} \|\hat{v}\|^2_{L^2(D_p)} = \mathrm{Cte} \|v\|^2_\mu$, d'où (ii).

LEMME 2. — *Soit* $g(x) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ *et supposons donnée pour tout* $\lambda \geqq 1$ *une décomposition* $g(x) = g_1(x, \lambda) + g_2(x, \lambda)$, $g_i \in \lambda \mathscr{D}'$ *avec* $(x_0, t\xi_0) \notin \lambda \mathrm{WF}(g_1)$ *pour tout* $t > 0$, $|\xi_0| = 1$, *et* $|g_2|_\mu < \infty$. *Alors* $g \in H^\mu_{(x_0, \xi_0)}$ *(espace de Sobolev microlocal).*

Preuve. — D'après la preuve du lemme 1, si f, V_0, φ vérifient (2) il en est de même de f, V'_0, $\psi\varphi$ pour $\psi(x) \in C^\infty$ et $V'_0 \subset\subset V_0$. Il existe donc W voisinage du segment $[\xi_0, 2\xi_0]$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tels que $\int_{\lambda W} |\widehat{\varphi g_1}(\xi, \lambda)|^2 d\xi \in \mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$, d'où

$$\int_{\Gamma_p} |\widehat{\varphi g}(\xi)|^2 d\xi \leqq 2 \int_{2^p W} |\widehat{\varphi g_1}(\xi, 2^p)|^2 d\xi + 2 \int_{C'_p} |\widehat{\varphi g_2}(\xi, 2^p)|^2 d\xi \tag{12}$$

où $\Gamma_p = 2^p W \cap C'_p$, $C'_p = \{2^p \leqq |\xi| < 2^{p+1}\}$.

Comme pour $\xi \in C'_p$, $\eta \notin C_p$ on a $|\xi-\eta| \geqq \mathrm{Cte}(|\eta|+2^p)$, $|g_2|_\mu < \infty$ entraîne $\sum_p 2^{2p\mu} \int_{C'_p} |\widehat{\varphi g_2}(\xi, 2^p)|^2 d\xi < \infty$, d'où $\sum_p 2^{2p\mu} \int_{\Gamma_p} |\widehat{\varphi g}(\xi)|^2 d\xi < \infty$, donc $g \in H^\mu_{(x_0, \xi_0)}$.

THÉORÈME 2. — *Soit* $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s = (d/2) + \rho$, $\rho > 0$ *à valeurs réelles et* $F \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Alors* $\forall N \geqq 1$, $\forall \mu \in [(d/2) + N\rho, (d/2) + (N+1)\rho[$ *on a*

$$\mathrm{WF}^\mu(F(u)) \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{WF}^\mu(u^j) \tag{13}$$

où WF^μ *est le front d'onde Sobolev usuel d'indice* μ.

Preuve. — Soit $\sigma = (d/2) + \gamma$, $0 < \gamma < \rho$ et $\delta \in]0, 1[$. On pose $\nu = s - \sigma = \rho - \gamma$. Le résultat étant de nature locale, on peut supposer u à support compact en x. Pour tout $\lambda \in [1, \infty[$ on décompose u sous la forme

$$u(x) = u_1(x, \lambda) + u_2(x, \lambda); \qquad u_1(x, \lambda) = (2\pi)^{-d} \int_{|\xi| \leqq \lambda^\delta} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi)\, d\xi. \tag{14}$$

On a alors

$$\forall \alpha, \quad \exists C_\alpha, \quad \forall \lambda, \qquad \|\lambda^{-|\alpha|\delta} \partial_x^\alpha u_1\|_s \leqq C_\alpha \tag{15}$$

et si G est une fonction C^∞, $\varphi G(u_1)$ vérifie des estimations analogues pour $\varphi \in C_0^\infty$ car $s > d/2$. De plus, on a :

$$\|u_2\|_\sigma \leqq \mathrm{Cte}\, \lambda^{-\nu\delta}. \tag{16}$$

En écrivant la formule de Taylor pour F on a

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(u)=f_1(x,\lambda)+f_2(x,\lambda)\\ &f_1(x,\lambda)=\sum_{j\leqq \mathrm{N}}\frac{\mathrm{F}^{(j)}(u_1)}{j!}u_2^j=\sum_{j\leqq \mathrm{N}}\mathrm{G}_j(u_1)\,u^j\\ &f_2(x,\lambda)=\frac{u_2^{\mathrm{N}+1}}{\mathrm{N}!}\int_0^1 \mathrm{F}^{(\mathrm{N}+1)}(u_1+tu_2)(1-t)^{\mathrm{N}}\,dt\end{aligned}\right.$$

où les G_j sont C^∞.

Soit $\varphi(x)\in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $g_1=\varphi f_1$, $g_2=\varphi f_2$. On a

$$(18)\quad \exists\, \mathrm{C}_{\mathrm{N}},\quad \forall\lambda,\qquad \|g_2(.,\lambda)\|_\sigma\leqq \mathrm{C}_{\mathrm{N}}\lambda^{-\nu\delta(\mathrm{N}+1)}$$

donc

$$(19)\quad a_p(g_2)\leqq \mathrm{C}'_{\mathrm{N}}\,2^{-p[\sigma+\nu\delta(\mathrm{N}+1)]}$$

d'où $|g_2|_\mu<\infty$ pour $\mu<\sigma+\nu\delta(\mathrm{N}+1)$.

Si $u^j\in \mathrm{H}^\mu_{(x_0,\xi_0)}$ pour $j=1,\ldots,\mathrm{N}$ on a d'après le lemme 1, (15) et (17), $g_1=g_1'+g_1''$ avec $(x_0,t\xi_0)\notin\lambda\,\mathrm{WF}(g_1')$ pour tout $t>0$ et $|g_1''|_\mu<\infty$. D'après le lemme 2 et $\varphi\,\mathrm{F}(u)=g_1'+(g_1''+g_2)$ on a alors $\varphi\,\mathrm{F}(u)\in \mathrm{H}^\mu_{(x_0,\xi_0)}$ pour $\mu<\sigma+\nu\delta(\mathrm{N}+1)$ d'où le résultat en faisant tendre σ vers $d/2$ et δ vers 1.

LEMME 3. — *Soit* $u(x,y,\lambda)\in\lambda\mathscr{D}'$ *à support compact en* $(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^m$ *et* $v(x,\lambda)=\int u(x,y,\lambda)\,dy$. *On a* $v\in\lambda\mathscr{D}'$ *et :*

$$(20)\quad \lambda\,\mathrm{WF}(v)\subset\{(x,\xi);\ \exists\, y:(x,y,\xi,0)\in\lambda\,\mathrm{WF}(u)\}.$$

Preuve. — On a $\hat v(\xi,\lambda)=\hat u(\xi,0,\lambda)$ donc $v\in\lambda\mathscr{D}'$.

Soit (x_0,ξ_0) tel, que pour tout y, on ait $(x_0,y,\xi_0,0)\notin\lambda\,\mathrm{WF}(u)$. Il existe alors $\varphi(x)\in \mathrm{C}_0^\infty$ égal à 1 près de x_0 et V voisinage de $(\xi_0,0)$ tel que

$$(21)\quad \int_{\lambda \mathrm{V}}|\widehat{\varphi u}(\xi,\eta,\lambda)|^2\,d\xi\,d\eta\in\mathscr{O}(\lambda^{-\infty}).$$

Si $\psi(y)\in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 au voisinage du support de u on a :

$$(22)\quad \widehat{\varphi v}(\xi,\lambda)=\int\hat\psi(-\eta)\,\widehat{\varphi u}(\xi,\eta,\lambda)\,d\eta.$$

On peut supposer $\mathrm{V}=\mathrm{V}_0\times\{|\eta|\leqq\varepsilon_0\}$ où V_0 est un voisinage compact de ξ_0. On a alors :

$$(23)\quad 1_{\xi\in\lambda \mathrm{V}_0}\widehat{\varphi v}(\xi,\lambda)=\int_{|\eta|\leqq\lambda\varepsilon_0}\hat\psi(-\eta)\,1_{\xi\in\lambda \mathrm{V}_0}\widehat{\varphi u}(\xi,\eta,\lambda)\,d\eta+\int_{|\eta|\geqq\lambda\varepsilon_0}\ldots=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

Comme $\hat{\psi}$ est à décroissance rapide, et V_0 compact on a $|\mathrm{II}(\xi, \lambda)| \in \mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$ et par Cauchy-Schwarz

$$|\mathrm{I}(\xi, \lambda)| \leqq 1_{\xi \in \lambda V_0} \left(\int_{|\eta| \leqq \lambda \varepsilon_0} |\widehat{\varphi u}(\xi, \eta, \lambda)|^2 \, d\eta \right)^{1/2} \|\psi\|_{L^2},$$

d'où le résultat d'après (23).

2. Algèbres

Dans ce paragraphe, on aura $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, et on posera $z=(t, x)$, $\zeta=(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^{1+d}$. On notera W l'algèbre de Wiener des fonctions dont la transformée de Fourier appartient à L^1.

Définition 1. — Pour $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ on définit $A^{\sigma, \alpha}$ comme sous-espace de $L^2(\mathbb{R}^{1+d})$ par

$$A^{\sigma, \alpha} = \left\{ u \in L^2;\ (1+|\xi|)^\sigma \int (1+|\xi|+|\tau|)^\alpha |\hat{u}(\xi, \tau)| \, d\tau \in L^2(\mathbb{R}^d_\xi) \right\} \tag{1}$$

et pour $u \in A^{\sigma, \alpha}$, on pose :

$$\|u\|_{\sigma, \alpha} = \left\| (1+|\xi|)^\sigma \int (1+|\xi|+|\tau|)^\alpha |\hat{u}(\xi, \tau)| \, d\tau \right\|_{L^2}. \tag{2}$$

Pour $\nu \in [0, \alpha]$, on a $A^{\sigma, \alpha} \subset A^{\sigma+\nu, \alpha-\nu}$ et $C_0^\infty \subset A^{\sigma, \alpha}$.

On remarquera qu'on a $A^{\sigma, 0} \subset L^\infty(\mathbb{R}_t, H^\sigma(\mathbb{R}^d_x))$ et plus généralement $A^{\sigma, k} \subset \mathrm{Lip}_k(\mathbb{R}_t, H^\sigma(\mathbb{R}^d_x))$.

Lemme 1. — *Pour* $\sigma+\alpha > (d/2)$, $A^{\sigma, \alpha}$ *est une algèbre. Plus précisément, on a* $A^{\sigma, \alpha} \,.\, A^{\sigma, \alpha} \subset A^{\sigma, \alpha}$ *avec injection continue, et* $A^{\sigma, \alpha} \subset W$.

Preuve. — On a $A^{\sigma, \alpha} \subset A^{\sigma+\alpha, 0}$ et puisque $\sigma+\alpha > (d/2)$

$$\int |\hat{u}(\xi, \tau)| \, d\xi \, d\tau = \int (1+|\xi|)^{-(\sigma+\alpha)} \left[(1+|\xi|)^{\sigma+\alpha} \int |\hat{u}(\xi, \tau)| \, d\tau \right] d\xi < \infty$$

donc $A^{\sigma, \alpha} \subset W$, avec injection continue.

Pour u, $v \in A^{\sigma, \alpha}$, on a donc u, $v \in L^2 \cap L^\infty$, $uv \in L^2$ et

$$\widehat{uv}(\xi, \tau) = \int \hat{u}(\xi-\xi', \tau-\tau') \hat{v}(\xi', \tau') \, d\xi' \, d\tau',$$

donc

$$(3)\qquad (1+|\xi|+|\tau|)^{\alpha}|\widehat{uv}(\xi,\tau)|\leqq \mathrm{Cte}(|\hat u|*|\hat v|_{\alpha}+|\hat u|_{\alpha}*|\hat v|)$$

avec $|\hat u|_{\alpha}=(1+|\xi|+|\tau|)^{\alpha}|\hat u|$. On a

$$(4)\qquad \left(\int |\hat u|*|\hat v|_{\alpha}\,d\tau\right)(\xi)\leqq \int\left\{\int |\hat u(\xi-\xi',\tau)|\,d\tau\,.\int (1+|\xi'|+|\tau|)^{\alpha}|\hat v(\xi',\tau)|\,d\tau\right\}d\xi=a*b$$

avec $a(\xi)=\int |\hat u(\xi,\tau)|\,d\tau$, $b(\xi)=\int (1+|\xi|+|\tau|)^{\alpha}|\hat v(\xi,\tau)|\,d\tau$. On a $(1+|\xi|)^{\sigma}b\in \mathrm{L}^2$ et $(1+|\xi|)^{\sigma+\alpha}a\in\mathrm{L}^2$, donc $a\in\mathrm{L}^1$ car $\sigma+\alpha>(d/2)$ donc

$$(5)\qquad \|(1+|\xi|)^{\sigma}(a*b)\|_{\mathrm{L}^2}\leqq \mathrm{Cte}[\|((1+|\xi|)^{\sigma}a)*b\|_{\mathrm{L}^2}+\|a*((1+|\xi|)^{\sigma}b)\|_{\mathrm{L}^2}].$$

On a $\|a*((1+|\xi|)^{\sigma}b)\|_{\mathrm{L}^2}\leqq \mathrm{Cte}\|u\|_{\sigma,\alpha}\|v\|_{\sigma,\alpha}$. Enfin $(1+|\xi|)^{\sigma}a*b$ est de la forme $c*b$ avec $(1+|\xi|)^{\sigma}b=b'\in\mathrm{L}^2$, $\|b'\|_{\mathrm{L}^2}\leqq \mathrm{Cte}\|v\|_{\sigma,\alpha}$ et $(1+|\xi|)^{\alpha}c=c'\in\mathrm{L}^2$, $\|c'\|_{\mathrm{L}^2}\leqq\mathrm{Cte}\|u\|_{\sigma,\alpha}$, d'où

$$(6)\qquad (c*b)(\xi)=\int \frac{c'(\xi-\xi')}{(1+|\xi-\xi'|)^{\alpha}}\cdot\frac{b'(\xi')}{(1+|\xi'|)^{\sigma}}\,d\xi'.$$

Or

$$\frac{1}{(1+|\xi-\xi'|)^{\alpha}}\,\frac{1}{(1+|\xi'|)^{\sigma}}\leqq \mathrm{Cte}\left[\frac{1}{(1+|\xi'|)^{\sigma+\alpha}}+\frac{1}{(1+|\xi-\xi'|)^{\sigma+\alpha}}\right]$$

donc $\|c*b\|_{\mathrm{L}^2}\leqq\mathrm{Cte}\|c'\|_{\mathrm{L}^2}\|b'\|_{\mathrm{L}^2}$, d'où le résultat.

LEMME 2. — *On a* $\mathrm{A}^{0,\alpha}\subset \mathrm{H}^{\alpha}_{\mathrm{loc}}$ (*injection continue*).

Preuve. — Soit $\varphi(t)\in \mathrm{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$, $u\in\mathrm{A}^{0,\alpha}$, $v=\varphi u$. Il suffit de prouver qu'on a :

$$(7)\qquad \mathrm{I}=\int (1+|\xi|+|\tau|)^{2\alpha}|\hat v(\xi,\tau)|^2\,d\tau\leqq \mathrm{Cte}\left(\int (1+|\xi|+|\tau|)^{\alpha}|\hat u(\xi,\tau)|\,d\tau\right)^2.$$

Or

$$\mathrm{I}\leqq \int (1+|\xi|+|\tau|)^{2\alpha}|\hat u(\xi,\theta)|\,.\,|\hat u(\xi,\theta')|\,.\,|\hat\varphi(\tau-\theta)|\,.\,|\hat\varphi(\tau-\theta')|\,d\theta\,d\theta'\,d\tau$$

et

$$\mathrm{J}=\int (1+|\xi|+|\tau|)^{2\alpha}|\hat\varphi(\tau-\theta)|\,.\,|\hat\varphi(\tau-\theta')|\,d\tau$$

vérifie $J \leqq \mathrm{Cte}(1+|\xi|+|\theta|)^\alpha(1+|\xi|+|\theta'|)^\alpha$ puisque $J \leqq J_1+J_2+J_3$ avec $J_1=\int_{|\tau-\theta|\geqq\varepsilon|\tau|}$, $J_2=\int_{|\tau-\theta'|\geqq\varepsilon\tau}$, $J_3=\int_{\substack{|\tau-\theta|\leqq\varepsilon|\tau|\\|\tau-\theta'|\leqq\varepsilon|\tau|}}$ et on a

$$J_1 \leqq \mathrm{Cte}_N \int (1+|\xi|+|\tau|)^{2\alpha} \frac{d\tau}{(1+|\tau|)^N} \leqq \mathrm{Cte}(1+|\xi|)^{2\alpha}$$

et sur le domaine d'intégration de J_3, on a $|\tau| \leqq |\theta|+|\tau-\theta| \leqq |\theta|+\varepsilon|\tau|$ donc $|\tau| \leqq (1/(1-\varepsilon)) \inf(|\theta|, |\theta'|)$ d'où il résulte

$$J_3 \leqq \mathrm{Cte}(1+|\xi|+\inf(|\theta|, |\theta'|))^{2\alpha} \leqq \mathrm{Cte}(1+|\xi|+|\theta|)^\alpha(1+|\xi|+|\theta'|)^\alpha \tag{8}$$

d'où le lemme.

DÉFINITION 2

(i) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{1+d}$. On définit l'espace vectoriel $A(\sigma, \alpha, \Omega)$, $\sigma \geqq 0$, $\alpha > 0$ par

$$A(\sigma, \alpha, \Omega)=\{u \in L^2_{\mathrm{loc}};\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall \alpha' \in [0, \alpha[,\ \varphi u \in A^{\sigma, \alpha'}\}. \tag{9}$$

(ii) Si $u(z, \lambda)$ est une famille dépendant d'un paramètre $\lambda \in [1, \infty[$ et $g(\lambda)$ une fonction positive de λ, on écrit $u \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha}(g)$ ssi

$$\left\{\begin{array}{c} \forall \lambda, \quad u \in A(\sigma, \alpha, \Omega) \\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall \alpha' \in [0, \alpha[, \quad \exists\, \mathrm{Cte}(\alpha', \varphi), \\ \forall \lambda \, \|\varphi u\|_{\sigma, \alpha'} \leqq C(\alpha', \varphi) g(\lambda). \end{array}\right. \tag{10}$$

LEMME 3. — *Soient* $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, $\delta \in]0, 1[$, $u(z, \lambda) \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha_1}(1)$. *Pour tout* $\lambda \geqq 1$, *il existe une décomposition*

$$u(z, \lambda)=u_1(z, \lambda)+u_2(z, \lambda), \qquad u_j \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha_1}(1) \tag{11}$$

avec

$$\forall \beta, \quad \partial^\beta u_1 \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha_1}(\lambda^{\delta|\beta|}) \tag{12}$$

$$u_2 \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha_2}(\lambda^{-\delta(\alpha_1-\alpha_2)}). \tag{13}$$

Si u est à valeurs réelles, on peut choisir u_j *à valeurs réelles.*

Preuve. — Soit $\{\varphi_j\}$ une partition de l'unité localement finie sur Ω, $u=\sum u_j$, $u_j=\varphi_j u$ et $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi_j \equiv 1$ sur le support de φ_j, la famille des supports des ψ_j étant localement finie. On pose alors

$$\left\{\begin{array}{l} u_{j,1}(z, \lambda)=\psi_j(z)(2\pi)^{-(1+d)} \int e^{iz\zeta} \hat{u}_j(\zeta, \lambda) 1_{|\zeta| \leqq \lambda^\delta} d\zeta \\ u_{j,2}(z, \lambda)=\psi_j(z)(2\pi)^{-(1+d)} \int e^{iz\zeta} \hat{u}_j(\zeta, \lambda) 1_{|\zeta| \geqq \lambda^\delta} d\zeta \end{array}\right. \tag{14}$$

et $u_1(z, \lambda)=\sum u_{j,1}(z, \lambda)$, $u_2(z, \lambda)=\sum u_{j,2}(z, \lambda)$ convient.

LEMME 4. — *On suppose* $\alpha>0$ *et* $\sigma+\alpha>(d/2)$.

(i) *Soient* $u_1(z, \lambda), \ldots, u_N(z, \lambda)\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(1)$ *à valeurs réelles et* $F\in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. *Alors* $F(u_1, \ldots, u_N)\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(1)$.

(ii) *Si* $v_j(z, \lambda)\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(g_j(\lambda))$ *alors* $\prod_j v_j\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(\prod_j g_j)$.

Preuve. — Tout d'abord (ii) est conséquence de la preuve du lemme 1. Comme $u_j\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(1)$, on a d'après le lemme 1, $u_j\in L^\infty_{\mathrm{loc}}$ uniformément en λ et on peut supposer les u_j et F à support compact. On a alors $F(a)=(2\pi)^{-N}\int e^{ia\theta}\hat{F}(\theta)\,d\theta$.

On choisit $\delta\in]0, 1[$ et $\varepsilon\in]0, \alpha[$. On pose alors

$$u_j=u_{j,1}+u_{j,2}, \qquad u_{j,2}=(2\pi)^{-(1+d)}\int e^{iz\zeta}\hat{u}(\zeta, \lambda)\,1_{|\zeta|\geqq\lambda_j^\delta}\,d\zeta\,.\,\psi(z) \tag{15}$$

où $\lambda_j=(1+|\theta_j|)^g$ avec $g\delta\varepsilon\geqq 1$, $\psi\in C_0^\infty$, $\psi=1$ sur le support de u_j. On a donc

$$u_{j,2}\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha-\varepsilon}(\lambda_j^{-\delta\varepsilon}) \tag{16}$$

$$\partial^\beta u_{j,1}\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(\lambda_j^{\delta|\beta|}). \tag{17}$$

On considère donc ici λ comme paramètre uniforme les λ_j étant les paramètres asymptotiques. On écrit $e^{iu\theta}=\prod_j e^{iu_j\theta_j}=\prod_j e^{iu_{j,1}\cdot\theta_k}\prod_j e^{iu_{j,2}\cdot\theta_j}$. On a $u_{j,2}\,.\,\theta_j\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha-\varepsilon}(1)$ donc aussi $e^{iu_{j,2}\cdot\theta_j}=\sum_k (i^k/k!)(u_{j,2}\,.\,\theta_j)^k$, car d'après la preuve du lemme 1, pour $u, v\in A^{\sigma,\beta}\ \|uv\|_{\sigma,\beta}\leqq \mathrm{Cte}_{\sigma,\beta}\|u\|_{\sigma,\beta}\|v\|_{\sigma,\beta}$. De plus, on a :

$$\Big\|\partial^\beta\prod_j e^{iu_{j,1}\cdot\theta_j}\Big\|_{L^\infty}\leqq \mathrm{Cte}_\beta(1+|\theta|)^{|\beta|+g\delta|\beta|}. \tag{18}$$

Comme $C_0^k\subset A_{\sigma,\beta}$ pour $k\geqq k(\sigma, \beta)$ avec injection continue, on déduit de (18)

$$\prod_j e^{iu_{j,1}\cdot\theta_j}\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(P(|\theta|)) \tag{19}$$

où P est polynôme (dont le degré dépend de ε).

Comme $\hat{F}(\theta)$ est à décroissance rapide, on a donc

$$F(u)=(2\pi)^{-N}\int\prod_j e^{iu_{j,1}\cdot\theta_j}\prod_j e^{iu_{j,2}\cdot\theta_j}\hat{F}(\theta)\,d\theta\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha-\varepsilon}(1) \tag{20}$$

pour tout $\varepsilon>0$ donc $F(u)\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(1)$.

LEMME 5. — *Soit* $Q(z, D_z)$ *un o.p.d classique de degré* $-m$ *sur* $\Omega\,(m\geqq 0)$ *et* $u\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(1)$. *Pour tout* $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ *on a*

$$Q(\varphi u)\in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha+m}(1). \tag{21}$$

Preuve. — Soit $q(z, \zeta)$ le symbole de Q, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Si le support de ψ est contenu dans le cube $[-(R/4), +(R/4)]^{1+d} = K$, et $\tilde{\psi} \in C_0^\infty$ vaut 1 au voisinage de K, on a

$$(22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \psi(z)\, q(z, \zeta) = \tilde{\psi}(z) \sum_k e^{2i\pi k \cdot z/R} q_k(\zeta) \\ \text{avec} \\ |q_k(\zeta)| \leqq \dfrac{C_N}{(1+|\zeta|)^m} (1+|k|)^{-N} \end{array} \right.$$

et il suffit d'écrire :

$$(23) \qquad \psi\, Q(\varphi u) = \sum_k \tilde{\psi}(z)\, e^{2i\pi k \cdot z/R} q_k(D)(\varphi u).$$

DÉFINITION 3.

Soit $u(x, \lambda)$ une distribution sur Ω, dépendant de $\lambda \in [1, \infty[$, $s \in \mathbb{R}$ et $g(\lambda)$ une fonction positive. On écrira $u \in \mathcal{O}_s(g)$ ssi

$$(24) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \forall s' < s, \quad \exists C_{\varphi, s'} \qquad \|\varphi u\|_{H^{s'}} \leqq C_{\varphi, s'}\, g(\lambda).$$

(ii) Pour $u \in \mathcal{O}_s(g)$ et $\rho = (z, \zeta) \in T^*\Omega \setminus \Omega$, on écrira $u \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha}(\rho, g)$ ssi il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, égal à 1 près de z, et Q o.p.d elliptique en ρ de degré 0 tels que $Q[\varphi u] \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha}(g)$.

LEMME 6. — *Soit* $P(z, D_z)$ *un opérateur différentiel de degré m elliptique en* $\rho \in T^*\Omega \setminus \Omega$, *et* $u(x, \lambda) \in \mathcal{O}_s(1)$ *vérifiant* $P u = v \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha}(\rho, 1)$. *Alors* $u \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha+m}(\rho, 1)$.

Preuve. — Soit Q un o.p.d elliptique en ρ de degré $-m$ tel que $QP = \mathrm{Id} + R$, où $\rho \notin SE(R)$. Si $\rho = (z, \zeta)$ et $\varphi \in C_0^\infty$ vaut 1 près de z on a $Q\varphi P = Q[\varphi, P] + \varphi + R\varphi$ donc $Q\varphi v = Q[\varphi, P] u + \varphi u + R\varphi u$. Si SE(Q) est concentré près de ρ on a $Q\varphi v \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha+m}(1)$ d'après le lemme 5 car si T est régularisant, $T\varphi v \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha+m}(1)$ car $\varphi v \in \mathcal{O}_{s-m}(1)$. Enfin, si Q' est un o.p.d à support assez près de ρ, elliptique en ρ, l'opérateur $Q'[R\varphi + Q[\varphi, P]]$ est régularisant, d'où le résultat.

3. Équations d'ondes

Dans ce paragraphe on note $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$ l'opérateur des ondes et on désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t$ qui est un domaine de détermination pour $\omega = \Omega \cap t = 0$. Si $f(x, t)$ est une fonction sur Ω on note $\mathrm{tr}_{t_0}(f) = (f(x, t_0), (\partial f/\partial t)(x, t_0))$ et $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}_0(f)$. On conserve les notations et définitions du paragraphe 2. En particulier, $h(x, \lambda) \in \mathcal{O}_s(m(\lambda))$ signifie :

$$(1) \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty, \quad \forall s' < s, \quad \exists C_{\varphi, s'}, \quad \forall \lambda, \qquad \|\varphi(x)\, h(x, \lambda)\|_{H^{s'}} \leqq C_{\varphi, s'} \cdot m(\lambda).$$

On fixe $s > d/2$.

LEMME 1. — *Soit* $f(x, t, \lambda)$ *solution de* $\square f=0$, *avec* $\operatorname{tr}(f)=(f_0, f_1)$, $f_0 \in \mathcal{O}_{s+1}(m(\lambda))$, $f_1 \in \mathcal{O}_s(m(\lambda))$. *Alors* $f \in \mathcal{O}_{0, s+1}(m(\lambda))$.

Preuve. — Par vitesse finie de propagation, on peut supposer f_0 et f_1 à supports compacts dans ω. Alors on a

$$\hat{f}(t, \xi, \lambda)=\hat{f}_0(\xi, \lambda) \cos t|\xi|+\hat{f}_1(\xi, \lambda) \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|}. \tag{2}$$

Si $\varphi(t) \in C_0^\infty$, on doit estimer pour $\alpha<s+1$

(i) $$=\left\| \int |\hat{\varphi}(\tau \pm |\xi|) \hat{f}_0(\xi, \lambda)|(1+|\xi|+|\tau|)^\alpha d\tau \right\|_{L^2(\xi)}$$

(ii) $$=\left\| \int \frac{|\hat{\varphi}(\tau+|\xi|)-\hat{\varphi}(\tau-|\xi|)|}{|\xi|} |\hat{f}_1(\xi, \lambda)|(1+|\xi|+|\tau|)^\alpha d\tau \right\|_{L^2(\xi)}.$$

Pour (i) on remarque que $\int |\hat{\varphi}(\tau \pm |\xi|)|(1+|\xi|+|\tau|)^\alpha d\tau \leqq \mathrm{Cte}(1+|\xi|)^\alpha$.

Pour (ii) on écrit $\hat{\varphi}(\tau+|\xi|)-\hat{\varphi}(\tau-|\xi|)/|\xi|=\int_{-1}^{+1} \hat{\varphi}'(\tau+s|\xi|)\, ds$ et on coupe l'intégrale en deux morceaux : $|\xi| \geqq 1$, $|\xi| \leqq 1$, d'où

$$\text{(3) (ii)} \quad \leqq 1_{|\xi| \leqq 1} |\hat{f}_1(\xi, \lambda)| \int_{-1}^{+1} ds \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}'(\tau+s|\xi|)|\, d\tau + \mathrm{Cte} \frac{|\hat{f}_1(\xi, \lambda)|}{|\xi|} 1_{|\xi| \geqq 1}(1+|\xi|)^\alpha$$

d'où le résultat.

LEMME 2. — *Soit* $u(x, t, \lambda) \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha}(m(\lambda))$, $\alpha>1$ *et* $\sigma+\alpha=s+1$. *Alors avec* $\operatorname{tr}(u)=(u_0, u_1)$ *on a* $u_j \in \mathcal{O}_{s+1-j}(m(\lambda))$.

Preuve. — On peut toujours supposer u à support compact. On a :

$$\hat{u}_0(\xi)=\mathrm{Cte} \int \hat{u}(\tau, \xi)\, d\tau \qquad \text{et} \qquad u \in \mathcal{O}_{\sigma+\alpha, 0}(m(\lambda))$$

$$\hat{u}_1(\xi)=\mathrm{Cte} \int \tau \hat{u}(\tau, \xi)\, d\tau \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha-1}(m(\lambda)) \subset \mathcal{O}_{\sigma+\alpha-1, 0}(m(\lambda)).$$

LEMME 3. — *Soit* $b=b(x, t) \in L^\infty(\Omega) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t; H^{s'})$ *pour tout* $s'<s$, *à support dans* $t \geqq 0$. *Si* $f=f(x, t)$ *est la solution à support dans* $t \geqq 0$ *de* $\square f=b$ *on a* $f \in A(\sigma, \alpha, \Omega)$ *pour* $\sigma+\alpha=s+1$ *et* $\alpha \leqq 3/2$. *Si b dépend de plus de* λ *et* $b \in \mathcal{O}_s(m(\lambda))$ *uniformément en t, alors* $f \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha}(m(\lambda))$.

Preuve. — On peut supposer $b=b(x,t,\lambda)$ à support compact. Si $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\widehat{\psi f}(\tau,\xi,\lambda)=\int_0^\infty e^{-it\tau}\psi(t)\left\{\int_0^t \frac{\sin(t-t')|\xi|}{|\xi|}\hat{b}(t',\xi,\lambda)\,dt'\right\}dt. \tag{4}$$

Donc avec $\theta(t',\tau)=e^{it'\tau}\int_{t'}^\infty e^{-it\tau}\psi(t)\,dt$ et

$$M(\xi,t')=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\theta(t',\tau-|\xi|)-\theta(t',\tau+|\xi|)|}{|\xi|}\,d\tau$$

on obtient :

$$\int|\widehat{\psi f}(\tau,\xi,\lambda)|\,d\tau \leqq \mathrm{Cte}\int_0^\infty |\hat{b}(t',\xi)|\,M(\xi,t')\,dt'. \tag{5}$$

Si $|\xi|\leqq 1$, on a

$$\frac{\theta(t',\tau-|\xi|)-\theta(t',\tau+|\xi|)}{|\xi|}=\int_{-1}^{+1}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}(t',\tau+s|\xi|)\,ds$$

et $\theta(t',\tau)$ est un symbole en τ de degré -1, donc $\partial\theta/\partial\tau\in\mathcal{O}(|\tau|^{-2})$ et $M(\xi,t')$ est borné pour $|\xi|\leqq 1$. Pour $|\xi|\geqq 1$, on a

$$\int|\theta(t',\tau-|\xi|)-\theta(t',\tau+|\xi|)|\,d\tau\leqq \mathrm{Cte}\,\mathrm{Log}(2+|\xi|) \tag{6}$$

d'où $M(\xi,t')\leqq(\mathrm{Cte}/(1+|\xi|))\log(2+|\xi|)$ et puisque $b\in\mathcal{O}_s(m(\lambda))$ uniformément en t, on a d'après (5)

$$f\in\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(\rho,m(\lambda)) \tag{7}$$

pour $\sigma+\alpha=s+1$ en tout point $\rho=(x,t,\tau,\xi)$ avec $\xi\neq 0$. Pour $\nu<1$, en posant

$$M_\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau\,\tau^\nu\frac{|\theta(t',\tau-|\xi|)-\theta(t',\tau+|\xi|)|}{|\xi|} \tag{8}$$

on a $M_\nu\leqq\mathrm{Cte}(1+|\xi|)^{\nu-1}\,\mathrm{Log}(2+|\xi|)$, d'où également :

$$f\in\mathcal{O}_{s,1}(m(\lambda)). \tag{9}$$

Comme $\square\,\psi f=\psi b+[\square,\psi]f=g$ et qu'on a

$$\left\|(1+|\xi|)^{s'}\int\frac{1}{(1+|\tau|)^\beta}|\widehat{\psi b}(\tau,\xi,\lambda)|\,d\tau\right\|_{L^2(\xi)}\leqq \mathrm{Cte}_{s'}\,.\,m(\lambda)\qquad\text{pour}\quad s'<s,\quad \beta>\frac{1}{2} \tag{10}$$

puisque $\psi b \in L^2(\mathbb{R}_t, H^{s'})$ on a aussi d'après (9)

$$\left\| (1+|\xi|)^{s'} \int \frac{1}{(1+|\tau|)^{\beta}} |\hat{g}(\tau, \xi, \lambda)| \, dr \right\|_{L^2(\xi)} \leqq \mathrm{Cte}_{s'} m(\lambda) \tag{11}$$

et $(\xi^2-\tau^2)\widehat{\psi f}=\hat{g}$ entraîne alors $f \in \mathcal{O}_{s, 3/2}(\rho, m(\lambda))$ aux points $\rho=(x, t, \tau, 0)$ d'où le lemme.

LEMME 4. — *Soient* $a(t, x, \lambda)$, $b(t, x, \lambda)$ *vérifiant* $\square a=b$, $b \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha-1}(m, (\lambda))$, $\alpha>1$, $\operatorname{tr}(a)=0$. *Alors* $a \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha}(m(\lambda))$.

Preuve. — On peut toujours supposer a et b à supports compacts. Pour tout $s'<\sigma+\alpha-1$, on a $\left\| (1+|\xi|)^{s'} \int |\hat{b}(\tau, \xi, \lambda)| \, d\tau \right\|_{L^2(\xi)} \leqq C_{s'} m(\lambda)$, donc $b \in L^{\infty}(\mathbb{R}_t, H^{s'})$. On peut donc appliquer le lemme 3 à $a=a\,1_{t \geqq 0}+a\,1_{t \leqq 0}$, puisque $\square(a\,1_{t \geqq 0})=b\,1_{t \geqq 0}$, donc $a \in \mathcal{O}_{\sigma', \alpha'}(m(\lambda))$ avec $\sigma'+\alpha'=\sigma+\alpha$, $\alpha' \leqq 3/2$. Puisque $\square a=b$, on a d'après le paragraphe 2, lemme 6, $a \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha+1}(\rho, m(\lambda))$ aux points ρ non caractéristiques pour $\square$ donc $a \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha}(m(\lambda))$.

LEMME 5. — *Soit* $s>d/2$ *et* $u(t, x)$ *une fonction sur* Ω *appartenant localement à l'espace* $C^1(\mathbb{R}_t, H^s) \cap C^0(\mathbb{R}_t, H^{s+1})$ *et vérifiant* $\square u+F(t, x, u, \nabla u)=0$. *Alors on a :*

$$u \in A(0, s+1, \Omega). \tag{12}$$

Preuve. — On a $u=v+w$ avec

$$\square v=0,$$

$$\operatorname{tr}(v)=\operatorname{tr}(u) \qquad \text{et} \qquad \square w=-F(t, x, u, \nabla u) \in C^0(\mathbb{R}_t, H^s), \quad \operatorname{tr}(w)=0.$$

En appliquant le lemme 1 à v et le lemme 3 à w, on obtient $v \in A(0, s+1, \Omega)$ et $w \in A(s-(1/2), 3/2, \Omega)$ donc $u \in A(s-(1/2), 3/2, \Omega)$ et $\nabla u \in A(s-(1/2), 1/2, \Omega)$. D'après le paragraphe 2, lemme 4, on a $F(t, x, u, \nabla u) \in A(s-(1/2), 1/2, \Omega)$, donc d'après le paragraphe 2, lemme 6, $u \in \mathcal{O}_{s-1/2, 5/2}(\rho, 1)$ aux points ρ non caractéristiques et comme $u \in A(s-(1/2), 3/2, \Omega)$, il en résulte $u \in A(s-(3/2), 5/2, \Omega)$ donc $F(t, x, u, \nabla u) \in A(s-(3/2), 3/2, \Omega)$. On a $s+1=(1/2)+k+\theta$, $\theta \in [0, 1[$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 1$. En itérant le procédé précédent on obtient $u \in A(\theta, (1/2)+k)$, $F(t, x, u, \nabla u) \in A(\theta, k-(1/2))$ donc $u \in \mathcal{O}_{\theta, k+3/2}(\rho, 1)$ aux points non caractéristiques d'où finalement comme $s+1<k+(3/2)$, $\theta \geqq 0$, $u \in A(0, s+1, \Omega)$.

LEMME 6. — *Soit* $q_t(t, x, \lambda)$, $q_x(t, x, \lambda)=(q_{x_1}(t, x, \lambda), \ldots, q_{x_d}(t, x, \lambda))$, $q_0(t, x, \lambda)$, $d+2$ *fonctions appartenant à* $\mathcal{O}_{\sigma, \alpha-1}(1)$, $\alpha>1$, $\sigma+\alpha>(d/2)+1$. *Soit* $\square_{\mathscr{L}}$ *l'opérateur*

$$\square_{\mathscr{L}}=\square+q_t \partial_t+q_x \cdot \partial_x+q_0. \tag{13}$$

Soit $g(t, x, \lambda) \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha-1}(m(\lambda))$, $f_0(x, \lambda) \in \mathcal{O}_{\sigma+\alpha}(m(\lambda))$, $f_1(x, \lambda) \in \mathcal{O}_{\sigma+\alpha-1}(m(\lambda))$. *Alors l'équation*

$$\square_{\mathscr{L}} f=g; \qquad \operatorname{tr}(f)=(f_0, f_1) \tag{14}$$

possède une unique solution $f \in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(m(\lambda))$.

Preuve. — D'abord les coefficients $q_{\bullet}$ appartiennent uniformément en λ à l'espace $C^0(\mathbb{R}_t, H^{s'})$ pour tout $s'<\sigma+\alpha-1$ et $\sigma+\alpha-1>(d/2)$. Si $\mathscr{L}=q_t\partial_t+q_x\partial_x+q_0$, on construit la solution f en temps petit comme limite dans l'espace $E=C^0([-T, T], H^{s'+1})\cap C^1([-T, T], H^{s'})$, T petit, de la suite f^n, $n\geqq 0$, $f^0\equiv 0$,

$$\Box f^{n+1}+\mathscr{L} f^n=g, \qquad \operatorname{Tr}(f^n)=(f_0, f_1) \tag{15}$$

puisque $g\in C^0(\mathbb{R}_t, H^{s'})$, $f_0\in H^{s'+1}$, $f_1\in H^{s'}$. On a alors

$$f=f^1+\sum_{n=1}^{\infty}(f^{n+1}-f^n) \tag{16}$$

avec $\Box f^1=g$, $\operatorname{tr}(f^1)=(f_0, f_1)$ donc $f^1\in\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(m(\lambda))$ et on a

$$\|f^{n+1}-f^n\|_E\leqq C_{s'}\, m(\lambda)\,(C_0 T)^n$$

et l'intervalle d'existence $[-T, T]$ est indépendant de L. L'équation étant linéaire et par vitesse finie de propagation, on a donc l'existence et l'unicité de f sur Ω, appartenant localement à l'espace $C^0(\mathbb{R}_t, H^{s'+1})\cap C^1(\mathbb{R}_t, H^{s'})$. En recopiant la preuve du lemme 5, en utilisant cette fois le paragraphe 2, lemme 4, (ii), on obtient $f\in\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(m(\lambda))$.

LEMME 7. — *On conserve les notations du lemme* 6 *et on suppose de plus* $m(\lambda)\equiv 1$ *et pour un* $\delta\in]0, 1[$, *et pour tout* β

$$\partial^\beta q_{\bullet}\in\mathcal{O}_{\sigma,\alpha-1}(\lambda^{\delta|\beta|}), \qquad \partial^\beta f_i\in\mathcal{O}_{\sigma+\alpha-j}(\lambda^{\delta|\beta|}), \qquad \partial^\beta g\in\mathcal{O}_{\sigma,\alpha-1}(\lambda^{\delta|\beta|}). \tag{17}$$

Alors on a :

$$\partial^\beta f\in\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(\lambda^{\delta|\beta|}). \tag{18}$$

Preuve. — Par le lemme 6, on a $f\in\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(1)$. Soit ∂_x^β une dérivée espace, $|\beta|=k+1$, $k\geqq 0$. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} \Box_{\mathscr{L}}\partial_x^\beta f=\partial_x^\beta g+\displaystyle\sum_{\substack{|\gamma_1|+|\gamma_2|=|\beta|\\ |\gamma_1|\geqq 1}}(*)\,\partial_x^{\gamma_1}q_{\bullet}\,\partial_x^{\gamma_2}(f, \nabla f),\ \nabla=(\partial_t, \partial_x)\\ \operatorname{Tr}(\partial_x^\beta f)=\partial_x^\beta\operatorname{tr}(f). \end{array}\right. \tag{19}$$

Par récurrence, on a $\partial_x^{\gamma_2}f\in\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(\lambda^{\delta|\gamma_2|})$ pour $|\gamma_2|\leqq k$ donc $\partial_x^{\gamma_2}(f, \nabla f)\in\mathcal{O}_{\sigma,\alpha-1}(\lambda^{\delta|\gamma_2|})$ donc en appliquant le lemme 6 on obtient $\partial_x^\beta f\in\mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(\lambda^{\delta|\beta|})$.

Soit $f_j(x, \lambda)=\partial_t^j f|_{t=0}$. Pour contrôler toutes les dérivées par le même argument, il suffit de prouver qu'on a :

$$(1)\quad \partial^\beta f_j\in\mathcal{O}_{\sigma+\alpha}(\lambda^{\delta|\beta|+\delta j}), \qquad (2)\quad \partial^\beta f_{j+1}\in\mathcal{O}_{\sigma+\alpha-1}(\lambda^{|\beta|+\delta j}). \tag{20}$$

Or (2) $\Rightarrow$ (1) pour $j\geqq 1$ car

$$\|\partial^\beta f_j\|_{\sigma+\alpha}\leqq \mathrm{Cte}\Big[\|\partial^\beta f_j\|_{\sigma+\alpha-1}+\sum_{|\gamma|=|\beta|+1}\|\partial^\gamma f_j\|_{\sigma+\alpha-1}\Big]. \tag{21}$$

On a $\partial_x^\beta \partial_t^l g \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha-1} \lambda^{\delta|\beta|+\delta l})$ et $\alpha > 1$ donc (*voir* lemme 2) $\partial_x^\beta \partial_t^l g|_{t=0} \in \mathcal{O}_{\sigma+\alpha-1}(\lambda^{\delta l+\delta|\beta|})$ et on obtient alors (2) par récurrence sur j en dérivant la relation $\partial_t^2 f = \Delta f + q_x \partial_x f + q_t \partial_t f + q_0 f + g$, et en utilisant $\partial^\beta \Delta f_0 \in \mathcal{O}_{\sigma+\alpha-1}(\lambda^{\delta|\beta|+\delta})$.

4. Paramétrix

Dans ce paragraphe, on conserve les notations du paragraphe 3. On fixe $\sigma \geqq 0$, $\alpha > 1$ tels que $\sigma + \alpha > (d/2) + 1$, et $d+2$ fonctions appartenant à $\mathcal{O}_{\sigma, \alpha-1}(1)$: $q_t(z, \lambda)$, $q_x(z, \lambda) = (q_{x_1}(z, \lambda), \ldots, q_{x_d}(z, \lambda))$, $q_0(z, \lambda)$, $z = (t, x) \in \Omega$. On pose

(1) $$\mathscr{L} = q_t \partial_t + q_x \cdot \partial_x + q_0; \qquad \Box_{\mathscr{L}} = \Box + \mathscr{L}$$

et on suppose que les coefficients $q_.$ de l'opérateur $\mathscr{L}$ vérifient, pour un $\delta' \in]0, 1/3[$:

(10) $$\forall \beta, \quad \partial^\beta q_. \in \mathcal{O}_{\sigma, \alpha-1}(\lambda^{\delta'|\beta|}).$$

On s'intéresse à écrire le développement de Hadamard de la paramétrix de l'opérateur strictement hyperbolique du second ordre dépendant de $\lambda \geqq 1$ $\Box_{\mathscr{L}}$.

Définition 1. — Soit $f(z_1, z_2, \lambda)$ une fonction de $(z_1, z_2) \in W \subset \mathbb{R}^{2(1+d)}$, $\sigma_1 \geqq 0$, $\alpha_1 > 0$ et $g(\lambda)$ une fonction positive de $\lambda \geqq 1$. On écrira

(3) $$f \in \widetilde{\mathcal{O}}_{\sigma_1, \alpha_1}(g(\lambda))$$

ssi pour tout $\varphi \in C_0^\infty(W)$, tout $\alpha_1' < \alpha_1$ et tout β, il existe C tel que pour tout λ on ait

(4) $$\sup_{z_2} \left\| (1+|\xi_1|)^{\sigma_1} \int (1+|\xi_1|+|\tau_1|)^{\alpha_1'} |\partial_{z_2}^\beta \widehat{\varphi f}(\xi_1, \tau_1; z_2, \lambda)| \, d\tau_1 \right\|_{L^2(\xi_1)} \leqq C \lambda^{\delta'|\beta|} g(\lambda)$$

(ici $\hat{}$ est la transformée de Fourier partielle en z_1).

On remarquera que cette définition signifie que z_2 est considéré comme paramètre C^∞ et qu'on a $\partial_{z_2}^\beta f \in \mathcal{O}_{\sigma_1, \alpha_1}(\lambda^{\delta'|\beta|} g(\lambda))$ uniformément en z_2, pour tout β.

En particulier on a, d'après le paragraphe 2, lemme 4 :

Lemme 1. — *Si* $F \in C^\infty$, $\sigma_1 + \alpha_1 > d/2$ et $f \in \widetilde{\mathcal{O}}_{\sigma_1, \alpha_1}(1)$ *alors* $F(f) \in \widetilde{\mathcal{O}}_{\sigma_1, \alpha_1}(1)$; *si de plus* $h \in \widetilde{\mathcal{O}}_{\sigma_1, \alpha_1}(g(\lambda))$ *alors* $f \cdot h \in \widetilde{\mathcal{O}}_{\sigma_1, \alpha_1}(g(\lambda))$.

Lemme 2. — *Si* $f \in \widetilde{\mathcal{O}}_{\sigma_1, \alpha_1}(g(\lambda))$, *alors* $h(z, \lambda) = f(z, z, \lambda)$ *vérifie* $h \in \mathcal{O}_{\sigma_1, \alpha_1}(\lambda^{\delta' M} g(\lambda))$ *pour tout entier* $M > \sigma_1 + \alpha_1 + 1 + d$ (*aux points z où h a un sens*).

Preuve. — On peut supposer f à support compact. On a alors

(5) $$\hat{h}(\zeta, \lambda) = (2\pi)^{-(1+d)} \int \hat{f}(\zeta - \zeta_2, \zeta_2, \lambda) \, d\zeta_2 \qquad (\zeta = (\tau, \xi))$$

et d'après (4) [ici $\hat{}$ = Fourier (z_1, z_2)]

$$\left\| (1+|\xi_1|)^{\sigma_1} \int |\hat{f}(\zeta_1, \zeta_2, \lambda)| (1+|\zeta_1|)^{\alpha'_1} d\tau_1 \right\|_{L^2(\xi_1)} \leqq \frac{C_M \lambda^{\delta' M} g(\lambda)}{(1+|\zeta_2|)^M} \tag{6}$$

d'où, puisqu'on a $\sigma \geqq 0$ et qu'on peut supposer $\alpha'_1 > 0$

$$\left\| (1+|\xi|)^{\sigma_1} \int |\hat{f}(\zeta-\zeta_2, \zeta_2, \lambda)| (1+|\zeta|)^{\alpha'_1} d\tau \right\|_{L^2(\xi)} \leqq \frac{C_M \lambda^{\delta' M} g(\lambda)}{(1+|\zeta_2|)^{M-(\sigma_1+\alpha'_1)}} \tag{7}$$

et le lemme est conséquence de (5) et (7).

Fixons z_1 et notons $e(z_1, z_2, \lambda)$ la solution à support dans le cône d'avenir de sommet $z_2=0$ de l'équation

$$\Box_{\mathscr{L}} \tilde{e}(z_1\, z, \lambda) = \delta_{z=z_1}; \qquad e(z_1, z_2, \lambda) = \tilde{e}(z_1, z_1+z_2, \lambda). \tag{8}$$

Soit $e_j(z)$, $j \geqq -1$ les distributions définies par

$$e_{-1} = \delta_{z=0}, \qquad \Box\, e_{j+1} = e_j \quad (j \geqq -1), \qquad \text{support } (e_j) \subset t \geqq 0. \tag{9}$$

On cherche alors un développement asymptotique de e de la forme :

$$e(z_1, z_2, \lambda) \simeq \sum_{j \geqq 0} a_j(z_1, z_2, \lambda)\, e_j(z_2). \tag{10}$$

LEMME 3. — *Avec* $C_0 = 1/2$, $C_j = C_{j-1}/(1+2C_{j-1})$ $(j \geqq 1)$ *on a :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t e_{j+1} = C_j\, t\, e_j, \quad \partial_{x_k} e_{j+1} = -C_j\, x_k\, e_j & (j \geqq 0) \\ \partial_t e_0 = t\mathrm{H}, \quad \partial_{x_k} e_0 = -x_k \mathrm{H} & (\hat{\mathrm{H}} = \mathrm{Cte}\, \mathrm{Log}\, ((\tau - i\,0)^2 - \xi^2)). \end{array} \right. \tag{11}$$

Preuve. – On a $\hat{e}_0 = [(\tau - i\,0)^2 - \xi^2]^{-1}$ donc $\partial_\tau \hat{\mathrm{H}} = 2\tau\, \mathrm{Cte}\, \hat{e}_0$ et $\partial_{\xi_k} \hat{\mathrm{H}} = -2\xi_k C^k \hat{e}_0$ d'où les deuxièmes relations de (11). Pour $j=0$, par les conditions de support on a :

$$\partial_t e_1 = \frac{t}{2} e_0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t \Box\, e_1 = \frac{1}{2}\left[t\, \Box\, e_0 + 2\frac{\partial e_0}{\partial t} \right] \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t e_0 = \partial_t e_0$$

$$\partial_{x_k} e_1 = -\frac{x_k}{2} e_0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{x_k} \Box\, e_1 = \frac{1}{2}[-x_k\, \Box\, e_0 + 2\,\partial_{x_k} e_0] \quad \Leftrightarrow \quad \partial_{x_k} e_0 = \partial_{x_k} e_0.$$

Ensuite par récurrence on a $\Box\, \partial_t e_{j+1} = \partial_t e_j = C_{j-1}\, t\, e_{j-1}$ et

$$\Box\, C_j\, t\, e_j = C_j [t\, \Box\, e_j + 2\,\partial_t e_j] = C_j [t\, e_{j-1} + 2\, C_{j-1}\, t\, e_{j-1}] = C_{j-1}\, t\, e_{j-1},$$

ainsi que

$$\Box\, \partial_{x_k} e_{j+1} = \partial_{x_k} e_j = -C_{j-1}\, x_k\, e_{j-1}$$

et

$$\square(-C_j x_k e_j) = C_j[-x_k \square e_j + 2\,\partial_{x_k} e_j] = C_j[-x_k e_{j-1} - 2\,C_{j-1} x_k e_{j-1}].$$

En écrivant l'équation (8) pour le développement (10) et en utilisant les relations (11), on obtient le système d'équations de transport sur les coefficients a_j suivant

$$2z\,.\,\partial_z a_0 + (t\,q_t - x\,q_x)\,a_0 = 0, \qquad a_0(z_1, 0, \lambda) = 1 \tag{12}$$

$$2\,C_j z\,.\,\partial_z(a_{j+1}) + (C_j(t\,q_t - x\,q_x) + 1)\,a_{j+1} = -\square\, a_j - [q_t\partial_t + q_x\partial_x + q_0]\,a_j \tag{13}$$

où $q_{\bullet} = q_{\bullet}(z_1 + z, \lambda)$ et $z_2 = z = (t, x)$.

Par intégration de (12), on obtient

$$a_0(z_1, z, \lambda) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 (t\,q_t - x\,q_x)(z_1 + zv, \lambda)\,dv\right\}. \tag{14}$$

D'après (2) et le lemme 1, on a donc :

$$a_0(z_1, z_2, \lambda) \in \widetilde{\mathcal{O}}_{\sigma,\alpha-1}(1). \tag{15}$$

De plus, si $g(0) = C > 0$ l'équation

$$z\,.\,\partial_z f + gf = r \tag{16}$$

a pour solution

$$f(z) = \int_0^1 r(zv)\exp\left\{-\int_v^1 z\,\theta(zw)\,dw\right\} v^{C}\frac{dv}{v} \tag{17}$$

avec $z\,\theta(zw) + (C/w) = g(zw)/w$. En écrivant la solution a_{j+1} de (13) sous la forme (17) [on a alors $C = 1/2\,C_j$, $z\,\theta(zw) = (1/2)(t\,q_t - x\,q_x)(z_1 + zw, \lambda)$] on obtient

$$a_j(z_1, z_2, \lambda) \in \widetilde{\mathcal{O}}_{\sigma,\alpha-1}(\lambda^{2\delta' j}), \qquad \forall j \geqq 0. \tag{18}$$

On pose à présent $\tilde{e}(z_1, z, \lambda) = \tilde{e}^+(z_1, z, \lambda)$, $e_j = e_j^+$ et $e^+(z_1, z_2, \lambda) = e(z_1, z_2, \lambda)$. On définit de même $\tilde{e}^-(z, z, \lambda)$ et $e^-(z_1, z_2, \lambda)$ par

$$\square_{\mathcal{L}}\,\tilde{e}^-(z_1, z, \lambda) = \delta_{z=z_1}; \qquad e^-(z_1, z_2, \lambda) = \tilde{e}^-(z_1, z_1 + z_2, \lambda) \tag{19}$$

avec la condition support $e^- \subset t_2 \leqq 0\,(z_2 = (t_2, x_2))$. Si $e_j^-(z)$ est défini par $e_{-1}^- = \delta_{z=0}$, $\square\, e_{j+1}^- = e_j^-$ $(j \geqq -1)$, support $(e_j^-) \subset t \leqq 0$ on a toujours le développement asymptotique

$$e^-(z_1, z_2, \lambda) \simeq \sum_{j \geqq 0} a_j(z_1, z_2, \lambda)\,e_j^-(z_2) \tag{20}$$

car les e_j^- vérifient toujours les équations (11), avec $H = H^-$, $\hat{H}^- = \mathrm{Cte\,Log}\,((\tau + i0)^2 - \xi^2)$ et les équations de transport (12) et (13) restent inchangées.

Pour tout entier $N \geqq 1$, on pose alors :

$$E_N^{\pm}(z, z_1, \lambda) = \sum_{j=0}^{N} a_j(z_1, z-z_1, \lambda)\, e_j^{\pm}(z-z_1). \tag{21}$$

On a :

$$\square_{\mathscr{L}} E_N^{\pm}(z, z_1, \lambda) = (\square_{\mathscr{L}} a_N(z_1, z-z_1, \lambda))\, e_N^{\pm}(z-z_1) + \delta_{z=z_1}. \tag{22}$$

Pour $h(z, \lambda) \in \mathscr{O}_{\sigma, \alpha-1}(1)$ on pose :

$$\left\{\begin{array}{l} K_N^{\pm}(h)(z, \lambda) = \int E_N^{\pm}(z, z_1, \lambda)\, 1_{\pm t_1 \geqq 0}\, h(z_1, \lambda)\, dz_1 \\ \qquad K_N^1(h) = K_N^+(h) + K_N^-(h). \end{array}\right. \tag{23}$$

On a support $K_N^{\pm}(h) \subset \{\pm t \geqq 0\}$.

LEMME 4. — *Pour tout* $\alpha' < \alpha$, $K_N^{\pm}(h)$ *appartient localement à l'espace* $C^1(\mathbb{R}_t, H^{\sigma+\sigma'-1})$.

Preuve. — Par construction, les fonctions $a_j(z_1, z-z_1, \lambda)$ sont C^∞ en (z, z_1). On a

$$\int e_j^+(z-z_1)\, a_j(z_1, z-z_1, \lambda)\, 1_{t_1 \geqq 0}\, h(z_1, \lambda)\, dz_1 = F(z, z_2, \lambda)\big|_{z_2=z} \tag{24}$$

avec

$$F = \int e_j^+(z-z_1)\, f(z_1, z_2, \lambda)\, dz_1; \qquad f = a_j(z_1, z_2-z_1, \lambda)\, 1_{t_1 \geqq 0}\, h(z_1, \lambda) \tag{25}$$

donc $\partial_{z_2}^{\beta} f$ est localement uniformément en z_2 dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_{t_1}, H^{s'})$ pour tout $s' < \sigma + \alpha - 1$ et tout β et $\square(\square^j \partial_{z_2}^{\beta} F) = \partial_{z_2}^{\beta} f$, support $(\partial_{z_2}^{\beta} F) \subset \{t \geqq 0\}$. D'après le paragraphe 3, lemme 3, on a $\square^j \partial_{z_2}^{\beta} F \in C^1(\mathbb{R}_t, H^{s'})$ donc (itération sur j) $\partial_{z_2}^{\beta} F \in C_1(\mathbb{R}_t, H^{s'})$ pour tout β, d'où $F(z, z_2, \lambda)\big|_{z_2=z} \in C^1(\mathbb{R}_t, H^{s'})$, d'où le lemme.

DÉFINITION 2. — On note $\square_{\mathscr{L}}^{-1} h$ la solution du problème de Cauchy

$$\square_{\mathscr{L}}(\square_{\mathscr{L}}^{-1} h) = h; \qquad \operatorname{tr}(\square_{\mathscr{L}}^{-1} h) = 0. \tag{26}$$

D'après le paragraphe 3, le lemme 6, si $h \in \mathscr{O}_{\sigma, \alpha-1}(m(\lambda))$ on a $\square_{\mathscr{L}}^{-1} h \in \mathscr{O}_{\sigma, \alpha}(m(\lambda))$. Posons pour $h \in \mathscr{O}_{\sigma, \alpha-1}(1)$

$$\square_{\mathscr{L}}^{-1} h = K_N^1(h) + K_N^2(h). \tag{27}$$

D'après le lemme 4, on a $\operatorname{tr} K_N^1(h) = 0$, donc

$$\square_{\mathscr{L}} K_N^2(h) = -R_N(h); \qquad \operatorname{tr} K_N^2(h) = 0 \tag{28}$$

$$R_N(h) = \int ((\square + \mathscr{L})_z\, a_N(z_1, z-z_1, \lambda))\, (e_N^+(z-z_1)\, h_+(z_1) + e_N^-(z-z_1)\, h_-(z_1))\, dz_1 \tag{29}$$

avec $h_{\pm}=\pm 1_{t \geqq 0} h$.

On a $R_N(h)(z, \lambda)=G(z, z_2, \lambda)|_{z_2=z}$ avec

$$G=\int e_N^+(z-z_1)\theta^+ + e_N^-(z-z_1)\theta^- \, dz_1 \tag{30}$$

$$\theta(z_1, z_2, \lambda)=h(z_1)[(\Box+\mathscr{L})_{z_2} a_N(z_1, z_2-z_1, \lambda)]; \qquad \theta^{\pm}=\pm 1_{t_1 \geqq 0}.\theta. \tag{31}$$

Il en résulte :

$$\Box_z^{N+1} G(z, z_2, \lambda)=\theta(z, z_2, \lambda); \qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^j G|_{t=0}=0 \quad j \leqq (2N+1). \tag{32}$$

LEMME 5. — *Soit* M_0 *entier*, $M_0>\sigma+\alpha+d$. *On a :*

$$b(z_1, z_2, \lambda)=a_N(z_1, z_2-z_1, \lambda) \in \widetilde{\mathscr{O}}_{\sigma, \alpha-1}(\lambda^{2\delta' N+\delta' M_0}).$$

Preuve. — On a $b(z_1, z_2, \lambda)=a_N(z_1, z_2-z_3, \lambda)|_{z_3=z_1}$ et on utilise (18) et le lemme 2 (la dépendance supplémentaire en z_2 étant sans importance).

Par le paragraphe 3, lemme 4, (32) entraîne alors

$$G \in \widetilde{\mathscr{O}}_{\sigma, \alpha+N}(\lambda^{2\delta'(N+1)+\delta' M_0}) \tag{33}$$

donc par le lemme 2

$$R_N(h) \in \mathscr{O}_{\sigma, \alpha+N}(\lambda^{3\delta'(N+1)+2\delta' M_0}). \tag{34}$$

Choisissons alors un $\nu \in]3\delta', 1[$ et appliquons la construction du paragraphe 2, lemme 3, aux fonctions $R_N(h)\lambda^{-3\delta'(N+1)-2\delta' M_0}$, avec $\delta=\nu$. On décompose ainsi l'opérateur R_N en somme de deux termes

$$R_N=R_N^3+R_N^4 \tag{35}$$

qui vérifient pour $h \in \mathscr{O}_{\sigma, \alpha-1}(1)$

$$\forall \beta, \quad \partial^\beta R_N^3(h) \in \mathscr{O}_{\sigma, \alpha-1}(\lambda^{3\delta'(N+1)+2\delta' M_0+\nu|\beta|}) \tag{36}$$

$$R_N^4(h) \in \mathscr{O}_{\sigma, \alpha-1}(\lambda^{-(\nu-3\delta')(N+1)+2\delta' M_0}). \tag{37}$$

Si on définit $K_N^{3,4}$ par

$$\Box_{\mathscr{L}} K_N^{3,4}(h)=-R_N^{3,4}(h) \quad \operatorname{Tr} K_N^{3,4}(h)=0 \tag{38}$$

on a alors d'après le paragraphe 3, lemmes 6 et 7

$$K_N^4(h) \in \mathscr{O}_{\sigma, \alpha}(\lambda^{-(\nu-3\delta')(N+1)+2\delta' M_0}) \tag{39}$$

$$\forall \beta, \quad \partial^\beta K_N^3(h) \in \mathscr{O}_{\sigma, \alpha}(\lambda^{3\delta'(N+1)+2\delta' M_0+\nu|\beta|}). \tag{40}$$

On choisit alors N assez grand pour assurer $K_N^4(h) \in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(1)$ et on pose :

(41) $$M^1(h) = K_N^1(h) + K_N^3(h); \qquad M^2(h) = K_N^4(h).$$

On a alors pour $h \in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha-1}(1)$

(42) $$\square_{\mathscr{L}}^{-1} h = M^1(h) + M^2(h)$$

et puisque $\square_{\mathscr{L}}^{-1}(h) \in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(1)$, et $M^2(h) \in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(1)$

(43) $$M^1(h) \in \mathcal{O}_{\sigma,\alpha}(1).$$

En particulier, on toujours localement

(44) $$M^i(h) \in C^1(\mathbb{R}_t, H^{s'}), \qquad \forall s' < \sigma + \alpha - 1, \quad i = 1, 2.$$

5. Preuve du théorème 1

Soit u solution de (1). D'après le paragraphe 3, lemme 5, on a $u \in A(0, s+1, \Omega)$. On fixe $\rho \in]0, \rho_0[$ (voisin de ρ_0), $\delta \in]0, 1[$ (voisin de 1), et on pose $\alpha_0 = s+1 = (d/2) + \rho_0 + 1$, $\alpha = (d/2) + (\rho_0 - \rho) + 1 > (d/2) + 1$. Dans cette partie, on aura $\sigma = 0$ et on notera $\mathcal{O}_{0,\beta} = \mathcal{O}_\beta$. En utilisant le paragraphe 2, lemme 3 avec $\alpha_1 = \alpha_0$, $\alpha_2 = \alpha$, on décompose $u(z)$ sous la forme

(1) $$u(z) = u_1(z, \lambda) + u_2(z, \lambda); \qquad u_i \in \mathcal{O}_{\alpha_0}(1)$$

(2) $$\forall \beta, \quad \partial^\beta u_1 \in \mathcal{O}_{\alpha_0}(\lambda^{\delta|\beta|})$$

(3) $$u_2 \in \mathcal{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho}); \qquad \nabla u_2 \in \mathcal{O}_{\alpha-1}(\lambda^{-\delta\rho}).$$

En écrivant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $N \geqq 3$, on a

(4) $$F(t, x, u_1 + u_2, \nabla u_1 + \nabla u_2) = F(t, x, u_1, \nabla u_1) - \mathscr{L}(u_2) + \mathscr{N}(u_2) + R_N$$

(5) $$-\mathscr{L}(u_2) = \sum_{|\gamma|=1} \partial^\gamma F(t, x, u_1, \nabla u_1)(u_2, \nabla u_2)^\gamma$$

(6) $$\mathscr{N}(u_2) = \sum_{2 \leqq |\gamma| < N} \frac{1}{\gamma!} \partial^\gamma F(t, x, u_1, \nabla u_1)(u_2, \nabla u_2)^\gamma$$

(7) $$R_N = \sum_{|\gamma|=N} (u_2, \nabla u_2)^\gamma \int_0^1 G_\gamma(t, x, \sigma, u_1 + \sigma(u_2 - u_1), \nabla(u_1 + \sigma(u_2 - u_1)) \, d\sigma.$$

Comme $\alpha - 1 > (d/2)$, d'après (2) et (3) on a :

(8) $$R_N \in \mathcal{O}_{\alpha-1}(\lambda^{-\delta\rho N}).$$

Les coefficients $c = \partial^\gamma F(t, x, u_1, \nabla u_1)$ des opérateurs $\mathscr{L}$ et $\mathscr{N}$ vérifient :

(9) $$\forall \beta, \quad \partial^\beta c \in \mathcal{O}_{\alpha_0 - 1}(\lambda^{\delta|\beta|}).$$

Comme dans le paragraphe 4, on notera $\square_{\mathscr{L}}$ l'opérateur $\square+\mathscr{L}$. On a :

(10) $$\square_{\mathscr{L}} u_2=\mathrm{F}(t, x, u_1, \nabla u_1)-\square u_1+\mathscr{N}(u_2)+\mathrm{R}_{\mathrm{N}}.$$

On écrit alors u_2 sous la forme

(11) $$u_2=u_0+f; \qquad \square_{\mathscr{L}} u_0=0; \qquad \mathrm{Tr}(u_0)=\mathrm{Tr}(u_2); \qquad \mathrm{Tr}(f)=0.$$

D'après (3) et paragraphe 3, lemmes 2 et 6 on a

(12) $$u_0 \in \mathscr{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho})$$

donc aussi $u_2-u_0=f\in\mathscr{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho})$ par (3) et (12) et avec les notations du paragraphe 4 (définition 2), on a

(13) $$f=b_0+\square_{\mathscr{L}}^{-1}\mathscr{N}(u_0+f)+\square_{\mathscr{L}}^{-1}\mathrm{R}_{\mathrm{N}}$$

avec $b_0=\square_{\mathscr{L}}^{-1}(\mathrm{F}(t, x, u_1, \nabla u_1)-\square u_1)$.

LEMME 1. — *La fonction* b_0 vérifie :

(14) $$\forall \beta, \quad \partial^\beta b_0 \in \mathscr{O}_{\alpha_0}(\lambda^{\delta|\beta|}).$$

Preuve. – Pour $\square_{\mathscr{L}}^{-1}(\mathrm{F}(t, x, u_1, \nabla u_1))$ cela résulte du paragraphe 3, lemme 7.

Soit $h=\square_{\mathscr{L}}^{-1}(\square u_1)$; on a $\square_{\mathscr{L}} h=\square u_1$, $\mathrm{tr}(h)=0$. Si $w=u_1-h$, on a $\square_{\mathscr{L}} w=\mathscr{L}(u_1)$, $\mathrm{tr}(w)=\mathrm{tr}(u_1)$. D'après (2) et *loc. cit.*, w vérifie (14), donc aussi h.

De plus, comme $b_0=f-\square_{\mathscr{L}}^{-1}\mathscr{N}(u_2)-\square_{\mathscr{L}}^{-1}\mathrm{R}_{\mathrm{N}}$, d'après le paragraphe 3, lemme 6, (3), (6) et (8) on a aussi :

(15) $$b_0 \in \mathscr{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho}).$$

Soit à présent D un diagramme, $\mathrm{I}=\mathrm{I}_1\cup\ldots\cup\mathrm{I}_{\mathrm{L}}$ la partition de son ensemble d'indice, θ son application. Pour $i\in\mathrm{J}=\{j\in\mathrm{I};\ \theta^{-1}(j)=\varnothing\}$, on se donne une fonction $\mathrm{S}_i(z, \lambda)$ de la forme

(16) $$\mathrm{S}_i=c\prod_{j=1}^{d_i}\partial^{\beta_j}(u_0, b_0); \qquad \forall j, \quad |\beta_j|\leqq 1; \qquad d_i\geqq 0$$

où $c(z, \lambda)$ vérifie (9) et $\partial^{\beta_j}(u_0, b_0)=\partial^{\beta_j}u_0$ ou $\beta^{\beta_j}b_0$. On a $\mathrm{S}_i=c$ lorsque $d_i=0$. D'après (9), (12) et (15), on a :

(17) $$\mathrm{S}_i\in\mathscr{O}_{\alpha-1}(\lambda^{-\delta\rho\, d_i}).$$

On posera $\mathrm{S}=(\mathrm{S}_i)_{i\in\mathrm{J}}$. Enfin, pour tout $i\in\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}$, on se donne un $c_i(z, \lambda)$ vérifiant (9), un $(d+1)$-indice γ_i, $|\gamma_i|\leqq 1$, et on note $\gamma=(c_i, \gamma_i)_{i\in\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}}$.

DÉFINITION 1. — Avec les notations précédentes, on définit une fonction notée

(18) $$\int_{\mathrm{D}}(\square_{\mathscr{L}}^{-1}, \mathrm{S}, \Gamma)$$

de la manière suivante :

$$\text{(19)}\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{si } \mathrm{I}=\mathrm{I}_1\ (\mathrm{L}=1,\ \text{donc } \mathrm{J}=\mathrm{I})\ \text{on pose}\\ \displaystyle\int_{\mathrm{D}}(\square_{\mathscr{L}}^{-1},\ \mathrm{S},\ \Gamma)=\square_{\mathscr{L}}^{-1}\Big(\prod_{i\in \mathrm{I}_1}\mathrm{S}_i\Big).\end{array}\right.$$

Ensuite (18) est construit par récurrence sur L; si $\mathrm{L}>1$ on écrit

$$\mathrm{I}'_1=\{i\in \mathrm{I}_1\,;\ \theta^{-1}(i)\neq\varnothing\},\qquad \mathrm{I}_1=\mathrm{I}'_1\cup \mathrm{I}''_1\,;$$

pour $i\in \mathrm{I}'_1$, on note D^i le sous-diagramme de D dont l'ensemble d'indice est $\mathrm{I}^i=\{i\in \mathrm{I},\ j\overset{\theta}{\to} i\}$ [$j\overset{\theta}{\to} i$ signifie : $\exists p>0,\ \theta^p(j)=i$], et $\mathrm{S}^i=\{\mathrm{S}_j\}_{j\in \mathrm{I}^i}$ et on pose

$$\text{(20)}\qquad \int_{\mathrm{D}}(\square_{\mathscr{L}}^{-1},\ \mathrm{S},\ \Gamma)=\square_{\mathscr{L}}^{-1}\Big(\prod_{j\in \mathrm{I}''_1}\mathrm{S}_j\,.\prod_{i\in \mathrm{I}'_1}c_i\,\partial^{\gamma i}\int_{\mathrm{D}^i}(\square_{\mathscr{L}}^{-1},\ \mathrm{S}^i,\ \Gamma)\Big).$$

D'après (17) et le paragraphe 3, lemme 6, on a :

$$\text{(21)}\qquad \int_{\mathrm{D}}(\square_{\mathscr{L}}^{-1},\ \mathrm{S},\ \Gamma)\in \mathscr{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho\sum_{i\in \mathrm{J}}d_i}).$$

LEMME 2. — *Pour tout* $1\leqq \mathrm{M}<\mathrm{N}$, *il existe une famille finie de diagrammes* D^k, S^k *et* Γ^k, *telle que*

$$\text{(22)}\qquad f-b_0-\sum_k\int_{\mathrm{D}^k}(\square_{\mathscr{L}}^{-1},\ \mathrm{S}^k,\ \Gamma^k)\in \mathscr{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho(\mathrm{M}+1)})$$

avec

$$\text{(23)}\qquad \forall k,\quad \sum_{i\in \mathrm{J}^k}d_i^k\leqq \mathrm{M}.$$

Preuve. — On a $r_{\mathrm{N}}=\square_{\mathscr{L}}^{-1}\mathrm{R}_{\mathrm{N}}\in \mathscr{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho\mathrm{N}})$ d'après (8). Comme $\mathscr{N}(u_2)$ ne contient pas de termes linéaires en u_2 on a (22) avec $\mathrm{M}=1$ et une famille vide, d'après (3), (13). Par récurrence, supposons (22) au rang M, $\mathrm{M}+1<\mathrm{N}$ et reportons (22) dans (13). On obtient

$$\text{(24)}\qquad f=b_0+\square_{\mathscr{L}}^{-1}\mathscr{N}\Big[u_0+b_0+\sum_k\int_{\mathrm{D}^k}(\square_{\mathscr{L}}^{-1},\ \mathrm{S}^k,\ \Gamma^k)+r_{\mathrm{M}+1}\Big]+r_{\mathrm{N}}$$

avec $r_{\mathrm{M}+1}\in \mathscr{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho(\mathrm{M}+1)})$. On développe alors $\square_{\mathscr{L}}^{-1}\mathscr{N}[\dots]$ selon la formule (6); on a $f,\ u_0,\ b_0\in \mathscr{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho})$ et aussi $\sum_k\int_{\mathrm{D}^k}(\square_{\mathscr{L}}^{-1},\ \mathrm{S}^k,\ \Gamma^k)$ d'après (22). Comme $\mathscr{N}$ ne contient pas de terme linéaire, tout terme dans lequel apparaît $r_{\mathrm{M}+1}$ est $\mathscr{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho(\mathrm{M}+2)})$ dans le développement de $\square_{\mathscr{L}}^{-1}\mathscr{N}[\dots]$ donc est un reste pour (22) au rang $(\mathrm{M}+1)$. Le lemme est alors conséquence de la définition 1, puisqu'on peut toujours supposer (23) d'après (21).

Soit à présent v_0 solution de :

$$\Box_{\mathscr{L}} v_0 = 0, \qquad \operatorname{tr}(v_0) = \operatorname{tr}(u). \tag{25}$$

Si on pose $b_1 = v_0 - u_0$, on a donc $\Box_{\mathscr{L}} b_1 = 0$ et $\operatorname{tr}(b_1) = \operatorname{tr}(u) - \operatorname{tr}(u_2) = \operatorname{tr}(u_1)$ d'après (11), donc par (2) et le paragraphe 3, lemme 7

$$\forall \beta, \quad \partial^\beta b_1 \in \mathscr{O}_{\alpha_0}(\lambda^{\delta|\beta|}) \tag{26}$$

d'où en utilisant le lemme 1, (16) et $u_0 = v_0 - b_1$, on obtient le

LEMME 3. — *L'assertion du lemme* 2 *reste valable en remplaçant* S_i *défini par* (16) *par :*

$$S_i = c \prod_{j=1}^{d_i} \partial^{\beta_j} v_0; \qquad \forall j, \quad |\beta_j| \leqq 1; \qquad d_i \geqq 0; \qquad \sum_{i \in J^k} d_i^k \leqq M, \quad \forall k. \tag{27}$$

Preuve. — En effet puisque b_0, b_1 vérifient (26) on a pour $|\beta| \leqq 1$, $\forall \gamma$, $\partial^\gamma \partial^\beta b_{0,1} \in \mathscr{O}_{\alpha_0 - 1}(\lambda^{\delta|\gamma|})$ donc $\partial^\beta b_{0,1}$ vérifient (9) et en écrivant S_i sous la forme (16) comme combinaison linéaire de termes de type (27), on ne peut que diminuer d_i.

On choisit à présent $\delta' \in]0, 1/3[$, $\delta' < \delta$, et en utilisant la construction du paragraphe 2, lemme 3, on décompose les coefficients q de l'opérateur $\mathscr{L}$ sous la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} & q = q_1 - q_2 \\ & \partial^\beta q_{1,2} \in \mathscr{O}_{\alpha_0 - 1}(\lambda^{\delta|\beta|}) \\ & \partial^\beta q_1 \in \mathscr{O}_{\alpha_0 - 1}(\lambda^{\delta'|\beta|}) \\ & q_2 \in \mathscr{O}_{\alpha - 1}(\lambda^{-\delta'\rho}). \end{aligned} \right. \tag{28}$$

[On utilise le paragraphe 2, (14) avec la troncature $1_{|\zeta| \leqq \lambda^{\delta'}}$ pour définir q_1], et on pose :

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 - \mathscr{L}_2; \qquad \Box_{\mathscr{L}} = \Box_{\mathscr{L}_1} - \mathscr{L}_2. \tag{29}$$

Pour tout entier k, on a l'identité :

$$\Box_{\mathscr{L}}^{-1} = \sum_{j=0}^{k} \Box_{\mathscr{L}_1}^{-1} (\mathscr{L}_2 \Box_{\mathscr{L}_1}^{-1})^j + \Box_{\mathscr{L}_1}^{-1} (\mathscr{L}_2 \Box_{\mathscr{L}_1}^{-1})^k \mathscr{L}_2 \Box_{\mathscr{L}}^{-1}. \tag{30}$$

Les coefficients de $\mathscr{L}_2$ vérifient (9) et l'opérateur $\Box_{\mathscr{L}_1}^{-1} (\mathscr{L}_2 \Box_{\mathscr{L}_1}^{-1})^k \mathscr{L}_2 \Box_{\mathscr{L}}^{-1}$ est $\mathscr{O}(\lambda^{-\delta'\rho(1+k)})$ de $\mathscr{O}_{\alpha-1}(1)$ dans $\mathscr{O}_\alpha(1)$ d'après (28), de même $\Box_{\mathscr{L}_1}^{-1} (\mathscr{L}_2 \Box_{\mathscr{L}_1}^{-1})^j$ est $\mathscr{O}(\lambda^{-\delta'\rho j})$ de $\mathscr{O}_{\alpha-1}(1)$ dans $\mathscr{O}_\alpha(1)$; il en résulte, en choisissant k assez grand en fonction de δ/δ' et M, en reportant (30) dans (22).

LEMME 4. — *L'assertion du lemme* 3 *reste valable en remplaçant* $\Box_{\mathscr{L}}^{-1}$ *par* $\Box_{\mathscr{L}_1}^{-1}$ *et* v_0 *par* w_0 : $\Box_{\mathscr{L}_1} w_0 = 0$, $\operatorname{tr}(w_0) = \operatorname{tr}(u)$.

Preuve. — v_0, $w_0 \in \mathscr{O}_{\alpha_0}(1)$ et $v_0 = \sum_0^k (\Box_{\mathscr{L}_1}^{-1} \mathscr{L}_2)^j w_0 + (\Box_{\mathscr{L}_1}^{-1} \mathscr{L}_2)^k (v_0 - w_0)$.

On va à présent utiliser les résultats du paragraphe 4 appliqués à l'opérateur $\square_{\mathscr{L}_1}$. On notera ici N_1 l'entier N du paragraphe 4; on choisit ν, δ', δ tels que $\nu \in]3\delta', \delta[$. Pour $h \in \mathcal{O}_{\alpha-1}(1)$ on a d'après le paragraphe 4 (42), (43), (39), (41), (40)

$$\square_{\mathscr{L}_1}^{-1} h = M^1(h) + M^2(h); \qquad M^{1,2}(h) \in \mathcal{O}_\alpha(1) \tag{31}$$

$$M^2(h) \in \mathcal{O}_\alpha(\lambda^{-(\nu-3\delta')(N_1+1)+2\delta' M_0}) \tag{32}$$

$$M^1(h) = K_{N_1}^1(h) + K_{N_1}^3(h) \tag{33}$$

$$\forall \beta, \quad \partial^\beta K_{N_1}^3(h) \in \mathcal{O}_\alpha(\lambda^{\delta'(3N_1+3+2M_0)+\nu|\beta|}) \tag{34}$$

et l'entier N_1 sera choisi tel que :

$$(\nu - 3\delta')(N_1+1) > 2\delta' M_0 + \delta\rho N. \tag{35}$$

Soit $\tilde{w}_0$ la solution du problème de Cauchy

$$\square \tilde{w}_0 = 0, \qquad \operatorname{tr}(\tilde{w}_0) = \operatorname{tr}(u). \tag{36}$$

On a $\tilde{w}_0 \in \mathcal{O}_{\alpha_0}(1)$ et

$$w_0 = \tilde{w}_0 - \square_{\mathscr{L}_1}^{-1}(\mathscr{L}_1 \tilde{w}_0). \tag{37}$$

On peut donc, dans le lemme 4, remplacer $\tilde{w}_0$ par w_0.

On a $u = u_1 + u_2 = u_1 + u_0 + f = u_1 - b_1 + v_0 + f$, d'où

$$u = u_1 - b_1 + \sum_0^k (\square_{\mathscr{L}_1}^{-1} \mathscr{L}_2)^j w_0 + (\square_{\mathscr{L}_1}^{-1} \mathscr{L}_2)^k (v_0 - w_0) + f.$$

D'après le lemme 4, (2), (26), (28) et (37), on a donc :

Lemme 5. — *Il existe une famille finie de diagrammes* D^k, S^k *et* Γ^k *telle que*

$$u = b + \sum_k \int_{D^k} (\square_{\mathscr{L}_1}^{-1}, S^k, \Gamma^k) + r_N \tag{38}$$

avec b vérifiant (14), $r_N \in \mathcal{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho N})$, *pour tout* k, i $S_i^k = c \prod_{j=1}^{d_i^k} \partial^{\beta_j} \tilde{w}_0$, $|\beta_j| \leqq 1$, *c vérifiant* (9) *et pour tout* k, $\sum_{i \in J^k} d_i^k \leqq N - 1$.

Si D est un diagramme intervenant dans (38) tel que $\sum_{i \in J} d_i = 0$, alors $\int_D (\square_{\mathscr{L}_1}^{-1}, S, \Gamma)$ vérifie (14) d'après le paragraphe 3, lemme 7 et $\delta' < \delta$; si $|\gamma| \leqq 1$, $\partial^\gamma \int_D (\square_{\mathscr{L}_1}^{-1}, S, \Gamma)$, vérifie alors (9). En appliquant cela aux sous-diagrammes des diagrammes qui interviennent dans (38) et en utilisant la définition (20), on obtient

$$(39)\qquad \left\{\begin{array}{l}\text{dans (38), on peut supposer}\\ \text{pour tout } D^k, \text{ et tout } i\in J^k,\\ \qquad d_i^k \geqq 1.\end{array}\right.$$

D'après (31), (32) et (35), on a alors

$$(40)\qquad \text{on peut remplacer } \square_{\mathscr{L}_1}^{-1} \text{ par } M^1 \text{ dans (38).}$$

En utilisant (33), (34) et $\nu<\delta$ on obtient alors

LEMME 6. — *Il existe une famille finie* D^k, S^k, Γ^k *telle que*

$$(41)\qquad u=b+\sum_k \int_{D^k} (K_{N_1}^1, S^k, \Gamma^k)+r_N$$

avec $r_N\in\mathcal{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho N})$, $S_i^k=c\prod_{j=1}^{d_i^k}\partial^{\beta_j}\widetilde{w}_0$, $|\beta_j|\leqq 1$, $d_i^k\geqq 1$, $\sum_{i\in J^k} d_i^k\leqq N-1$, *les coefficients* b, c *vérifiant*

$$(42)\qquad \exists A,\quad \forall\beta,\qquad \partial^\beta b\in\mathcal{O}_\alpha(\lambda^{A+\delta|\beta|})$$

$$(43)\qquad \exists A,\quad \forall\beta,\quad \partial^\beta c\in\mathcal{O}_{\alpha-1}(\lambda^{A+\delta|\beta|}).$$

Comme $\delta>1$, *on a en particulier*

$$(44)\qquad \lambda\,\mathrm{WF}(b, c)\subset\{(x, \zeta);\ \zeta=0\}.$$

LEMME 7. — *Soit* D *un diagramme intervenant dans* (41). *On a :*

$$(45)\qquad 1_{t\geqq 0}\int_D (K_N^1, S, \Gamma)=\int_D (K_N^+, S_+, \Gamma)$$

avec $S_{+,i}=1_{t\geqq 0}S_i$ *pour* $i\in J$.

Preuve. — D'après le paragraphe 4, (23) et le lemme 4 on a $\mathrm{tr}(K_N^1(h))=0$, $1_{t\geqq 0}K_N^1(h)=K_N^+(h\,1_{t\geqq 0})$ et $1_{t\geqq 0}\partial^\gamma K_N^1(h)=\partial^\gamma 1_{t\geqq 0}K_N^1(h)$ pour $|\gamma|\leqq 1$ puisque $K_N^1(h)|_{t=0}=0$. Le lemme résulte donc de la définition de $\int_D (K_N^1, S, \Gamma)$.

Preuve du théorème 1. — Soit $\sigma\in[s+1+(N-2)\rho_0,\ (s+1)+(N-1)\rho_0[$ et $(z_0, \zeta_0)\in T^*\Omega\setminus\Omega$, $z_0=(t_0, x_0)$, $t_0>0$.

Comme $r_N\in\mathcal{O}_\alpha(\lambda^{-\delta\rho N})$, on a par le paragraphe 2, lemme 2

$$(46)\qquad \forall\alpha'<\alpha,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty,\quad \exists C_{\alpha',\varphi},\quad \forall\lambda,\qquad \|\varphi r_N\|_{H^{\alpha'}}\leqq C_{\alpha',\alpha}\lambda^{-\delta\rho N}$$

donc avec les notations du paragraphe 1, on a $|\varphi r_N|_\mu < \infty$ pour tout $\mu < \alpha + \delta\rho N = (d/2) + (\rho_0 - \rho) + 1 + \delta\rho N$. En choisissant δ proche de 1 et ρ proche de ρ_0, on obtient $|\varphi r_N|_\sigma < \infty$. D'après le paragraphe 1, lemme 2, (41), (44) et (45) on aura $u \in H^\sigma_{(z_0, \zeta_0)}$ si

$$(47) \qquad \forall a > 0, \quad \forall k, \qquad (z_0, a\zeta_0) \notin \lambda \operatorname{WF}\left(\int_{D^k} (K_N^+, S_+^k, \Gamma^k)\right)$$

D^k étant un diagramme intervenant dans (41).

Avec $z = (t, x)$, $w = (t', x')$, $\underline{u}_0(x')$, $\underline{u}_1(x')$ étant les traces de u, on a

$$(48) \qquad (1_{t \geqq 0}\, \partial_x^\beta \widetilde{w}_0)(t, x) = \int e_+(z-w)\, [\partial_x^\beta \underline{u}_0(x')\, \delta'_{t'=0} + \partial_x^\beta \underline{u}_1(x')\, \delta_{t'=0}]\, dw$$

$$(49) \qquad (1_{t \geqq 0}\, \partial_t \widetilde{w}_0)(t, x) = \int e_+(z-w)\, [\underline{u}_1(x')\, \delta'_{t'=0} + \Delta_x \underline{u}_0(x')\, \delta_{t'=0}]\, dw$$

et pour $j \geqq 1$:

$$(50) \qquad e_j^+(z-w) = \int e_+(z-z_1)\, e_+(z_1-z_2) \ldots e_+(z_j-w)\, dz_1 \ldots dz_j.$$

Comme dans [23], on écrit alors $\int_{D^k} (K_N^+, S_+^k, \Gamma^k)$ comme une image directe, en utilisant le paragraphe 4, (23), (48), (49) et (50). Les multiplicateurs $\partial^\beta a_j(z_1, z-z_1, \lambda)$ sont λ microlocaux d'après le paragraphe 4, (18), ainsi que les fonctions c de type (43) d'après le paragraphe 1, lemme 1, (i), car $\lambda \operatorname{WF}(\lambda^A f) \subset \lambda \operatorname{WF}(f)$, et si g vérifie $\forall \beta$, $\|\partial^\beta g\|_t \leqq \lambda^{\delta|\beta|}$ on a $\|\partial^\beta g\|_{t+t'} \leqq \lambda^{\delta t'} \lambda^{\delta|\beta|}$. Le théorème est alors conséquence du paragraphe 1, lemme 3 et de $d_i^k \geqq 1$ et $\sum_{i \in J^k} d_i^k \leqq N - 1$.

Remarque. — Soient $\underline{u}'_0$, $\underline{u}'_1$ des données de Cauchy telles que $\underline{u}'_0 - \underline{u}_0 \in H^\mu$, $\underline{u}'_1 - \underline{u}_1 \in H^{\mu-1}$, $\mu > \sigma$ et v'_0 la solution de $\square_{\mathscr{L}} v'_0 = 0$, $\operatorname{tr}(v'_0) = (\underline{u}'_0, \underline{u}'_1)$. On a alors :

$$(51) \qquad \square_{\mathscr{L}} (v_0 - v'_0) = 0, \qquad \operatorname{tr}(v_0 - v'_0) \in (H^\mu, H^{\mu-1}).$$

En découpant les traces de $v_0 - v'_0$ en utilisant le découpage du paragraphe 1, (14), on en déduit par le paragraphe 3, lemmes 6 et 7

$$(52) \qquad v_0 - v'_0 = h_1 + h_2$$

avec $\forall \beta$, $\partial^\beta h_1 \in \mathcal{O}_{\alpha_0}(\lambda^{\delta|\beta|})$ et $h_2 \in \mathcal{O}_\alpha(\lambda^{-\delta(\mu-\alpha)})$. Si on remplace v_0 par v'_0 dans le lemme 3, on commet donc une erreur dans (22) qui est $\mathcal{O}_\alpha(\lambda^{-\delta(\mu-\alpha)})$ donc négligeable pour $\mu > \sigma$. La conclusion du théorème 1 reste donc valable si on remplace les données de Cauchy de u par des données congrues modulo $(H^\mu, H^{\mu-1})$, $\mu > \sigma$.

6. Singularités conormales

Dans ce paragraphe, on suppose que u est une onde semi-linéaire solution de (1), paragraphe 0, telle que

(1) les données de Cauchy $\underline{u}_0$, $\underline{u}_1$ sont conormales classiques sur $\Lambda = T^*_V \mathbb{R}^d$ où V est une hypersurface analytique réelle.

Comme dans [23], le théorème 1 fournit une estimation géométrique sur les singularités de u à partir de l'ensemble des points limites d'ensembles de suites tracées dans le fibré cotangent complexe $T^* \mathbb{C}^{1+d}$ comme suit.

On note $\mathscr{E}$ des ensembles de suites $(z_n, \zeta_n) \in T^* \mathbb{C}^{1+d}$, $z = (t, x)$, $n \in \mathbb{N}$ qui vérifient

(2) la suite z_n converge vers le point de Ω.

(3) Il existe une suite convergente $\eta_n \in \mathbb{C}^{1+d}$, $|\eta_n| = 1$ et une suite $\lambda_n \in \mathbb{C}^*$ telles que $\zeta_n = \lambda_n \eta_n$.

(4) La suite (z_n, ζ_n) est caractéristique *i.e.* $\zeta_n = (\tau_n, \xi_n)$, $\tau_n^2 = \xi_n^2$.

On suppose en outre que $\mathscr{E}$ est stable par extraction de sous-suites et vérifie

(5) $\mathscr{E}$ contient toute suite (z_n, ζ_n) satisfaisant (2), (3), (4) et $\lim \zeta_n = 0$.

(6) Si $(z_n, \zeta_n) \in \mathscr{E}$ et z'_n vérifie $\lim z'_n = \lim z_n$ et $\lim |z'_n - z_n| . |\zeta_n| = 0$ alors $(*)$ $(z'_n, \zeta_n) \in \mathscr{E}$.

(7) Si $(z_n, \zeta_n) \in \mathscr{E}$ et si z'_n est telle que $\lim z'_n \in \Omega$ appartient au demi-cône d'onde de sommet $\lim z_n$ qui ne rencontre pas l'hyperplan $t = 0$ et si (z_n, ζ_n) et (z'_n, ζ_n) sont sur la même bicaractéristique complexe de $\square$, alors $(*)$ $(z'_n, \zeta_n) \in \mathscr{E}$.

[(*) signifie : il existe une suite extraite telle que.]
Soit à présent

(8) $$\underline{\mathscr{E}} = \{ \mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_M, \ldots \}$$

une suite croissante de tels ensembles de suites telle que

(9) si $(z_n, \zeta_n^j) \in \mathscr{E}_{k_j}$ sont N suites $(j = 1, \ldots, N)$ possédant le même point de base z_n et si ζ_n est une suite telle que (z_n, ζ_n) vérifie (2), (3), (4) et $\lim (\zeta_n^1 + \ldots + \zeta_n^N - \zeta_n) = 0$ alors $(*)$ $(z_n, \zeta_n) \in \mathscr{E}_k$ avec $k = k_1 + \ldots + k_N$.

On définit alors $Z_M(\underline{\mathscr{E}})$ par

(10) $$Z_M(\underline{\mathscr{E}}) = \{ (z, \zeta) \in T^* \mathbb{C}^{1+d} | \Omega, \text{ il existe N suites } (z_n, \zeta_n^j) \in \mathscr{E}_{k_j}, \; z = \lim z_n, \; \dot{\zeta} = \lim \zeta_n^1 + \ldots + \zeta_n^N \text{ et } k_1 + \ldots + k_N \leqq M \}.$$

[Le point (z, ζ) n'est pas caractéristique en général.]

Enfin on note $\mathscr{A}_V$ l'ensemble des suites (z_n, ζ_n) vérifiant (2), (3) et (4), $z_n=(0, x_n)$, $\zeta_n=(\tau_n, \xi_n)$, $(x_n, \xi_n)\in T^*_{V^{\mathbb{C}}}$ où $V^{\mathbb{C}}$ est un complexifié de V.

THÉORÈME 3. — *Soit u une onde semi-linéaire solution du paragraphe* 0, (1), *avec* $s=(d/2)+\rho$, $\rho>0$, *vérifiant* (1). *Pour* $M\geqq 1$ *et* $\sigma\in[s+1+(M-1)\rho, s+1+M\rho[$ *on a* $WF^\sigma(u)|_{t>0}\subset Z_M(\underline{\mathscr{E}})\cap T^*\Omega_+$ *dès que* $\underline{\mathscr{E}}=(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots)$ *vérifie* $\mathscr{A}_V\subset\mathscr{E}_1$.

Preuve. — On reprend la preuve de [23]. D'après le théorème 1, il suffit d'estimer $WF([D].\{D\})$ pour $\deg(D)\leqq M$, et par l'hypothèse conormale classique, on peut supposer que dans $\{D\}$, les données de Cauchy sont conormales analytiques classiques (*voir* [23], (22), p. 289). Rappelons que si F_1, F_2 sont deux fermés du fibré cotangent, la somme de Kashiwara-Schapira, $F_1\hat{+}F_2$ est définie par $(z, \zeta)\in F_1\hat{+}F_2$ ssi il existe des suites $(z_n^1, \zeta_n^1)\in F_1$, $(z_n^2, \zeta_n^2)\in F_2$, $z_n^1\to z$, $z_n^2\to z$, $\zeta_n^1+\zeta_n^2\to\zeta$ et $|z_n^1-z_n^2|.|\zeta_n^1|\to 0$. On a alors (*loc. cit.*, proposition 1, p. 289) $WF([D].\{D\})\subset\Lambda_{\{D\}}\hat{+}\Lambda_{[D]}$ avec

$$\text{(11)}\quad \Lambda_{\{D\}}=\{(z_0, z_1, \ldots, z_N, \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_N), \zeta_0=0, \zeta_i=0 \text{ si } i\notin J, t_i=0, (x_i, \xi_i)\in T^*_V\mathbb{C}^d \text{ ou } \xi_i=0 \text{ si } i\in J\}.$$

$$\text{(12)}\quad \Lambda_{[D]}=\{(z_0, z_1, \ldots, z_N, \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_N) \text{ tel qu'il existe } \Xi_1, \ldots, \Xi_N \text{ avec } (z_i-z_{\theta(i)}, \Xi_i)\in\Lambda_\Box, \zeta_0=\sum_{\theta(i)=0}\Xi_i, \zeta_i=-\Xi_i+\sum_{\theta(j)=i}\Xi_j \text{ si } i\neq 0\}.$$

Reprenons les notations de [23], II.4, p. 292-293. Si $(z_n, \zeta_n)\in\hat{\mathscr{E}}$, $\lim z_n=(0, x)$, et ζ_n caractéristique, alors $(*)$ $(z_n, \zeta_n)\in\mathscr{E}_1$ puisque $\mathscr{A}_V\subset\mathscr{E}_1$. On a toujours, si $i\in I'\cap J$, $(z_i(1, k), \Xi_i(1, k))\in\hat{\mathscr{E}}$ et si $z_i(1, k)\neq z_{f(i)}(1, k)$, $\Xi_i(1, k)\in\operatorname{Car}\Box$. Comme $\hat{\mathscr{E}}\cap\operatorname{Car}\Box$ vérifie au voisinage de $t=0$ les axiomes A_1, A_2, A_3, A_4 de [23], on a toujours pour tout $i\in I'$ $(z_i(1, k), \Xi_i(1, k))\in\hat{\mathscr{E}}$. Puisque $\hat{\mathscr{E}}\cap\operatorname{Car}\Box\subset\mathscr{E}_1$, on achève la preuve par récurrence le long de θ comme dans [23], *loc. cit*.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC, *Évolution d'une onde simple pour les équations non-linéaires générales* (*Current Topics in P.D.E., Kiyokuniya Tokyo*, 1986, p. 63-90).

[2] S. ALINHAC, *Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non-linéaires* (*Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 21, 1988, p. 91-132).

[3] M. BEALS, *Self-Spreading and Strength of Singularities for Solutions to Semi-Linear Wave Equations* (*Ann. Math.*, vol. 118, 1983, p. 187-214).

[4] M. BEALS, *Propagation of Smoothness for Nonlinear Second Order Strictly Hyperbolic Equations* (*Proc. Symposia Pure Math.*, vol. 43, 1985, p. 21-45).

[5] M. BEALS et G. MÉTIVIER, *Progressing Wave Solutions to Certain Nonlinear Mixed Problems* (*Duke Math. J.*, vol. 53, 1986, p. 125-137).

[6] M. BEALS et G. MÉTIVIER, *Reflection of Transversal Progressing Waves in Nonlinear Strictly Hyperbolic Mixed Problems* (*Am. J. Math.*, vol. 109, 1987, p. 335-360).

[7] J.-M. BONY, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires* (*Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. 14, 1981, p. 209-246).

[8] J.-M. BONY, *Propagation des singularités*... (*Sém. Goulaouic-Schwartz*, Éc. Polytechnique, 1979-1980, n° 22).

[9] J.-M. BONY, *Interaction des singularités*... (*Sém. Goulaouic-Schwartz*, Éc. Polytechnique, 1981-1982, n° 2).

[10] J.-M. BONY, *Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non linéaires* (*Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz*, Éc. Polytechnique, 1983-1984, n° 10).

[11] J.-M. BONY, *Second Microlocalization and Interaction of Singularities for Non Linear P.D.E.* (*Hyperbolic Eq. and related topics*, MIZOHATA éd., Kinokuniya, 1986, p. 11-49).

[12] J.-M. BONY, *Singularités des solutions de problèmes hyperboliques non linéaires* (*Advances in Microlocal Analysis*, GARNIR éd., N.A.T.O. A.S.I. Series 168, Reidel, 1985, p. 15-39).

[13] J.-M. BONY et N. LERNER, *Quantification asymptotique*..., (*Sém. E.D.P.*, Éc. Polytechnique, 1986-1987, n^os^ 2 et 3).

[14] J.-M. BONY et N. LERNER, *Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur* (*Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.*, 4^e^ série, t. 22, 1989, p. 1-57).

[15] J.-Y. CHEMIN, *Calcul paradifférentiel précisé et applications aux équations aux dérivées partielles non semilinéaires* (*Duke Math. J.*, vol. 56-3, 1988, p. 431-469).

[16] J.-Y. CHEMIN, *Interaction contrôlée dans les E.D.P. non linéaires strictement hyperboliques* (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 116, 1988, p. 341-383).

[17] J.-Y. CHEMIN, *Interaction de trois ondes dans les équations semilinéaires strictement hyperboliques d'ordre* 2 (*Comm. P.D.E.*, vol. 12 (11), 1987, p. 1203-1225).

[18] J.-Y. CHEMIN, *Régularité de la solution d'un problème de Cauchy fortement non linéaire à données singulières en un point* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 39, 1989).

[19] J.-Y. CHEMIN, *Évolution d'une singularité ponctuelle dans des équations strictement hyperboliques non linéaires* (à paraître).

[20] F. DAVID et M. WILLIAMS, *Singularities of Solutions to Semilinear Boundary Value Problems* (*Am. J. Math.*, vol. 109, 1987, p.1087-1109).

[21] J.-M. DELORT, *Conormalité des ondes semi-linéaires le long des caustiques* (*Séminaire E.D.P.*, Éc. Polytechnique, 1988-1989, n° 15).

[22] G. LEBEAU, *Problème de Cauchy semi-linéaire en* 3 *dimensions d'espace. Un résultat de finitude* (*J. Funct. Anal.*, vol. 77, 1988).

[23] G. LEBEAU, *Équations des ondes semi-linéaires II. Contrôle des singularités et caustiques non linéaires* (*Invent. Math.*, 1989).

[24] G. LEBEAU, *Front d'onde des fonctions non linéaires et polynômes* (*Séminaire E.D.P.*, Éc. Polytechnique, 1988-1989, n° 10).

[25] E. LEICHTNAM, *Régularité microlocale pour des problèmes de Dirichlet non linéaires non caractéristiques d'ordre deux à bord peu régulier* (*Bull. Soc. Math. France*, vol. 115, 1987, p. 457-489).

[26] R. MELROSE, *Semi-Linear Waves with Cusp Singularities* (*Actes Journées E.D.P.*, Saint-Jean-de-Monts, 1987, n° 10).

[27] R. MELROSE et N. RITTER, *Interaction of Progressing Waves for Semi-Linear Wave Equation I*, (*Ann. Math.*, vol. 121, 1985, p. 149-236).

[28] R. MELROSE et N. RITTER, *Interaction of Progressing Waves for Semi-Linear Wave Equation II* (*Arkiv Math.*, vol. 25, 1987, p. 91-114).

[29] A. PIRIOU, *Calcul symbolique non linéaire pour une onde conormale simple* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 38, n° 4, 1988, p. 173-186).

[30] J. RAUCH et M. REED, *Nonlinear Microlocal Analysis of Semi-Linear Hyperbolic Systems in One Space Dimension* (*Duke Math. J.*, vol. 49, 1982, p. 397-475).

[31] J. RAUCH et M. REED, *Singularities Produced by the Nonlinear Interaction of Three Progressing Waves; Examples* (*Comm. P.D.E.*, vol. 7, 1982, p. 1117-1133).

[32] J. RAUCH et M. REED, *Classical, Conormal Semilinear Waves* (*Séminaire E.D.P.*, Éc. Polytechnique, 1985-1986, n° 5).

[33] N. RITTER, *Progressing Wave Solutions to Non-Linear Hyperbolic Cauchy Problems* (*Ph. D. Thesis*, M.I.T., 1984).

[34] A. SA BÁRRETO, *Interaction of Conormal Waves for Fully Semilinear Wave Equations* (*J.F.A.*, vol. 89, n° 2, 1990).

[35] M. Sablé-Tougeron, *Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 36-1, 1986, p. 39-82).

[36] M. Williams, *Spreading of Singularities at the Boundary in Semilinear Hyperbolic Mixed Problems I: Microlocal* $H^{s, s'}$ *Regularity* (*Duke Math. J.*, vol. 56, 1988, p. 17-40).

[37] M. Williams, *Spreading of Singularities at the Boundary in Semilinear Hyperbolic Mixed Problems II: Crossing and Self-Spreading* (*Trans. A.M.S.*, vol. 310, 1988).

[38] C. J. Xu, *Propagation au bord des singularités pour des problèmes de Dirichlet non linéaires d'ordre deux* (*Actes Journées E.D.P.*, Saint-Jean-de-Monts, 1989, n° 20).

(Manuscrit reçu le 13 décembre 1990,
révisé le 17 mai 1991).

G. Lebeau,
Université de Paris-Sud,
Département de Mathématiques,
91405 Orsay Cedex, France.